TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

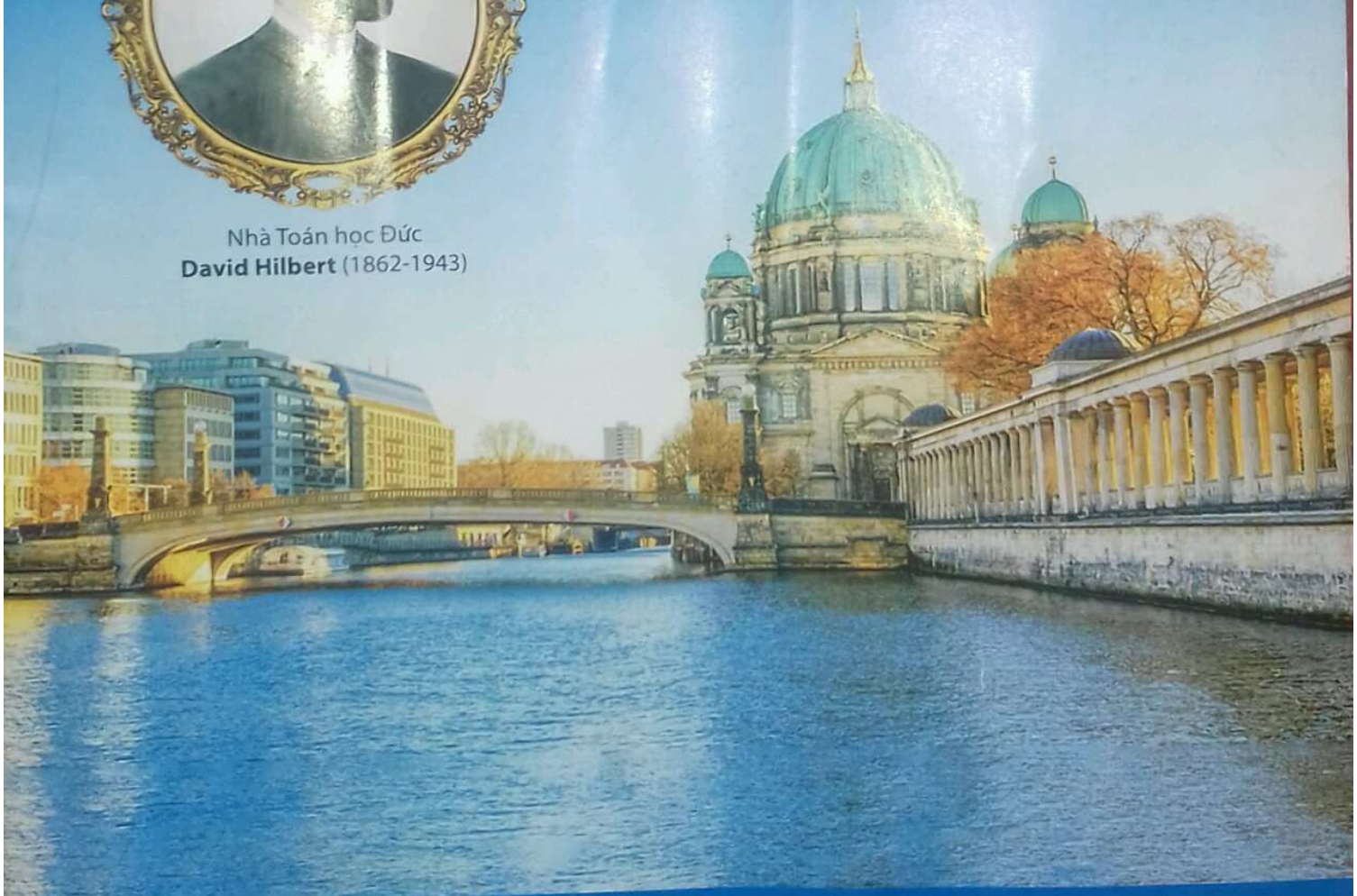
TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG
JOURNAL OF MATHEMATICS AND LITERATURE IN SCHOOL

Số 548
Tháng 2 - 2023
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 60 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Tru sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

Nhà Toán học Đức
David Hilbert (1862-1943)



Nhà thờ lớn Berlin (Đức)

TRUNG HỌC CƠ SỞ

VẬN DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC $x^2+y^2\geq 2xy$ (*) ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

TRẦN ANH TUẤN
(GV THCS Anh Sơn, H. Anh Sơn, Nghệ An)

Đây là một bất đẳng thức (BĐT) quen thuộc với đại đa số các em học sinh đặc biệt là học sinh khá giỏi và với cách trình bày trong bài viết này thì đa số học sinh có thể tiếp cận được với bất đẳng thức một cách nhẹ nhàng, dễ hiểu.

