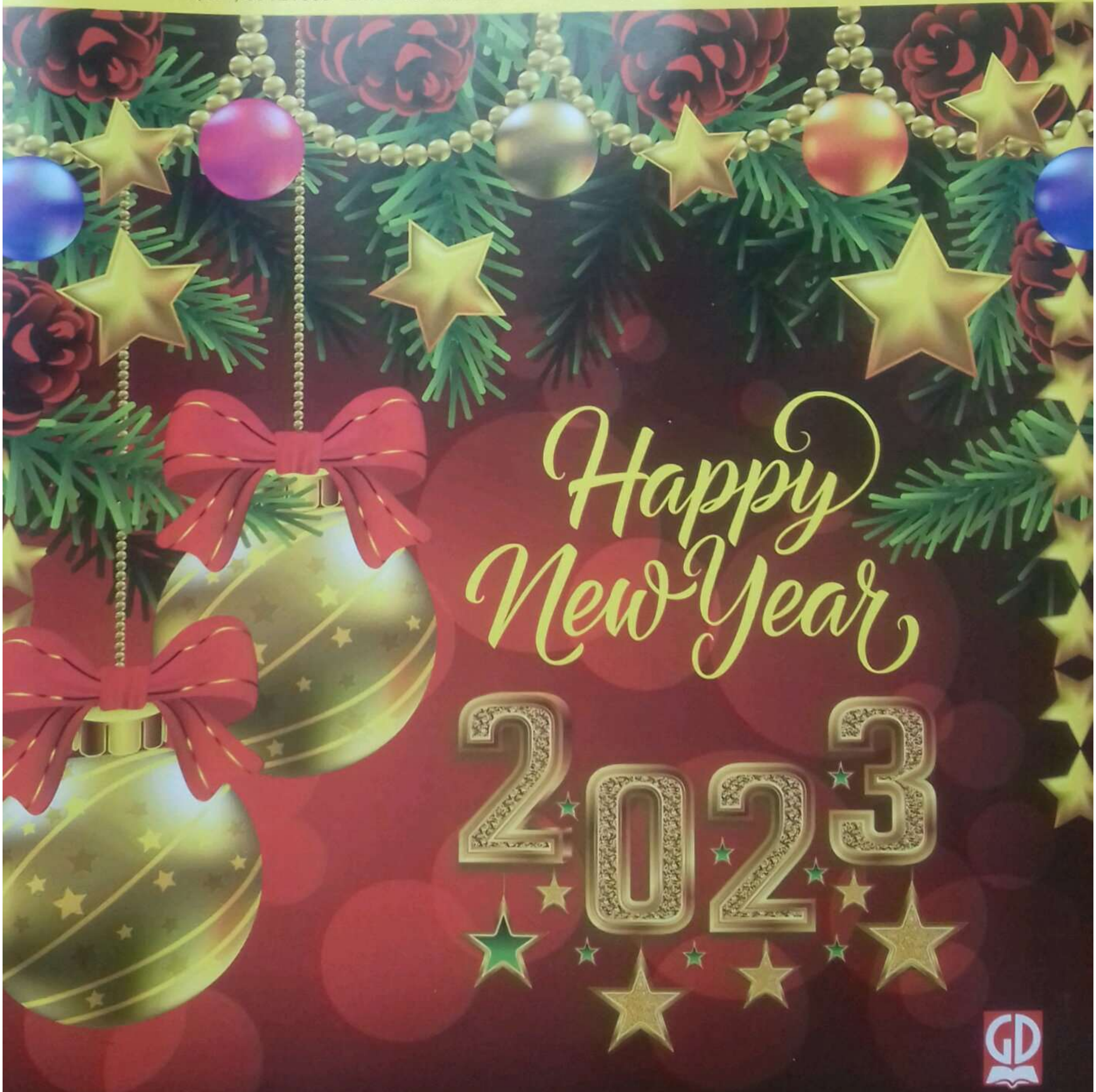
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 547
Tháng 1 - 2023
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 60 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



TIN TỨC – SỰ KIỆN

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÊ DUYỆT SÁCH GIÁO KHOA LỚP 4

Sau thời gian dài nỗ lực, khẩn trương triển khai thực hiện công tác biên soạn, biên tập sách giáo khoa của lớp 4 theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018, các đầu sách giáo khoa (SGK) của NXB Giáo dục Việt Nam đã được Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo Nguyễn Kim Sơn phê duyệt cụ thể như sau:

DANH MỤC

sách giáo khoa lớp 4 sử dụng trong cơ sở giáo dục phổ thông của NXB Giáo dục Việt Nam

(Phê duyệt theo Quyết định 4434/QĐ-BGDĐT ngày 21 tháng 12 năm 2022)

TT	Tên sách	Tên tác giả
1.	Toán 4 (bộ Kết nối tri thức với cuộc sống)	Hà Huy Khoái (Tổng Chủ biên), Lê Anh Vinh (Chủ biên), Nguyễn Áng, Vũ Văn Dương, Nguyễn Minh Hải, Hoàng Quế Hường, Bùi Bá Mạnh.
2.	Toán 4 (bộ Chân trời sáng tạo)	Trần Nam Dũng (Tổng Chủ biên), Khúc Thành Chính (Chủ biên), Đinh Thị Xuân Dung, Nguyễn Kính Đức, Đậu Thị Huế, Đinh Thị Kim Lan, Huỳnh Thị Kim Trang.
3.	Đạo đức 4 (bộ Kết nối tri thức với cuộc sống)	Nguyễn Thị Toan (Tổng Chủ biên), Trần Thành Nam (Chủ biên), Nguyễn Thị Hoàng Anh, Nguyễn Ngọc Dung.
4.	Đạo đức 4 (bộ Chân trời sáng tạo)	Huỳnh Văn Sơn (Tổng Chủ biên), Mai Mỹ Hạnh (Chủ biên), Trần Thanh Dư, Nguyễn Thanh Huân, Lâm Thị Kim Liên, Giang Thiên Vũ.
5.	Lịch sử và Địa lí 4 (bộ Kết nối tri thức với cuộc sống)	Vũ Minh Giang (Tổng Chủ biên phần Lịch sử), Nghiêm Đình Vỳ (Tổng Chủ biên cấp Tiểu học phần Lịch sử), Nguyễn Thị Thu Thủy (Chủ biên phần Lịch sử), Đào Thị Hồng, Lê Thị Thu Hương, Đào Ngọc Hùng (Tổng Chủ biên phần Địa lí), Trần Thị Hà Giang (Chủ biên phần Địa lí), Đặng Tiên Dung, Đoàn Thị Thanh Phương.
6.	Lịch sử và Địa lí 4 (bộ Chân trời sáng tạo)	Nguyễn Trà My, Phạm Đỗ Văn Trung (đồng Chủ biên), Nguyễn Khánh Băng, Trần Thị Ngọc Hân, Nguyễn Chí Tuấn.
7.	Khoa học 4 (bộ Kết nối tri thức với cuộc sống)	Vũ Văn Hùng (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên), Phan Thanh Hà (đồng Chủ biên), Nguyễn Thị Thanh Chi, Ngô Diệu Nga, Đào Thị Sen, Triệu Anh Trung.
8.	Khoa học 4 (bộ Chân trời sáng tạo)	Đỗ Xuân Hội (Tổng Chủ biên), Nguyễn Thị Thanh Thủy (Chủ biên), Lưu Phương Thanh Bình, Trần Thanh Sơn.
9.	Tin học 4 (bộ Kết nối tri thức với cuộc sống)	Nguyễn Chí Công (Tổng Chủ biên), Hoàng Thị Mai (Chủ biên), Phan Anh, Nguyễn Thu Hiền, Nguyễn Bá Tuấn, Hà Đặng Cao Tùng.
10.	Tin học 4 (bộ Chân trời sáng tạo)	Quách Tất Kiên (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên), Phạm Thị Quỳnh Anh (đồng Chủ biên), Đỗ Minh Hoàng Đức, Lê Tấn Hồng Hải, Trịnh Thanh Hải, Nguyễn Minh Thiên Hoàng, Đỗ Thị Ngọc Quỳnh.
11.	Công nghệ 4 (bộ Kết nối tri thức với cuộc sống)	Lê Huy Hoàng (Tổng Chủ biên), Đặng Văn Nghĩa (Chủ biên), Đồng Huy Giới, Dương Giáng Thiên Hương, Bùi Thị Thu Hương, Nguyễn Bích Thảo.
12.	Công nghệ 4 (bộ Chân trời sáng tạo)	Bùi Văn Hồng (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên), Nguyễn Thị Hồng Chiếm, Lê Thị Mỹ Nga, Đoàn Thị Ngân.
13.	Giáo dục thể chất 4 (bộ Kết nối tri thức với cuộc sống)	Nguyễn Duy Quyết (Tổng Chủ biên), Nguyễn Hồng Dương (Chủ biên), Đỗ Mạnh Hưng, Vũ Văn Thịnh, Vũ Thị Hồng Thu, Vũ Thị Thư, Phạm Mai Vương.
14.	Giáo dục thể chất 4 (bộ Chân trời sáng tạo)	Phạm Thị Lệ Hằng (Chủ biên), Bùi Ngọc Bích, Lê Hải, Trần Minh Tuấn.
15.	Âm nhạc 4 (bộ Kết nối tri thức với cuộc sống)	Đỗ Thị Minh Chính (đồng Tổng Chủ biên), Nguyễn Thị Thanh Bình (Chủ biên), Mai Linh Chi, Nguyễn Thị Phương Mai, Nguyễn Thị Nga.
16.	Âm nhạc 4 (bộ Chân trời sáng tạo)	Hồ Ngọc Khải, Lê Anh Tuấn (đồng Tổng Chủ biên), Đặng Châu Anh (Chủ biên), Hà Thị Thư, Nguyễn Đình Tình, Trịnh Mai Trang, Tô Ngọc Tú, Lâm Đức Vinh.
17.	Mĩ thuật 4 (bộ Chân trời sáng tạo)	Nguyễn Thị Nhung (Tổng Chủ biên), Nguyễn Tuấn Cường (Chủ biên), Lương Thanh Khiết, Nguyễn Ánh Phương Nam, Phạm Văn Thuận.
18	Mĩ thuật 4 (bộ Kết nối tri thức với cuộc sống)	Đinh Gia Lê (Tổng Chủ biên), Trần Thị Biển, Đoàn Thị Mỹ Hương (đồng Chủ biên), Phạm Duy Anh, Trần Thị Thu Trang
19.	Mĩ thuật 4 (bộ Chân trời sáng tạo)	Hoàng Minh Phúc (Tổng Chủ biên), Nguyễn Thị May (Chủ biên), Đỗ Việt Hoàng, Trần Đoàn Thanh Ngọc, Trần Thị Tuyết Nhung.
20.	Hoạt động trải nghiệm 4 (bộ Chân trời sáng tạo)	Phó Đức Hòa, (Tổng Chủ biên), Bùi Ngọc Diệp (Chủ biên), Lê Thị Thu Huyền, Nguyễn Hà My, Đặng Thị Thanh Nhàn, Nguyễn Hữu Tâm, Nguyễn Huyền Trang.
21.	Tiếng Anh 4 (Global Success)	Hoàng Văn Vân (Tổng Chủ biên), Nguyễn Quốc Tuấn (Chủ biên), Phan Hà, Đỗ Thị Ngọc Hiền, Đào Ngọc Lộc, Trần Hương Quỳnh, Nguyễn Minh Tuấn.
22.	Tiếng Anh 4 (Family and Friends - National Edition)	Trần Cao Bội Ngọc (Chủ biên), Trương Văn Ánh

KHAI THÁC MỘT TÍNH CHẤT CỦA TAM GIÁC VUÔNG

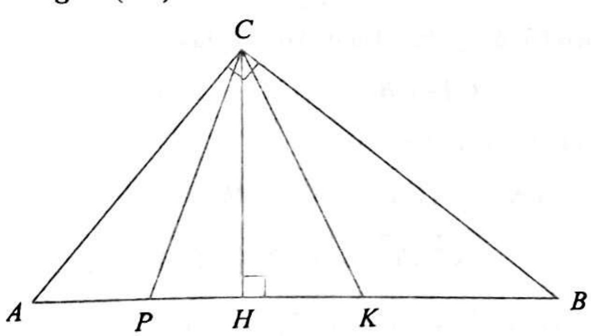
NGUYỄN ANH TUẤN
(GV THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An)

Khi gặp những bài toán liên quan đến tam giác vuông chúng ta thường nghĩ đến định lý Pythagore, hệ thức lượng trong tam giác vuông, tỉ số lượng giác của góc nhọn, quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc, giữa đường xiên và hình chiếu, … Bài viết này tôi xin nêu thêm một tính chất khác của tam giác vuông và một vài khai thác từ tính chất đó. Chúng ta bắt đầu bằng bài toán cơ bản sau đây:

Bài toán 1. *Cho tam giác CAB vuông tại C. H là hình chiếu vuông góc của C trên AB. Tia phân giác của các góc ACH và BCH lần lượt cắt cạnh AB tại P, K. Chứng minh rằng*

$$PK = CA + CB - AB.$$

Lời giải (h.1).



Hình 1

Theo tính chất góc ngoài của tam giác BCK ta có:

$$\widehat{CKA} = \widehat{CBK} + \widehat{KCB}.$$

Mặt khác: $\widehat{CBK} = \widehat{ACH}$ (cùng phụ với $\widehat{CAB}$) và $\widehat{KCB} = \widehat{KCH}$ (gt), suy ra:

$$\widehat{CKA} = \widehat{ACH} + \widehat{KCH} = \widehat{KCA}$$

$\Rightarrow \Delta ACK$ cân tại $A \Rightarrow AC = AK$.

Tương tự $BC = BP$

$$\Rightarrow CA + CB - AB = AK + BP - AB$$
$$= (AP + PK) + (BK + PK) - (BK + PK + AP)$$
$$= PK.$$

Nhận xét 1. Vì ΔCAB vuông tại C nên theo định lý Pythagore ta có $CA^2 + CB^2 = AB^2$.

Từ bài toán 1 ta có: $PK^2 = (AC + BC - AB)^2$

$$= AC^2 + BC^2 + AB^2 + 2AC.BC - 2AB(AC + BC)$$
$$= AB^2 + AB^2 + 2AK.BP - 2AB(AC + BC)$$
$$= 2AB^2 + 2(AB - BK).(AB - AP) - 2AB(AC + BC)$$
$$= 2AB^2 + 2AB^2 - 2AB(BK + AP) - 2AB(AC + BC) + 2BK.AP$$
$$= 4AB^2 - 2AB(BK + AP + AC + BC) + 2BK.AP$$
$$= 4AB^2 - 2AB(BK + AP + AK + BP) + 2BK.AP$$
$$= 4AB^2 - 2AB.2AB + 2BK.AP$$
$$= 2BK.AP.$$

Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 2. *Cho tam giác CAB vuông tại C. H là hình chiếu vuông góc của C trên AB. Tia phân giác của các góc ACH và BCH lần lượt cắt cạnh AB tại P, K. Chứng minh rằng $PK^2 = 2BK.AP$.*

Lưu ý. Thực tế khi cho học sinh chứng minh kết quả $PK^2 = 2BK.AP$ rất nhiều học sinh gặp lúng, thậm chí có những học sinh đã giải được nhưng sau đó một thời gian giáo viên cho làm lại thì không chứng minh được. Kinh nghiệm mà bản thân tác giả đã giảng dạy dạng toán chứng minh đẳng thức kiểu này đó là hướng dẫn học sinh tìm lời giải bằng nhiều cách khác nhau để giúp các em khắc sâu kiến thức. Với bài này chúng ta có thể giải theo một số cách khác như sau:

Cách 2. Ta có:

$$PK^2 = \left(AB - AP - BK\right)^2$$

$$= AB^2 + AP^2 + BK^2 - 2AB\left(AP + BK\right) + 2AP.BK \ (1).$$

$$AB^2 + AP^2 + BK^2 - 2AB\left(AP + BK\right)$$

$$= AB^2 + \left(AB - BP\right)^2 + \left(AB - AK\right)^2 - 2AB\left(AP + BK\right)$$

$$= AB^2 + \left(AB - BC\right)^2 + \left(AB - AC\right)^2 - 2AB\left(AP + BK\right)$$

$$= 3AB^2 + \left(BC^2 + AC^2\right) - 2AB\left(AP + BK + AC + BC\right)$$

$$= 3AB^2 + AB^2 - 2AB.2AB = 0 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

Cách 3. $PK^2 = \left(AK - AP\right)\left(BP - BK\right)$

$$= AK.BP - AK.BK - BP.AP + AP.BK$$

$$= \left(AB - BK\right)\left(AB - AP\right) - AK.BK - BP.AP + AP.BK$$

$$= AB^2 - AB\left(BK + AP\right) - AK.BK - BP.AP + 2AP.BK \quad (3).$$

Mặt khác ta có:

$$AB^2 - AB\left(BK + AP\right) - AK.BK - BP.AP$$

$$= AB^2 - AB\left(AB - AK + AB - BP\right) - AK.BK - BP.AP$$

$$= -AB^2 + AB.AK + AB.BP - AK.BK - BP.AP$$

$$= -AB^2 + AK\left(AB - BK\right) + BP\left(AB - AP\right)$$

$$= -AB^2 + AK^2 + BP^2 = -AB^2 + AC^2 + BC^2 = 0 \ (4).$$

Từ (3) và (4) ta có đpcm.

Cách 4. $PK^2 = 2AP.BK$

$$\Leftrightarrow \left(BC - BK\right)^2 = 2\left(AB - BC\right).BK$$

$$\Leftrightarrow BC^2 + BK^2 - 2BC.BK = 2AB.BK - 2BC.BK$$

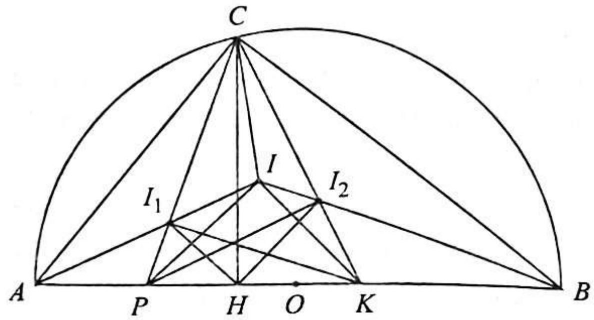
$$\Leftrightarrow BC^2 + BK^2 = 2AB.BK$$

$$\Leftrightarrow AB^2 - AC^2 = BK\left(2AB - BK\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(AB + AC\right)\left(AB - AC\right) = BK.\left(AB + AC\right)$$

$\Leftrightarrow AB - AC = BK$ (luôn đúng).

Nhận xét 2 (h.2). Gọi I, I_1, I_2 và R lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ACH, BCH và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó ta có $I_1 \in CP, I_2 \in CK, I$ là giao điểm của AI_1 và BI_2 và $AB = 2R$.



Hình 2

Mặt khác: ΔACK cân tại A có AI là đường phân giác nên I nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng CK. Tương tự điểm I cũng nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng CP. Từ đó suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCPK.

Lại có: $\widehat{PIK} = 2.\widehat{PCK} = 2.45^0 = 90^0 \Rightarrow \Delta IPK$ vuông cân tại $I \Rightarrow IK = \dfrac{PK}{\sqrt{2}}$ (1).

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$CA + CB \leq \sqrt{2\left(CA^2 + CB^2\right)}$$

nên từ bài toán 1 ta có:

$$PK \leq \sqrt{2\left(CA^2 + CB^2\right)} - AB$$

$$= \sqrt{2AB^2} - AB = 2R\left(\sqrt{2} - 1\right). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IK \leq R\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$. Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 3. *Cho C là một điểm di động trên nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ (C không trùng với A, B). H là hình chiếu vuông góc của C trên AB. Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác CAH và CBH.. Gọi P, K lần lượt là giao điểm của CI_1, CI_2 với AB. Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CPK lớn nhất.*

Lưu ý. Chúng ta có thể chứng minh kết quả $IK = \frac{PK}{\sqrt{2}}$ khá đơn giản như sau: Gọi R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CPK, theo định lí hàm số sin ta có:

$$\frac{PK}{\sin\widehat{PCK}} = 2R_1 \Rightarrow \frac{PK}{\sin 45^\circ} = 2R_1$$

$$\Rightarrow \frac{PK}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{PK}{\sqrt{2}}.$$

Nhận xét 3 (h.2). Có thể chứng minh

$$I_1I_2 \le R\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

như sau.

Xét ΔCI_2P có $\widehat{I_2CP} = 45^0$ và $I_2C = I_2P$ (vì BI_2 là đường trung trực của CP) $\Rightarrow \Delta CI_2P$ vuông cân tại $I_2 \Rightarrow PI_2 \perp CK$.

Tương tự $KI_1 \perp CP$ nên $\Delta CI_2I_1 \sim \Delta CPK$ (c.g.c)

$\Rightarrow \frac{I_1I_2}{PK} = \frac{CI_2}{CP} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (do ΔCI_2P vuông cân tại I_2 nên $CP = \sqrt{2}.CI_2$) $\Rightarrow I_1I_2 = \frac{PK}{\sqrt{2}}$ (3).

Từ (2) và (3) $\Rightarrow I_1I_2 \le R\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$ (4).

Ta thấy $\widehat{PI_2K} = \widehat{KI_1P} = \widehat{PIK} = 90^\circ$ nên năm điểm P, I_1, I, I_2, K cùng nằm trên đường tròn đường kính PK. Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 4. *Cho C là một điểm di động trên nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R (C không trùng với A, B). H là hình chiếu vuông góc của C trên AB. Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác CAH và CBH. Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để:*

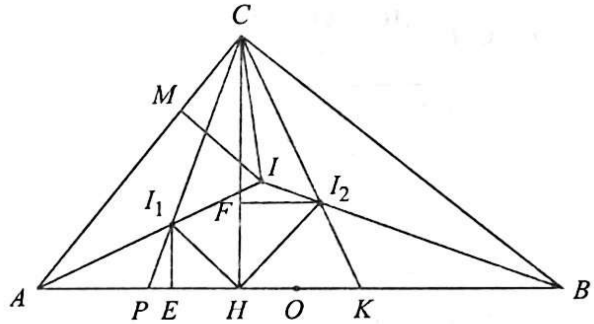
a) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác II_1I_2 lớn nhất.

b) Độ dài đoạn thẳng I_1I_2 lớn nhất.

Lưu ý.

1) Chúng ta có thể chứng minh kết quả $I_1I_2 = \frac{PK}{\sqrt{2}}$ như sau (h.2): Ta có $II_1 // PI_2$ và $\widehat{CPI_2} = \widehat{II_2P} = 45^\circ$ nên II_1PI_2 là hình thang cân $\Rightarrow I_1I_2 = IP = \frac{KP}{\sqrt{2}}$.

2) Chúng ta cũng có thể chứng minh $I_1I_2 \le R\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$ như sau:



Hình 3

Cách 3 (h.3).

Gọi r, r_1, r_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, AHC, BHC. Kẻ $IM \perp AC$, $I_1E \perp AB, I_2F \perp CH$ ($M \in AC, E \in AB$, $F \in CH$).

Khi đó $IM = r$, $I_1E = r_1$, $I_2F = r_2$. Ta có:

$\Delta AMI \backsim \Delta AEI_1$ (g.g) và $\Delta ACI \backsim \Delta AHI_1$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MI}{EI_1} = \frac{AI}{AI_1} = \frac{AC}{AH}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{r_1} = \frac{AC}{AH} \quad (1).$$

Mặt khác:

$\Delta CI_2F \backsim \Delta AEI_1$ (g.g) và $\Delta CI_2H \backsim \Delta AI_1H$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{FI_2}{EI_1} = \frac{CI_2}{AI_1} = \frac{CH}{AH}$$

$$\Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{CH}{AH} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AH}\right)^2 - \left(\frac{CH}{AH}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow r^2 - r_2^2 = r_1^2 \Rightarrow r^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

Vì các tam giác EHI_1 và FHI_2 vuông cân nên

$$\begin{cases} HI_1 = EI_1\sqrt{2} = r_1\sqrt{2} \\ HI_2 = FI_2\sqrt{2} = r_2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Tam giác I_1HI_2 vuông tại H suy ra:

$$I_1I_2^{\,2} = HI_1^{\,2} + HI_2^{\,2} = 2\left(r_1^2 + r_2^2\right) = 2r^2$$

$$\Rightarrow I_1I_2 = r\sqrt{2}.$$

Ta lại có:

$$r = CM = \frac{AC + BC - AB}{2}$$

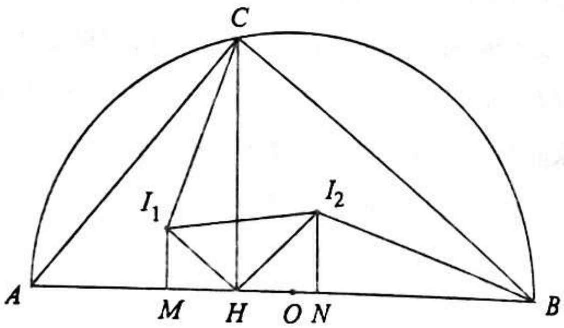
$$\le \frac{\sqrt{2\left(AC^2 + BC^2\right)} - AB}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2AB^2} - AB}{2} = \frac{AB\left(\sqrt{2} - 1\right)}{2}$$

$$= R\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Từ đó suy ra $I_1I_2 \le R\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

Cách 4 (h.4).



