MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI ĐA DIỆN

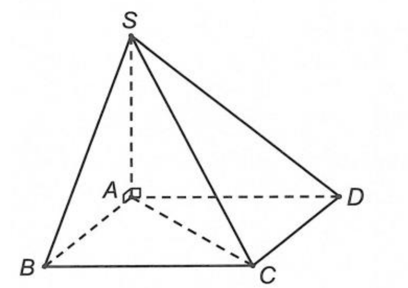
Các khái niệm cần lưu ý:

- **Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện:** là mặt cầu mà nó đi qua tất cả các đỉnh của hình đa diện. Tâm của mặt cầu ngoại tiếp cách đều tất cả các đỉnh của hình đa diện.

- **Trục của đa giác:** là đường thẳng đi qua tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác. Mọi điểm nằm trên trục thì cách đều các đỉnh của đa giác và ngược lại.

- **Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng:** Là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó. Mọi điểm nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng thì cách đều hai điểm mút của đoạn thẳng và ngược lại.

Phương pháp giải



Đối với bài toán mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện thì mấu chốt của vấn đề là phải xác định được tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện đó. Khi xác định được tâm của mặt cầu ngoại tiếp thì ta có thể tính được các yếu tố còn lại như bán kính, diện tích mặt cầu, thể tích của khối cầu...

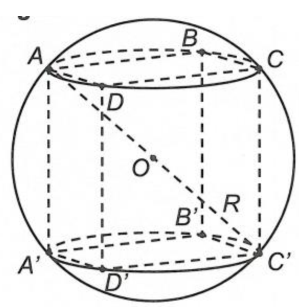
Ví dụ: Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $2a, 4a, 4a,$ với $0 < a \in R.$ Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $6a.$ **B.** $4a.$ **C.** $3a.$ **D.** $2a.$

Hướng dẫn giải

Giả sử hình hộp chữ nhật là *ABCD.A'B'C'D'*. Dễ thấy điểm *O* là trung điểm của *AC'* là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình hộp chữ nhật.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là $R = OA.$



$$R = \frac{1}{2}AC' = \frac{1}{2}\sqrt{(A'A)^2 + (A'C')^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(A'A)^2 + (A'D')^2 + (D'C')^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(2a)^2 + (4a)^2 + (4a)^2} = 3a.$$

Chọn C.

Ví dụ mẫu

Cách 1. Tìm một điểm cách đều các đỉnh của khối đa diện theo định nghĩa mặt cầu

Ví dụ 1. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật, *SA* vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*). Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là điểm *I* với

A. *I* là trung điểm của đoạn thẳng *SD*.

B. *I* là trung điểm của đoạn thẳng *AC*.

C. *I* là trung điểm của đoạn thẳng *SC*.

D. *I* là trung điểm của đoạn thẳng *SB*.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

$\Rightarrow SBC = 90^o \quad (1).$

Chứng minh tương tự ta cũng có

$CD \perp SD \Rightarrow SDC = 90^o \qquad (2).$

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC \Rightarrow SAC = 90^o \qquad (3).$

Từ (1), (2) và (3) suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là mặt cầu đường kính *SC* nên tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là trung điểm *I* của đoạn thẳng *SC*.

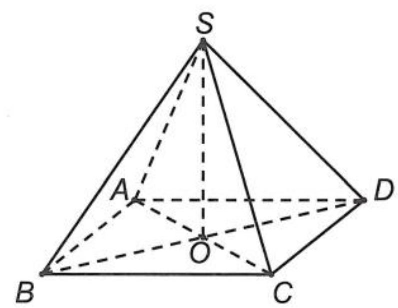
Chọn C.

Ví dụ 2. Cho khối chóp đều *S.ABCD* có tất cả các cạnh đều bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích *V* của khối cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $V = 3\pi a^3\sqrt{6}.$ **B.** $V = \pi a^3\sqrt{6}.$ **C.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}.$ **D.** $V = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{6}}{8}.$

Hướng dẫn giải

Vì *S.ABCD* là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.



Ta có $OD = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{6} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$,

$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.$

Vậy $OS = OA = OD = OB = OC$, nên *O* là tâm mặt cầu ngoại tiếp S.ABCD.

Vậy thể tích khối cầu cần tìm là $V = \dfrac{4}{3}\pi.SO^3 = \pi a^3\sqrt{6}$ (đvtt)

Chọn B.