$x^2+y^2\geq 2xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$

đúng với mọi x, y và dấu "=" xảy ra khi $x=y$.

Sau đây là một số vận dụng để khai thác BĐT này như sau:

Bài 1. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c ta có:*

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca.$$

Hướng dẫn. Vận dụng BĐT (*) ta có:

$$a^2+b^2\geq 2ab;\ b^2+c^2\geq 2bc;\ c^2+a^2\geq 2ca.$$

Cộng các BĐT trên lại với nhau ta được:

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca \ \text{(đpcm)}.$$

• Đặc biệt hóa với $y=1$, áp dụng BĐT (*) ta có $x^2+1\geq 2x$. Sử dụng kết quả này với bốn biến a, b, c, d cho ta một bài toán khác.

Bài 2. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c, d ta có:*

$$a^2+b^2+c^2+d^2+4\geq 2(a+b+c+d).$$

Hướng dẫn. Ta có:

$$a^2+1\geq 2a;b^2+1\geq 2b;c^2+1\geq 2c;d^2+1\geq 2d.$$

Cộng các BĐT cùng chiều lại với nhau ta được:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+4\geq 2(a+b+c+d).$$

• Nếu thay x^2 bởi a^4, y^2 bởi b^4 ta có BĐT:

$$a^4+b^4\geq 2a^2b^2.$$

Tương tự ta có: $c^4+d^4\geq 2c^2d^2$.

Cộng hai BĐT vế theo vế ta có bài toán hay như sau:

Bài 3. *Chứng minh rằng:*

$$a^4+b^4+c^4+d^4\geq 4abcd.$$

Hướng dẫn. Ta có: $a^4+b^4\geq 2a^2b^2$;

$$c^4+d^4\geq 2c^2d^2.$$

Cộng theo vế các BĐT trên ta được:

$$a^4+b^4+c^4+d^4\geq 2\left(a^2b^2+c^2d^2\right)\geq 4abcd.$$

• Đặc biệt hơn nếu thay x bởi $\frac{a}{b}$, y bởi $\frac{b}{c}$ ta có $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\geq 2.\frac{a}{c}$. Tương tự như trên ta có bài toán hay và khó.

Bài 4. *Với a, b, c, d khác 0, chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq \frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}.$$

Hướng dẫn. Ta có:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\geq 2.\frac{a}{c};\ \frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq 2.\frac{b}{a};\ \frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\geq 2.\frac{c}{b}.$$

Cộng vế theo vế các BĐT trên với nhau ta được:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq \frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}.$$

• Từ bài 1 nếu ta nhân các BĐT đó theo vế ta được $\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\geq 8a^2b^2c^2$. Vậy từ đây chúng ta có bài toán mới như sau:

Bài 5. *Với mọi a, b, c, chứng minh:*

$$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\geq 8a^2b^2c^2.$$

Hướng dẫn. Vận dụng BĐT (*) ta có:

$$a^2+b^2\ge 2ab;\ b^2+c^2\ge 2bc;\ c^2+a^2\ge 2ca.$$

Nhân theo vế các BĐT ta được:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\ge 8a^2b^2c^2 \text{ (đpcm)}$$

• Ta có thể tăng số biến lên hoặc đặc biệt hóa ta sẽ được bài toán mới như sau.