Hình 4

Ta có: $\Delta HCI_1 \backsim \Delta HBI_2 \Rightarrow \dfrac{HC}{HB} = \dfrac{HI_1}{HI_2}$.

Mặt khác: $\dfrac{HC}{HB} = \dfrac{AC}{BC}$. Từ đó suy ra:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{HI_1}{HI_2} \Rightarrow \frac{AC}{HI_1} = \frac{BC}{HI_2}$$

$$\Rightarrow \frac{AC^2}{HI_1^{\,2}} = \frac{BC^2}{HI_2^{\,2}} = \frac{AC^2 + BC^2}{HI_1^{\,2} + HI_2^{\,2}} = \frac{AB^2}{I_1I_2^{\,2}} = \frac{4R^2}{I_1I_2^{\,2}}$$

$$\Rightarrow I_1I_2^{\,2} = \frac{HI_1^{\,2}}{AC^2}.4R^2 \Rightarrow I_1I_2 = \frac{HI_1}{AC}.2R$$

Kẻ $I_1M \perp AB \left(M \in AB\right)$, ta có:

$$\frac{HI_1}{\sqrt{2}} = MH = \frac{HA + HC - AC}{2}$$

$$\Rightarrow HI_1 = \frac{HA + HC - AC}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow I_1I_2 = \frac{\dfrac{HA + HC - AC}{\sqrt{2}}}{AC}.2R$$

$$= \frac{HA + HC - AC}{AC}.R\sqrt{2} = \left(\frac{HA + HC}{AC} - 1\right)R\sqrt{2}$$

$$\le \left(\frac{\sqrt{2\left(HA^2 + HC^2\right)}}{AC} - 1\right)R\sqrt{2}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2AC^2}}{AC} - 1\right)R\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)R\sqrt{2}.$$

Nhận xét 4 (h.2).

Ta có $\widehat{CHI_1} = \widehat{CHI_2} = 45^0 \Rightarrow \Delta HI_1I_2$ vuông tại H

$$\Rightarrow I_1H^2 + I_2H^2 = I_1I_2^{\,2}.$$

Mặt khác: $I_1H + I_2H \le \sqrt{2\left(I_1H^2 + I_2H^2\right)}$

$$= \sqrt{2I_1I_2^{\,2}} = I_1I_2.\sqrt{2},$$

từ đó suy ra:

$$I_1H + I_2H + I_1I_2 \le I_1I_2\sqrt{2} + I_1I_2 = I_1I_2\left(\sqrt{2} + 1\right) \quad (5).$$

Từ (4) và (5) suy ra:

$$I_1H + I_2H + I_1I_2 \le R\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right) = R\sqrt{2}.$$

Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 5. *Cho C là một điểm di động trên nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R (C không trùng với A, B). H là hình chiếu vuông góc của C trên AB. Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác CAH và CBH. Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để chu vi tam giác HI_1I_2 lớn nhất.*

Nhận xét 5 (h.2).

Ta có: $CH \le CO = R$ và $PK \le 2R\left(\sqrt{2} - 1\right)$

$$\Rightarrow CH.PK \le 2R^2\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow S_{CPK} = \frac{CH.PK}{2} \le R^2\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Mặt khác: $S_{PCK} = \frac{1}{2}CP.CK.\sin\widehat{PCK}$

$$= \frac{1}{2}CP.CK.\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{4}CP.CK.$$

Từ đó ta có: $\frac{\sqrt{2}}{4}CP.CK \le R^2\left(\sqrt{2}-1\right)$

$$\Rightarrow CP.CK.\sqrt{2} \le 4R^2\left(\sqrt{2}-1\right) \quad (6).$$

Áp dụng định lý hàm số côsin vào ΔCPK có:

$$PK^2 = PC^2 + KC^2 - 2.PC.KC.\cos\widehat{PCK}$$

$$\Rightarrow PC^2 + KC^2 = PK^2 + 2.PC.KC.\cos\widehat{PCK}$$

$$= PK^2 + 2.PC.KC.\cos 45°$$

$$= PK^2 + PC.KC.\sqrt{2} \quad (7).$$

Từ (6); (7), kết hợp với $PK \le 2R\left(\sqrt{2}-1\right)$ ta có:

$$PC^2 + KC^2 \le \left(2R\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^2 + 4R^2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$= 4R^2\left(2-\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}R^2\left(\sqrt{2}-1\right) \quad (8).$$

Ta lại có:

$$CP + CK + KP \le \sqrt{2\left(CP^2 + CK^2\right)} + KP \quad (9).$$

Từ (8) và (9) suy ra:

$$CP + CK + KP \le \sqrt{2.4\sqrt{2}R^2\left(\sqrt{2}-1\right)} + 2R\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$= 2R\left(\sqrt{2(2-\sqrt{2})} + \sqrt{2} - 1\right).$$

Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 6. *Cho C là một điểm di động trên nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R (C không trùng với A, B). H là hình chiếu vuông góc của C trên AB. Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác CAH và CBH. Gọi P, K lần lượt là giao điểm của CI_1, CI_2 với AB. Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để:*

a) *Diện tích ΔCPK lớn nhất;*

b) *Chu vi ΔCPK lớn nhất.*

Nhận xét 6 (h.2). Do $\Delta CI_2I_1 \sim \Delta CPK$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{S_{CI_2I_1}}{S_{CPK}} = \left(\frac{CI_2}{CP}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{CI_2}{CP} = \frac{I_2I_1}{PK} = \frac{CI_1}{CK} = \frac{CI_2 + I_2I_1 + CI_1}{CP + PK + CK} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{CI_2I_1} = \frac{1}{2} \cdot S_{CPK} \\ CI_2 + I_2I_1 + CI_1 = \frac{CP + PK + CK}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 7. *Cho C là một điểm di động trên nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R (C không trùng với A, B). H là hình chiếu vuông góc của C trên AB. Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác CAH và CBH. Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để:*

a) *Diện tích ΔCI_1I_2 lớn nhất.*

b) *Chu vi ΔCI_1I_2 lớn nhất.*

Nhận xét 7 (h.2).

Gọi R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CI_1I_2. Theo định lý hàm số sin ta có:

$$\frac{I_1I_2}{\sin\widehat{I_1CI_2}} = 2R_1 \Rightarrow 2R_1 = \frac{I_1I_2}{\sin 45°} = \frac{I_1I_2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow R_1 = \frac{I_1I_2}{\sqrt{2}} \quad (10).$$

Kết hợp (4) và (10) suy ra:

$$R_1 \le \frac{R\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}} = R\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 8. *Cho C là một điểm di động trên nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R (C không trùng với A, B). H là hình chiếu vuông góc của C trên AB. Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác CAH và CBH. Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác CI_1I_2 đạt giá trị lớn nhất.*

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10, TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC GIANG, NĂM HỌC 2022 – 2023

Câu I. 1) *Cho biểu thức với* $x \geq 0; x \neq 1, x \neq 9.$

a) *Rút gọn biểu thức A.*

b) *Tìm tất cả các giá trị của x để* $A \geq 4$.

2) *Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình* $x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2+2m-1)x - m^2 + m = 0$ *có ba nghiệm phân biệt* x_1, x_2, x_3 *thỏa mãn* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2x_3 = 0$.

Lời giải. 1) a) Ta có:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} + \frac{6}{\sqrt{x}+3} + \frac{36}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}\right) : \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{x+12\sqrt{x}+27}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}-1}.$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1, x \neq 9.$

b) + Với $\sqrt{x} < 1$ thì $A = \frac{\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}-1} < 0$: không thỏa mãn

+ Với $\sqrt{x} > 1$ thì: $A \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 9 \geq 4(\sqrt{x}-1)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{13}{3} \Leftrightarrow x \leq \frac{169}{9}.$

Kết hợp với điều kiện của x ta được kết quả cần tìm là $1 < x \leq \frac{169}{9}$, $x \neq 9.$

2) Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x-m)\left[x^2 - (m+1)x + m - 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x^2 - (m+1)x + m - 1 = 0 \ (*) \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 2m + 5 > 0 \\ m^2 - (m+1)m + m - 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 + 4 > 0 \\ -1 \neq 0 \end{cases}.$$

Các điều kiện trên luôn đúng với mọi m, suy ra phương trình đã cho luôn có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $x_3 = m$ với mọi m.

Từ giả thiết ta có:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + m^2 - 3mx_1x_2 = 0 \quad (**).$$

Theo hệ thức Viète, ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1.x_2 = m - 1 \end{cases}.$

Thay vào $(**)$ được:

$$(m+1)^2 - 2(m-1) + m^2 - 3m(m-1) = 0$$

$\Leftrightarrow -m^2 + 3m + 3 = 0$. Tìm được $m = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}.$

Câu II. 1) *Cho đa thức*

$P(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 8x + 1$

và số $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$. *Tính* $P(a)$.

2) *Giải phương trình*

$$x^2 + 3x - 1 + 2\sqrt[3]{(x^3 + x + 5)^2} = 5\sqrt[3]{x^3 + x + 5}.$$

Lời giải. 1) Ta có:

$$a = \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = \sqrt{2} - 1$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 = 2 \Rightarrow a^2 + 2a - 1 = 0.$$

Chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $x^2 + 2x - 1$ ta được:

$$P(x) = (x^2 + 2x - 1)(x^3 - x + 2) + 3x + 3.$$

Suy ra:

$$P(a)=(a^2+2a-1)(a^3-a+2)+3a+3$$
$$=3a+3.$$

Từ đó tính được $P(a)=3\sqrt{2}$.

2) Đưa phương trình về dạng:

$$(x+1)^3-2(x+1)^2+5(x+1)$$
$$=(x^3+x+5)-2\left(\sqrt[3]{x^3+x+5}\right)^2+5\sqrt[3]{x^3+x+5}.$$

Đặt $a=x+1, b=\sqrt[3]{x^3+x+5}$ ta được phương trình:

$$a^3-2a^2+5a=b^3-2b^2+5b$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2-2a-2b+5)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a^2+ab+b^2-2a-2b+5=0 \end{array}\right.$$

+ Với $a=b$ ta có: $x+1=\sqrt[3]{x^3+x+5}$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3=x^3+x+5$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+2x-4=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{3}.$$

+ Với $a^2+ab+b^2-2a-2b+5=0$

$\Leftrightarrow (a+b)^2+(a-2)^2+(b-2)^2+2=0$: phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{3}.$$

Câu III. 1) *Tìm ba số nguyên x, y, z thỏa mãn*

$$x^4+9y^2+25z^2=x^2+6xy+2022.$$

2) *Cho chín số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_9$ đều không có ước số nguyên tố nào khác 3; 5 và 7. Chứng minh rằng trong chín số đã cho luôn tồn tại hai số mà tích của hai số này là một số chính phương.*

Lời giải. 1) Biến đổi giả thiết về dạng:

$$(x^2-1)^2+(x-3y)^2+(5z)^2=2023.$$

Với x, y, z là các số nguyên ta có $(x^2-1)^2, (x-3y)^2, (5z)^2$ là các số chính phương (bình phương của số nguyên).

Mỗi số nguyên khi chia cho 8 được số dư là một trong các số $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; 4$

$\Rightarrow$ mỗi số chính phương khi chia cho 8 sẽ được số dư là một trong các số $0;1;4$.

Từ đó, $(x^2-1)^2+(x-3y)^2+(5z)^2$ là tổng của 3 số chính phương nên nó chia cho 8 sẽ được số dư là một trong các số $0;1;2;3;4;5;6$. Mặt khác, 2023 chia cho 8 có số dư là 7. Do vậy, không thể tìm được ba số nguyên x, y, z thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

2) Giả sử $a_1=3^{m_1}\cdot 5^{n_1}\cdot 7^{p_1}$, $a_2=3^{m_2}\cdot 5^{n_2}\cdot 7^{p_2}$, ..., $a_9=3^{m_9}\cdot 5^{n_9}\cdot 7^{p_9}$, trong đó $m_i, n_i, p_i\ (i=1;2;\cdots;9)$ là các số tự nhiên.

Với mỗi $i=1;2;\cdots;9$, bộ ba số $(m_i;n_i;p_i)$ có tính chẵn (*c*), lẻ (*l*) theo thứ tự là một trong 8 trường hợp dưới đây:

$(c;c;c), (c;c;l), (c;l;c), (c;l;l), (l;c;c), (l;c;l)$, $(l;l;c), (l;l;l)$.

Theo nguyên lý Dirichlet, trong 9 bộ ba số $(m_i;n_i;p_i)$ tồn tại ít nhất hai bộ ba số là $(m_j;n_j;p_j)$ và $(m_k;n_k;p_k)$, với $j,k\in\{1;2;...;9\}$ và $j\neq k$, cùng ở một trong 8 trường hợp trên

$\Rightarrow m_j+m_k, n_j+n_k, p_j+p_k$ là các số chẵn

$\Rightarrow m_j+m_k=2m;\ n_j+n_k=2n;$
$p_j+p_k=2p\ (m,n,p\in\mathbb{N})$.

Từ đó: $a_j\cdot a_k=3^{m_j+m_k}\cdot 5^{n_j+n_k}\cdot 7^{p_j+p_k}$

$$=3^{2m}\cdot 5^{2n}\cdot 7^{2p}=(3^m\cdot 5^n\cdot 7^p)^2$$

$\Rightarrow a_j\cdot a_k$ là số chính phương $\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

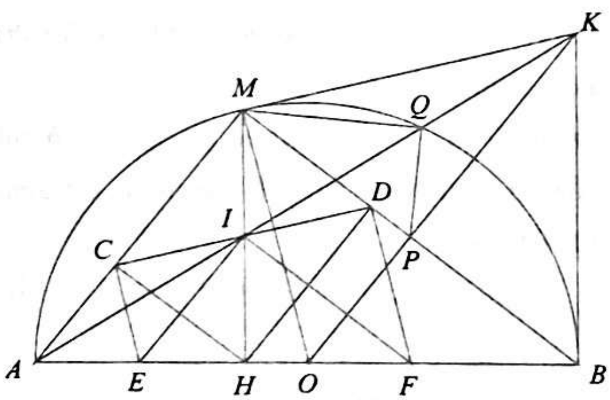
Câu IV. *Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi M là một điểm thuộc nửa đường tròn đã cho, H là hình chiếu của M trên AB. Đường thẳng qua O và song song với MA cắt tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn (O) tại điểm K*

1) Chứng minh bốn điểm O, B, K, M cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng MA và MB. Chứng minh ba đường thẳng CD, MH, AK đồng quy.

3) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AH và BH. Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $CDFE$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.



1) Ta có $\widehat{KOB} = \widehat{MAB}$ (hai góc đồng vị),

mà $\widehat{MAB} = \frac{1}{2}\widehat{MOB}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung)

$\Rightarrow \widehat{KOB} = \frac{1}{2}\widehat{MOB} \Rightarrow \widehat{KOB} = \widehat{KOM}$

$\Rightarrow \Delta KOB = \Delta KOM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{KMO} = \widehat{KBO} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{KMO} + \widehat{KBO} = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $OBKM$ nội tiếp.

Vậy 4 điểm O, B, K, M cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi P là giao điểm của OK và MB. Từ $\widehat{KMO} = \widehat{KBO} = 90^0 \Rightarrow KM, KB$ là các tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow P$ là trung điểm của MB.

Gọi I, Q lần lượt là giao điểm của AK với MH và nửa đường tròn (O). Ta có:

$\widehat{BPK} = \widehat{BQK} = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $BPQK$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MBK} = \widehat{IQP}$, mà $\widehat{MBK} = \widehat{IMP}$ (so le trong)

$\Rightarrow \widehat{IQP} = \widehat{IMP} \Rightarrow$ tứ giác $MIPQ$ nội tiếp.

Từ đó $\widehat{MPI} = \widehat{MQI}$, mà $\widehat{MQI} = \widehat{MBA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung) $\Rightarrow \widehat{MPI} = \widehat{MBA}$

$\Rightarrow IP$ song song với AB.

Mặt khác, P là trung điểm của $MB \Rightarrow I$ là trung điểm của MH, mà $MCHD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow I$ là trung điểm của CD. Vậy CD, MH, AK đồng quy tại I.

3) Chỉ ra: $S_{CDFE} = 2S_{IEF} = IH \cdot EF$

$$= \frac{1}{2}MH \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}MH.R$$

Từ đó, S_{CDFE} đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow MH$ đạt giá trị lớn nhất

$\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{AB}$.

Câu V. *Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$abc\left(a^2+b^2+c^2\right) \le 3.$$

Lời giải. Ta có:

$$3abc\left(a^2+b^2+c^2\right) = (a+b+c)abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
$$= (ca \cdot ab + ab \cdot bc + bc \cdot ca)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
$$\le \frac{(ab+bc+ca)^2}{3} \cdot \left(a^2+b^2+c^2\right)$$

(dựa vào BĐT phụ: $xy + yz + zx \le \frac{(x+y+z)^2}{3}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$);

(Xem tiếp trang 10)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN, ĐHQG HÀ NỘI, NĂM HỌC 2022 – 2023

MÔN TOÁN

VÒNG 1 *(Dành cho tất cả các thí sinh)*

Thời gian làm bài: 120 *phút* (*không kể thời gian phát đề*)

Câu I. (*4 điểm*)

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 6(xy+5)+x^3y+5x^2=42 \\ x^3+5x^2y+6x+30y=42 \end{cases}.$$

2) Giải phương trình

$$\left(\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{3-x}\right)\left(2+3\sqrt[3]{(x+6)(3-x)}\right)=24.$$

Câu II. (*2 điểm*)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức

$$25y^2+354x+60=36x^2+305y+(5y-6x)^{2022}.$$

2) Trên bàn có 8 hộp rỗng (trong các hộp không có viên bi nào). Người ta thực hiện các lần thêm bi vào các hộp theo quy tắc sau: mỗi lần ta chọn ra 4 hộp bất kỳ và bỏ vào một hộp 1 viên, một hộp 2 viên, hai hộp còn lại mỗi hộp 3 viên. Hỏi số lần thêm bi ít nhất có thể để nhận được số bi ở 8 hộp trên là 8 số tự nhiên liên tiếp?

Câu III. (*3 điểm*)

Cho hình chữ nhật $ABCD$ ($AB < AD$) nội tiếp trong đường tròn (O). Trên cạnh AD lấy hai điểm E và F (E, F không trùng với A, D) sao cho E nằm giữa A và F, đồng thời $\widehat{ABE}+\widehat{DCF}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}.$

1) Chứng minh rằng BE và CF cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

2) Đường thẳng qua O song song với BC cắt BE, CF theo thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng

$$\widehat{DAM}+\widehat{ADN}+\frac{1}{2}\widehat{AOD}=180^\circ.$$

3) Dựng hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho NQ song song với BD, đồng thời MP song song với AC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $MNPQ$ tiếp xúc với đường tròn (O).

Câu IV. (*1 điểm*)

Cho a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{2a}{a+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{6a+2c}{3b+c}+\frac{4a+3b+c}{b+c}\geq\frac{32a}{2a+b+c}.$$

VÒNG 2 *(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin)*

Thời gian làm bài: 150 *phút* (*không kể thời gian phát đề*)

Câu I. (*3,5 điểm*)

1) Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}+\frac{1}{c+ab}\right)=\sqrt{\frac{abc}{(a+bc)(b+ca)(c+ab)}}.$$

☞

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2+3xy+y^2=6 \\ 3x+2y+1=2\sqrt{2x+y+6}. \end{cases}$$

Câu II. (*2,5 điểm*)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn đẳng thức

$$(x+y)(5x+y)^3+xy^3=(5x+y)^3+x^2y^3+xy^4.$$

2) Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} c\le b<a\le 3, \\ b^2+2a\le 10, \\ b^2+2a+2c\le 14, \\ (a^2+1)(b^2+1)+4ab\le 2a^3+2b^3+2a+2b \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=4a^2+b^4+2b^2+4c^2.$$

Câu III. (*3 điểm*)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn (O). Điểm P nằm trong tam giác ABC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh CA, AB. Giả sử tứ giác $BCEF$ nội tiếp trong đường tròn (K).

1) Chứng minh rằng AP vuông góc BC.

2) Chứng minh rằng $AP=2OK$.

3) Đường thẳng qua P vuông góc với AP cắt đường tròn (O) tại hai điểm Q và R. Chứng minh rằng đường tròn tâm A bán kính AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác KQR.

Câu IV. (*1 điểm*)

Cho các điểm $A_1, A_2, ..., A_{30}$ theo thứ tự nằm trên một đường thẳng sao cho độ dài các đoạn A_kA_{k+1} bằng k (đơn vị dài), với $k=1,2,...,29$. Ta tô mầu mỗi đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{29}A_{30}$ bởi 1 trong 3 mầu (mỗi đoạn được tô bởi đúng 1 mầu). Chứng minh rằng với mọi cách tô mầu, ta luôn chọn được 2 số nguyên dương $1\le j<i\le 29$ sao cho hai đoạn A_iA_{i+1}, A_jA_{j+1} được tô cùng mầu và $i-j$ là bình phương của số nguyên dương.

NGUYỄN VŨ LƯƠNG, PHẠM VĂN HÙNG, TRẦN QUANG HÙNG
(*Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Giới thiệu

****

HƯỚNG DẪN GIẢI ... (*Tiếp theo trang 8*)

$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{3}\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}(ab+bc+ca)(ab+bc+ca)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\le\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)+\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3}\right]^3$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}\right]^3=9$$

(dựa vào BĐT Cauchy: với $x, y, z\ge 0$ ta có:

$$xyz\le\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3,$$

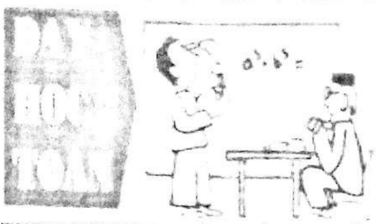
dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$).

Từ đó suy ra: $abc\left(a^2+b^2+c^2\right)\le 3$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

NGUYỄN ANH TUẤN
(*GV THPT chuyên Bắc Giang*)

Giới thiệu



KHAI THÁC MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ SỐ HỮU TỶ

TRẦN VĂN HẠNH
(GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Khai thác bài toán là một trong những vấn đề rèn luyện và phát triển năng lực tư duy toán học. Việc khai thác bài toán là thói quen cần thiết giúp học sinh sáng tạo và phát hiện thêm những kiến thức mới, những bài toán mới. Trong bài viết này, chúng tôi khai thác một số bài toán về số hữu tỉ. Sau đây là một số bài toán minh họa.

Bài toán 1. *Cho* $S=\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{20}$. *Hãy so sánh S với* $\frac{1}{2}$.

(Bài tập Toán 6, tập 2, trang 14)

Lời giải. Ta có:

$$S>\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}\Rightarrow S>\frac{1}{2}.$$

Tương tự cách giải của bài toán trên ta giải được các bài toán sau

Bài toán 1.1. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{17}<2.$$

Lời giải. Ta có:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{17}=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{9}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{14}\right)+\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}\right)$$
$$<\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{10}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}\right)$$
$$=\frac{5}{5}+\frac{5}{10}+\frac{3}{15}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{17}{10}<2.$$

Bài toán 1.2. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{17}>1.$$

Lời giải. Ta có:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{17}=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{17}$$
$$>\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{17}$$
$$=\frac{4}{8}+\frac{8}{16}+\frac{1}{17}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{17}>1.$$

Bài toán 1.3. *Cho*

$$A=\frac{1}{2021}+\frac{1}{2022}+\frac{1}{2023}+\ldots+\frac{1}{8082}+\frac{1}{8083}$$

trong đó mẫu số của các phân số lấy các giá trị nguyên liên tiếp từ 2021 đến 8083. Hãy so sánh A với $\frac{11}{6}$.

(Bài T1/533, TH&TT)

Lời giải.

$$A=\left(\frac{1}{2021}+\frac{1}{2022}+\ldots+\frac{1}{4041}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{4042}+\frac{1}{4043}+\ldots+\frac{1}{6062}\right)+\left(\frac{1}{6063}+\frac{1}{6064}+\ldots+\frac{1}{8083}\right)$$

(trong mỗi dấu ngoặc có 2021 phân số).