Lưu ý:

Công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp đều: $R = \dfrac{a^2}{2h}$

với *a*: độ dài cạnh bên, *h*: chiều cao hình chóp.

Ví dụ 3: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AB = a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là

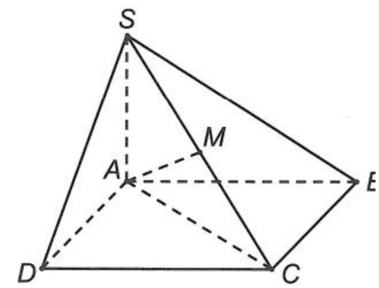
A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}.$ **D.** $a\sqrt{2}.$

Hướng dẫn giải

Chứng minh tương tự như ví dụ 2 ta được kết quả

$\Rightarrow$ Ba đỉnh *A, B, D* đều nhìn cạnh *SC* dưới một góc vuông.

$\Rightarrow$ Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là trung điểm *SC* và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là $R = \dfrac{SC}{2}$.



Ta có *ABCD* là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác *SAC* vuông tại *A* có $SC = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn B.

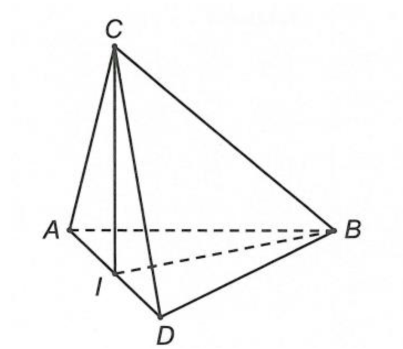
Ví dụ 4. Cho tứ diện *ABCD* có các mặt *ABC* và *BCD* là các tam giác đều cạnh bằng 2, hai mặt phẳng (*ABD*) và (*ACD*) vuông góc với nhau. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD* bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có ΔABC, ΔBCD đều cạnh bằng 2 nên $AC = CD = 2 \Rightarrow \Delta ACD$ cân tại *C*.

Gọi *I* là trung điểm $AD \Rightarrow CI \perp AD$.



Lại có $\begin{cases} (ACD) \perp (ADB) \\ (ACD) \cap (ADB) = AD \Rightarrow CI \perp (ABD) \\ IC \perp AD \end{cases}$

$\Rightarrow CI \perp IB \big(do\, IB \subset (ABD)\big)$ (1)

Ta có $\Delta ACD = \Delta ABD (c.c.c) \Rightarrow CI = IB$ $\quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta có *ACB* vuông cân tại $I \Rightarrow CB = IB\sqrt{2} \Rightarrow IB = \dfrac{CB}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = IC$.

ΔDIB vuông tại $I \Rightarrow ID = \sqrt{BD^2 - IB^2} = \sqrt{2} \Rightarrow AD = 2ID = 2\sqrt{2}$.

Xét ΔADB có $AB = DB = 2; AD = 2\sqrt{2} \Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại *B*.

$\Rightarrow ABD = 90^o \Rightarrow ACD = 90^o$.

Suy ra mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD* có đường kính là *AD* nên bán kính là $R = ID = \sqrt{2}$.

Chọn B.

Ví dụ 5. Cho hình chóp *S.ABC* có $SA \perp (ABC)$, tam giác *ABC* vuông tại *B*. Biết $SA = 4a, AB = 2a, BC = 4a$. Bán kính *R* của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

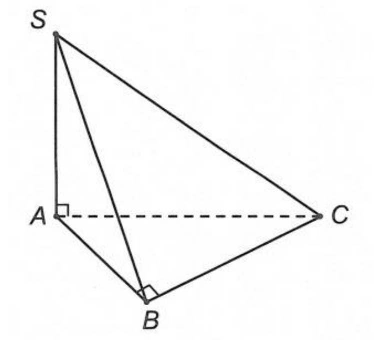
A. $3a$. **B.** $2a$. **C.** a. **D.** $6a$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \ \big(do\, SA \perp (ABC)\big) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC$

Suy ra hai điểm *A*, *B* cùng nhìn *SC* dưới một góc vuông. Vậy tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC* là trung điểm *SC*, bán kính mặt cầu là $R = \frac{SC}{2}$.



Ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4a^2 + 16a^2 = 20a^2$

$\Rightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{16a^2 + 20a^2} = 6a$

$\begin{cases} (\alpha)//BD \\ (SBD) \cap (\alpha) = EF \end{cases} \Rightarrow BD//EF$. Vậy $R = 3a$.

Chọn A.

Ví dụ 6: Cho lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại B, $AC = a\sqrt{3}, ACB = 30^o$. Góc giữa đường thẳng *AB'* và mặt phẳng (*ABC*) bằng 60°. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *A'ABC* bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{2}$. **C.** $\frac{3a}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{8}$.

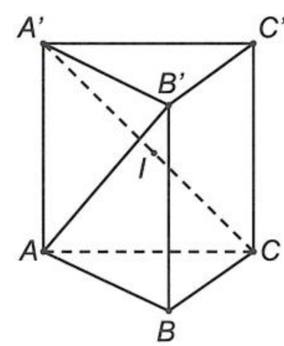
Hướng dẫn giải

Trong tam giác vuông *ABC* có $AB = AC.\sin 30^o = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì $AB' \cap (ABC) = \{A\}$ và hình chiếu của *B* lên mặt phẳng (*ABC*) là *B* nên góc giữa đường thẳng *AB'* và mặt phẳng (*ABC*) bằng góc giữa hai đường thẳng *AB'* và *AB*, và bằng góc $B'AB$ (vì tam giác *AB'B* vuông tại *B*). Do đó $B'AB = 60^o$.

Trong tam giác vuông *AB'B* có

$BB' = AB.\tan 60^o = \frac{a\sqrt{3}}{2}\tan 60^o = \frac{3a}{2}$.



Trong tam giác vuông *AA'C* có

$A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{2}a$.

Ta có $BC \perp AB$ và $BC \perp AA'$ nên $BC \perp (ABB'A')$, suy ra $BC \perp A'B$ hay $A'BC = 90^o$. Mà $A'AC = 90^o$, suy ra hai điểm *A*, *B* cùng nhìn *A'C* dưới một góc vuông.

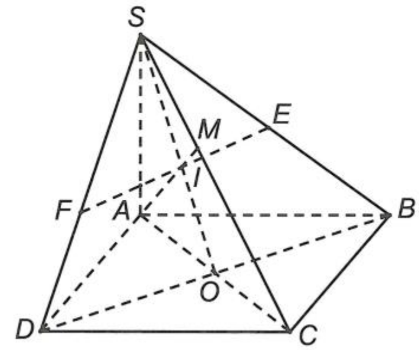
Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *A'ABC* bằng $R = \frac{A'C}{2} = \frac{\sqrt{21}}{4}a$.

Chọn A.

Ví dụ 7. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là hình vuông cạnh $a, SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*). Gọi *M* là trung điểm cạnh *SC*. Mặt phẳng (α) qua *A* và *M* đồng thời song song với đường thẳng *BD* cắt *SB*, *SD* lần lượt tại *E*, *F*. Bán kính mặt cầu đi qua 5 điểm *S, A, E, M, F* nhận giá trị nào sau đây?

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải



Gọi *I* là giao điểm của *AM* và *SO*.

Dễ thấy *I* là trọng tâm tam giác *SAC* và *I*, *E*, *F* thẳng hàng.

Lại có $\frac{SF}{SD}=\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}\Rightarrow SF=\frac{2}{3}SD$

$\Rightarrow SF.SD=\frac{2}{3}SD^2=\frac{2}{3}\left(SA^2+AD^2\right)=2a^2$

$\Rightarrow SF.SD=SA^2$.

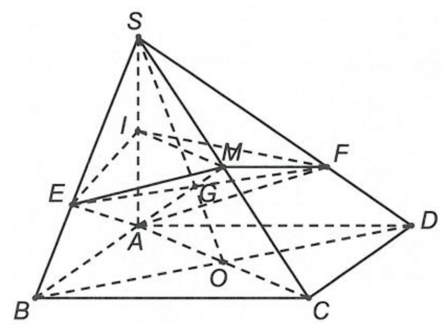
Xét tam giác vuông *SAD* có $SF.SD=SA^2\Rightarrow AF$ là đường cao tam giác $AF\perp SF$.

Chứng minh tương tự ta có $AE\perp SB$.

Tam giác $SA=AC=a\sqrt{2}$ nên *AM* vừa là trung tuyến vừa là đường cao tam giác $AM\perp SC$.