Bài 6. *Với mọi a, b, c, d, chứng minh:*

$$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+d^2\right)\left(d^2+a^2\right)\ge 16a^2b^2c^2d^2.$$

Hướng dẫn. Ta có:

$$a^2+b^2\ge 2ab;\ b^2+c^2\ge 2bc;$$
$$c^2+d^2\ge 2cd;\ d^2+a^2\ge 2da.$$

Nhân các BĐT trên lại với nhau theo vế ta được:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+d^2\right)\left(d^2+a^2\right)\ge 16a^2b^2c^2d^2.$$

• Từ bài 2 và nhân các BĐT đó theo vế ta được $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\left(d^2+1\right)\ge 16abcd$. Từ đó ta có bài toán mới sau.

Bài 7. *Với mọi a, b, c, d, chứng minh rằng:*

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\left(d^2+1\right)\ge 16abcd.$$

Hướng dẫn. Từ bài 2 ta được:

$$a^2+1\ge 2a;\ b^2+1\ge 2b;\ c^2+1\ge 2c;\ d^2+1\ge 2d.$$

Nhân các BĐT trên lại theo vế ta được:

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\left(d^2+1\right)\ge 16abcd.$$

• Từ bài 4, nếu ta nhân các BĐT đã chứng minh được lại với nhau ta được bất đẳng thức $\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)\ge 8$. Ta có bài toán mới sau

Bài 8. *Cho a, b, c, d khác 0, chứng minh*

$$\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)\ge 8.$$

Hướng dẫn. Từ bài 4 ta có:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\ge 2.\frac{a}{c};\ \frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge 2.\frac{b}{a};\ \frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\ge 2.\frac{c}{b}.$$

Nhân các BĐT trên theo vế ta được:

$$\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)\ge 2\frac{a}{c}.2\frac{b}{a}.2\frac{c}{b}=8.$$

(đpcm).

• Cũng vận dụng BĐT phụ và sử dụng thêm một số điều kiện nữa chúng ta sẽ được một số bài toán mới sau.

Bài 9. *Với mọi a, b, c, d thỏa mãn*

$$a+b+c+d=2.$$

Chứng minh: $a^2+b^2+c^2+d^2\ge 1$.

Hướng dẫn. Sử dụng BĐT (*).

Ta có: $a^2+b^2\ge 2ab;\ a^2+c^2\ge 2ac;a^2+d^2\ge 2ad;$

$$b^2+c^2\ge 2bc;\ b^2+d^2\ge 2bd;c^2+d^2\ge 2cd.$$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$3\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\ge 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

$$\Rightarrow 4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\ge\left(a+b+c+d\right)^2=2^2=4$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2\ge 1.$$

• Từ $a^2+b^2\ge 2ab;\ a^2+c^2\ge 2ac,$ cộng các BĐT này theo vế ta được: $2a^2+b^2+c^2\ge 2ab+2ac$. Sử dụng tính chất liên hệ giữa thứ tự và phép cộng cộng vào 2 vế của BĐT trên với b^2+c^2 ta được $a^2+b^2+c^2\ge a\left(b+c\right)$. Ta có bài toán mới sau:

Bài 10. *Với mọi a, b, c, chứng minh rằng:*

$$a^2+b^2+c^2\ge a\left(b+c\right).$$

Hướng dẫn. Áp dụng BĐT (*) ta có:

$$a^2+b^2\ge 2ab\ ;\ a^2+c^2\ge 2ac.$$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$2a^2+b^2+c^2\ge 2ab+2ac$$

Cộng vào hai vế với b^2+c^2 suy ra:

$$2(a^2+b^2+c^2)\ge 2a(b+c)+b^2+c^2\ge 2a(b+c)$$

(đpcm).

• Từ $a^2+b^2 \ge 2ab$ cộng vào 2 vế với a^2+b^2 ta được $2\left(a^2+b^2\right) \ge (a+b)^2$ (1), vận dụng kết quả này ta được bài toán mới hay và khó sau.

Bài 11. *Cho x, y, z thỏa mãn:* $\begin{cases} x+y+z=5 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $1 \le x; y; z \le \dfrac{7}{3}$.