Ta có:

$$\frac{1}{2021}+\frac{1}{2022}+\ldots+\frac{1}{4041}<\frac{1}{2021}+\frac{1}{2021}+\ldots+\frac{1}{2021}$$
$$=\frac{2021}{2021}=1.$$

$$\frac{1}{4042}+\frac{1}{4043}+...+\frac{1}{6062}<\frac{1}{4042}+\frac{1}{4042}+...+\frac{1}{4042}$$

$$=\frac{2021}{4042}=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{6063}+\frac{1}{6064}+...+\frac{1}{8083}<\frac{1}{6063}+\frac{1}{6063}+...+\frac{1}{6063}$$

$$=\frac{2021}{6063}=\frac{1}{3}.$$

Do đó $A<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}.$

Vậy $A<\frac{11}{6}.$

Ta thử thay đổi mẫu số của các phân số lấy các giá trị nguyên không liên tiếp, ta có bài toán sau:

Bài toán 1.4. *Chứng minh rằng*

$$A=\frac{1}{1000}+\frac{1}{1002}+\frac{1}{1004}+...+\frac{1}{2000}<\frac{1}{2}.$$

(Bài T2/481TH&TT)

Lời giải. *Cách 1* Ta có:

$$\frac{1}{1000}+\frac{1}{1002}+...+\frac{1}{1500}<\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000}+...+\frac{1}{1000}$$

$$=\frac{251}{1000}<\frac{1}{3};$$

$$\frac{1}{1502}+\frac{1}{1504}+...+\frac{1}{2000}<\frac{1}{1502}+\frac{1}{1502}+...+\frac{1}{1502}$$

$$=\frac{250}{1502}<\frac{125}{750}=\frac{1}{6};$$

Do đó $A<\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$

Bài này ta có cách giải khác:

Cách 2. Ta xét $B=\frac{1}{500}+\frac{1}{501}+\frac{1}{502}+...+\frac{1}{1000}$

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1000}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{499}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1000}\right)-\left(\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+...+\frac{2}{998}\right)$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{997}-\frac{1}{998}+\frac{1}{999}+\frac{1}{1000}$$

$$=\frac{1}{1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{1000}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-...-\left(\frac{1}{998}-\frac{1}{999}\right)$$

vì $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{1000}>0, \frac{1}{4}-\frac{1}{5}>0, ..., \frac{1}{998}-\frac{1}{999}>0$

nên ta có $B<1$. Vậy

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{500}+\frac{1}{501}+\frac{1}{502}+...+\frac{1}{1000}\right)$$

$$<\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}.$$

Bài toán 2. *Cho 4 số hữu tỉ khác không* a_1, a_2, a_3, a_4 *thỏa mãn điều kiện* $a_2^2=a_1a_3$ *và* $a_3^2=a_2a_4$.. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1^3+a_2^3+a_3^3}{a_2^3+a_3^3+a_4^3}=\frac{a_1}{a_4}.$$

Lời giải. *Cách1* Từ $a_2^2=a_1a_3$ và $a_3^2=a_2a_4$ suy ra $\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_4}$. Đặt $S=\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_4}$.

Ta có: $S^3=\frac{a_1^3}{a_2^3}=\frac{a_2^3}{a_3^3}=\frac{a_3^3}{a_4^3}=\frac{a_1^3+a_2^3+.a_3^3}{a_2^3+a_3^3+a_4^3}$

Mặt khác $S^3=\frac{a_1}{a_2}.\frac{a_2}{a_3}.\frac{a_3}{a_4}=\frac{a_1}{a_4}$, vậy

$$\frac{a^3{}_1+a^3{}_2+a_3^3}{a^3{}_2+a^3{}_3,+a_4^3}=\frac{a_1}{a_4}.$$

Bài toán này ta có cách giải khác sau đây:

Cách 2. Từ giả thiết

$$\begin{cases} a_2^2=a_1a_3 \\ a_3^2=a_2a_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_4} \\ \frac{a_1}{a_4}=\frac{a_2^3}{a_3^3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_4}=\frac{a_1^3}{a_2^3}=\frac{a_2^3}{a_3^3}=\frac{a_3^3}{a_4^3}=\frac{a_1^3+a_2^3+a_3^3}{a_2^3+a_3^3+a_4^3}.$$

Với lời giải *cách1* ta có thể tổng quát bài toán theo hướng có nhiều số hạng, ta được bài toán sau:

Bài toán 2.1. *Cho n số hữu tỉ khác không $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn điều kiện $a_k^2 = a_{k-1}a_{k+1}$, $k = 2,3,...,n-1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1^3 + a_2^3 + ... + a_{n-1}^3}{a_2^3 + a_3^3 + ... + a_n^3} = \frac{a_1}{a_4}.$$

Lời giải. Từ $a_k^2 = a_{k-1}a_{k+1}$ ta có $\frac{a_{k-1}}{a_k} = \frac{a_k}{a_{k+1}}$ với mọi $k = 2,3,...,n$. Đặt $S = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = ... = \frac{a_{n-1}}{a_n}$. Ta có: $S^3 = \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{a_2^3}{a_3^3} = ... = \frac{a_{n-1}^3}{a_n^3} = \frac{a_1^3 + a_2^3 + ... + a_{n-1}^3}{a_2^3 + a_3^3 + ... + a_n^3}$.

Mặt khác $S^3 = \frac{a_1}{a_2}.\frac{a_2}{a_3}.\frac{a_3}{a_4} = \frac{a_1}{a_4}$, vậy

$$\frac{a_1^3 + a_2^3 + ... + a_{n-1}^3}{a_2^3 + a_3^3 + ... + a_n^3} = \frac{a_1}{a_4}.$$

Tổng quát bài toán gốc theo 2 hướng là lũy thừa bậc n và có n số hạng ta được bài toán mới sau:

Bài toán 2.2. *Cho $n+1$ $(n \geq 2)$ số hữu tỉ khác không $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ thỏa mãn điều kiện $a_k^2 = a_{k-1}a_{k+1}$ $k = 2,3,...,n$.*

Tính $\frac{a^n{}_1 + a^n{}_2 + ... + a_n^n}{a^n{}_2 + a^n{}_3 + ... + a_{n+1}^n}$ theo a_1 và a_{n+1}.

(Bài T2/275, TH&TT)

Lời giải. Từ $a_k^2 = a_{k-1}a_{k+1}$ ta có $\frac{a_{k-1}}{a_k} = \frac{a_k}{a_{k+1}}$ với mọi $k = 2,3,...,n$.

Đặt $S = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = ... = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$, ta có:

$$S^n = \frac{a_1^n}{a_2^n} = \frac{a_2^n}{a_3^n} = ... = \frac{a_{n-1}^n}{a_n^n} = \frac{a_n^n}{a_{n+1}^n} = \frac{a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n}{a_2^n + a_3^n + ... + a_{n+1}^n}.$$

Mặt khác $S^n = \frac{a_1}{a_2}.\frac{a_2}{a_3}...\frac{a_{n-1}}{a_n}.\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_1}{a_{n+1}}$, vậy

$$\frac{a^n{}_1 + a^n{}_2 + ... + a_n^n}{a^n{}_2 + a^n{}_3 + ... + a_{n+1}^n} = \frac{a_1}{a_{n+1}}.$$

Bài toán 3. *Cho x, y là các số hữu tỉ thỏa mãn đẳng thức*

$$x^3y + xy^3 + 2x^2y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$$

Chứng minh rằng $\sqrt{1-xy}$ là một số hữu tỉ.

Lời giải. Từ $x^3y + xy^3 + 2x^2y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow xy(x^2 + 2xy + y^2) + 2(x+y) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow xy(x+y)^2 + 2(x+y) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow xy(x+y)^2 - (x+y)^2 + (x+y+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+y)^2(1-xy) = (x+y+1)^2$ (*).

Nếu $x + y = 0$ thì (*) không thỏa mãn, nên $x + y \neq 0$. Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow 1 - xy = \left(\frac{x+y+1}{x+y}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-xy} = \left|\frac{x+y+1}{x+y}\right| \in \mathbb{Q}$$

Vậy $\sqrt{1-xy}$ là số hữu tỉ.

Vấn đề đặt ra là biểu thức $1 - xy = \left(\frac{x+y+1}{x+y}\right)^2$ là số nguyên được không ?

Ta có bài toán mới sau:

Bài toán 3.1. *Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn điều kiện*

$$x^3y + xy^3 + 2x^2y^2 - 4x - 4y + 4 = 0.$$

(Bài T3/485, TH&TT)

Lời giải. Phương trình tương đương với

$$xy(x^2 + 2xy + y^2) - 4(x+y) + 4 = 0$$

$\Leftrightarrow xy(x+y)^2 - 4(x+y) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x+y)^2(1-xy) = (x+y-2)^2$

$$\Leftrightarrow 1-xy=\left(1-\frac{2}{x+y}\right)^2.$$

Do $1-xy\in\mathbb{Z}$ nên $x+y\mid 2\Rightarrow x+y=\pm1$ hoặc $x+y=\pm2$. Xét các trường hợp:

- $\begin{cases}x+y=1\\1-xy=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$.
- $\begin{cases}x+y=-1\\1-xy=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=-1\\xy=-8\end{cases}$: không có nghiệm nguyên.
- $\begin{cases}x+y=2\\1-xy=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$.
- $\begin{cases}x+y=-2\\1-xy=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-3\\y=1\end{cases}$.

Vậy phương trình có 5 nghiệm $(x;y)$ là:

$$(1,0),(0,1),(1,1),(1,-3),(-3,1).$$

Bài toán 4. *Cho x,y là các số hữu tỉ khác không thỏa mãn đẳng thức $x^3+y^3=2x^2y^2$. Chứng minh rằng số $\sqrt{1-\frac{1}{xy}}$ là một số hữu tỉ.*

Lời giải. $x^3+y^3=2x^2y^2\Leftrightarrow\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}=2$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)^2=4$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{y^4}+\frac{y^2}{x^4}+\frac{2}{xy}=4$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}\right)^2=4-\frac{4}{xy}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(1-\frac{1}{xy}\right)=\left(\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1-\frac{1}{xy}}=\frac{1}{2}\left|\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}\right|\in\mathbb{Q}.$$

Vậy $\sqrt{1-\frac{1}{xy}}$ là một số hữu tỉ.

Tương tự cách giải trên ta có các bài toán sau

Bài toán 4.1. *Cho x,y là các số hữu tỉ thỏa mãn đẳng thức $(x+y)^3=xy(3x+3y+2)$. Chứng minh rằng $\sqrt{1-xy}$ là một số hữu tỉ.*

Lời giải. Ta có: $(x+y)^3=xy(3x+3y+2)$

$$\Leftrightarrow(x+y)^3-3xy(x+y)=2xy\Leftrightarrow x^3+y^3=2xy\ (*)$$

Nếu $x=0$ hoặc $y=0$ thì $\sqrt{1-xy}=1$ là số hữu tỉ

Nếu $x\neq0$ và $y\neq0$ thì: $(*)\Leftrightarrow\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=2$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)^2=4$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^4}{y^2}+\frac{y^4}{x^2}+2xy=4$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right)^2=4-4xy$$

$$\Leftrightarrow 4((1-xy)=\left(\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1-xy}=\frac{1}{2}\left|\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right|\in\mathbb{Q}$$

Vậy $\sqrt{1-xy}$ là một số hữu tỉ.

Tổng quát theo hướng lũy thừa ta có bài toán

Bài toán 4.2. *Cho x,y là hai số hữu tỉ khác không thỏa mãn đẳng thức*

$$x^{2021}+y^{2021}=2x^{1010}y^{1010}\ (1).$$

Chứng minh rằng $\sqrt{1-xy}$ là một số hữu tỉ.

Lời giải. Từ (1), nhân 2 vế với x ta được:

$$x^{2022}+xy^{2021}=2x^{1011}y^{1010}$$

$$\Leftrightarrow x^{2022}-2x^{1011}y^{1010}+y^{2020}=y^{2020}-xy^{2021}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^{1011}-y^{1010}\right)^2=y^{2020}(1-xy)$$

$$\Leftrightarrow 1-xy=\left(\frac{x^{1011}-y^{1010}}{y^{1010}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1-xy}=\left|\frac{x^{1011}-y^{1010}}{y^{1010}}\right|\in\mathbb{Q}.$$

Vậy $\sqrt{1-xy}$ là một số hữu tỉ.

Mở rộng bài toán theo 3 biến ta có bài toán

Bài toán 4.3. *Cho x, y, z là các số hữu tỉ khác không thỏa mãn đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Chứng minh rằng $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ là một số hữu tỉ.*

Lời giải. Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z} \Leftrightarrow (x+y)z = xy$

$$\Leftrightarrow xy - xz - yz = 0.$$

Ta có: $x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+z^2+2.0$

$$= x^2+y^2+z^2+2(xy-xz-zy)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = (x+y-z)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} = |x+y-z| \in \mathbb{Q}.$$

Vậy $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ là số hữu tỉ.

Bài toán 5. *Cho x, y là các số hữu tỉ thỏa mãn đẳng thức $x^2+y^2+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2=2$. Chứng minh rằng $\sqrt{1+xy}$ là một số hữu tỉ.*

(Bài T4/424 TH&TT)

Lời giải. Với điều kiện $x+y \neq 0$, ta có:

$$x^2+y^2+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2=2$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)(x+y)^2+(xy+1)^2=2(x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^4-2(x+y)^2(1+xy)+(1+xy)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x+y)^2-(1+xy)\right]^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2=1+xy \Leftrightarrow \sqrt{xy+1}=|x+y| \in \mathbb{Q}.$$

Vậy $\sqrt{1+xy}$ là số hữu tỉ.

Do $\left[(x+y)^2-(1+xy)\right]^2 \geq 0$ với mọi x, y nên

$$x^2+y^2+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2 \geq 2.$$

Ta có bài toán mới sau đây:

Bài toán 5.1. *Cho x, y là các số hữu tỉ thỏa mãn $x+y \neq 0$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$x^2+y^2+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2 \geq 2 \quad (1).$$

Lời giải. Từ cách biến đổi bài toán gốc, ta có cách giải sau:

Cách 1. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (x^2+y^2)(x+y)^2+(xy+1)^2 \geq 2(x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^4-2(x+y)^2(1+xy)+(1+xy)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x+y)^2-(1+xy)\right]^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}.$$

Ngoài cách giải trên ta có các cách giải sau:

Cách 2. Đặt $z=-\frac{xy+1}{x+y}$

$$\Rightarrow xz+yz=-xy-1 \Rightarrow xy+yz+zx=-1.$$

Bất đẳng thức (1) trở thành:

$$x^2+y^2+z^2 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq -2(-1) = -2(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}.$$

Cách 3. BĐT $\Leftrightarrow (x+y)^2-2xy+\frac{(xy+1)^2}{(x+y)^2} \geq 2$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2+\frac{(xy+1)^2}{(x+y)^2} \geq 2(xy+1).$$

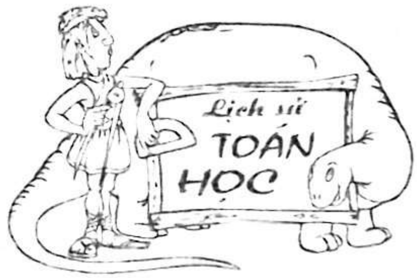
Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$(x+y)^2+\frac{(xy+1)^2}{(x+y)^2} \geq 2\sqrt{(x+y)^2\frac{(xy+1)^2}{(x+y)^2}}$$

$$= 2|xy+1| \geq 2(xy+1).$$

Vậy $x^2+y^2+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2 \geq 2.$

Bài viết minh họa một số bài toán của tác giả được đăng trên *Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ* và tác giả mong bạn đọc tiếp tục khai thác thêm các bài toán về số hữu tỉ.



GIỚI THIỆU VẮN TẮT LÝ THUYẾT TẬP HỢP NGÂY THƠ của CANTOR

NGUYỄN THỦY THANH
(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Lý thuyết tập hợp (LTTH) đã được sáng tạo ra bởi "*G.Cantor", một trong những nhà tư tưởng vĩ đại nhất của thế kỷ XIX"* (*B. Russel*).

Theo lời *Nikolas Bourbaki* (bút danh của các nhà toán học Pháp thế kỷ XX) thì

"Ngày nay về mặt lôgic mọi người đều thừa nhận rằng toàn bộ nền toán học hiện đại đều có thể rút ra từ một nguồn duy nhất là LTTH" [(1)].

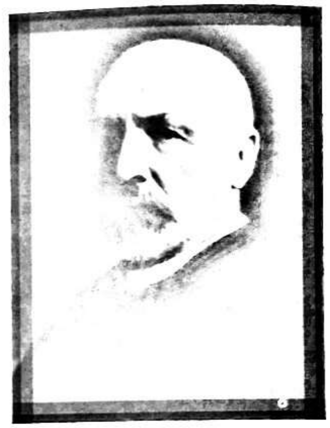
Lý thuyết tập hợp mà chúng tôi sẽ giới thiệu vắn tắt dưới đây thường được gọi là "*LTTH ngây thơ*" [(2)].

1°. Việc định nghĩa khái niệm tập hợp

"Tập hợp là gì?" Ta sẽ không cố tìm trả lời cho câu hỏi này bởi vì khái niệm tập hợp là khái niệm nguyên thủy đến mức ít nhất cho đến ngày nay khó mà đưa ra được định nghĩa chặt chẽ nào về tập hợp.

Có lẽ bạn đọc cũng không cần phải ngạc nhiên về điều đó.

Thật vậy, khi một khái niệm *P* được định nghĩa qua khái niệm *D* đơn giản hơn thì chính khái niệm *D* này cũng cần được định nghĩa qua khái niệm *C* đơn giản hơn nữa mà đến lượt mình nó cũng cần được định nghĩa nhờ khái niệm *B* còn đơn giản hơn nữa và vân vân ... Quá trình "lùi" này không thể vô tận. Do đó có thể quả quyết rằng cuối cùng ta sẽ đi đến khái niệm nguyên thủy hoàn toàn *A* không thể định nghĩa qua các khái niệm đơn giản hơn: những gì có thể làm được lúc này chỉ có thể là giải thích khái niệm *A* qua một số ví dụ.



Georg Cantor (1845-1918)

Ngay trong cuốn sách của mình "Cơ sở của LTTH" (1883) nhà sáng lập thiên tài *G. Cantor* cũng chỉ viết: *"Nói chung tôi hiểu tập hợp là một cái gì rất nhiều và có thể hình dung nó như một cái thống nhất ..."* Đó không phải là Định nghĩa lôgic của khái niệm tập hợp mà chỉ là lời giải thích và mô tả khái niệm đó.

Như vậy ta sẽ không tìm kiếm định nghĩa cho từ "tập hợp" . Nhưng ta có thể nói từ "*tập hợp*" có nghĩa là: *lớp* [lớp các hàm] ; *hệ thống* [hệ thống số thực]; *họ* [họ đường cong] ; *quần thể* [quần thể di tích] ; *bầy* [bầy thiên nga] ; *đàn* [đàn sếu bay qua] , ...

2°. Cách xác định tập hợp và các phép toán trên tập hợp .

Ta xem tập hợp được tạo thành từ các đối tượng hay cá thể. Các đối tượng tạo nên tập hợp được

1) N. Bourbaki, LTTH, 1965 tr.25 (tiếng Nga)
2) Hoàng Tụy, LTTH là gì ? Hà Nội - 1964, tr.93

gọi là các *phần tử* của tập hợp. Thông thường các tập hợp được chỉ bằng các chữ cái in hoa A, B, C, ... còn các phần tử của tập hợp được chỉ bằng các chữ cái thường a, b, c, ...

Để chỉ rằng a là phần tử của tập hợp A người ta viết $a \in A$ và đọc là "*a thuộc A*". Nếu a không phải là phần tử của A thì viết $a \notin A$ hoặc $a \bar{\in} A$ và đọc là "*a không thuộc A*". Khi khảo sát các tập hợp ta không loại trừ *tập hợp không chứa phần tử nào* gọi là *tập hợp rỗng* và ký hiệu là $\varnothing$. Chẳng hạn tập hợp nghiệm thực của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là rỗng.

Phương pháp đơn giản nhất để xác định một tập hợp là *phương pháp liệt kê* ra tất cả các phần tử của nó và đặt trong dấu ngoặc nhọn

$$\{a, b, c, ...\}.$$

Cách thứ hai là *chỉ rõ dấu hiệu* để phân biệt các phần tử thuộc tập hợp với các đối tượng không phải là phần tử của nó. Những dấu hiệu này thường được gọi là *thuộc tính đặc trưng*".

Giả sử cho hai tập hợp A và B. Từ hai tập hợp này ta nói về quan hệ bằng nhau và các phép toán để thành lập tập hợp mới.

1) *Quan hệ bằng nhau.* Hai tập hợp A và B được xem là bằng nhau và viết $A = B$ nếu chúng bao gồm cùng những phần tử như nhau, nghĩa là

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ và } B \subset A.$$

Nếu hai tập hợp A và B không bằng nhau thì viết $A \neq B$. Điều này có nghĩa rằng trong hai tập hợp A và B có ít nhất một tập hợp chứa một phần tử không có trong tập hợp kia.

2) *Phép hợp (phép cộng).* Hợp của hai tập hợp A và B là tập hợp C gồm tất cả các phần tử *thuộc ít nhất* một trong hai tập hợp đã cho, ký hiệu $C = A \cup B$. Như vậy

$$C = A \cup B = \{x : x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

Ví dụ 1. $A = \{0, 2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$

và $B = \{1, 3, 5, ..., 2n + 1, ...\}$.

Khi đó $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., n, ...\} = \mathbb{N}$.

3) *Phép giao.* Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp P gồm tất cả các phần tử đồng thời thuộc cả A lẫn B. Ký hiệu $P = A \cap B = \{x : x \in A \text{ và } x \in B\}$.

Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì A và B rời nhau.

Ví dụ 2. *Trong ví dụ 1 ta có* $A \cap B = \varnothing$.

4) *Phép trừ.* Hiệu của tập hợp A với tập hợp B là tập hợp H gồm tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B. Ký hiệu

$$H = A \setminus B = \{x: x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

Ví dụ 3. *Trong ví dụ 1 ta có*

$$\mathbb{N} \setminus \{1, 3, 5, ..., 2n + 1, ...\} = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}.$$

Các phép toán về tập hợp thỏa mãn các định luật thông thường của số học: giao hoán, kết hợp và phân phối. Tuy nhiên nó cũng có những tính chất rất xa lạ với số học.

i. $A \cup A = A$; $A \cup B = A$ nếu $B \subset A$;

ii. $A \cap A = A$; $A \cap B = A$ nếu $A \subset B$.

Nếu mỗi phần tử của tập hợp A cũng là phần tử của tập hợp B thì người ta gọi A là *tập hợp con* của B và ký hiệu $A \subset B$. Khi đó người ta nói A bao hàm trong B hay $B \supset A$ và nói B chứa A.

Từ định nghĩa suy rằng bao giờ cũng có $A \subset A$, tức là A là tập hợp con của chính nó. Cũng theo định nghĩa người ta xem tập hợp rỗng $\varnothing$ là tập hợp con của bất cứ tập hợp A nào. Thật vậy, nếu không như thế thì trong tập hợp $\varnothing$ phải chứa ít nhất một phần tử không chứa trong A. Nhưng trong $\varnothing$ phần tử như vậy không tồn tại vì $\varnothing$ là tập hợp không chứa phần tử nào.

Nếu đối với hai tập hợp A và B mà $A \subset B$ nhưng $A \neq B$ thì người ta nói rằng A là *tập hợp con thực sự* (THCTS) của tập hợp B.

3°. Tập hợp tương đương

Giả sử xét tập hợp A các phần tử tùy ý. Nếu đếm lần lượt các phần tử của tập hợp ấy mà đến một lúc nào đó ta *đếm hết được* các phần tử của nó thì người ta nói rằng A là *tập hợp hữu hạn các phần tử* và *số lượng phần tử* của A có thể biểu thị được bởi một số tự nhiên nào đó.

Ví dụ: 1) *Tập hợp các chữ cái Tiếng Việt là hữu hạn.*

2) *Trong tác phẩm "Người đếm cát", Archimedes đã tính số lượng hạt cát cần để lấp đầy vũ trụ là hữu hạn và bằng* 8.10^{63} *(?). Đó là tập hợp hữu hạn.*

Bên cạnh các tập hợp hữu hạn còn có những tập hợp mà khi đếm: mãi mãi vẫn còn những phần tử chưa được đếm tới. Tập hợp loại này có tên gọi là *tập hợp vô hạn phần tử*. Ở đây tính vô hạn phần tử có thể hiểu là số phần tử của tập hợp vô hạn *nhiều hơn bất cứ một số lượng nào định gán cho nó* ... Tập hợp vô hạn đơn giản nhất là tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$.

Từ ví dụ giản đơn về *quy tắc* sắp xếp chỗ ngồi cho khách trong khán phòng, nhà toán học thiên tài *G. Cantor* đã nảy ra một ý niệm thuần toán học là *phép tương ứng*. Quy tắc đó là: mỗi khách sẽ được dành một và chỉ một ghế và mỗi ghế chỉ dành cho một và chỉ một khách ngồi.