Ta có $\begin{cases}AM\perp SM\\ AF\perp SF\\ AE\perp SE\end{cases}$ nên mặt cầu đi qua 5 điểm *S*, *A*, *E*, *M*, *F* có tâm là trung điểm *SA* và bán kính bằng $\frac{SA}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn C.



Chú ý: Ta có thể làm như sau

Do $EF=(\alpha)\cap(SBD)$ và $(\alpha)//BD$ nên $EF//BD$.

Ta có

$BD\perp AC, BD\perp SA\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow EF\perp(SAC)\Rightarrow EF\perp SC$.

Tam giác *SAC* có $SA=AC=a\sqrt{2}$ nên $AM\perp SC$.

Do đó $SC\perp(AMEF)\Rightarrow SC\perp AE\quad(1)$.

Lại có $BC\perp AB, BC\perp SA$ nên $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AE\qquad(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $AE\perp(SBC)\Rightarrow AE\perp SB$.

Chứng minh tương tự, ta được $AF\perp SD$. Từ đây, suy ra kết quả như cách bên.

Cách 2. Tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện là giao điểm của trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên

Chú ý: Trong khuôn khổ bài tập thường xoay quanh hình chóp, hình lăng trụ nên đa giác đáy ta nói đến ở đây là đáy của hình chóp hay hình lăng trụ.

Ví dụ 1. Cho hình chóp đều *S.ABC* có cạnh đáy bằng *a*, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60°. Gọi (*S*) là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC*. Thể tích của khối cầu tạo nên bởi mặt cầu (*S*) bằng

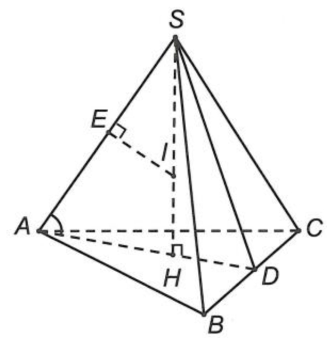
A. $\frac{32\pi a^3}{81}$. **B.** $\frac{32\pi a^3}{77}$. **C.** $\frac{64\pi a^3}{77}$. **D.** $\frac{72\pi a^3}{39}$.

Hướng dẫn giải

Gọi *H* là tâm của tam giác *ABC*, *SH* là trục của đường tròn ngoại tiếp *ABC*, mặt phẳng trung trực của *SA* qua *E* là trung điểm của *SA* và cắt *SH* tại *I*. Khi đó *I* là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC*.

Xét trong tam giác *SAH* ta có

$$SH = AH.\tan 60^o = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\tan 60^o = a; SA = \frac{SH}{\sin 60^o} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$



Xét hai tam giác đồng dạng ΔSEI và ΔSHA

Ta có $\frac{SI}{SA} = \frac{SE}{SH} \Rightarrow SI = \frac{SA.SE}{SH} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{3}}.\frac{2a}{2\sqrt{3}}}{a} = \frac{2a}{3}$

$\Rightarrow R = \frac{2a}{3}.$

Suy ra thể tích của khối cầu tạo nên bởi mặt cầu (*S*) bằng $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{32\pi a^3}{81}.$

Chọn A.

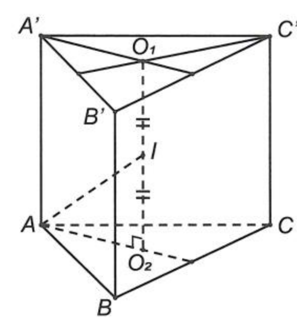
Ví dụ 2. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh đều bằng *a*.

A. $\frac{7\pi a^2}{5}.$ **B.** $\frac{7\pi a^2}{3}.$ **C.** $\frac{7\pi a^2}{6}.$ **D.** $\frac{3\pi a^2}{7}.$

Hướng dẫn giải

Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp hai đáy lăng trụ $\Rightarrow O_1O_2$ là trục đường tròn ngoại tiếp hai đa giác đáy.

Gọi *I* là trung điểm của $O_1O_2 \Rightarrow IA = IB = IC = IA' = IB' = IC'$.