Hướng dẫn. Ta có:

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5-z \\ x^2+y^2=9-z^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=(5-z)^2 \\ 2\left(x^2+y^2\right)=18-2z^2 \end{cases}.$$

Từ BĐT (1) ta có:

$$x^2+y^2 \ge 2xy \Rightarrow 2(x^2+y^2) \ge (x+y)^2.$$

Do đó: $18-2z^2 \ge (5-z)^2 \Rightarrow 3z^2-10z+7 \le 0$

$$\Rightarrow (z-1)(3z-7) \le 0 \Rightarrow 1 \le z \le \frac{7}{3}.$$

Chứng minh tương tự ta được: $1 \le x; y; z \le \dfrac{7}{3}$.

• Vận dụng và biến đổi (*) ta có:

$$\frac{1}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2xy}; \frac{1}{y^2+z^2} \le \frac{1}{2yz}; \frac{1}{z^2+x^2} \le \frac{1}{2zx}$$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2} \le \frac{1}{2xy}+\frac{1}{2yz}+\frac{1}{2zx} = \frac{1}{2}.\frac{x+y+z}{xyz}.$$

Nếu cho $xyz = 1$ ta được:

$$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2} \le \frac{x+y+z}{2}.$$

Từ đó ta có bài toán mới hay và khó sau

Bài 12. *Cho a, b, c > 0 thỏa mãn abc = 1. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2} \le \frac{a+b+c}{2}.$$

Hướng dẫn. Từ BĐT (*) suy ra:

$$\frac{1}{a^2+b^2} \le \frac{1}{2ab}; \frac{1}{b^2+c^2} \le \frac{1}{2bc}; \frac{1}{c^2+a^2} \le \frac{1}{2ca}.$$

Cộng vế theo vế các BĐT thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2} \le \frac{1}{2ab}+\frac{1}{2bc}+\frac{1}{2ca} = \frac{a+b+c}{2abc} = \frac{a+b+c}{2}$$

(đpcm).

• Từ hướng dẫn của bài 12 và cho $a + b + c = 1$ ta được bài toán mới sau đây

Bài 13. *Cho a, b, c > 0 thỏa mãn a+b+c = 1. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2} \le \frac{1}{2abc}.$$

Hướng dẫn. Kết hợp với bài 12 ta có:

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2} \le \frac{1}{2ab}+\frac{1}{2bc}+\frac{1}{2ca} = \frac{a+b+c}{2abc} = \frac{1}{2abc}.$$

• Cũng với cấu trúc như các bài 12; 13 nhưng thay đổi về số mũ của các biến ta sẽ có bài toán mới sau đây.

Bài 14. *Cho x, y > 0 và xy = 1. Chứng minh rằng:*

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{x^2+y^4} \le 1.$$

Hướng dẫn. Áp dụng BĐT (*) ta có:

$$x^4+y^2 \ge 2x^2y \Rightarrow \frac{1}{x^4+y^2} \le \frac{1}{2x^2y}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^4+y^2} \le \frac{x}{2x^2y} = \frac{1}{2xy}.$$

Chứng minh tương tự: $\dfrac{y}{x^2+y^4} \le \dfrac{y}{2xy^2} = \dfrac{1}{2xy}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được :

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{x^2+y^4}\le\frac{x}{2x^2y}+\frac{y}{2xy^2}$$
$$=\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy}=\frac{1}{xy}=1.$$

• Cũng từ BĐT (*) ta được:

$$x^2+y^2\ge 2xy\Rightarrow xy\le\frac{x^2+y^2}{2}.$$

Vận dụng kết quả này và BĐT Bunyakovsky ta có bài toán mới sau đây.

Bài 15. *Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^4+y^4\le 2$. Chứng minh: $xy\le 1$.*

Hướng dẫn. Áp dụng BĐT (*) ta có:

$$x^2+y^2\ge 2xy\Rightarrow xy\le\frac{x^2+y^2}{2}.$$

Mặt khác, theo BĐT Bunyakovsky ta có:

$$\left(x^2+y^2\right)^2\le 2\left(x^4+y^4\right)=4\Rightarrow x^2+y^2\le 2.$$

Do đó $xy\le 1$ (đpcm).