Từ đây, phép tương ứng đơn trị một - một (*gọi tắt là phép tương ứng một - một*) của *Cantor* ra đời. Nó cho phép ông nêu ra

Định nghĩa. 1^+) *Nếu theo một quy tắc nào đó mỗi phần tử a của tập hợp A đều tương ứng với một và chỉ một phần tử b của tập hợp B và theo quy tắc nào đó mỗi phần tử* $b \in B$ *đều tương ứng với một và chỉ một phần tử* $a \in A$ *thì giữa các phần tử của hai tập hợp A và B đã xác lập được một phép tương ứng một - một.*

2^+). *Nếu giữa các phần tử của hai tập hợp khác nhau A và B có thể xác lập một phép tương ứng một - một thì A và B được gọi là các tập hợp tương đương hay có cùng lực lượng. Ký hiệu:* $A \sim B$.

Quan hệ tương đương này có tính chất phản xạ $A \sim A$, đối xứng: nếu $A \sim B$ thì $B \sim A$ và bắc cầu: nếu $A \sim B$ và $B \sim C$ thì $A \sim C$.

Ví dụ. 1) *Hai tập hợp hữu hạn tương đương khi và chỉ khi số phần tử của chúng bằng nhau.*

2) *Tập hợp mọi số tự nhiên* $\mathbb{N}$ *tương đương với tập hợp mọi số chẵn với phép tương ứng một - một là* $f(n) = 2n$ *với* $n = 0, 1, 2, \ldots$

3) *Tập hợp mọi số tự nhiên* $\mathbb{N}$ *tương đương với tập hợp mọi số nguyên* $\mathbb{Z}$ *với phép tương ứng một - một là*

$$y = \left[\frac{x}{2}\right](-1)^x$$

trong đó $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, [\alpha]$ *là phần nguyên của số* α.

Ví dụ thứ hai vừa nêu là rất đặc biệt: đó là tập hợp vô hạn $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ lại *tương đương với một tập hợp con thực sự của nó* là tập hợp các số dương chẵn. Tính chất này hoàn toàn không có đối với các tập hợp hữu hạn. Điều này đã gợi ý cho *R. Dedekind* đưa ra định nghĩa mới về tập hợp vô hạn.

Định nghĩa (R.Dedekind). Một tập hợp được gọi là vô hạn nếu nó chứa một tập hợp con thực sự tương đương với nó.

Richard Dedekind (1831-1916)

4°. Lực lượng của tập hợp

Người sáng lập LTTH - *G. Cantor* đã nêu ra định nghĩa sau đây.

Định nghĩa. *Giả sử mọi tập hợp A, B, ... được phân thành các lớp sao cho hai tập hợp ở cùng một lớp khi và chỉ khi chúng tương đương nhau. Người ta xác lập sự tương ứng mỗi lớp tập hợp ấy một dấu hiệu α nào đó và sẽ gọi nó là lực lượng của tập hợp bất kỳ của lớp này. Ký hiệu lực lượng của tập hợp A là* card $A = \alpha$, *trong đó* card *là phần đầu của từ* cardinal *có nghĩa là bản số.*

Ta nêu ra ví dụ áp dụng sau đây. Giả sử lớp chứa tập hợp $A = \{a, b, c\}$ được đặt tương ứng với dấu hiệu "3". Khi đó có thể nói rằng tập hợp bất kỳ tương đương với tập hợp A (nói một cách đơn giản là bất cứ tập hợp nào gồm 3 phần tử) đều có lực lượng là 3.

Như vậy: dấu hiệu được gán cho lớp tập hợp tương đương nhau có thể *xem như ký hiệu lực lượng* của tập hợp đã cho. Từ định nghĩa và ví dụ suy rằng nếu lớp đã cho gồm các tập hợp tương đương $A, B, C, ..., E$ và lớp này được đặt tương ứng với bản số α thì

$$\alpha = \text{card } A,\ \alpha = \text{card } B,\ \alpha = \text{card } C, ...,$$
$$\alpha = \text{card } E.$$

Từ những lý giải ở trên ta có thể kết luận: lực lượng của một tập hợp là biểu thị một *cái chung của nó và của mọi tập hợp tương đương với nó.* Đối với các tập hợp hữu hạn lực lượng chính là số phần tử của nó. Đối với các tập hợp vô hạn khái niệm "số phần tử" là không có nghĩa. Do đó ta chỉ có thể nói đến lực lượng của nó. Từ đó, lực lượng là sự khái quát hóa tự nhiên của khái niệm số lượng.

Nếu hai tập hợp A và B không tương đương với nhau thì ta sẽ gán cho chúng *các dấu hiệu phân biệt nhau* α và β ($\alpha \neq \beta$), nghĩa là ta nói rằng các tập hợp này là lực lượng không bằng nhau.

Nhờ những phát hiện tinh vi của mình *G. Cantor* đã bắt đầu vén dần cái màn bí mật của cái vô hạn. Ông đã đi đến kết luận có ít nhất là hai kiểu vô hạn: *vô hạn đếm được* và *vô hạn không đếm được. Vô hạn kiểu thứ nhất*: đó là cái vô hạn của tập hợp số tự nhiên và của mọi tập hợp tương đương với nó, gọi là *các tập hợp đếm được*. Lực lượng của các tập hợp đếm được gọi là *lực lượng đếm được* và được ký hiệu là $\aleph_0$ (alép-zero). Đó là chữ cái đầu tiên trong bảng chữ cái của người Do Thái.

Kiểu vô hạn thứ hai: đó là loại vô hạn của các đoạn thẳng của đường thẳng. Lực lượng của các tập hợp này được gọi là lực lượng *Continuum*, trong đó *Continuum* có nghĩa là liên tục. Lực lượng *Continuum* được ký hiệu là *C*.

5°. So sánh các lực lượng. Các định lý cơ bản về LTTH ngây thơ

Sau khi nêu ra định nghĩa lực lượng, một vấn đề tự nhiên đặt ra là so sánh các lực lượng của các tập hợp vô hạn. Đầu tiên *Cantor* nêu ra

Định nghĩa. *Giả sử các tập hợp A và B có lực lượng tương ứng là α và β. Khi đó, nếu*

1) A và B không tương đương,

ii) nhưng tập hợp B có chứa tập hợp con $B^* \sim A$ thì người ta nói rằng tập hợp B có lực lượng lớn hơn, còn tập hợp A có lực lượng bé hơn và viết

$$\alpha < \beta \ , \beta > \alpha.$$

Chẳng hạn, nếu $A = \{a_1, ..., a_{32}\}$ và $B = \{b_1, ..., b_{49}\}$ thì card $A = 32$, card $B = 49$. Rõ ràng là A không tương đương với B nhưng $A \sim B^* = \{b_1, ..., b_{32}\} \subset B$. Do đó card $A <$ card B.

Trong LTTH "ngây thơ" hai thành tựu sau đây được xem là tinh vi nhất.

Định lý Cantor – Bernstein. *Nếu mỗi tập hợp trong hai tập hợp cho trước là tương đương với một tập hợp con thực sự của tập hợp kia thì chúng tương đương với nhau và có cùng lực lượng.*

Felix Bernstein (1878-1956)

Trong một thời gian dài *G. Cantor* đã không thành công trong việc chứng minh định lý này. Ông đã thông báo điều này cho *R. Dedekind*. Đến đầu thập niên chín mươi của thế kỷ XIX một sinh viên trẻ của *R. Dedekind* là *Felix Bernstein*[1] (1878 - 1956) đã chứng minh thành công. Như vậy *G. Cantor* đã giải quyết trọn vẹn điều kiện để hai tập hợp có lực lượng bằng nhau.

Tiếp theo, *G. Cantor* đã chứng minh Định lý *tồn tại vô số các lực lượng khác nhau* của các tập hợp vô hạn. Đó là

***Định lý Cantor* (1878).** *Lực lượng của tập hợp mọi tập hợp con của tập hợp không rỗng bất kỳ cho trước là lớn hơn lực lượng của chính tập hợp đó.*

Qua định lý này, *Cantor* còn chỉ ra "thuật toán" tìm tập hợp có lực lượng lớn hơn tập hợp đã cho.

Chẳng hạn, xét tập hợp $S = \{a, b, c\}$. Khi có tập hợp mọi tập hợp con của S sẽ là

$$P(S) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Rõ ràng là card $S = 3 <$ card $P(S) = 8$.

Từ đó tồn tại các lực lượng lớn hơn lực lượng bất kỳ cho trước. Do đó *không có lực lượng nào là lớn nhất*. Nhưng rồi một câu hỏi khác lại nảy ra: *Có tồn tại hay không lực lượng bé nhất*? và *G. Cantor* đã trả lời rằng: *Có tồn tại* ! *Đó chính là lực lượng alep-zero* !

6°. Tập hợp đếm được và không đếm được

Giả sử cho tập hợp bất kỳ A. Khi đó

1) Nếu tồn tại một phép tương ứng một - một từ A đến tập hợp $\{1, 2, ..., n-1, n\}$ thì A được gọi là tập hợp đếm được hữu hạn gồm n phần tử ?

---

1) Có tài liệu viết nhầm *Felix Bernstein* thành S.N. Bernstein (1880 - 1968) là nhà Toán học vĩ đại Nga.

2) Nếu tồn tại một phép tương ứng một - một từ A đến $\mathbb{N}$ thì A được gọi là tập hợp vô hạn đếm được. Nói một cách khác, một tập hợp được gọi là đếm được nếu các phần tử của nó có thể đánh số bởi mọi số tự nhiên.

Ví dụ. 1) *Tập hợp* $A = \{1, 4, 9, ..., n^2, ...\}$ *là tập hợp đếm được với phép tương ứng một - một là* $f(n) = n^2, n = 1,2,....$

2) *Tập hợp mọi số dương chẵn và tập hợp mọi số dương lẻ đều là những tập hợp đếm được với phép tương ứng một - một lần lượt là*

$$f(n) = 2n \text{ và } f(n) = 2n - 1, n = 1, 2, \ldots$$

3) *Tập hợp các số nguyên* $\mathbb{Z}$ *là đếm được với phép tương ứng một - một là*

$$f(n) = \left[\frac{n}{2}\right](-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

trong đó $[\beta]$ *là phần nguyên của số* β, *hay*

$$f(n) = \frac{n}{2} \text{ nếu n chẵn và bằng } \frac{1-n}{2} \text{ nếu n lẻ.}$$

4) *Sử dụng phương pháp đường chéo do mình đề ra Cantor đã chứng minh rằng tập hợp các số hữu tỷ* $\mathbb{Q}$ *là đếm được.*

Vẫn với phương pháp đường chéo, *G. Cantor* đã chứng minh định lý cơ bản về tập hợp không đếm được. Đó là

***Định lý* (Cantor).** *Tập hợp mọi số thực ở giữa* 0 *và* 1 *là tập hợp không đếm được.*

Và người ta gọi một tập hợp tương đương với tập hợp các số thực trong khoảng (0, 1) *là tập hợp lực lượng Continuum hay lực lượng C,* trong đó C là chữ cái đầu của từ *Continuum* nghĩa là liên tục.

Ví dụ. 1) *Mọi đoạn thẳng* $[a, b]$ *đều có lực lượng* C *vì rằng* $(0,1) \sim [a, b]$ *với phép tương ứng một - một là* $y = a + (b-a)x$, $x \in (0, 1)$.

2) *Tập hợp mọi số thực* $\mathbb{R}$ *có lực lượng C vì* $(0,1) \sim \mathbb{R}$ *với phép tương ứng một - một là*

$$y = \tan(2x-1)\frac{\pi}{2}, x \in (0, 1).$$

3) *Người ta cũng đã chứng minh rằng tập hợp các số vô tỷ và tập hợp các số siêu việt đều có lực lượng* C.

* *

*

Vào thời điểm khi các thành tựu của *G. Cantor* được thừa nhận một cách rộng rãi và triệt để thì người ta phát hiện ra một số nghịch lý đầu tiên do sử dụng quá ư tự do các khái niệm về tập hợp (như tập hợp mọi tập hợp có thể có hay tập hợp không tự chứa nó như một phần tử là những tập hợp không tồn tại.)

Nhưng *Cantor* vẫn giữ niềm tin vào lý thuyết của mình và tuyên bố: "*Tôi tin LTTH của tôi chắc chắn như tảng đá*".

David Hilbert (1862-1943)

Còn *D. Hilbert* thì khẳng định:

"*Tôi hình dung rằng đây là đóa hoa tuyệt trần nhất của tư duy toán học và là một trong những thành tựu vĩ đại nhất của hoạt động con người trong lĩnh vực tư duy thuần túy*".

CÁC LỚP THCS

Bài T1/547 (Lớp 6). Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a; b)$ sao cho $\frac{a^2-3}{ab+3}$ cũng là số nguyên dương.

NGUYỄN TẤN NGỌC

(GV THCS P. Bình Định, An Nhơn, Bình Định)

Bài T2/547 (Lớp 7). Cho tam giác ABC với $\widehat{BAC}=30^0, \widehat{ABC}=80^0$. Trên nửa mặt phẳng không chứa điểm B với bờ là đường thẳng AC, lấy điểm D sao cho tam giác DAC cân tại D và $\widehat{ADC}=160^0$. Tính số đo của góc $\widehat{DBC}$.

HUỲNH THANH TÂM

(CB Bưu điện TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/547. x, y là hai số thực thỏa mãn $x \geq 2$, $0 < y \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x^2+y}+\frac{y}{y^2+x} \leq 2\left(\frac{1}{x+4}+\frac{1}{y+4}\right).$$

NGUYỄN KHẮC TOÀN

(36 Đào Nhuận, Hải Phòng)

Bài T4/547. Cho tam giác ABC cân tại C, có $\widehat{C}=30^0$, đường cao AH. Từ trung điểm M của cạnh BC dựng đường vuông góc với BC cắt cạnh AC tại N. Phân giác của góc $\widehat{NBC}$ cắt MN tại P. Phân giác của góc $\widehat{NAH}$ cắt BC tại Q. Chứng minh $PN = PQ$ và $\Delta ANP = \Delta BQP$.

PHAN THANH QUANG

(65/4 Nguyễn Văn Giai, P. Đa Cao, Q1. TP. Hồ Chí Minh)

Bài T5/547. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \neq 0$, $2a - b + c = 0$. Xét phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ (1).

a) Chứng minh rằng hai số nguyên liên tiếp bất kỳ không thể đồng thời là nghiệm của phương trình bậc hai (1).

b) Chứng minh rằng nghịch đảo của căn bậc hai của hai số nguyên dương phân biệt không thể đồng thời là nghiệm của phương trình bậc hai (1).

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/547. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x>0, y>0, z>0 \\ x+y+z=3 \\ x^2y+y^2z+z^2x=4 \end{cases}.$$

TRỊNH XUÂN TÌNH

(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Nội)

Bài T7/547. Cho $0 \leq x, y \leq 1$. Chứng minh rằng

$$8(x+y-1)^2-9xy(x+y-1)+xy \geq 0.$$

NGUYỄN ANH VŨ, NGUYỄN TẤN MẠNH

(GV THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định)

Bài T8/547. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a, $SA = SC = a\sqrt{3}$, $SB = SD$. Gọi φ là góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD). Chứng minh rằng $\cos\varphi \geq \frac{\sqrt{6}}{3}$.

NGUYỄN QUANG NAM

(GV THPT Quỳ Hợp 2, Nghệ An)

Bài T9/547. Chứng minh rằng trong tam giác ABC bất kỳ ta luôn có

$$1+\frac{r}{R} \leq \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2} \leq \sqrt{2+\frac{r}{2R}},$$

trong đó ký hiệu r, R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/547. Cho $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Xét dãy $(x_k)_{k\geq 0}$ xác định bởi $x_0 = c \in \mathbb{Z}; x_{k+1} = P(x_k), \forall k \geq 0$. Biết mỗi số nguyên dương m đều là ước của một số x_k ($x_k \neq 0$) nào đó của dãy. Chứng minh $\deg P = 1$.

ĐỖ LÊ HẢI THỤY
(*GV THPT chuyên Bảo Lộc, Lâm Đồng*)

Bài T11/547. Tìm tất cả các hàm $f:(0;+\infty) \to (0;+\infty)$ sao cho với mọi x, y dương ta luôn có: $f^2(x) \geq f(x+y)(f(x)+y)$.

NGUYỄN ĐỨC TƯỜNG
(*Pleiku, Gia Lai*)

Bài T12/547. Cho tam giác nhọn ABC, không cân tại A và nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau ở D. Gọi M, N lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACD, ABD. Gọi K là giao điểm của BM với CN; E là trung điểm của BC. Đường thẳng qua E và vuông góc với AE cắt các đường thẳng OM, ON lần lượt tại X, Y. Giả sử BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MEN. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp hai tam giác DBC, DXY tiếp xúc với nhau.

NGUYỄN ANH TUẤN
(*GV THPT chuyên Bắc Giang*)

Bài L1/547. Một lò xo nhẹ có độ cứng $k = 100$ N/m và chiều dài tự nhiên $l_0 = 0,3$ m, một đầu cố định, một đầu gắn với khối gỗ hình hộp chữ nhật nhỏ có khối lượng $m = 1$ kg. Hệ vật (lò xo và khối gỗ) được đặt trên mặt bàn nằm ngang. Biết hệ số ma sát giữa khối gỗ và mặt bàn là $\mu = 0,1$, lấy gia tốc trọng trường $g = 10$ m/s^2. Kéo khúc gỗ trên mặt bàn để lò xo dãn thêm 0,1 m rồi thả nhẹ cho khối gỗ dao động. Xác định chiều dài ngắn nhất của lò xo trong quá trình khúc gỗ dao động.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/547. Một máy biến áp lí tưởng có cuộn sơ cấp mắc vào điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi. Khi đồng thời giảm $2a$ vòng dây ở cuộn sơ cấp và $3a$ vòng dây ở cuộn thứ cấp thì tỉ số điện áp hiệu dụng ở hai đầu cuộn thứ cấp để hở không thay đổi so với ban đầu. Khi đồng thời tăng b vòng dây hoặc đồng thời giảm c vòng dây ở cả hai cuộn sơ cấp và thứ cấp thì điện áp hiệu dụng hai đầu cuộn thứ cấp để hở đều thay đổi một lượng là 10% điện áp hiệu dụng hai đầu cuộn sơ cấp. Tính tỉ số $\dfrac{b}{c}$.

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEM IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/547 (For 6th grade). Find all pairs of positive integers (a; b) so that $\dfrac{a^2-3}{ab+3}$ is also a positive integer.

Problem T2/547 (For 7th grade). Given a triangle ABC with $\widehat{BAC} = 30^0, \widehat{ABC} = 80^0$. On the half plane which does not contains B determined by the line AC, choose the point D so that the triangle DAC is isosceles with the vertex angle $\widehat{ADC} = 160^0$. Find the measurement of the angle $\widehat{DBC}$.

Problem T3/547. Given real numbers x, y satisfying $x \geq 2$, $0 < y \leq 1$. Prove that

$$\frac{x}{x^2+y} + \frac{y}{y^2+x} \leq 2\left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{y+4}\right).$$

Problem T4/547. Given an isosceles triangle ABC with the vertex angle $\hat{C} = 30^0$. Let AH be one of the altitudes. The perpendicular line to BC at the midpoint M of BC intersects the side AC at N. The angle bisector of $\widehat{NBC}$ intersects MN at P. The angle bisector of $\widehat{NAH}$ intersects BC at Q. Show that $PN = PQ$ and $\Delta ANP = \Delta BQP$.

Problem T5/547. Given real numbers a, b, c satisfying $a \neq 0$, $2a - b + c = 0$. Consider the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ (1). ☞

☞ a) Show that two consecutive integers cannot be both solutions of (1).

b) Show that the reciprocals of the square root of two distinct positive integers cannot be both solutions of (1).

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/547. Find positive solutions of the system of equations

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2y+y^2z+z^2x=4 \end{cases}.$$

Problem T7/547. Given $0 \le x, y \le 1$. Show that

$$8(x+y-1)^2-9xy(x+y-1)+xy \ge 0.$$

Problem T8/547. Given a pyramid *S.ABCD* where the base *ABCD* is a rhombus of side a, $SA = SC = a\sqrt{3}$, $SB = SD$. Let φ be the angle between two planes (*SAB*) and (*SCD*). Show that $\cos\varphi \ge \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Problem T9/547. Given any triangle *ABC*, show that $1+\frac{r}{R} \le \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2} \le \sqrt{2+\frac{r}{2R}}$, where r, R respectively are the inradius and circumradius of *ABC*.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/547. Given $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. The sequence $(x_k)_{k\ge 0}$ is determined as follows $x_0 = c \in \mathbb{Z}; x_{k+1} = P(x_k), \forall k \ge 0$. Assume that each positive integer m is a divisor of some x_k ($x_k \ne 0$). Show that $\deg P = 1$.

Problem T11/547. Find all functions $f:(0;+\infty) \to (0;+\infty)$ so that for arbitrary positive numbers x, y, $f^2(x) \ge f(x+y)(f(x)+y)$.

Problem T12/547. Given an acute triangle *ABC* inscribed in the circle (*O*) with $AB < AC$. The tangents at *B*, *C* to (*O*) intersect at *D*. Let *M*, *N* respectively be the circumcenters of *ACD*, *ABD*. Let *K* be the intersection between *BM* and *CN*; and *E* the midpoint of *BC*. The line which passes through *E* and is perpendicular to *AE* intersects the lines *OM*, *ON* respectively at *X*, *Y*. Assume that *BC* is a tangent to the circumcircle of *MEN*. Show that the circumcircles of *DBC*, *DXY* are tangent to each other.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

****

Giải trí toán học

ĐÓN XUÂN

Cùng bạn chung vui với Tết Mèo
Nhớ từng năm tháng vượt gieo neo
Nghiệm đời chịu khó không cam khổ
Tu nghiệp chuyên sâu thoát cảnh nghèo
Mơ tới đoạn giàu lo khám phá
Vươn lên tầm khá gắng noi theo
Đón chào Quý Mão niềm tin lớn
Tương ái, tương thân vững mái chèo.

ĐÀO TAM
(*Hội Cựu giáo chức - Trường ĐH Vinh*)

CHÚC MỪNG XUÂN QUÝ MÃO

Toán học mừng vui đến muôn nhà
Chúc cho bạn đọc khắp gần xa
Năm mới luôn tràn đầy khí thế
Học hành tấn tới mãi thăng hoa
Muôn điều tốt đẹp sẽ bay về
Khắp chốn thị thành tới làng quê
Hổ xám ngoắt đuôi chào tạm biệt
Mèo ngoan râu vuốt cười hả hê
Tuổi trẻ tài cao quyết xông pha
Bao bài toán khó chẳng nề hà
Đại số, hình sơ... không nao núng
Quý Mão xuân về rộn khúc ca

LÊ QUANG HÀO
(*B4 – 02 Ngô Sĩ Liên, P. An Hòa, TP. Rạch Giá, Kiên Giang*)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/543. *Tính*

$$S=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{2020}{2021!}+\frac{2022}{2022!}$$

với $n!=1.2.3\ldots n$.

Lời giải. Với mỗi số nguyên dương n ta có:

$$(n+1)!=(n!)(n+1).$$

Từ đó:

$$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}.$$

Cho số nguyên dương n lấy các giá trị nguyên liên tiếp từ 1 đến 2020 có:

$$S=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{2020}{2021!}+\frac{2022}{2022!}$$

$$=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{2020!}-\frac{1}{2021!}+\frac{1}{2021!}=1.$$

Nhận xét. Có bạn viết nhầm phân số cuối cùng nên ra đáp số khác. Các bạn sau có lời giải đúng. **Nghệ An:** *Phạm Trần Linh Đan*, 6C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; *Hoàng Văn Duy*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Ngọc Trâm, Lê Thời Trí Dũng*, 6A, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh; **Quảng Ngãi**: *Huỳnh Diễm Quỳnh*, 6B, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **TP. Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Trịnh Phương Minh*, 6/14, THCS Lê Quý Đôn, Q.3.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/543. *Cho hai đa thức*

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

và $\quad g(x)=(c-b)x^2+(c-a)x+a+b,$

trong đó a, b, c là các số nguyên và $b\neq c$. *Biết rằng f(x) và g(x) có một nghiệm chung. Chứng minh rằng* $a+b+2009c$ *chia hết cho 3.*

Lời giải. Ta có:

$$f(x)-g(x)=(a+b-c)x^2+(a+b-c)x-(a+b-c)$$
$$=(a+b-c)\left(x^2+x-1\right).$$

Xét 2 trường hợp :

1) Nếu $a+b-c=0$ thì $a+b+2009c=2010c$ chia hết cho 3.

2) Nếu $a+b-c\neq 0$ thì nghiệm chung x_0 của $f(x)$ và $g(x)$ là nghiệm của $x^2+x-1=0$ là số vô tỷ. Chia $f(x)$ cho x^2+x-1 ta được thương là q và dư là $mx+n$. Thay x_0 vào $f(x)=\left(x^2+x-1\right)q+(mx+n)$ ta có:

$$0=\left(x_0^2+x_0-1\right)q+\left(mx_0+n\right)=mx_0+n\,.$$

Do x_0 là số vô tỷ ta có $m=n=0$. Vậy $f(x)=\left(x^2+x-1\right)q+(mx+n)=\left(x^2+x-1\right)q$.