Suy ra trung điểm *I* của O_1O_2 là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Bán kính

$$R = IA = \sqrt{AO_2^2 + IO_2^2} = \sqrt{AO_2^2 + \left(\frac{O_1O_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a.\sqrt{\frac{7}{12}}.$$

Do đó diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh đều bằng *a* là

$$S = 4\pi.R^2 = 4\pi.\left(a.\sqrt{\frac{7}{12}}\right)^2 = \frac{7\pi a^3}{3}.$$

Chọn B.

Lưu ý:
Mặt phẳng trung trực của một cạnh bên cắt O_1O_2 tại *I* là trung điểm của O_1O_2.

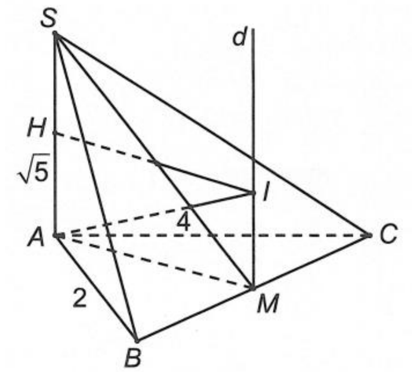
Ví dụ 3. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *A*, *SA* vuông góc với mặt phẳng (*ABC*) và $AB = 2, AC = 4, SA = \sqrt{5}.$ Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp *S.ABC* có bán kính là

A. $R = \frac{25}{2}.$ **B.** $R = \frac{5}{2}.$ **C.** $R = 5.$ **D.** $R = \frac{10}{3}.$

Hướng dẫn giải

Gọi M, H lần lượt là trung điểm của BC, SA

Ta có tam giác ABC vuông tại A suy ra A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Qua M kẻ đường thẳng d sao cho $d\perp(ABC)\Rightarrow d$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Trong mặt phẳng kẻ đường trung trực Δ của đoạn SA, cắt d tại I

$$\Rightarrow\begin{cases}IA=IB=IC\\ IA=IS\end{cases}\Rightarrow IA=IB=IC=IS$$

$\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Dễ thấy tứ giác $HAMI$ là hình chữ nhật.

Ta có

$$AM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{5},$$

$$IM=\frac{1}{2}SA=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $R=AI=\sqrt{AM^2+IM^2}=\sqrt{5+\frac{5}{4}}=\frac{5}{2}.$

Chọn B.

Lưu ý: có thể thay mặt phẳng trung trực của SA bằng đường trung trực của SA xét trong mặt phẳng (SAM).

Ví dụ 4. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

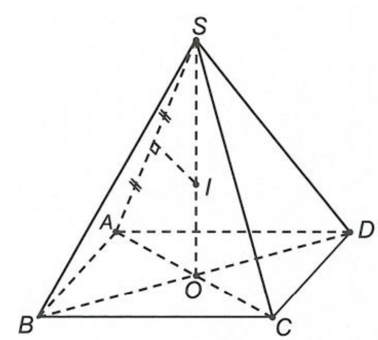
A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $2a$.

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD\Rightarrow SO\perp(ABCD)$

Vậy SO là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$

Trong (SAC) gọi (d) là trung trực của SA và I là giao điểm của (d) với SO



$$\Rightarrow\begin{cases}I\in(SO)\\ I\in(d)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}IA=IB=IC=ID\\ IA=IS\end{cases}$$

$\Rightarrow IA=IB=IC=ID=IS$.

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Bán kính mặt cầu là $R=\frac{SA^2}{2SO}=\frac{SA^2}{2\sqrt{SA^2-AO^2}}=\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$

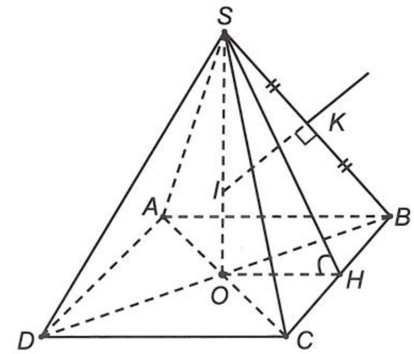
Chọn C.

Ví dụ 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, các mặt bên tạo với đáy một góc 60°. Diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $S_{mc}=\dfrac{25\pi a^2}{3}.$ **B.** $S_{mc}=\dfrac{32\pi a^2}{3}.$ **C.** $S_{mc}=\dfrac{8\pi a^2}{3}.$ **D.** $S_{mc}=\dfrac{a^2}{12}.$

Hướng dẫn giải

Trục của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy là *SO*. Mặt phẳng trung trực của *SB* cắt *SO* tại *I*, cắt *SB* tại *K* thì *I* là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.