• Nếu khai thác BĐT (*) theo một hướng khác chúng ta sẽ có một bài toán mới hay và khó sau:

Bài 16. *Cho $x\ge 2$, chứng minh rằng*

$$A=\frac{2}{(x-2)^2+x^2-2}+x^2+2\ge 7.$$

Hướng dẫn. Ta có:

$$A=\frac{2}{(x-2)^2+x^2-2}+x^2+2$$
$$=\frac{1}{(x-1)^2}+(x^2-2x+1)+2x+1$$
$$=\frac{1}{(x-1)^2}+(x-1)^2+2x+1$$
$$\ge 2.\frac{1}{x-1}.(x-1)+2.2+1=7.$$

• Tiếp tục khai thác theo một hướng khác từ kết quả của bài 1 là $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$. Cộng vào 2 vế của BĐT này với $2(xy+yz+zx)$ ta được:

$$(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)\ (**).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$. Bây giờ ta sẽ dùng bất đẳng thức (**) để tạo ra một vài bất đẳng thức khác.

Từ $(3t-1)^2\ge 0\Rightarrow 9t^2-6t+1\ge 0$

Thay $t=\frac{1}{a+b+c}$ với a, b, c dương ta được:

$$\frac{9}{(a+b+c)^2}-\frac{6}{a+b+c}+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{9}{(a+b+c)^2}\ge\frac{6}{a+b+c}.$$

Kết hợp bất đẳng thức trên và bất đẳng thức (**) với bộ số $(x,y,z)=(a,b,c)$ ta được bất đẳng thức:

$$1+\frac{3}{ab+bc+ca}\ge\frac{6}{a+b+c}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$. Ta có các bài toán mới hay và khó sau

Bài 17. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$1+\frac{3}{ab+bc+ca}\ge\frac{6}{a+b+c}.$$

Hướng dẫn. Từ bất đẳng thức (**) ta có:

$$\frac{(a+b+c)^2}{3}\ge ab+bc+ca\quad(1).$$

Từ $(3t-1)^2\ge 0\Rightarrow 9t^2-6t+1\ge 0.$

Thay $t=\frac{1}{a+b+c}$ với a, b, c dương ta được:

$$\frac{9}{(a+b+c)^2}-\frac{6}{a+b+c}+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{9}{(a+b+c)^2}\ge\frac{6}{a+b+c}.$$

Kết hợp (1) ta được bất đẳng thức:

$$1+\frac{3}{ab+bc+ca}\geq\frac{6}{a+b+c}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

• Ta có:

$$\begin{aligned}ab+bc+ca&=\frac{ca+ab}{2}+\frac{ab+bc}{2}+\frac{bc+ca}{2}\\&=a\frac{b+c}{2}+b\frac{c+a}{2}+c\frac{a+b}{2}\\&\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$. Từ đó ta có tiếp bài toán mới sau.

Bài 18. *Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:*

$$\frac{(a+b+c)^2}{3}\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}.$$

Hướng dẫn. Từ BĐT (**) ta có:

$$\begin{aligned}\frac{(a+b+c)^2}{3}&\geq ab+bc+ca\\&=\frac{ab+ac}{2}+\frac{ac+bc}{2}+\frac{bc+ab}{2}\\&=\frac{a(b+c)}{2}+\frac{c(a+b)}{2}+\frac{b(c+a)}{2}\\&\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}\quad\text{(đpcm).}\end{aligned}$$

• Bây giờ ta xét a, b, c không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Áp dụng bất đẳng thức (**) cho bộ số $(x,y,z)=(ab,bc,ca)$ ta có:

$$(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)=3abc.$$

Suy ra: $ab+bc+ca\geq\sqrt{3abc}$ (1).

Mặt khác: $a+b+c=1$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1$ (2).

Kết hợp (1) và (2) ta được:

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc}\leq 1.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$. Từ đó ta có bài toán sau

Bài 19. *Cho a, b, c không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:*

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc}\leq 1.$$

Hướng dẫn. Áp dụng bất đẳng thức (**) cho bộ số (ab,bc,ca) ta có:

$$(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)=3abc.$$

Suy ra:

$$ab+bc+ca\geq\sqrt{3abc}\ \ (1).$$

Mặt khác: $a+b+c=1$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1$ (2).