Vì $f(x)=ax^2+bx+c$ cho nên $a=b=-c$. Khi đó $a+b+2009c=2007c$ là bội của 3.

***Nhận xét*.** Chỉ có bạn *Lê Tuấn Hiệp*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, **Hưng Yên** có lời giải đúng.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/543. *Giải hệ* $\begin{cases}8x^4=y(16+3x^4) & (1)\\ 8y^4=z(16+3y^4) & (2).\\ 8z^4=x(16+3z^4) & (3)\end{cases}$

Lời giải. Từ hệ suy ra $x,y,z\geq 0$.

Dễ thấy nếu một trong ba số x,y,z bằng 0 thì hai số còn lại cũng bằng 0; chẳng hạn nếu $x=0$, từ (1) suy ra $y=0$ thay vào (3) ta được $z=0$.

Nhận thấy $(x,y,z)=(0,0,0)$ thỏa mãn hệ.

Ta xét trường hợp $x,y,z>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho bốn số dương, ta có:

$$16+3x^4=16+x^4+x^4+x^4\geq 4\sqrt[4]{16.x^4.x^4.x^4}=8x^3.$$

Do đó từ (1), ta có:

$$8x^4=y\left(16+3x^4\right)\geq y.8x^3\Rightarrow x\geq y.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x^4=16\Leftrightarrow x=2$.

Tương tự: $(2)\Rightarrow y\ge z$; $(3)\Rightarrow z\ge x$.

Nghĩa là $x\ge y\ge z\ge x$.

Suy ra $x=y=z=2$, thỏa mãn hệ.

Vậy hệ đã cho có tập hợp nghiệm là:

$$(x,y,z)\in\{(0,0,0);(2,2,2)\}.$$

Nhận xét. Có thể giải bằng cách khác như sau:

Với $x,y,z>0$ hệ tương đương với $\begin{cases}\frac{8}{y}=\frac{16}{x^4}+3\\ \frac{8}{z}=\frac{16}{y^4}+3\\ \frac{8}{x}=\frac{16}{z^4}+3\end{cases}$.

Đặt $a=\frac{2}{x},\ b=\frac{2}{y},\ c=\frac{2}{z}\ (a,b,c>0)$.

Ta được $\begin{cases}a^4+3=4b & (4)\\ b^4+3=4c & (5)\\ c^4+3=4a & (6)\end{cases}$.

Nếu a,b,c không đồng thời bằng nhau, chẳng hạn $a>b$ (các trường hợp khác, làm tương tự), từ (4), (5), (6) suy ra mâu thuẫn $a>b>c>a$. Vậy $a=b=c$.

Thay vào hệ , ta được:

$a^4-4a+3=0\Leftrightarrow(a-1)^2(a^2+2a+3)=0\Leftrightarrow a=1$.

Từ đó có $x=y=z=2$.

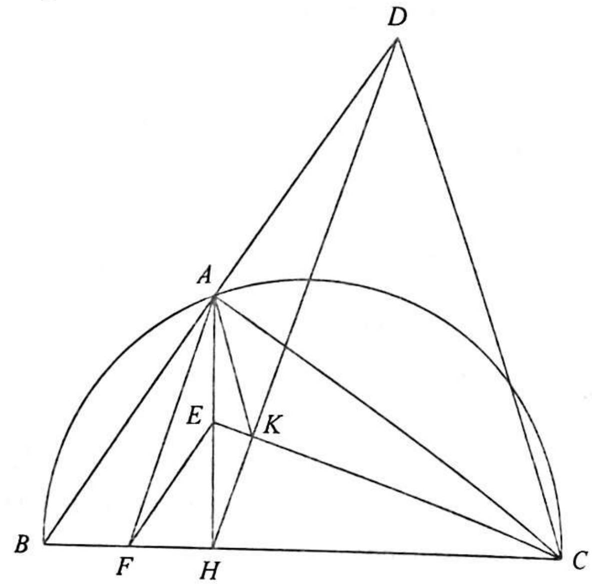
Các bạn sau đây có bài giải tốt :

Nghệ An: *Nguyễn Đăng Quang, Nguyễn Thị Bảo Ngọc, Nguyễn Văn Việt*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; *Võ Đức Lộc*, 8A, *Hồ Tùng Lâm*, 8C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Trần Diệu Linh*, 9A, *Dương Tuấn Vũ*, 8G, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh, *Phan Thu Trang*, 9E, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ; **Bình Định:** *Nguyễn Nguyên Thịnh*, 9A4, THCS P. Bình Định, An Nhơn; **Phú Thọ:** *Kiều Minh Vương*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Qúy Đôn, Q.3; **Sơn La:** *Lương Hữu Bách*, 9A1, THCS Nguyễn Trãi , TP. Sơn La; **Thanh Hóa:** *Trần Cẩm Tú*, 9B, THCS Trần Phú, Nông Cống.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/543. *Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính BC. A là điểm di động trên (O) không trùng với B, C. Gọi H là hình chiếu của A trên BC, E là trung điểm của AH. Đường thẳng qua H và vuông góc với CE cắt đường thẳng BA tại D. Chứng minh CD có độ dài không đổi.*

Lời giải.



Cách 1. Gọi F là trung điểm của BH.

Vì EF là đường trung bình của tam giác AHB nên $EF\parallel AB$, suy ra $EF\perp AC$.

Tam giác AFC có $FE\perp AC$, $AE\perp CF$ nên E là trực tâm, do đó $CE\perp AF$. Mà $CE\perp DH$ nên $AF\parallel DH$.

Tam giác DBH có F là trung điểm của BH, $FA\parallel DH$ nên FA là đường trung bình, do đó A là trung điểm của BD.

Tam giác BCD có CA là trung tuyến đồng thời là đường cao nên ΔBCD cân tại C, do đó $CD=CB$.

Vậy $CD=2R$ có độ dài không đổi.

Cách 2. Gọi K là giao điểm của HD và CE.

Tứ giác $CKAD$ có $\widehat{CKD}=\widehat{CAD}=90^\circ$ nên $CKAD$ là tứ giác nội tiếp, ta có $\widehat{ADK}=\widehat{ACK}$.

Từ đó suy ra $\Delta DHB\backsim\Delta CEA$ (g.g), ta có:

$$\frac{DB}{CA}=\frac{BH}{AE}\qquad(1).$$

Lại có $\Delta AHB\backsim\Delta CAB$ (g.g), suy ra:

$$\frac{BH}{AH}=\frac{AB}{AC}\qquad(2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DB}{2CA}=\frac{AB}{AC}$, do đó $DB = 2AB$.

Vậy A là trung điểm của BD, suy ra tam giác BCD cân tại C, do đó $CD = CB = 2R$ (không đổi).

Nhận xét. Bài toán có nhiều cách giải. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Bình Định: *Nguyễn Hữu Trí*, 11A1, THPT Số 2 Phù Cát; **Nghệ An:** *Lưu Trọng Phúc*, 9B, THCS Đội Cung, TP. Vinh; *Nguyễn Đăng Quang*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Thọ:** *Kiều Minh Vương*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Sơn La:** *Lương Hữu Bách*, 9A1, THCS Nguyễn Trãi, TP. Sơn La; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Đức Quảng*, 9K, THCS Trần Mai Ninh.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/543. *Cho x, y là các số thực thỏa mãn* $27x^3+216y^3=16$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$A=\frac{(x+2y+1)^3}{3(x^2+y^2)-2(2x+y)+3}.$$

Lời giải. Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$27x^3+8+8\geq 3.\sqrt[3]{27x^3.8.8}=36x;$$

$$216y^3+8+8\geq 3\sqrt[3]{216y^3.8.8}=72y.$$

Suy ra: $16+32=27x^3+216y^3+32\geq 36x+72y$. Do đó

$$x+2y\leq\frac{4}{3}\ (*)\Leftrightarrow(x+2y+1)^3\leq\left(\frac{4}{3}+1\right)^3=\frac{343}{27}.$$

Lại có:

$$3(x^2+y^2)-2(2x+y)+3$$

$$=3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)+3\left(y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}\right)+\frac{4}{3}$$

$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$$

$$\geq\frac{4}{3}\ (**).$$

Do đó $A\leq\frac{343}{27}:\frac{4}{3}=\frac{343}{36}$;

$A=\frac{343}{36}$ khi và chỉ khi x, y đồng thời thoả mãn các điều kiện sau:

$$27x^3+216y^3=16;\ 3x=2;$$

$$6y=2;\ x-\frac{2}{3}=0;\ y-\frac{1}{3}=0.$$

Vậy A có giá trị lớn nhất bằng $\frac{343}{36}$ khi $x=\frac{2}{3};\ y=\frac{1}{3}$.

Nhận xét. Đa số các bạn gửi bài đều cho lời giải đúng. Mấu chốt của bài toán là chỉ ra được BĐT (*) và (**). Việc chỉ ra BĐT (*) có nhiều cách. Có bạn đã chứng minh BĐT

$$a^3+b^3\geq\frac{(a+b)^3}{4}\ \text{(đẳng thức xảy ra khi } a=b)$$

rồi vận dụng $16=(3x)^3+(6y)^3\geq\frac{(3x+6y)^3}{4}$ để suy ra BĐT (*). Có bạn sử dụng BĐT Bunyakovsky cho 3 dãy số để có

$(3x+6y+2)^3\leq(27x^3+216y^3+8)(1+1+1)(1+1+1)$ $=216$, từ đó suy ra BĐT (*).

Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Kiều Minh Vương*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Sơn La:** *Lương Hữu Bách*, 9A1, THCS Nguyễn Trãi, TP. Sơn La; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Việt, Nguyễn Hữu Triều, Nguyễn Thị Bảo Ngọc, Nguyễn Đăng Quang*, 9B, THCS Lý Nhật Quang.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/543. *Tìm số nguyên tố p để tổng* $A=7^p+9p^6$ *là số chính phương.*

Lời giải. Theo giả thiết ta có:

$$A=7^p+9p^6=a^2, a\in\mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow 7^p=(a-3p^3)(a+3p^3)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-3p^3=7^u\\ a+3p^3=7^v\end{cases},\ \text{với } u,v\in\mathbb{N}, u<v, u+v=p$$

$$\Rightarrow 6p^3=7^u(7^{v-u}-1)\quad(1).$$

• Nếu $u=0$ thì $v=p$. Từ (1) ta được: $6p^3=7^p-1$.

Theo định lý Fermat nhỏ ta có:

$$7^p \equiv 7 \pmod p \Rightarrow 7^p - 1 \equiv 6 \pmod p.$$

Mà $6p^3 \equiv 0 \pmod p$, suy ra:

$$6 \equiv 0 \pmod p \Rightarrow p = 2 \text{ hoặc } p = 3.$$

Thử lại, với $p = 2$ ta có:

$$A = 7^2 + 9.2^6 = 49 + 576 = 625 = 25^2$$

là số chính phương.

Với $p = 3$ ta có:

$$A = 7^3 + 9.3^6 = 343 + 6561 = 6904$$

không là số chính phương.

• Xét $u \geq 1$ thì $7^u \geq 7$. Từ (1) ta có:

$$7^u \mid 6p^3, \text{ mà } (7^u, 6) = 1 \text{ nên } 7^u \mid p^3.$$

Vì p là số nguyên tố nên $p = 7$.

Thử lại, với $p = 7$ ta có:

$$A = 7^7 + 9.7^6 = 7^6.16 = (7^3.4)^2$$

là số chính phương.

Kết luận: $p = 2, p = 7$ là các số nguyên tố cần tìm.

Nhận xét. Đây là bài toán số học cơ bản, có khá nhiều bạn tham gia giải bài này. Trong lời giải đa số các bạn sử dụng định lý Fermat nhỏ để đánh giá tìm p. Các bạn sau có lời giải tốt:

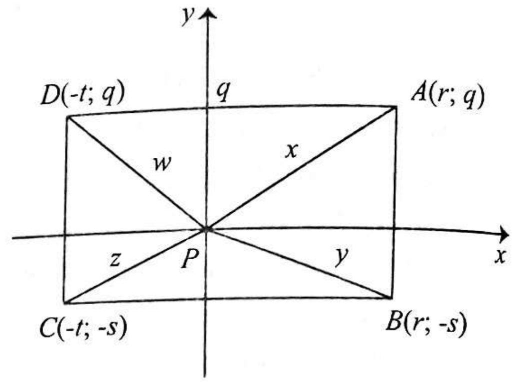
Hưng Yên: *Lê Tuấn Nghĩa*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Đức Quảng*, 9K, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Quảng Nam:** *Trần Phạm Minh Đạt*, *Ngô Gia Trường*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Nghệ An:** *Hồ Xuân Việt Hoàng*, 8C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Nội:** *Trần Việt Anh*, 9C, TH, THCS&THPT Archimedes Đông Anh; **Đà Nẵng:** *Tô Đông Hải*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/543. *Cho x, y, z là ba số thực dương. Xét hình chữ nhật ABCD có điểm P nằm trong miền trong thỏa mãn PA = x, PB = y, PC = z. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật ABCD là bao nhiêu?*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh diện tích lớn nhất của hình chữ nhật bằng $xz + y\sqrt{x^2 + z^2 - y^2}$.

Đặt $PD = w$. Xét hệ trục tọa độ có gốc $P(0;\,0)$ và các điểm $A(r;\,q)$, $B(r;\,-s)$, $C(-t;\,-s)$, $D(-t;\,q)$ với q, r, s, t là các số thực dương.



Khi đó:

$$x^2 = q^2 + r^2;\; y^2 = r^2 + s^2;\; z^2 = s^2 + t^2;\; w^2 = t^2 + q^2.$$

Suy ra: $x^2 + z^2 = y^2 + w^2 = \alpha^2$, ở đây w và α được hoàn toàn xác định theo x, y, z.

Ta có diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là:

$$S = (q+s)(t+r) = (qr + st) + (qt + sr).$$

Theo BĐT Bunyakovsky ta có:

$$(qt + sr)^2 \leq (q^2 + r^2)(t^2 + s^2);$$

$$(qr + st)^2 \leq (r^2 + s^2)(q^2 + t^2).$$

Đẳng thức xảy ra $qs = rt$.

Do đó: $S \leq \sqrt{(q^2 + r^2)(t^2 + s^2)} + \sqrt{(r^2 + s^2)(q^2 + t^2)}$

$$= xz + yw = xz + y\sqrt{x^2 + z^2 - y^2} \text{ (đpcm).}$$

Hơn nữa, bằng cách đặt

$$q = \frac{wx}{\alpha}, r = \frac{xy}{\alpha}, s = \frac{yz}{\alpha}, t = \frac{zw}{\alpha}$$

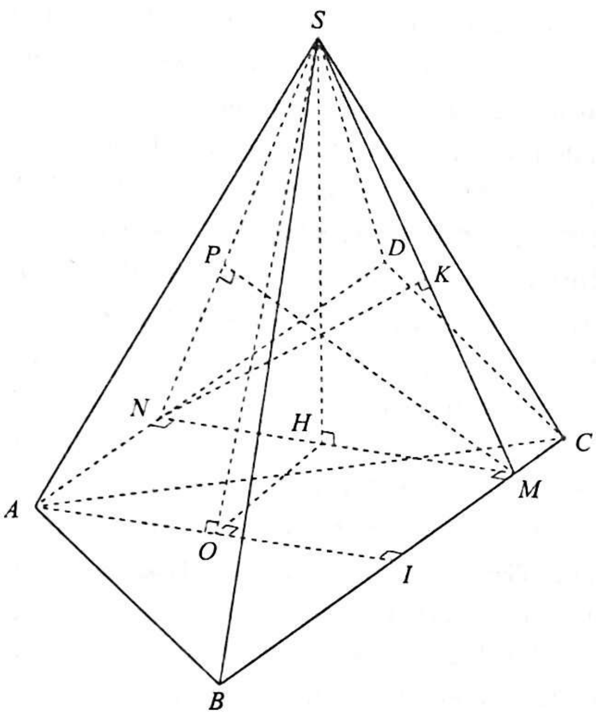
thì hình chữ nhật thu được có diện tích lớn nhất.

Nhận xét. Một số bạn xét thiếu trường hợp và có đánh giá không đúng nên dẫn đến kết quả sai. Dùng phương pháp tọa độ để giải bài này sẽ cho lời giải ngắn gọn. Bạn *Lê Tuấn Nghĩa*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên** có lời giải đúng.

NHƯ HOÀNG

Bài T8/543. *Trong mặt phẳng (α) cho trước lấy ba điểm A, B, C cố định sao cho tam giác ABC đều cạnh a. Trong không gian lấy điểm S thay đổi* *không thuộc mặt phẳng (α) sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC, SA = a. Chứng minh điểm S luôn di động trên một đường tròn cố định.*

Lời giải.



Dựng hình bình hành $ABCD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (α) và I là trung điểm của cạnh BC thì $AI \perp BC$. Qua SH dựng mặt phẳng vuông góc với đường thẳng BC cắt các đường thẳng BC, AD lần lượt tại M, N. Dựng các đường cao MP, NK của tam giác SMN. Trong mặt phẳng (ABC) thì từ:

$$MN \perp BC, AI \perp BC$$

$$\Rightarrow MN \,//\, AI \text{ và } MN = AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ta thấy: $BC \perp (SMN) \Rightarrow BC \perp NK$, kết hợp với $NK \perp SM$ suy ra: $NK \perp (SBC)$.

$AD \,//\, (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = d(N,(SBC)) = NK.$

Mặt khác do $AD \perp (SMN) \Rightarrow AD \perp MP$, mà $MP \perp SN$ nên $MP \perp (SAD)$.

$$BC \,//\, (SAD) \Rightarrow d(SA,BC) = d(BC,(SAD)) = d(M,(SAD)) = MP.$$

Từ giả thiết $d(A,(SBC)) = d(SA,BC)$ suy ra: $MP = NK \Rightarrow \Delta SMN$ cân tại $S \Rightarrow H$ là trung điểm của đoạn thẳng MN. Gọi O là trung điểm đoạn thẳng AI. Khi đó $\begin{cases} AI \perp OH \\ AI \perp SH \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SOH)$

$\Rightarrow (SOH)$ là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AI. Vì AI cố định nên mặt phẳng (SOH) cố định.

Xét tam giác OSA vuông tại O có:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

Từ đó trong mặt phẳng (SOH) điểm S luôn chuyển động trên đường tròn tâm O cố định, bán kính $R = \frac{a\sqrt{13}}{4}$ (không đổi). Ta có điều cần chứng minh.

Nhận xét. Bài này chỉ có bạn *Nguyễn Hữu Trí*, 11A1, THPT Số 2 Phù Cát, huyện Phù Cát, **Bình Định** gửi bài và cho lời giải đúng.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/543. *Cho các số x, y, z dương thỏa mãn xyz = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = \frac{1}{2x^2 + y^2 + z(x^2 + y^2 + z)} + \frac{1}{2y^2 + z^2 + x(y^2 + z^2 + x)} + \frac{1}{2z^2 + x^2 + y(z^2 + x^2 + y)}.$$

Lời giải (Của bạn *Tiết Trọng Khiêm*)

Vì $x^2 + y^2 \geq 2xy$ nên

$$z\left(x^2 + y^2\right) \geq 2xyz = 2.$$

Vì $1 + z^2 \geq 2z; 1 + y^2 \geq 2y$ nên

$$\frac{1}{2x^2 + y^2 + z\left(x^2 + y^2 + z\right)} = \frac{1}{2x^2 + y^2 + z^2 + z\left(x^2 + y^2\right)}$$

$$\leq \frac{1}{2x^2 + y^2 + z^2 + z \cdot 2xy} = \frac{1}{2x^2 + y^2 + z^2 + 2}$$

$$= \frac{1}{2x^2 + \left(1 + y^2\right) + \left(1 + z^2\right)} \leq \frac{1}{2x^2 + 2y + 2z}.$$

Tương tự:

$$\frac{1}{2y^2+z^2+x\left(y^2+z^2+x\right)} \le \frac{1}{2y^2+2x+2z}$$

và

$$\frac{1}{2z^2+x^2+y\left(z^2+x^2+y\right)} \le \frac{1}{2z^2+2y+2x}.$$

Do đó

$$P \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+y+z}+\frac{1}{y^2+x+z}+\frac{1}{z^2+y+x}\right).$$

Ta có:

$$\frac{1}{x^2+y+z} \le \frac{1+y+z}{(x+y+z)^2} \qquad (1)$$

Thật vậy,

$$(1) \Leftrightarrow (x+y+z)^2 \le (1+y+z)\left(x^2+y+z\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$
$$\le x^2+y+z+yx^2+y^2+yz+zx^2+zy+z^2$$

$$\Leftrightarrow y+z+x^2(y+z)-2x(y+z) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (y+z)\left(1+x^2-2x\right) \ge 0$$

$\Leftrightarrow (y+z)(x-1)^2 \ge 0$: luôn đúng.

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{1}{y^2+x+z} \le \frac{1+x+z}{(x+y+z)^2}$$

và $$\frac{1}{z^2+y+x} \le \frac{1+y+x}{(x+y+z)^2}.$$

Chứng tỏ

$$P \le \frac{1}{2}\left(\frac{1+y+z}{(x+y+z)^2}+\frac{1+x+z}{(y+x+z)^2}+\frac{1+y+z}{(z+y+x)^2}\right)$$
$$=\frac{3+2(x+y+z)}{2(y+x+z)^2}.$$

Ta lại có:

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$
$$\ge x^2+y^2+z^2+2\cdot 3\sqrt[3]{xy\cdot yz\cdot zx}$$
$$= x^2+y^2+z^2+6$$
$$=\left(x^2+1\right)+\left(y^2+1\right)+\left(z^2+1\right)+3$$
$$\ge 2(x+y+z)+3.$$

$$P \le \frac{3+2(x+y+z)}{2(y+x+z)^2} \le \frac{3+2(x+y+z)}{2\left[3+2(x+y+z)\right]}=\frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $P=\frac{1}{2}$ khi $x=y=z=1$.

Nhận xét. Các bạn dưới đây gửi bài giải đúng với các cách giải (đánh giá bất đẳng thức) khác nhau. Cách giải của bạn *Tiết Trọng Khiêm* có một số sáng tạo, dẫn đến lời giải có vẻ gọn hơn cả.

Bình Định: *Vũ Tiến Đạt*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; *Nguyễn Hữu Trí*, 11A1, THPT Số 2 Phù Cát. **Đà Nẵng**: *Tô Đông Hải*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Gia Lai**: *Nguyễn Thị Kim Ngân*, 11A9, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm. **Hà Nội**: *Trần Việt Anh*, 9C1, THCS Archimedes, huyện Đông Anh. **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng, Phan Nhật Minh, Nguyễn Trọng Hoàng Nguyên*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; *Dương Tuấn Vũ*, 8G, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh. **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Lâm Đồng**: *Trần Công Minh*, 12 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc, TP. Bảo Lộc. **Nghệ An**: *Lưu Trọng Phúc*, 9B, THCS Đội Cung, TP. Vinh; *Nguyễn Hải Triều*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, H. Đô Lương. **Quảng Bình**: *Nguyễn Trần Hoàng, Nguyễn Thị Thu Phương*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Quảng Nam**: *Trần Phạm Minh Đạt*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An. **Sóc Trăng**: *Tiết Trọng Khiêm*, 11A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai. **Sơn La**: *Lương Hữu Bách*, 9A1, THCS Nguyễn Trãi, TP. Sơn La. **Thanh Hóa**: *Nguyễn Văn Đức Quảng*, 9K, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa. **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Văn Khủng Long*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

Đào Trung Hiếu (hieudt14407@gmail.com).

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T10/543. *Tìm tất cả các đa thức f với hệ số nguyên thỏa mãn: Với mỗi số nguyên tố p và mọi $u,v \in \mathbb{N}$ tùy ý, sao cho $p \mid uv-1$ thì*

$$p \mid f(u)f(v)-1.$$

Lời giải (Dựa trên lời giải của bạn *Nguyễn Trần Hoàng*, 12T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**)

Nếu f là đa thức bậc 0 ta dễ thấy $f(x) = 1$ và $f(x) = -1$ là các đa thức thỏa mãn điều kiện bài toán.

Giả sử f là đa thức bậc $n > 0$:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Xét đa thức

$$g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Cố định $u \in \mathbb{N}$, lấy số nguyên tố $p > u$. Khi đó vì $(u, p) = 1$ nên tồn tại $v \in \mathbb{N}$ sao cho

$$uv \equiv 1 \pmod p.$$

Theo giả thiết suy ra $f(u)f(v) \equiv 1 \pmod p$.

Theo modulo p ta có:

$$u^n f(v) = u^n \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right)$$

$$= a_n (uv)^n + a_{n-1}(uv)^{n-1}u + \ldots + a_1(uv)u^{n-1} + a_0 u^n$$

$$\equiv a_n + a_{n-1}u + \ldots + a_1 u^{n-1} + a_0 u^n = g(u).$$

Suy ra $f(u)g(u) \equiv f(u)f(v)u^n \equiv u^n \pmod p$.