Gọi *H* là trung điểm *BC* thì $SHO=60^o$.

Xét tam giác vuông *SHO*, ta có

$$\tan 60^o=\frac{SO}{OH}\Rightarrow SO=a\sqrt{3}.$$

Từ đó suy ra

$$SB=\sqrt{SO^2+OB^2}=\sqrt{3a^2+2a^2}=a\sqrt{5}.$$

Ta có $\Delta SKI \backsim \Delta SOB\left(g.g\right).$

$$\Rightarrow\frac{SK}{SO}=\frac{SI}{SB}\Rightarrow SI=\frac{SK.SB}{SO}\Rightarrow SI=\frac{a\sqrt{5}.\frac{a\sqrt{5}}{2}}{a\sqrt{3}}=\frac{5a}{2\sqrt{3}}=\frac{5a\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

$$S_{mc}=4\pi R^2=4\pi\frac{75a^2}{36}=\frac{25\pi a^2}{3}.$$

Chọn A.

Ví dụ 6. Cho hình chóp đều *S.ABCD* có cạnh đáy $a\sqrt{2},$ cạnh bên 2*a*. Gọi *M, N, P, Q* lần lượt là trung điểm của *SA, SB, SC, SD*. Tính bán kính *R* của mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện *ABCDMNPQ*.

A. $R=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.$ **B.** $R=a.$ **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}.$ **D.** $R=\dfrac{a\sqrt{10}}{4}.$

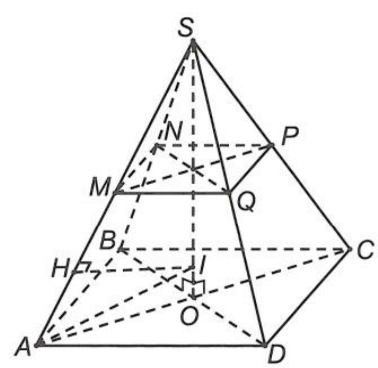
Hướng dẫn giải

Ta có $\left(ABCD\right)//\left(MNPQ\right).$ Gọi $\left\{O\right\}=AC\cap BD.$

Mà *S.ABCD* là hình chóp tứ giác đều nên $SO\perp\left(ABCD\right).$ Nên *SO* là trục của hai đáy (*ABCD*) và (*MNPQ*).

Trong mặt phẳng *(SAO*) kẻ đường trung trực d của đoạn thẳng *AM* cắt *SA, SO* tại *H, I*.

Khi đó *I* là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện *ABCDMNPQ* và bán kính là *IA*.



Ta có $SA=SB=SC=SD=2a$

$AB=BC=CD=DA=a\sqrt{2}.$

Lại có $SH=\dfrac{3}{4}SA=\dfrac{3}{4}.2a=\dfrac{3a}{2}\Rightarrow HA=\dfrac{1}{4}SA=\dfrac{a}{2}.$

$$\Rightarrow AC=AB\sqrt{2}=2a\Rightarrow AO=a\Rightarrow SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=a\sqrt{3}.$$

Mặt khác $\Delta SHI \backsim \Delta SOA(g.g) \Rightarrow \dfrac{HI}{OA} = \dfrac{SH}{SO} \Rightarrow HI = \dfrac{OA.SH}{SO} = \dfrac{a.\dfrac{3a}{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Bán kính mặt cầu cần tìm là $R = AI = \sqrt{HI^2 + HA^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = a.$

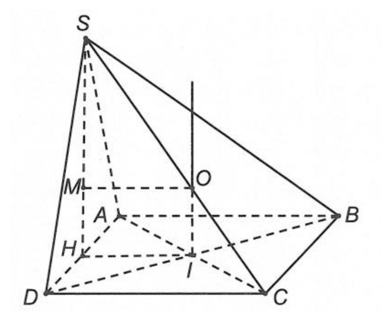
Chọn B.

Cách 3. Dựa vào trục của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và trục của đường tròn ngoại tiếp một mặt bên

Ví dụ 1. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a, BC = a,$ hình chiếu của *S* lên mặt phẳng (*ABCD*) là trung điểm *H* của $AD, SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$ Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{16\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{16\pi a^2}{9}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{4\pi a^2}{3}$.