Kết hợp (1) và (2) ta được:

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc}\leq 1.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

• Cũng theo hướng này ta thay giả thiết $a+b+c=1$ bằng giả thiết $abc=1$, khi đó

$(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)=3(a+b+c)$ (3);

$ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra:

$$(ab+bc+ca)^3\geq 9(a+b+c).$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$. Ta đi đến bài toán.

Bài 20. *Cho a, b, c không âm thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:*

$$(ab+bc+ca)^3\geq 9(a+b+c).$$

Hướng dẫn. Từ bài 19 ta đã có:

$$(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c).$$

Mà $abc=1$, do đó:

$$(ab+bc+ca)^2\geq 3(a+b+c).$$

Mặt khác: $ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3$.

Nhân 2 BĐT trên lại với nhau ta được:

$$(ab+bc+ca)^3 \ge 9(a+b+c) \text{ (đpcm).}$$

• Tiếp tục dùng bất đẳng thức (**) cho bộ số $(x,y,z)=(ab,bc,ca)$, với giả thiết a, b, c không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$ ta có:

$$3\left(a^2bc+b^2ca+c^2ab\right) \le (ab+bc+ca)^2.$$

Mặt khác: $ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2$ nên

$$3\left(a^2bc+b^2ca+c^2ab\right) \le (ab+bc+ca)^2 \le \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 = 1.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Từ đó ta có bài toán sau

Bài 21. *Cho a, b, c không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:*

$$a^2bc+b^2ca+c^2ab \le \frac{1}{3}.$$

Hướng dẫn. Tiếp tục dùng bất đẳng thức (**) cho bộ số (ab,bc,ca) với giả thiết a, b, c ta có:

$$3\left(a^2bc+b^2ca+c^2ab\right) \le (ab+bc+ca)^2.$$

Mặt khác: $ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2$ nên

$$3\left(a^2bc+b^2ca+c^2ab\right) \le (ab+bc+ca)^2 \le \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 = 1 \text{ (đpcm).}$$

• Thay điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$ bởi điều kiện $a+b+c=\sqrt{abc}$ và vẫn tiếp hướng trên ta được:

$$(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c) = 3(a+b+c)^3.$$

Suy ra:

$$ab+bc+ca \ge (a+b+c)\sqrt{3(a+b+c)} \quad (5).$$

Mặt khác từ giả thiết, áp dụng BĐT Cauchy cho a, b, c không âm ta có:

$$a+b+c=\sqrt{abc} \le \sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{27}} = \frac{1}{9}(a+b+c)\sqrt{3(a+b+c)}.$$

Suy ra: $\sqrt{3(a+b+c)} \ge 9$ (6).

Kết hợp (5) và (6) ta có bài toán sau với dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=9$.

Bài 22. *Cho a, b, c không âm thỏa mãn $a+b+c=\sqrt{abc}$. Chứng minh rằng:*

$$ab+bc+ca \ge 9(a+b+c).$$

Hướng dẫn. Tiếp tục dùng bất đẳng thức (**) cho bộ số (ab,bc,ca) với a, b, c không âm ta có:

$$(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c) = 3(a+b+c)^3.$$

Suy ra: $ab+bc+ca \ge (a+b+c)\sqrt{3(a+b+c)}$.

Mặt khác theo BĐT Cauchy ta có:

$$a+b+c=\sqrt{abc} \le \sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{27}} = \frac{1}{9}(a+b+c)\sqrt{3(a+b+c)}.$$

Suy ra: $\sqrt{3(a+b+c)} \ge 9$. Do đó:

$$ab+bc+ca \ge 9(a+b+c).$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=9$ (đpcm).

• Lại thay giả thiết $a+b+c=\sqrt{abc}$ bởi giả thiết $abc \ge ab+bc+ca$ ta tiếp tục có:

$$(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c) \quad (7).$$

Từ giả thiết ta có: $a^2b^2c^2 \ge (ab+bc+ca)^2$ (8).

Do đó, từ (7), (8) ta có:

$$a^2b^2c^2 \ge (ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c).$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=3$. Từ đó ta đi đến bài toán sau:

Bài 23. *Cho a, b, c dương thỏa mãn $abc \ge ab+bc+ca$. Chứng minh rằng:*

$$abc \ge 3(a+b+c).$$

Hướng dẫn. Ta có:

$$(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c).$$

Từ $abc \ge ab+bc+ca$ suy ra:

$$a^2b^2c^2 \ge (ab+bc+ca)^2.$$

Do đó:

$$a^2b^2c^2 \ge (ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c).$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=3$ (đpcm).