Vậy $f(u)g(u) - u^n$ chia hết cho p với mỗi số nguyên tố $p > u$. Lấy $p > u$ và $p > \left|f(u)g(u) - u^n\right|$ thì ta phải có:

$$f(u)g(u) = u^n.$$

Vậy $f(u)g(u) = u^n$ với mọi $u \in \mathbb{N}$.

Thành thử $f(x)g(x) = x^n$ với mọi x. Vì $f(x)$ là đa thức bậc n nên $g(x)$ phải là đa thức bậc 0 tức là $a_{n-1} = \cdots = a_0 = 0$, $f(x) = a_n x^n$, $g(x) = a_n$.

Từ đó $a_n = \pm 1$. Thử lại ta thấy các đa thức $f(x) = x^n$ và $f(x) = -x^n$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt **Thừa Thiên Huế:** *Trần Thị Thanh Thư*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thị Thu Phương*, 12T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Bình Định:** *Vũ Tiến Đạt*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Lâm Đồng:** *Trần Công Minh*, 12T, THPT chuyên Bảo lộc.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/543. *Cho dãy số $a_n = \sin nq$, trong đó $n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R}$. Hỏi với giá trị nào của q thì tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?*

Lời giải. Ứng với mỗi $q = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Xét $q \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, tức $\sin q \neq 0$. Ta chứng minh không tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Thật vậy, giả sử tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ thì

$$-1 \le a \le 1 \text{ do } -1 \le \sin nq \le 1.$$

Khi đó

$$\sin(n+1)q = \sin nq \cos q + \cos nq \sin q, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra

$$\cos nq = \frac{\sin(n+1)q - \sin nq \cos q}{\sin q}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (1).$$

Do dãy số ở vế phải của (1) có giới hạn khi $n \to \infty$ nên khi chuyển qua giới hạn hai vế của (1), ta thu được:

$$b := \lim_{n\to\infty} \cos nq = a \times \frac{1-\cos q}{\sin q} \quad (2).$$

Tương tự:

$$\cos(n+1)q = \cos nq \cos q - \sin nq \sin q, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chuyển qua giới hạn, ta thu được:

$$b = b\cos q - a\sin q \Leftrightarrow a = -b \times \frac{1-\cos q}{\sin q} \quad (3).$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$$a = -a \times \frac{1-\cos q}{\sin q} \times \frac{1-\cos q}{\sin q}$$

$$\Leftrightarrow a\left[1 + \left(\frac{1-\cos q}{\sin q}\right)^2\right] = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Suy ra $a = 0$ và $b = 0$. Điều này là vô lý vì từ $\sin^2 nq + \cos^2 nq = 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên

$$\lim_{n\to\infty} (\sin^2 nq + \cos^2 nq) = 1 \text{ và } a^2 + b^2 = 1.$$

Kết luận: Vậy chỉ với những giá trị $q = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$, thì tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Nhận xét. Đây là dạng toán nâng cao về giới hạn của các dãy số sinh bởi hàm tuần hoàn. Chỉ có 2 bạn gửi bài giải đến Tòa soạn là: *Trần Minh Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/543. *Cho tam giác ABC có trọng tâm G. D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của G trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng điểm Lemoine của tam giác DEF nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Trần Hoàng*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**).

Để cho đơn giản, kí hiệu (UVW) là đường tròn ngoại tiếp tam giác UVW; (UV) là đường tròn đường kính UV; $(U, 0)$ là đường tròn tâm U bán kính bằng 0; $S(UVW)$ là diện tích của tam giác UVW; XYZ là đường thẳng đi qua ba điểm thẳng hàng XYZ.

Bỏ qua trường hợp đơn giản: $AB = AC$.

Gọi L là điểm Lemoine của tam giác ABC; (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; X, Y, Z theo thứ tự là giao điểm của BC, CA, AB và tiếp tuyến tại G của các đường tròn (GBC), (GCA), (GAB); X', Y', Z' theo thứ tự là trung điểm của GX, GY, GZ; M, N, P theo thứ tự là giao điểm của EF, FD, DE và các đường thẳng qua G vuông góc với AX, BY, CZ; B', C' theo thứ tự là giao điểm của BG, CG và AC, AB; U, V theo thứ tự là hình chiếu của B, C trên AC, AB.

Chú ý rằng G là trọng tâm của tam giác ABC, XG tiếp xúc với (GBC), GB, GC theo thứ tự là đường kính của các đường tròn (BGF), (CGE), ta có:

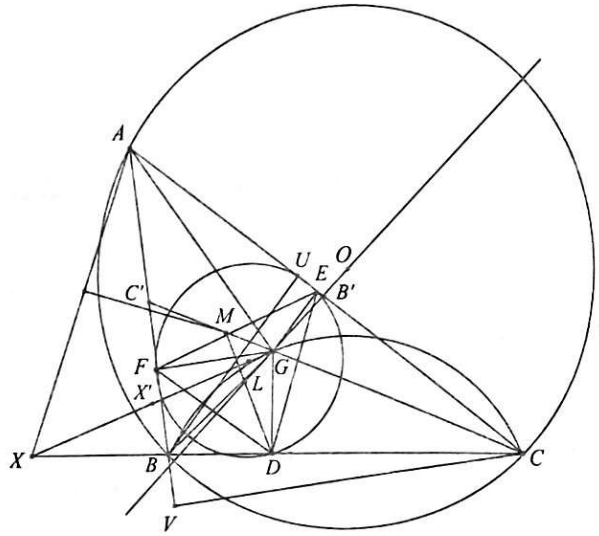
$$-\frac{\overline{ME}}{\overline{MF}} = \frac{ME}{MF} = \frac{2S(GME)}{2S(GMF)} = \frac{GM.GE\sin\widehat{MGE}}{GM.GF\sin\widehat{MGF}}$$

$$= \frac{GE}{BU}.\frac{CV}{GF}.\frac{BU\sin\widehat{MGE}}{CV\sin\widehat{MGF}} = \frac{GB'}{BB'}.\frac{CC'}{GC'}.\frac{BU\sin\widehat{XAC}}{CV\sin\widehat{XAB}}$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{3}{1}.\frac{BU\sin\widehat{XAC}}{CV\sin\widehat{XAB}} = \frac{AB^2}{AC^2}.\frac{BU.AC}{CV.AB}.\frac{AX.AC\sin\widehat{XAC}}{AX.AB\sin\widehat{XAB}}$$

$$= \frac{AB^2}{AC^2}.\frac{2S(ABC)}{2S(ABC)}.\frac{2S(AXC)}{2S(AXB)} = \frac{AB^2}{AC^2}.\frac{GC^2}{GB^2}$$

$$= \left(\frac{GC\sin C}{GB\sin B}\right)^2 = \frac{DE^2}{DF^2} \text{ (theo định lý sin).}$$



Do đó DM là đường đối trung của tam giác DEF.

Tương tự, EN, FP cũng là đường đối trung của tam giác DEF.

Vậy DM, EN, FP đồng quy tại L.

Dễ thấy $P_{X/(G,0)} = XG^2 = \overline{XB}.\overline{XC} = P_{X/(O)}$.

Tương tự $P_{Y/(G,0)} = P_{Y/(O)}$; $P_{Z/(G,0)} = P_{Z/(O)}$.

Vậy X, Y, Z thẳng hàng và $XYZ \perp OG$.

Dễ thấy GM là trục đẳng phương của các đường tròn (GA), (GX) và EF là trục đẳng phương của các đường tròn (GA), (DEF).

Từ đó, chú ý rằng M thuộc EF, suy ra:

$$P_{L/(GX)} = P_{L/(DEF)}.$$

Tương tự: $P_{L/(GY)} = P_{L/(DEF)}$; $P_{L/(GZ)} = P_{L/(DEF)}$.

Vậy X, Y, Z thẳng hàng và $XYZ \perp OG$ (1).

Từ đó, chú ý rằng $P_{G/(GX)} = P_{G/(GY)} = P_{G/(GZ)}$ (cùng bằng 0), suy ra $X'Y'Z' \perp GL$ (2).

Từ (1) và (2), chú ý rằng $XYZ \,//\, X'Y'Z'$ (kiểm tra dễ dàng), suy ra L thuộc OG (đpcm).

Nhận xét. Bài toán này khó, ngoài bạn *Hoàng*, các bạn cũng có lời giải tốt: **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thị Thu Phương*, 12T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Sóc Trăng:** *Phạm Nguyên Khang*, 10A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/543. *Ba điểm O, A, B cùng nằm trên một nửa đường thẳng xuất phát từ O. Tại O đặt một nguồn điểm phát sóng âm đẳng hướng ra không gian, môi trường không hấp thụ âm. Mức cường độ âm tại A là 60 dB, tại B là 40 dB. Mức cường độ âm tại điểm M trong đoạn AB có MB = 2MA là bao nhiêu?*

Lời giải. Ta có:

$$I_A = \frac{P}{4\pi R_A^2} \Leftrightarrow R_A = \sqrt{\frac{P}{4\pi}}\frac{1}{\sqrt{I_A}} = \frac{\alpha}{\sqrt{I_A}};$$

$$I_B = \frac{P}{4\pi R_B^2} \Leftrightarrow R_B = \sqrt{\frac{P}{4\pi}}\frac{1}{\sqrt{I_B}} = \frac{\alpha}{\sqrt{I_B}};$$

$$I_M = \frac{P}{4\pi R_M^2} \Leftrightarrow R_M = \sqrt{\frac{P}{4\pi}}\frac{1}{\sqrt{I_M}} = \frac{\alpha}{\sqrt{I_M}};$$

$$MB = 2MA \Leftrightarrow R_B - R_M = 2(R_M - R_A)$$

$$\Leftrightarrow 3R_M = 2R_A + R_B.$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{I_M}} = \frac{2}{\sqrt{I_A}} + \frac{1}{\sqrt{I_B}} \quad (*)$$

$$L_A = 10\lg\frac{I_A}{I_0} = 60$$

$$\Leftrightarrow I_A = 10^{-12}.10^{6} = 10^{-6} \text{ W/m}^2;$$

$$L_B = 10\lg\frac{I_B}{I_0} = 40$$

$$\Leftrightarrow I_B = 10^{-12}.10^{4} = 10^{-8} \text{ W/m}^2;$$

$$\frac{3}{\sqrt{I_M}} = \frac{2}{\sqrt{I_A}} + \frac{1}{\sqrt{I_B}} = \frac{2}{\sqrt{10^{-6}}} + \frac{1}{\sqrt{10^{-8}}}$$

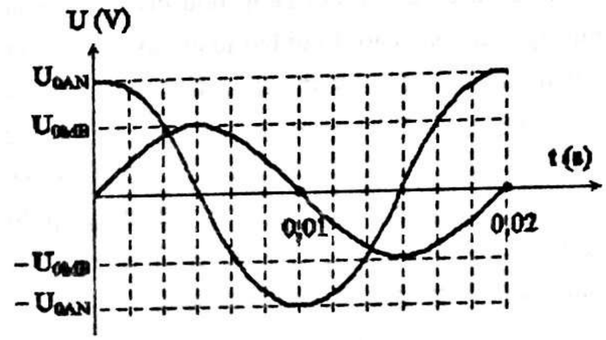
$$\Leftrightarrow I_M = 6,25.10^{-8} \text{ W/m}^2$$

$$L_M = 10\lg\frac{I_M}{I_0} = 10\lg\frac{6,25.10^{-8}}{10^{-12}} \approx 48 \text{ dB}.$$

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào có lời giải đúng cho đề ra kì này!

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/543. *Đoạn mạch điện AB mắc nối tiếp theo thứ tự lần lượt gồm cuộn dây thuần cảm, điện trở thuần $R = 60\,\Omega$ và tụ điện. Gọi M và N là điểm nối giữa cuộn cảm với điện trở và điện trở với tụ điện. Đặt vào hai đầu đoạn mạch AB điện áp xoay chiều có biểu thức $u = U\sqrt{2}\cos\omega t$ (V) thì thấy điện áp ở hai đầu đoạn mạch AN và điện áp ở hai đầu đoạn mạch MB biến thiên theo thời gian như đồ thị (hình vẽ). Hệ số công suất của mạch AB lúc đó là $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính điện dung của tụ điện.*



Lời giải. Điện áp ở u_{AN} và u_{MB} dao động vuông pha với nhau: $\tan\varphi_{AN}.\tan\varphi_{MB} = 1$

suy ra : $\frac{Z_L}{R}.\frac{Z_C}{R} = 1$ (1).

$U_{0AN} > U_{0MB}$, suy ra: $Z_L > Z_C$.

$$k = \frac{R}{Z} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Z_L - Z_C}{R}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow Z_L - Z_C = R\sqrt{\frac{1}{k^2} - 1} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$Z_C^2 + R\sqrt{\frac{1}{k^2} - 1}.Z_C - R^2 = 0,$$

thay số: $Z_C = 45\,\Omega \Rightarrow C = \frac{2.10^{-3}}{9\pi}$ (F).

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào có lời giải đúng cho đề ra kì này!

NGUYỄN XUÂN QUANG

BẤT ĐẲNG THỨC VỚI PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Trong toán học, bất đẳng thức và phương trình là hai phần cơ bản và trung tâm của đại số sơ cấp. Việc sử dụng bất đẳng thức để giải phương trình đã được đề cập rất nhiều trong các tài liệu và sách báo. Trong bài viết này, chúng ta sẽ nói đến một tình huống căn bản khác. Đó là chứng minh các bất đẳng thức về nghiệm cũng như các hệ số của phương trình bậc cao. Loại bài toán này cũng từng xuất hiện trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi và gây không ít khó khăn cho các thí sinh. Với mong muốn có một chuyên đề tương đối đầy đủ về dạng toán cũng như phương pháp giải để giúp đỡ các bạn không còn lúng túng khi gặp loại toán này chúng tôi gửi tới bạn đọc bài viết sau.

Bài toán 1. *Giả sử phương trình*

$$x^3-6x^2+ax-b=0$$

có ba nghiệm thực không âm (không nhất thiết phân biệt). Chứng minh rằng $8a-3b\le 72$.

Phân tích. Bất đẳng thức cần chứng minh là mối quan hệ của các hệ số trong phương trình, do đó ta nghĩ đến định lý Viète. Giả thiết cho ba nghiệm không âm lại gợi ý chúng ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy quen thuộc. Từ đó cố gắng tìm cách biểu diễn biểu thức $8a-3b$ theo các nghiệm để có đánh giá phù hợp.

Lời giải. Gọi ba nghiệm của phương trình là α,β,γ. Theo định lý Viète ta có:

$$\alpha+\beta+\gamma=6;\ \alpha.\beta+\beta.\gamma+\gamma.\alpha=a;\ \alpha.\beta.\gamma=b$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\beta.\gamma\le\frac{(\beta+\gamma)^2}{4}=\frac{(6-\alpha)^2}{4}.$$

Từ đó: $$8a-3b=8(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-3\alpha\beta\gamma$$
$$=8\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma(8-3\alpha)$$
$$=8\alpha(6-\alpha)+\beta\gamma(8-3\alpha)$$
$$\le 8\alpha(6-\alpha)+\frac{(6-\alpha)^2}{4}(8-3\alpha)$$
$$=-\frac{3\alpha(\alpha-2)^2}{4}+72\le 72.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\alpha=\beta=\gamma=2$, khi đó $a=12; b=8$.

Bài toán 2. *Giả sử với hai số dương a,b thì phương trình $x^3-ax^2+bx-a=0$ có ba nghiệm lớn hơn 1. Xác định a,b để biểu thức $P=\frac{b^n-3^n}{a^n}$, (với n là số nguyên dương cho trước) đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị đó.*

Lời giải. Gọi ba nghiệm của phương trình là α,β,γ. Theo định lý Viète ta có

$$\alpha+\beta+\gamma=a;\ \alpha.\beta+\beta.\gamma+\gamma.\alpha=b;\ \alpha.\beta.\gamma=a$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\alpha+\beta+\gamma\ge 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\Rightarrow a\ge 3\sqrt[3]{a}.$$

Theo bất đẳng thức $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$, ta có:

$$b^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2\ge 3\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=3a^2$$

$\Rightarrow b\ge\sqrt{3}a$. Vậy nên

$$P=\frac{b^n-3^n}{a^n}\ge\frac{\sqrt{3^n}.a^n-3^n}{a^n}=\sqrt{3^n}-\frac{3^n}{a^n}$$
$$\ge 3^{\frac{n}{2}}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 3\sqrt{3}; b = \sqrt{3}.a = 9$, khi đó phương trình có ba nghiệm bằng nhau và đều bằng $\sqrt{3}$.

Vậy $\min P = \dfrac{3^n - 1}{3^{\frac{n}{2}}}$ khi $a = 3\sqrt{3}; b = 9$.

Bài toán 3 (VMO 2002). *Giả sử a, b, c là các số thực sao cho phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có ba nghiệm thực (các nghiệm không nhất thiết đôi một phân biệt). Chứng minh rằng*

$$12ab + 27c \le 6a^3 + 10\left(a^2 - 2b\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$-6a\left(a^2 - 2b\right) \le -27c + 10\left(a^2 - 2b\right)^{\frac{3}{2}} \quad (1).$$

Gọi α, β, γ là ba nghiệm thực của phương trình. Theo định lý Viète ta có:

$\alpha + \beta + \gamma = -a;\ \alpha.\beta + \beta.\gamma + \gamma.\alpha = b;\ \alpha.\beta.\gamma = -c$

và

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= \left(\alpha + \beta + \gamma\right)^2 - 2\left(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha\right)\\ &= a^2 - 2b.\end{aligned}$$

Do đó: $(1) \Leftrightarrow 6\left(\alpha + \beta + \gamma\right)\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)$

$$\le 27\alpha\beta\gamma + 10\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)^{\frac{3}{2}} \quad (2).$$

Xét các trường hợp sau:

- *Trường hợp 1*: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$. Khi đó bất đẳng thức (2) hiển nhiên đúng.
- *Trường hợp 2*: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$. Không mất tổng quát, giả sử $|\alpha| \le |\beta| \le |\gamma|$ (*)

và $\quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9$ (**).

Khi đó $(2) \Leftrightarrow 2\left(\alpha + \beta + \gamma\right) - \alpha\beta\gamma \le 10$ (3).

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$\begin{aligned}\left[2\left(\alpha + \beta + \gamma\right) - \alpha\beta\gamma\right]^2 &= \left[2\left(\alpha + \beta\right) + \gamma\left(2 - \alpha\beta\right)\right]^2\\ &\le \left[\left(\alpha + \beta\right)^2 + \gamma^2\right]\left[4 + \left(2 - \alpha\beta\right)^2\right]\\ &= \left(9 + 2\alpha\beta\right)\left[8 - 4\alpha\beta + \left(\alpha\beta\right)^2\right]\\ &= 2\left(\alpha\beta\right)^3 + \left(\alpha\beta\right)^2 - 20\alpha\beta + 72\\ &= \left(\alpha\beta + 2\right)^2\left(2\alpha\beta - 7\right) + 100 \quad (4).\end{aligned}$$

Từ (*) và (**) suy ra $\gamma^2 \ge 3$. Do đó $2\alpha\beta \le \alpha^2 + \beta^2 = 9 - \gamma^2 \le 6$. Vì vậy từ (4) ta có:

$$\left(2\left(\alpha + \beta + \gamma\right) - \alpha\beta\gamma\right)^2 \le 100.$$

Suy ra: $2\left(\alpha + \beta + \gamma\right) - \alpha\beta\gamma \le 10$.

Bất đẳng thức (3) được chứng minh chứng tỏ bất đẳng thức đã cho được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}|\alpha| \le |\beta| \le |\gamma|\\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9\\ \dfrac{\alpha + \beta}{2} = \dfrac{\gamma}{2 - \alpha\beta}\\ \alpha\beta + 2 = 0\\ 2\left(\alpha + \beta + \gamma\right) - \alpha\beta\gamma \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -1;\ \beta = \gamma = 2.$$

Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi $(a; b; c)$ là một hoán vị của $(-t; 2t; 2t)$, trong đó t là một số thực không âm.

Bài toán 4. *Giả sử phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng*

$$b^2 \ge \max\left\{-ac;\ 3ac\right\}.$$

Lời giải. Nếu $c = 0$ thì $b^2 \ge 0$, suy ra bất đẳng thức đúng.

Nếu $c \ne 0$. Gọi ba nghiệm là $\dfrac{x}{q};\ x;\ qx\ (q \ne 0)$.

Theo định lý Viète ta có: $\begin{cases}x\left(\dfrac{1}{q} + 1 + q\right) = -\dfrac{b}{a}\\ x^2\left(\dfrac{1}{q} + 1 + q\right) = \dfrac{c}{a}\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2\left(\dfrac{1}{q}+1+q\right)^2 = \dfrac{b^2}{a^2} \\ x^2\left(\dfrac{1}{q}+1+q\right) = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \frac{b^2}{ac} = \frac{1}{q}+1+q.$$

• Nếu $ac > 0$ thì $q > 0$, suy ra:

$$\frac{b^2}{ac} = 3 + \left(q - 2 + \frac{1}{q}\right) = 3 + \frac{(q-1)^2}{q} \ge 3 \Rightarrow b^2 \ge 3ac.$$

• Nếu $ac < 0$ thì $q < 0$, suy ra:

$$\frac{b^2}{ac} = -1 + \left(q + 2 + \frac{1}{q}\right) = -1 + \frac{(q+1)^2}{q} \le -1$$

$\Rightarrow b^2 \ge -ac$. Tóm lại ta có: $b^2 \ge \max\{-ac; 3ac\}$.

Bài toán 5. *Cho phương trình $x^3 - ax^2 + bx - a = 0$ với $a > 0; b > 0$. Chứng minh rằng nếu phương trình có ba nghiệm đều không nhỏ hơn 1 thì $a \ge \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)(b+3)$.*

Lời giải. Gọi ba nghiệm của phương trình đã cho là $1 \le \alpha \le \beta \le \gamma$. Áp dụng định lý Viète ta có:

$$\alpha + \beta + \gamma = a;\ \alpha.\beta + \beta.\gamma + \gamma.\alpha = b;\ \alpha.\beta.\gamma = a.$$

Tồn tại tam giác ABC sao cho

$$\alpha = \tan A; \beta = \tan B; \gamma = \tan C \left(\frac{\pi}{4} \le A \le B \le C < \frac{\pi}{2}\right).$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$\tan A \tan B \tan C \ge$

$$\ge \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)(\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A + 3)$$

$$\Leftrightarrow \cot A + \cot B + \cot C + 3\cot A \cot B \cot C \le 8 - 4\sqrt{2}.$$

Có: $\mathrm{VT} = \cot A + \dfrac{2\sin A}{\cos(B-C) + \cos A} + 3\cot A.\dfrac{\cos(B-C) - \cos A}{\cos(B-C) + \cos A}$.

Xét hàm số $h(x) = \dfrac{2\sin A}{x + \cos A} + 3\cot A.\dfrac{x - \cos A}{x + \cos A}$,

với $x = \cos(B-C) \in \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$. Ta có:

$$h'(x) = -\frac{2\sin A}{(x+\cos A)^2} + 3\cot A.\frac{2\cos A}{(x+\cos A)^2}$$

$$= \frac{6 - 8\sin^2 A}{(x+\cos A)^2} > 0, \forall x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right], \frac{\pi}{4} \le A \le B \le C \le \frac{\pi}{2}.$$

Suy ra: $h(x) \le h(1) = \dfrac{2\sin A}{1+\cos A} + 3\cot A.\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}$

$$= 2\tan\frac{A}{2} + \frac{3}{2}\tan\frac{A}{2} - \frac{3}{2}\tan^3\frac{A}{2}.$$

Do đó: $\mathrm{VT} \le \dfrac{1}{2\tan\frac{A}{2}} + 3\tan\dfrac{A}{2} - \dfrac{3}{2}\tan^3\dfrac{A}{2}$.

Đặt $t = \tan\dfrac{A}{2}$ thì vì $\dfrac{\pi}{4} \le A \le B \le C < \dfrac{\pi}{2}$ nên

$$\sqrt{2} - 1 \le t \le \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Xét hàm số: $f(t) = \dfrac{1}{2t} + 3t - \dfrac{3}{2}t^3$, $t \in \left[\sqrt{2}-1; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$

có $f'(t) = -\dfrac{1}{2t^2} + 3 - \dfrac{9}{2}t^2 \le 0$, $\forall t \in \left[\sqrt{2}-1; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Suy ra $f(t) \le f\left(\sqrt{2}-1\right) = 8 - 4\sqrt{2}$.