Hướng dẫn giải



Gọi *I* là giao điểm của *AC* và *BC*, qua *I* dựng đương thẳng *d* song song với $SH \Rightarrow d \perp (ABCD)$.

Gọi *M* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *SAD*, qua *M* kẻ đường thẳng *d'* vuông góc với *mp*(*SAD*), *d'* cắt *d* tại $O \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* và bán kính bằng $R = OS = \sqrt{MO^2 + MS^2}$.

Với $OM = IH = \dfrac{AB}{2} = a, MS = r$ (*r* là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *SAB*).

Lại có, ΔSAD cân tại *A*, cạnh $AD = a,$ đường cao $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ suy ra tam giác *SAD* đều

$r = AM = \dfrac{2}{3}SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R^2 = \dfrac{4a^2}{3}$ (*R* là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD*).

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* bằng $S = 4\pi R^2 = \dfrac{16\pi a^2}{3}$.

Chọn A.

Ví dụ 2. Cho hình chóp *S.ABC* có $SA \perp (ABC)$. Gọi *M, N* lần lượt là hình chiếu của *A* trên *SB, SC*. Biết $BAC = \alpha, BC = a.$ Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện *ABCMN* là

A. $\dfrac{\pi}{\cos^2\alpha}a^2$. **B.** $\dfrac{\pi}{\sin^2\alpha}a^2$. **C.** $\dfrac{4\pi}{\cos^2\alpha}a^2$. **D.** $\dfrac{4\pi}{\sin^2\alpha}a^2$.

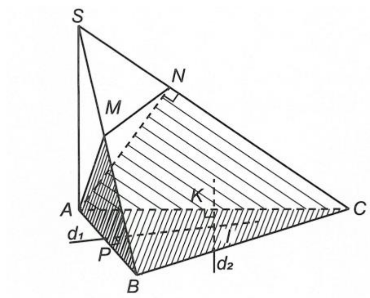
Hướng dẫn giải

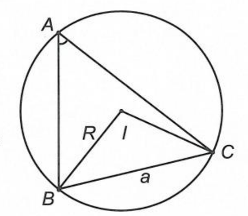
+) Gọi *K*, *P* lần lượt là trung điểm của *AC* và *AB*.

ΔACN vuông tại $N \Rightarrow K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔACN.

ΔABM vuông tại $M \Rightarrow P$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABM.

+) Hai mặt phẳng (SAB), (ABC) vuông góc và cắt nhau theo giao tuyến AB nên gọi d_1 là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABM thì d_1 qua P, $d_1 \subset (ABC)$ và $d_1 \perp AB$. Tương tự, gọi d_2 là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔACN thì d_2 qua $K, d_2 \subset (ABC)$ và $d_2 \perp AC$.





+) Rõ ràng, trong mặt phẳng (ABC) thì $d_1 d_2$ lần lượt là đường trung trực của các cạch AB, AC nên hai đường này cắt nhau tại tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Do đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCMN$ cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, bán kính R của mặt cầu này cũng chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

+) Áp dụng định lí sin cho ΔABC ta được $R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$.

Vây diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCMN$ là $S = 4\pi R^2 = \dfrac{\pi a^2}{\sin^2\alpha}$.

Chọn B.

> ***Lưu ý:***
>
> Cách 2: Vẽ đường kính AE của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó A, M, N, B, C cùng nhìn AE góc 90°.
>
> Áp dụng định lí sin cho ΔABC ta được $R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$.
>
> Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCMN$ là $S = 4\pi R^2 = \dfrac{\pi a^2}{\sin^2\alpha}$.

Bài tập tự luyện

Câu 1: Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a, (S) là mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của tứ diện $ABCD$. M là một điểm thay đổi trên (S). Tổng $T = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ bằng

A. $\dfrac{3a^2}{8}$. **B.** a^2. **C.** $4a^2$. **D.** $2a^2$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $A, AB = a, AC = 2a$. Mặt bên $(SAB), (SCA)$ lần lượt là các tam giác vuông tại B, C. Biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{2}{3}a^3$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