Bài toán 6. *Cho phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có các hệ số $a \ge 0; b \ge 0; c \ge 0$. Giả sử phương trình trên có bốn nghiệm. Chứng minh bất đẳng thức*

$$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} \ge 8.$$

Lời giải. Đặt

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0 \quad (1).$$

Gọi $-x_1; -x_2; -x_3; -x_4$ là bốn nghiệm của phương trình (1). Do a, b, c không âm nên các nghiệm của (1) là những số âm, suy ra $x_1; x_2; x_3; x_4 > 0$.

Ta có: $f(x) = (x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)(x+x_4)$

$$\Rightarrow f(2) = (2+x_1)(2+x_2)(2+x_3)(2+x_4)$$

$$= (1+1+x_1)(1+1+x_2)(1+1+x_3)(1+1+x_4)$$

$$\ge 3\sqrt[3]{x_1}.3\sqrt[3]{x_2}.3\sqrt[3]{x_3}.3\sqrt[3]{x_4} = 81\sqrt[3]{x_1x_2x_3x_4} = 81.$$

Mặt khác $f(2) = 2^4 + a.2^3 + b.2^2 + c.2 + 1$

$$= 8a + 4b + 2c + 17$$

suy ra: $8a + 4b + 2c + 17 \ge 81 \Leftrightarrow a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{4} \ge 8$.

Bài toán 7. *Cho phương trình* $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+1=0$ *có năm nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng*

$$2\left(a^2+d^2\right)>5\left(b+c\right).$$

Lời giải. Theo giả thiết

$$P(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+1$$

có năm nghiệm thực phân biệt và do hạng tử tự do khác không nên năm nghiệm đều khác không.

Ta có: $P'(x)=5x^4+4ax^3+3bx^2+2cx+d$

$$P''(x)=20x^3+12ax^2+6bx+2c$$

$$P'''(x)=60x^2+24ax+6b.$$

Do $P(x)$ có năm nghiệm thực phân biệt nên $P'''(x)$ có hai nghiệm phân biệt, vì vậy có

$$\Delta'=144a^2-360b>0\Rightarrow 2a^2>5b \quad (1).$$

Khi đó $Q(x)=x^5+d\,x^4+cx^3+bx^2+ax+1$ cũng có năm nghiệm phân biệt.

Tương tự như trên ta cũng có $2d^2>5c$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $2\left(a^2+d^2\right)>5\left(b+c\right)$..

Qua các bài toán trên, chúng ta thấy công cụ cơ bản để giải quyết bài toán là định lý Viète, bất đẳng thức Cauchy, Bunyakovsky, lượng giác, khảo sát hàm số. Hy vọng với việc phân tích các tình huống như đã nêu sẽ giúp các bạn có kỹ năng giải các bài toán dạng này và bản thân các bạn cũng có thể sáng tạo được các bài toán tương tự.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài tập 1. Biết phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ có ba nghiệm số dương α,β,γ. Chứng minh rằng

$$\alpha^7+\beta^7+\gamma^7\geq -\frac{b^3c^2}{81a^5}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài tập 2. Giả sử phương trình $x^3+\left(6a^2-5\right)x^2-x-2a^3=0$ $(a\geq 0)$ có ba nghiệm α,β,γ. Chứng minh rằng

$$\alpha\beta\gamma\left(\alpha+\beta+\gamma\right)+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\leq\sqrt{2}-1$$

Bài tập 3 (VMO – 1999). Xét các số thực a,b sao cho phương trình $ax^3-x^2+bx-1=0$ có ba nghiệm thực dương (các nghiệm có thể bằng nhau). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{5a^2-3ab+2}{a^2(b-a)}.$$

Bài tập 4. Gọi α,β,γ là ba nghiệm thực của phương trình $ax^3+bx^2+cx-a=0$ $(a\neq 0)$.

Chứng minh $\dfrac{\sqrt{2}}{\alpha}+\dfrac{\sqrt{3}}{\beta}-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\gamma}\leq\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$

Dấu bằng xảy ra khi nào?

Bài tập 5. Chứng minh rằng nếu x_0 là nghiệm của phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$ thì

$$x_0^2\leq 1+a^2+b^2+c^2.$$

Bài tập 6. Cho phương trình $x^4+a\,x^3+bx^2+cx+1=0$ có nghiệm. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{4}{3}.$

Bài tập 7. Giả sử phương trình $x^4+bx^3+cx^2+bx+1=0$ có nghiệm. Chứng minh rằng $b^2+(c-2)^2>3.$

Bài tập 8. Cho bốn số dương a,b,c,d. Giả sử phương trình $ax^4-ax^3+bx^2-cx+d=0$ có bốn nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$(không nhất thiết phân biệt). Chứng minh $21a+164c\geq 80b+320d.$

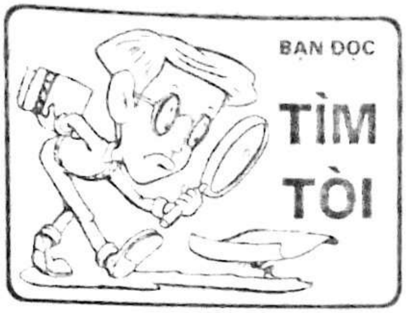
Bài tập 9 (Chinese Girls' Mathematics Olympiad 2009). Giả sử phương trình $a\,x^3+bx^2+cx+d=0$ có ba nghiệm thực dương và $d<0$. Chứng minh bất đẳng thức

$$2b^3+9a^2d-7abc<0.$$

Bài tập 10. Giả sử phương trình $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n=0$ $(n\geq 2)$ có các nghiệm thực $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$. Cho $x_0>\max\left\{\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n\right\}$. Chứng minh rằng

$$f\left(x_0+1\right)\left(\frac{1}{x_0-\alpha_1}+\frac{1}{x_0-\alpha_2}+...+\frac{1}{x_0-\alpha_n}\right)\geq 2n^2$$

trong đó $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n$.



SUY NGHĨ SÂU HƠN TỪ MỘT BÀI TOÁN

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG
(GV THPT Khoa học Giáo dục, ĐHQG Hà Nội)

Lời mở đầu. Trong quá trình làm Toán, việc mở rộng hay phát triển một vấn đề nào đó là điều cần thiết đối với những người muốn tìm hiểu sâu về chúng, điều đó giúp ta cảm nhận được cái hay ở bên trong mỗi bài toán.

Trong bài viết này, tác giả sẽ bắt đầu từ một bài toán sau:

Bài toán. *Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a + \frac{1}{b} \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{a^2 + b^2}{ab}$.*

Lời giải. Từ BĐT Cauchy cho 2 số dương ta có:

$$1 \ge a + \frac{1}{b} \ge 2\sqrt{a.\frac{1}{b}} = 2\sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow \frac{a}{b} \le \frac{1}{4}.$$

Từ đó: $P = \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \left(\frac{16a}{b} + \frac{b}{a}\right) - \frac{15a}{b}$

$$\ge 2\sqrt{\frac{16a}{b}.\frac{b}{a}} - 15.\frac{a}{b}$$

$$\ge 2\sqrt{16} - 15.\frac{1}{4} = \frac{17}{4}.$$

$P = \frac{17}{4}$ khi $\begin{cases} a + \frac{1}{b} = 1; a = \frac{1}{b} \\ \frac{16a}{b} = \frac{b}{a} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + \frac{1}{b} = 1; ab = 1 \\ b = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases}.$$

Vậy min$P = \frac{17}{4}$ khi $a = \frac{1}{2}, b = 2$.

Trong quá trình tìm hiểu, tác giả nhận thấy đây là một bài toán hay và có thể phát triển được chúng qua những dữ kiện khác nhau. Sau đây xin đi vào một số bài toán cụ thể sau.

Bài toán 1. *Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^2b + 2 \le \frac{3b}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{4a^2 + b^2}{ab}.$$

Lời giải. Ta có: $a^2b + 2 \le \frac{3b}{4} \Leftrightarrow \frac{a^2b + 2}{b} \le \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow a^2 + \frac{2}{b} \le \frac{3}{4}.$$

Theo BĐT Cauchy cho 3 số thực dương thì

$$\frac{3}{4} \ge a^2 + \frac{2}{b} = a^2 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \ge 3.\sqrt[3]{a^2.\frac{1}{b}.\frac{1}{b}} = 3.\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \le \frac{1}{8}.$$

Từ đó:

$$P = \frac{4a^2 + b^2}{ab} = \frac{4a}{b} + \frac{b}{a} = \left(\frac{64a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 60.\frac{a}{b}$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{64a}{b}.\frac{b}{a}} - 60.\frac{1}{8} = 2\sqrt{64} - \frac{15}{2} = \frac{17}{2}.$$

$P = \frac{17}{2}$ khi $\begin{cases} a^2 = \frac{1}{b} = \frac{1}{4} \\ \frac{64a}{b} = \frac{b}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 4 \end{cases}.$

Vậy min$P = \frac{17}{2}$ khi $a = \frac{1}{2}, b = 4$.

Bài toán 2. *Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x^3y + 3 \le 4y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$Q = \frac{x^3 + 3y^3}{x^2y}.$$

Lời giải. Ta có:

$$x^3y + 3 \le 4y \Leftrightarrow \frac{x^3y + 3}{y} \le 4 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3}{y} \le 4.$$

Theo BĐT Cauchy cho 4 số thực dương thì

$$4 \ge x^3 + \frac{3}{y} = x^3 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} \ge 4.\sqrt[3]{x^3.\frac{1}{y}.\frac{1}{y}.\frac{1}{y}}$$

$$= 4.\sqrt[4]{\left(\frac{x}{y}\right)^3} \Rightarrow \sqrt[4]{\left(\frac{x}{y}\right)^3} \le 1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} \le 1.$$

Từ đó: $Q = \frac{x^3 + 3y^3}{x^2 y} = \frac{x}{y} + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2$

$$= 3\left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{x}{y}\right) - 5.\frac{x}{y} \ge 3\left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{x}{y}\right) - 5.1$$

hay $Q \ge 3.3.\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}.\frac{x}{y}.\frac{x}{y}} - 5 = 9.\sqrt[3]{1} - 5 = 4$.

$$Q = 4 \text{ khi } \begin{cases} x^3 = \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{y^2}{x^2} = \frac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy min$Q = 4$ khi $x = y = 1$.

Bài toán 3. *Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 y^2 + 4 \le y^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = \frac{2x^3 + y^3}{xy(2x + y)}.$$

Lời giải. Ta có: $x^2 y^2 + 4 \le y^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{y^2} \le 1$.

Theo BĐT Cauchy cho 2 số thực dương thì

$$1 \ge x^2 + \frac{4}{y^2} \ge 2\sqrt{x^2.\frac{4}{y^2}} = 4.\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = 4.\frac{x}{y}$$

$\Rightarrow \frac{x}{y} \le \frac{1}{4}$. Đặt $0 < t = \frac{x}{y} \le \frac{1}{4}$. Từ đó:

$$T = \frac{2x^3 + y^3}{xy(2x + y)} = \frac{2.\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 1}{\frac{x}{y}.\left(2.\frac{x}{y} + 1\right)} = \frac{2t^3 + 1}{t(2t + 1)}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra tại $t = \frac{1}{4}$ nên ta chứng minh: $\frac{2t^3 + 1}{t(2t + 1)} \ge \frac{11}{4} \Leftrightarrow 4(2t^3 + 1) \ge 11t(2t + 1)$

$$\Leftrightarrow 8t^3 - 22t^2 - 11t + 4 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2(4t - 1) - 5t(4t - 1) - 4(4t - 1) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (4t - 1)(2t^2 - 5t - 4) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - 4t)(4 + 5t - 2t^2) \ge 0.$$

BĐT này đúng do $t \le \frac{1}{4}$ nên

$$\begin{cases} 1 - 4t \ge 1 - 4.\frac{1}{4} = 0 \\ 4 + 5t - 2t^2 > 4 - 2t^2 \ge 4 - 2.\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{31}{8} > 0 \end{cases}$$

$$T = \frac{11}{4} \text{ khi } \begin{cases} x^2 = \frac{4}{y^2} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{y} = t = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ y = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy min$T = \frac{11}{4}$ khi $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = 2\sqrt{2}$.

Bài toán 4. *Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^3 b^2 + a^3 b + 1 \le 3a^3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{a^4 + 2b^4}{ab^3}$.*

Lời giải. Ta có: $a^3 b^2 + a^3 b + 1 \le 3a^3$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3 b^2 + a^3 b + 1}{a^3} \le 3 \Leftrightarrow b^2 + b + \frac{1}{a^3} \le 3.$$

Theo BĐT Cauchy cho 3 số thực dương thì

$$3 \ge b^2 + b + \frac{1}{a^3} \ge 3.\sqrt[3]{b^2.b.\frac{1}{a^3}} = 3.\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^3} = 3.\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} \le 1.$$

Từ đó: $S = \frac{a^4 + 2b^4}{ab^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 2.\frac{b}{a}$

$$= \left[\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \frac{b}{a}\right] - \frac{b}{a}$$

$$\ge 4.\sqrt[4]{\left(\frac{a}{b}\right)^3.\frac{b}{a}.\frac{b}{a}.\frac{b}{a}} - 1 = 3.$$

$$S = 3 \text{ khi } \begin{cases} b^2 = b = \frac{1}{a^3} = 1 \\ \frac{a}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1.$$

Vậy min$S = 3$ khi $a = b = 1$.

Bài toán 5. *Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $3a^3b^2-5a^3+2\le 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\dfrac{a^5+2b^5}{a^2b^3}$.*

Lời giải. Ta có: $3a^3b^2-5a^3+2\le 0$

$$\Leftrightarrow 3a^3b^2+2\le 5a^3 \Leftrightarrow \frac{3a^3b^2+2}{a^3}\le 5 \Leftrightarrow 3b^2+\frac{2}{a^3}\le 5.$$

Theo BĐT Cauchy cho 2 số, 3 số thực dương thì

$$5\ge \frac{2}{a^3}+3b^2 \Rightarrow 12\ge 2\left(\frac{1}{a^3}+1+1\right)+3\left(b^2+1\right)$$

$$\ge 2.3.\sqrt[3]{\frac{1}{a^3}.1.1}+3.2b=6\left(\frac{1}{a}+b\right)\ge 6.2\sqrt{a.\frac{1}{b}}.$$

Suy ra: $12\ge 12\sqrt{\dfrac{a}{b}}\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{a}{b}}\le 1\Leftrightarrow \dfrac{a}{b}\le 1.$

Đặt $t=\dfrac{a}{b}$, $t>0$. Do $0<\dfrac{a}{b}\le 1$ nên $0<t\le 1$.

Từ đó: $M=\dfrac{a^5+2b^5}{a^2b^3}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^3+2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2=t^3+\dfrac{2}{t^2}$

$$=\left(t^3+1+1\right)+2\left(\frac{1}{t^2}+1\right)-4\ge 3t+2.\frac{2}{t}-4$$

hay $M\ge 3t+\dfrac{4}{t}-4=3\left(t+\dfrac{1}{t}\right)+\dfrac{1}{t}-4$

$$\ge 3.2\sqrt{t.\frac{1}{t}}+\frac{1}{1}-4=6+1-4=3\Rightarrow M\ge 3.$$

$M=3$ khi $\begin{cases}a^3=b^2=1\\ b=\dfrac{1}{a};\dfrac{a}{b}=t=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}.$

Vậy min$M=3$ khi $a=b=1$.

Bài toán 6. *Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $x^3y^3+12xy^2+8\le 8y^3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $N=\dfrac{x^4+3x^2y^2+2y^4}{xy^3}$.*

Lời giải. Ta có hằng đẳng thức quen thuộc sau

$$m^3+n^3+p^3-3mnp$$
$$=(m+n+p)\left(m^2+n^2+p^2-mn-np-pm\right).$$

Từ đó:

$$x^3y^3+12xy^2+8\le 8y^3\Leftrightarrow x^3y^3+12xy^2+8-8y^3\le 0$$

$$\Leftrightarrow (xy)^3+2^3+(-2y)^3-3.xy.2.(-2y)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (xy+2-2y)\times$$
$$\times\left[(xy)^2+2^2+(-2y)^2-xy.2-2.(-2y)-(-2y).xy\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow (xy+2-2y)\left(x^2y^2+4y^2+4-2xy+4y+2xy^2\right)\le 0 \text{ (1).}$$

Do $x^2y^2+4y^2+4-2xy+4y+2xy^2$

$$=(xy-1)^2+4y^2+3+4y+2xy^2>0,\ \forall x,y>0$$

nên từ (1), suy ra:

$$xy+2-2y\le 0\Leftrightarrow xy+2\le 2y$$

$$\Rightarrow 2\ge x+\frac{2}{y}\ge 2\sqrt{x.\frac{2}{y}}=2\sqrt{\frac{2x}{y}}\Rightarrow \frac{x}{y}\le\frac{1}{2}.$$

Theo BĐT Cauchy cho 2 số, 3 số thực dương thì

$$N=\frac{x^4+3x^2y^2+2y^4}{xy^3}=\left(\frac{x}{y}\right)^3+3.\frac{x}{y}+2.\frac{y}{x}$$

$$=\left[\left(\frac{x}{y}\right)^3+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right]+3.\frac{x}{y}+2.\frac{y}{x}-\frac{1}{4}$$

$$\ge 3.\sqrt[3]{\left(\frac{x}{y}\right)^3.\frac{1}{8}.\frac{1}{8}}+3.\frac{x}{y}+2.\frac{y}{x}-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{3}{4}.\frac{x}{y}+3.\frac{x}{y}+2.\frac{y}{x}-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}.\frac{x}{y}+2.\frac{y}{x}-\frac{1}{4}$$

$$=2\left(\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)-\frac{17}{4}.\frac{x}{y}-\frac{1}{4}$$

$$\ge 2.2\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{4x}{y}}-\frac{17}{4}.\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=4\sqrt{4}-\frac{19}{8}=\frac{45}{8}.$$

$N=\dfrac{45}{8}$ khi $\begin{cases}xy+2-2y=0\\ y=2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}.$

Vậy min$N=\dfrac{45}{8}$ khi $x=1,y=2$.

Bài toán 7. *Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $a^5+1\le a^3+8b^2+2ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^3-7a^2b+16b^3}{ab^2}$.*

Lời giải. Ta có:

$$a^5-a^3-a^2+1=a^3\left(a^2-1\right)-\left(a^2-1\right)$$

$$=\left(a^3-1\right)\left(a^2-1\right)=(a-1)^2(a+1)\left(a^2+a+1\right)\ge 0,\forall a>0$$

$$\Rightarrow a^5-a^3-a^2+1\ge 0\Leftrightarrow a^5+1\ge a^3+a^2.$$

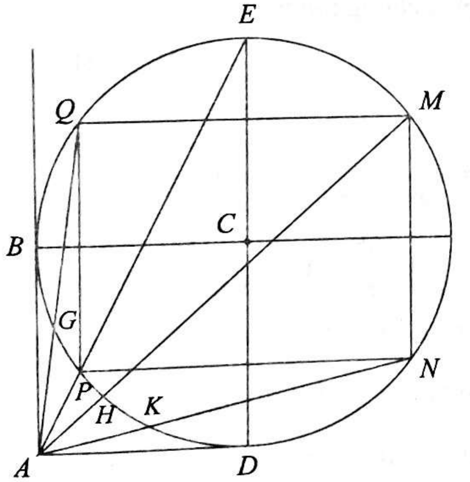
Từ giả thiết $a^5+1\le a^3+8b^2+2ab$ suy ra:

(Xem tiếp trang 42)

GIẢI ĐÁP ĐỐ VUI

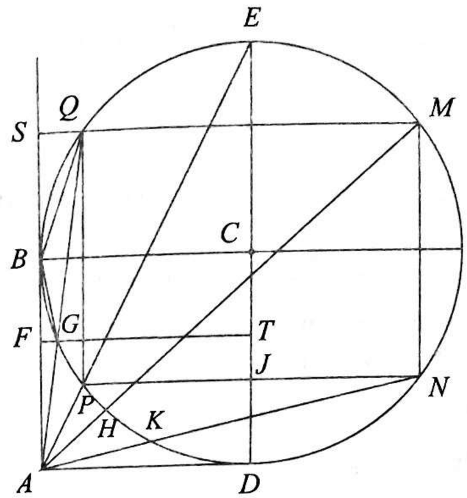
CÁC TAM GIÁC VUÔNG CẠNH HỮU TỈ

Cho hình vuông ABCD với cạnh AB = 5 cm. Dựng đường tròn tâm C bán kính r = CD với đường kính DE như ở hình 1. Đoạn thẳng AE cắt đường tròn tại điểm P. Từ điểm P kẻ đường thẳng PQ song song với CD và cắt đường tròn tại điểm Q. Dựng hình chữ nhật PQMN với các đỉnh nằm trên đường tròn. Đoạn thẳng AQ cắt đường tròn tại điểm G, đoạn thẳng AM cắt đường tròn tại điểm H, đoạn thẳng AN cắt đường tròn tại điểm K. Hãy chứng minh rằng mỗi điểm P, G, K, H là đỉnh của tam giác vuông với cạnh huyền tương ứng là CP, CG, CK, CH và số đo các cạnh tam giác vuông là số hữu tỉ.



Hình 1

Lời giải. Giả sử hai đoạn thẳng CD và PN cắt nhau tại điểm J, tia MQ cắt tia AB tại điểm S, đường thẳng đi qua G và song song với BC, lần lượt cắt AB và DC tại điểm F và điểm T (h.2).



Hình 2

Để giải bài toán này ta cần **Nhận xét**: *Từ điểm A nằm ngoài đường tròn tâm C vẽ cát tuyến AG cắt đường tròn tại hai điểm G và Q thì $AG.AQ = AB^2$, trong đó AB là tiếp tuyến của đường tròn với tiếp điểm B.*

Hướng dẫn chứng minh. Hai tam giác AGB và ABQ đồng dạng với nhau do có góc A chung và góc ABG bằng góc GQB, do đó $\frac{AG}{AB} = \frac{AB}{AQ}$, suy ra: $AG.AQ = AB^2$.

Giả thiết của bài toán là $AB = 5$ cm.

1) Ta sẽ chứng minh rằng tam giác vuông PCJ có số đo các đoạn thẳng PJ và CJ là số hữu tỉ.

Theo định lí Pythagoras có:

$$AE^2 = AD^2 + DE^2 = 5^2 + 10^2 = 125 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Từ nhận xét trên đối với cát tuyến APE có:

$$AP.AE = AB^2 = 25 \text{ (cm}^2\text{)}$$

nên $\frac{AP}{AE} = \frac{AP.AE}{AE^2} = \frac{25}{125} = \frac{1}{5}$.

Hai tam giác ADE và PJE đồng dạng (g, g) nên

$$\frac{JE}{PE} = \frac{DE}{AE}, \text{ do đó } \frac{DJ}{DE} = \frac{AP}{AE} = \frac{1}{5}.$$

Từ đó: $DJ = \frac{DE}{5} = 2$ (cm), suy ra:

$$CJ = 3 \text{ (cm) và } EJ = 8 \text{ (cm)}.$$

Lại có $\frac{PJ}{AD} = \frac{EJ}{ED} = \frac{8}{10}$ nên $PJ = 4$ (cm). ☞

☞ 2) Ta sẽ chứng minh rằng tam giác vuông GCT có số đo các đoạn thẳng GT và CT là số hữu tỉ. Từ câu 1) dễ thấy:

$$QS = 1 \text{ (cm) và } AS = PQ + DJ = 8 \text{ (cm)}.$$

Theo định lí Pythagoras có:

$$AQ^2 = AS^2 + SQ^2 = 8^2 + 1^2 = 65 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Từ nhận xét trên đối với cát tuyến AGQ có:

$$AG.AQ = AB^2 = 25 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Nên $\dfrac{AG}{AQ} = \dfrac{AG.AQ}{AQ^2} = \dfrac{25}{65} = \dfrac{5}{13}$.

Hai tam giác AGF và AQS đồng dạng (g, g) nên $\dfrac{FG}{SQ} = \dfrac{AG}{AQ} = \dfrac{5}{13}$. Từ đó $FG = \dfrac{5}{13}$ (cm), suy ra:

$$GT = 5 - \frac{5}{13} = \frac{60}{13} \text{ (cm)}.$$

Từ $\dfrac{AF}{AS} = \dfrac{AG}{AQ} = \dfrac{5}{13}$ có:

$$CT = 5 - AF = 5 - \frac{40}{13} = \frac{25}{13} \text{ (cm)}.$$

3) Lập luận tương tự trên ta có:

• Tam giác vuông cạnh huyền CK có số đo các cạnh góc vuông là các số hữu tỉ $\dfrac{40}{17}$ (cm) và $\dfrac{75}{17}$ (cm).

• Tam giác vuông cạnh huyền CH có số đo các cạnh góc vuông là các số hữu tỉ $\dfrac{100}{29}$ (cm) và $\dfrac{105}{29}$ (cm).

Nếu tiếp tục thực hiện dựng hình chữ nhật có các cạnh song song với AB và AD tương ứng từ đỉnh G, đỉnh K, đỉnh H rồi nối điểm A đến các đỉnh của các hình chữ nhật vừa dựng thì các đường thẳng vừa nối cắt cung tròn BD tại các điểm sẽ là đỉnh của các tam giác vuông (với đỉnh thứ hai là C, cạnh huyền là bán kính r) mà có độ dài các cạnh góc vuông là các số hữu tỉ.

Tổng quát, ta chứng minh được: Trong hệ tọa độ (AD; AB) nếu điểm P có hoành độ, tung độ là các số hữu tỉ thì theo cách dựng hình như trên, các điểm G, K, H cũng có hoành độ, tung độ là các số hữu tỉ.

Hoan nghênh bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**, đã xét hệ tọa độ với $C(0; 0)$, $A(-5; -5)$, $B(-5; 0)$ và tìm phương trình đường thẳng AE là $y = 2x + 5$, từ đó tính được các điểm P, Q, M, N có tọa độ hữu tỉ, tìm phương trình các đường thẳng AQ, AM, AN, tính được các điểm G, H, K có tọa độ hữu tỉ, suy ra điều phải chứng minh.

VIỆT HẢI (*Hà Nội*)

SUY NGHĨ SÂU HƠN ... (*Tiếp theo trang 40*)

$$a^3 + 8b^2 + 2ab \ge a^3 + a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab - 8b^2 \le 0$$
$$\Leftrightarrow a(a-4b) + 2b(a-4b) \le 0$$
$$\Leftrightarrow (a-4b)(a+2b) \le 0 \Leftrightarrow a - 4b \le 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{a}{b} \le 4.$$

Đặt $t = \dfrac{a}{b} > 0$ thì $0 < t \le 4$. Theo BĐT Cauchy cho 2 số thực dương ta có:

$$P = \frac{a^3 - 7a^2b + 16b^3}{ab^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 7.\frac{a}{b} + 16.\frac{b}{a}$$
$$= \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16\right] - 7.\frac{a}{b} + 16.\frac{b}{a} - 16$$
$$\ge 2\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2.16} - 7.\frac{a}{b} + 16.\frac{b}{a} - 16$$
$$= 8.\frac{a}{b} - 7.\frac{a}{b} + 16.\frac{b}{a} - 16$$
$$= \frac{a}{b} + \frac{16b}{a} - 16 \ge 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{16b}{a}} - 16$$
$$= 8 - 16 = -8.$$

$P = -8$ khi $a = 1, b = \dfrac{1}{4}$. Vậy $\min P = -8$.

Để kết thúc bài viết, các bạn hãy giải bài toán sau:

Bài toán. *Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x^3y^3 + 27x^2y + 2xy + 33 \le 27x^3 + 6x$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$H = \frac{x^6 - 2x^3y^3 + 3y^6}{x^4y^2}.$$

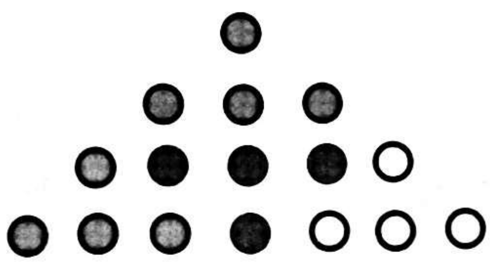
TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN
BÀI SỐ 88

PROBLEM: *Let S_n be the sum of the first n odd numbers $S_n = 1 + 3 + ... + (2n-1)$. Show that $S_{2n} = 4S_n$.*

Solution.

We can compute S_n and S_{2n} directly, using the formula for the sum of an arithmetic sequence, to get $S_n = n^2$ and $S_{2n} = (2n)^2 = 4n^2$. Thus, we get the required equality.

We present here a visual method to prove the required identity.



As shown in the above picture, S_4 is divided into 4 equal parts, each part is exactly S_2. Similarly, we can divide S_{2n} is divided into 4 equal parts, each part is S_n.

***Remark*:** This problem and solution is collected from mathschallenge.net

TỪ VỰNG

odd : *số lẻ*

arithmetic sequence : *cấp số cộng*

visual : (*tính từ*) *mang tính hình ảnh*

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 86.

BÀI TOÁN. *Tìm đỉnh của parabol có phương trình* $x = (y-3)(y-7)$.

Lời giải. Tương tự trường hợp của đường parabol có phương trình $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ đã được nghiên cứu trong số báo trước, đường parabol đã cho ở đề bài có trục đối xứng là đường thẳng có phương trình $y = \frac{3+7}{2} = 5$ và đường thẳng này đi qua đỉnh của parabol.

Hoành độ đỉnh của parabol ở đề bài là

$$x = (5-3)(5-7) = -4.$$

Vậy toạ độ đỉnh của parabol ở đề bài là

$$(-4; 5).$$

Nhận xét. Các bạn *Nguyễn Quốc Hoàng Anh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Trần Thị Thanh Thư*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, **Thừa Thiên Huế;** *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm. Xin hoan nghênh các bạn.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

Tìm được nhiều cách giải cho một bài toán rất quan trọng trong việc rèn luyện tư duy lôgic, óc sáng tạo và củng cố các tri thức toán học đã học. Thú vị hơn, nếu cách giải mới đơn giản, ngắn gọn và chỉ cần các kiến thức những lớp đầu cấp THCS. Tuy nhiên, bài viết này muốn nhấn mạnh thêm một hướng khác: Từ cách giải mới vận dụng vào việc đề xuất giải quyết các bài toán tương tự hay tổng quát hơn.

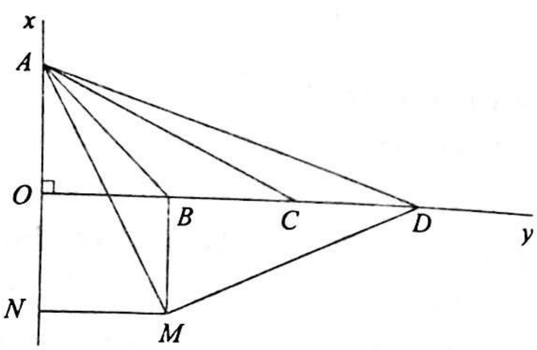
BÀI TOÁN 67. *Cho góc vuông xOy. Trên Ox lấy một điểm A và trên Oy lấy ba điểm B, C, D sao cho $OB = BC = CD = OA$. Chứng minh*

$$\widehat{ABO} = \widehat{ACO} + \widehat{ADO}.$$

Bài toán này quá quen thuộc, nhưng đọc xong bài viết này, bạn sẽ thấy những thú vị bất ngờ ẩn sau nó.

***Lời giải 1.** Sử dụng tam giác bằng nhau.*

Gọi N là điểm đối xứng với A qua O. Dựng hình vuông $OBMN$ (h.1).



Hình 1

Khi đó các tam giác vuông AMN, CAO, DMB bằng nhau nên

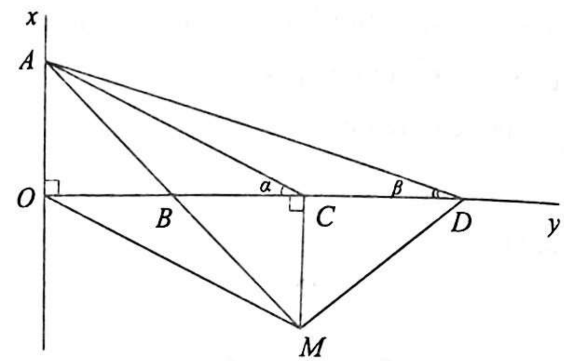
$$AM = DM;\ \widehat{ACO} = \widehat{MDB};\ \widehat{AMN} = \widehat{BMD}.$$

Suy ra $\widehat{AMD} = \widehat{BMN} = 90^0$. Từ đó tam giác AMD vuông và cân tại M nên

$$\begin{aligned}\widehat{ABO} = 45^0 &= \widehat{ADM}\\ &= \widehat{BDM} + \widehat{ADO}\\ &= \widehat{ACO} + \widehat{ADO}.\end{aligned}$$

***Lời giải 2.** Sử dụng tứ giác nội tiếp.*

Gọi M là điểm đối xứng với A qua B (h.2).



Hình 2

Khi đó tứ giác $AOMC$ là hình bình hành nên

$$CM \parallel OA \Rightarrow \widehat{MCB} = \widehat{AOB} = 90^0.$$

Mà $\widehat{MBC} = \widehat{ABO} = 45^0$ nên tam giác BMC vuông và cân tại C. Lại có tam giác BMD cân tại M có $\widehat{MBC} = 45^0 \Rightarrow \widehat{MDB} = 45^0$. Suy ra $\widehat{AMD} = 90^0 = \widehat{AOD}$ nên tứ giác $AOMD$ là tứ giác nội tiếp. Do đó $\widehat{AMO} = \widehat{ADO}$. Từ đó

$$\begin{aligned}\widehat{ABO} &= \widehat{ACO} + \widehat{BAC}\\ &= \widehat{ACO} + \widehat{AMO}\\ &= \widehat{ACO} + \widehat{ADO}.\end{aligned}$$

***Lời giải 3.** Sử dụng tam giác đồng dạng.*

Vì $\dfrac{BA}{BC} = \sqrt{2} = \dfrac{BD}{BA}$ nên hai tam giác BAC, BDA đồng dạng. Suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{BDA}$. Từ đó

$$\begin{aligned}\widehat{ABO} &= \widehat{ACB} + \widehat{BAC}\\ &= \widehat{ACO} + \widehat{ADO}.\end{aligned}$$

***Lời giải 4** (h.2). Sử dụng lượng giác.* Không mất tính tổng quát, giả sử $OA = OB = BC = CD = 1$. Đặt $\widehat{ACO} = \alpha, \widehat{ADO} = \beta$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{2}, \tan\beta = \frac{1}{3}, 0 < \alpha, \beta < 45^0$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}}$$

$$= 1 = \tan 45^0$$

$$= \tan\widehat{ABO}.$$

Do đó $\alpha + \beta = 45^0$. Từ đó $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} + \widehat{ADO}.$

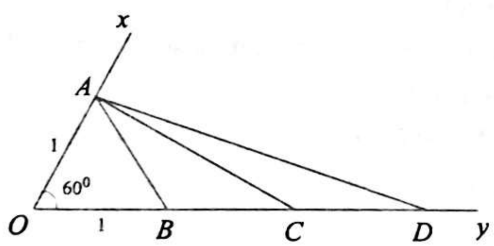
Ta nêu lên một số bài toán tương tự. Không mất tổng quát, ta cho OA bằng 1 đơn vị độ dài.

Bài toán 67.1. *Cho góc $\widehat{xOy} = 60^o$. Trên Ox lấy một điểm A sao cho $OA = 1$ và trên Oy lấy các điểm B, C, D sao cho $OB = 1, OC = a, OD = b$ $(1 < a < b)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b sao cho $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} + \widehat{ADO}$.*

Lời giải. Vì $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} + \widehat{BAC}$ nên

$$\widehat{ABO} = \widehat{ACO} + \widehat{ADO}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ADB} \quad \text{(h.3)}.$$



Hình 3

Muốn vậy, hai tam giác BAC, BDA phải đồng dạng, nghĩa là

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BD} \Leftrightarrow \frac{a-1}{1} = \frac{1}{b-1}$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow ab = a + b.$$

Nói riêng, cho $b = 3$ thì $a = 1{,}5$. Ta nhận được

Bài toán 67.2. *Cho góc $\widehat{xOy} = 60^o$. Trên Ox lấy một điểm A và trên Oy lấy các điểm B, C, D sao cho $OB = OA, 2OC = 3OA, OD = 2OC$. Chứng minh $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} + \widehat{ADO}$.*

Bài toán 67.3. *Cho góc vuông xOy. Trên Ox lấy một điểm A và trên Oy lấy ba điểm B, C, D sao cho $OA = 1, OB = a, OC = b, OD = c$ $(a < b < c)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, c sao cho*

$$\widehat{ABO} = \widehat{ACO} + \widehat{ADO}.$$

Lời giải. Đặt $\widehat{ABO} = \alpha, \widehat{ACO} = \beta, \widehat{ADO} = \gamma$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{a}, \tan\beta = \frac{1}{b}, \tan\gamma = \frac{1}{c}, 0 < \alpha, \beta, \lambda < 90^0.$$

$$\Rightarrow \tan(\beta+\gamma) = \frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1-\tan\beta.\tan\gamma} = \frac{b+c}{bc-1}.$$

Do đó: $\quad \beta + \gamma = \alpha \Rightarrow \tan(\beta+\gamma) = \tan\alpha$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c}{bc-1} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a(b+c) = bc - 1.$$

Nói riêng, cho $a = 1$ được $b + c = bc - 1$. Ta có:

Bài toán 67.3.1. *Cho góc vuông xOy. Trên Ox lấy một điểm A và trên Oy lấy ba điểm B, C, D sao cho $OA = OB = 1, OC = a, OD = b$ $(1 < a < b)$. Chứng minh $a + b = ab - 1$ là điều kiện cần và đủ để $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} + \widehat{ADO}$.*

LÊ QUỐC HÁN
(*GV Khoa Toán, Đại học Vinh, Nghệ An*)

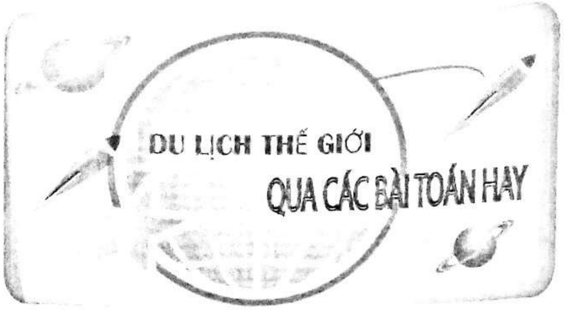
Nhận xét. Hai bạn *Nguyễn Văn Lâm*, *Phạm Xuân Hoàng*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** đưa ra 1 cách giải tương tự lời giải 1; bạn *Nguyễn Hùng Cường*, (xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**) đưa ra 1 cách giải tương tự lời giải 4 ở trên. Xin hoan nghênh các bạn.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 69 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 28.2.2023.

BÀI TOÁN 69. *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (MAB) và (SAB).*

NGUYỄN HỮU VĂN
(*GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An*)



BÀI TOÁN 76 (APMO, 2021). *Tìm số nguyên dương lớn nhất N sao cho tất cả các số trong tập hợp $\{1, 2, 3, ..., N\}$ chia hết cho 3 bằng số tất cả các số chia hết cho 5 hoặc 7 hoặc cả hai.*

Lời giải. Ta có số các số trong tập hợp

$$\{1, 2, 3, ..., N\}$$

chia hết cho 3, 5, 7 và 35 tương ứng là:

$$\left[\frac{N}{3}\right], \left[\frac{N}{5}\right], \left[\frac{N}{7}\right], \left[\frac{N}{35}\right].$$

Vì $\left[\frac{N}{5}\right]$ là các số chia hết cho 5, trong đó có cả các số chia hết cho 7 nên số các số chia hết cho 5 mà không chia hết cho 7 là: $\left[\frac{N}{5}\right]-\left[\frac{N}{35}\right]$.

Tương tự, số các số chia hết cho 7 mà không chia hết cho 5 là: $\left[\frac{N}{7}\right]-\left[\frac{N}{35}\right]$.

Vậy tổng các số chia hết cho 5, cho 7 hoặc cả hai là:

$$\left(\left[\frac{N}{5}\right]-\left[\frac{N}{35}\right]\right)+\left(\left[\frac{N}{7}\right]-\left[\frac{N}{35}\right]\right)+\left[\frac{N}{35}\right]$$
$$=\left[\frac{N}{5}\right]+\left[\frac{N}{7}\right]-\left[\frac{N}{35}\right].$$

Bài toán trở thành: Tìm nghiệm nguyên dương lớn nhất của phương trình:

$$\left[\frac{N}{3}\right]=\left[\frac{N}{5}\right]+\left[\frac{N}{7}\right]-\left[\frac{N}{35}\right] \quad (1).$$

Giả sử N là nghiệm cần tìm. Chia N cho 35 ta được: $N = 35k + r$, với $k, r \in \mathbb{N}$ và $0 \le r \le 34$.

Thay vào (1) ta có:

$$\left[\frac{35k+r}{3}\right]=\left[\frac{35k+r}{5}\right]+\left[\frac{35k+r}{7}\right]-\left[\frac{35k+r}{35}\right]$$

$$\Leftrightarrow 11k+\left[\frac{2k+r}{3}\right]=7k+\left[\frac{r}{5}\right]+5k+\left[\frac{r}{7}\right]-k-\left[\frac{r}{35}\right].$$

Vì $0 \le r \le 34$ nên $\left[\frac{r}{35}\right]=0$, do đó:

$$\left[\frac{2k+r}{3}\right]=\left[\frac{r}{5}\right]+\left[\frac{r}{7}\right].$$

Theo định nghĩa phần nguyên, ta có:

$$\left[\frac{r}{5}\right]\le\frac{r}{5};\ \left[\frac{r}{7}\right]\le\frac{r}{7};$$

$$\frac{2k+r}{3}-1\le\left[\frac{2k+r}{3}\right]\Rightarrow\frac{2k+r-3}{3}\le\left[\frac{2k+r}{3}\right].$$

Từ đây ta có đánh giá:

$$\frac{2k+r-3}{3}\le\left[\frac{2k+r}{3}\right]=\left[\frac{r}{5}\right]+\left[\frac{r}{7}\right]\le\frac{r}{5}+\frac{r}{7}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2k+r-3}{3}\le\frac{12r}{35}\Leftrightarrow 70k+35r-105\le 36r$$

$$\Leftrightarrow 70k \le 105 + r \le 105 + 34 = 139$$

$$\Leftrightarrow k \le 1.$$

Vì k là số nguyên không âm và số N cần tìm là số lớn nhất nên $k = 1$. Khi đó:

$$N = 35k + r = 35 + r \le 35 + 34 = 69.$$

Thử lại với $N = 69, 68, 67, \ldots$ ta thấy $N = 65$ là số tự nhiên lớn nhất thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã có lời giải đúng.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 28.2.2023.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 78. *Tìm tất các nghiệm nguyên của phương trình*

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+\ldots+(x+7)^3=y^3.$$

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP:

LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG?

(Đề đăng trên TH&TT số 543, tháng 9 năm 2022)

Phân tích sai lầm.

Ta có: $0 < x < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < 2x < \frac{3\pi}{2}$, mà $\cos 2x = \frac{4}{5}$ suy ra $0 < 2x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \tan x < 1$.

Lời giải đúng như sau.

Cách 1. Ta có $\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$. Khi đó, với $\cos 2x = \frac{4}{5}$ ta được: $\tan^2 x = \frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}} = \frac{1}{9}$.

Mà $0 < 2x < \frac{3\pi}{2}$, $\cos 2x = \frac{4}{5}$ suy ra: $0 < 2x < \frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow\ 0 < \tan x < 1$. Vậy $\tan x = \frac{1}{3}$.

Cách 2. Ta có $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Khi đó, với $\cos 2x = \frac{4}{5}$ ta được: $\cos^2 x = \frac{1+\frac{4}{5}}{2} = \frac{9}{10}$. Lại có $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, suy ra: $\tan^2 x = \frac{1}{\frac{9}{10}} - 1 = \frac{1}{9}$.

Mà $0 < 2x < \frac{3\pi}{2}$, $\cos 2x = \frac{4}{5}$, suy ra: $0 < 2x < \frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \tan x < 1$. Vậy $\tan x = \frac{1}{3}$.

Cách 3. Ta có $\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$. Khi đó, với $\cos 2x = \frac{4}{5}$ ta được $\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{9}$.

Mà $0 < 2x < \frac{3\pi}{2}$, $\cos 2x = \frac{4}{5}$ suy ra: $0 < 2x < \frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \tan x < 1$. Vậy $\tan x = \frac{1}{3}$.

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Hoàng Anh Thư*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** và bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã phát hiện đúng sai lầm và đưa ra lời giải như ở cách 1 trên. Xin hoan nghênh hai bạn.

KIHIVI

ĐÁP ÁN NÀO ?

Trong giờ bài tập tại lớp 12 Văn, thầy giáo có nêu bài toán sau:

Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-2x+m}$. *Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng?*

A. 1 **B.** 2 **C.** 3. **D.** 0

Sau vài phút suy nghĩ, bạn *Cẩm Tú* xung phong lên bảng giải, sau đây là lời giải của bạn *Cẩm Tú*.

Lời giải: Ta biết, $x = x_0$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-2x+m}$ khi $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{x-2}{x^2-2x+m} = \pm\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{x-2}{x^2-2x+m} = \pm\infty$

$\Rightarrow x_0$ là một nghiệm của phương trình $x^2-2x+m=0$ (1).

Do đó, đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng khi PT(1) có đúng một nghiệm, điều này tương đương với PT(1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 1-m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

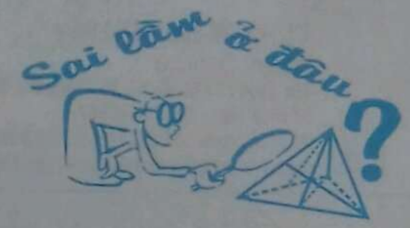
Với $m = 1$ ta có: $y = \frac{x-2}{x^2-2x+1}$ và $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-2}{x^2-2x+1} = -\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng duy nhất của đồ thị hàm số đã cho. Vậy $m = 1$ thoả mãn yêu cầu bài toán. Chọn đáp án **A**.

Sau khi giải xong, các bạn trong lớp 12 Văn , tỏ thái độ đồng ý với lời giải của bạn *Cẩm Tú*. Thầy giáo hỏi: Các bạn có nghi ngờ gì về lời giải của bạn *Cẩm Tú* không? Cả lớp trả lời đồng thanh, đúng rồi ạ.

Ý kiến của bạn thế nào?

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định)



GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG?

(*Đề đăng trên TH&TT số 543, tháng 9 năm 2022*)

Phân tích sai lầm. Lời giải là không đúng ở bước: *Và theo cách đặt thì*

$$a=\sqrt{(x-1)^2+1}\Leftrightarrow a^2-1=(x-1)^2,$$

cho nên ta được $x-1=\sqrt{a^2-1}$.

Lẽ ra từ $a^2-1=(x-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=\sqrt{a^2-1} \\ x-1=-\sqrt{a^2-1} \end{array}\right.$.

Lời giải đúng. Ta biến đổi PT đã cho như sau

$$5x^2-10x=4(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2-2x+2)-4(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}+(x-1)^2=9.$$

Do đó ta được $\left(2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)\right)^2=9$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)=3 \\ 2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)=-3 \end{array}\right.$.

TH1: $2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)=3$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x+2}=x+2\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ 4(x^2-2x+2)=(x+2)^2 \end{cases}.$$

Khi đó $4(x^2-2x+2)=(x+2)^2$

$$\Leftrightarrow 3x^2-12x+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{6+2\sqrt{6}}{3} \\ x=\dfrac{6-2\sqrt{6}}{3} \end{array}\right..$$

So với điều kiện ta nhận cả hai nghiệm trên.

TH2: $2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)=-3$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x+2}=x-4\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4 \\ 4(x^2-2x+2)=(x-4)^2 \end{cases}.$$

Ta có $4(x^2-2x+2)=(x-4)^2 \Leftrightarrow 3x^2-8=0$.

PT trên có nghiệm đều nhỏ hơn 4 nên bị loại.

Kết luận: PT có nghiệm $x=\dfrac{6\pm 2\sqrt{6}}{3}$.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm.

KIHIVI

ĐÁP ÁN NÀO ?

Trong một đề thi có câu hỏi sau đây: *Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho có đúng 2 chữ số lẻ và 2 chữ số lẻ đó luôn đứng cạnh nhau?*

A. 860 **B.** 408 **C.** 360 **D.** 240.

Bạn *Mai* đưa ra lập luận như sau: Ta xét một dãy gồm 4 ô như sau:

Mỗi số cần lập ứng với một cách chọn ra 4 phần tử của tập $\{0;2;4;6;a\}$ và hoán vị 4 phần tử vừa chọn vào 4 ô trên sao cho ô đầu tiên không phải chữ số 0, ô cuối cùng phải là chữ số chẵn, với

$$a\in\{13;31;15;51;35;53\}.$$

Bước 1: Chọn $a\in\{13;31;15;51;35;53\}$, có 6 cách chọn.

Bước 2: Trường hợp 1, chọn chữ số 0 để điền vào ô cuối cùng, có 1 cách. Số cách điền vào 3 ô đầu tiền bằng với số chỉnh hợp chập 3 của $\{2;4;6;a\}$ nên có A_4^3 cách.

Trường hợp 2, chọn chữ số 2 hoặc 4 hoặc 6 để điền vào ô cuối cùng, có 3 cách. Có 3 cách điền số vào ô đầu tiên, có A_3^2 cách điền số vào 2 ô ở giữa.

Số cách hoàn thành bước 2 là

$$1.A_4^3+3.3.A_3^2=24+54=68 \text{ cách.}$$

Vậy lập được tất cả $6.68=408$ số theo yêu cầu của bài toán. Chọn **B.**

Các bạn có đồng ý với lập luận của bạn Mai không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)