A. $R = a\sqrt{2}$. **B.** $R = a$. **C.** $R = \dfrac{3a}{2}$. **D.** $R = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Câu 3: Cho lăng trụ đứng có chiều cao bằng h không đổi, một đáy là tứ giác $ABCD$ với A, B, C, D di động. Gọi I là giao của hai đường chéo AC và BD của tứ giác đó. Cho biết $IA.IC = IB.ID = h^2$. Giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho là

A. $2h$. **B.** $\dfrac{h\sqrt{5}}{2}$. **C.** h. **D.** $\dfrac{h\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, tam giác *SAB* đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp *SABCD* bằng

A. $\frac{7\sqrt{21}}{54}\pi a^3.$ **B.** $\frac{7\sqrt{21}}{162}\pi a^3.$ **C.** $\frac{7\sqrt{21}}{216}\pi a^3.$ **D.** $\frac{49\sqrt{21}}{36}\pi a^3.$

Câu 5: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, $AB=\sqrt{3}a, AD=a, \Delta SAB$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo *a* diện tích *S* của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD.*

A. $S=5\pi a^2.$ **B.** $S=10\pi a^2.$ **C.** $S=4\pi a^2.$ **D.** $S=2\pi a^2.$

Câu 6: Cho tứ diện *ABCD* có *ABC* và *DBC* là hai tam giác đều chung cạnh $BC=2.$ Gọi *I* là trung điểm của $BC, AID=2\alpha$ với $\cos\alpha=-\frac{1}{3}.$ Hãy xác định tâm *O* của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó.

A. *O* là trung điểm của *AD.* **B.** *O* là trung điểm của *BD.*

C. *O* thuộc mặt phẳng (*ADB*). **D.** *O* là trung điểm của *AB.*

Câu 7: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *B*. Biết $AB=BC=a, AD=2a.$ Tam giác *SAD* đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp tam giác *S.ABC* bằng

A. $6\pi a^2.$ **B.** $10\pi a^2.$ **C.** $3\pi a^2.$ **D.** $5\pi a^2.$

Câu 8: Cho hình chóp tứ giác *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và $B, AB=BC=a, AD=2a, SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}.$ Gọi *E* là trung điểm của *AD*. Kẻ $EK\perp SD$ tại *K*. Bán kính mặt cầu đi qua sáu điểm *S, A, B, C, E, K* là

A. $R=\frac{1}{2}a.$ **B.** $R=\frac{\sqrt{6}}{2}a.$ **C.** $R=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$ **D.** $R=a.$

Câu 9: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác với $AB=2cm, AC=3cm, BAC=60^o, SA\perp(ABC).$ Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A* lên *SB, SC*. Thể tích khối cầu đi qua năm điểm *A, B, C*, B_1, C_1 bằng

A. $\frac{28\sqrt{21}\pi}{27}cm^3.$ **B.** $\frac{76\sqrt{57}\pi}{27}cm^3.$ **C.** $\frac{7\sqrt{7}\pi}{6}cm^3.$ **D.** $\frac{27\pi}{6}cm^3.$

Câu 10: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thang vuông tại $A, B, AB=BC=a, SA=AD=2a, SA\perp(ABCD),$ gọi *E* là trung điểm của *AD*. Bán kính *R* của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp *S.CDE* theo *a* là

A. $R=\frac{3a\sqrt{2}}{2}.$ **B.** $R=\frac{a\sqrt{10}}{2}.$ **C.** $R=\frac{a\sqrt{11}}{2}.$ **D.** $R=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Câu 11: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a*, *SAD* là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *BC* và *CD*. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp *S.CMN* là

A. $\frac{3\pi a^2}{12}.$ **B.** $\frac{31\pi a^2}{12}.$ **C.** $\frac{\pi a^2}{12}.$ **D.** $\frac{5\pi a^2}{12}.$

Câu 12: Cho hình chóp *S.ABC* có các tam giác *ABC, SAB* là các tam giác đều cạnh *a* nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Bán kính *R* của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC* là

A. $R=\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. **B.** $R=\dfrac{a}{2}$. **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. **D.** $R=\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.

Câu 13: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A, D* và $AB=AD=a, DC=2a$ tam giác *SAD* đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *D* trên *AC* và *M* là trung điểm của *HC*. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.BDM* theo *a* là.

A. $\dfrac{7\pi a^2}{9}$. **B.** $\dfrac{13\pi a^2}{9}$. **C.** $\dfrac{13\pi a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{7\pi a^2}{3}$.