• Tiếp tục khai thác BĐT (*) theo một hướng khác xem sẽ cho chúng ta điều gì?

Bây giờ ta xét BĐT (*) với x, y là 2 số dương tùy ý. Ta có: $x^2+y^2 \ge 2xy \Rightarrow \dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2} \ge \dfrac{2xy}{x^2y^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2} \ge \frac{2}{xy} = \frac{8}{4xy} \ge \frac{8}{(x+y)^2}.$$

Vì vậy ta được một BĐT mới sau:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2} \ge \frac{8}{(x+y)^2} \quad (1^*).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$. Sau đây là một số bài toán ứng dụng của (1*)

Bài 24. *Cho a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c=4$. Chứng minh:*

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{8}{c^2} \ge 4.$$

Hướng dẫn. Với a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c=4$ sử dụng liên tiếp (1*) hai lần ta được:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{8}{c^2} \ge \frac{8}{(a+b)^2}+\frac{8}{c^2} \ge \frac{64}{(a+b+c)^2} = 4.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1; c=2$.

• Ta lại có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{8}{c^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}+\frac{8}{c^2} \ge \frac{8}{\left(a+\frac{b}{2}\right)^2}+\frac{8}{c^2}$$
$$\ge \frac{64}{\left(a+\frac{b}{2}+c\right)^2} = \frac{256}{(2a+b+2c)^2}.$$

Nếu cho $2a+b+2c=8$ thì $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}+\dfrac{8}{c^2} \ge 4.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=1; b=c=2$.

Chúng ta có bài toán mới sau đây.

Bài 25. *Cho a, b, c dương thỏa mãn $2a+b+2c=8$. Chứng minh: $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}+\dfrac{8}{c^2} \ge 4.$*

Hướng dẫn. Biến đổi và vận dụng 2 lần BĐT (1*) ta được:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{8}{c^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}+\frac{8}{c^2} \ge \frac{8}{\left(a+\frac{b}{2}\right)^2}+\frac{8}{c^2}$$
$$\ge \frac{64}{\left(a+\frac{b}{2}+c\right)^2} = \frac{256}{(2a+b+2c)^2}.$$

Mà $2a+b+2c=8$ nên $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}+\dfrac{8}{c^2} \ge \dfrac{256}{8^2} = 4.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=1; b=c=2$.

• Bây giờ nếu ta thay a, b, c trong bài 25 lần lượt bởi $x+1, y+2, z+3$ thì:

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{(y+2)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}$$
$$= \frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{\left(\frac{y}{2}+1\right)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}$$
$$\ge \frac{8}{\left(x+1+\frac{y}{2}+1\right)^2}+\frac{8}{(z+3)^2} \ge \frac{64}{\left(x+\frac{y}{2}+z+5\right)^2}$$
$$= \frac{256}{(2x+y+2z+10)^2}.$$

(Xem tiếp trang 16)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10, TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN, ĐHQG HÀ NỘI NĂM HỌC 2022 – 2023

VÒNG 1

Câu I. 1) *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 6(xy+5)+x^3y+5x^2=42 \\ x^3+5x^2y+6x+30y=42 \end{cases}.$$

2) *Giải phương trình*

$$\left(\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{3-x}\right)\left(2+3\sqrt[3]{(x+6)(3-x)}\right)=24.$$

Lời giải. 1) Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} (xy+5)(x^2+6)=42 \\ (x+5y)(x^2+6)=42 \end{cases}$$

suy ra: $x+5y=5+xy \Leftrightarrow (x-5)(y-1)=0.$

Giải $\begin{cases} y=1 \\ (x+5y)(x^2+6)=42 \end{cases} \Leftrightarrow x^3+5x^2+6x-12=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+6x+12)=0 \Leftrightarrow x=1.$

Giải $\begin{cases} x=5 \\ (x+5y)(x^2+6)=42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-\dfrac{113}{155}. \end{cases}$

2) Đặt $u=\sqrt[3]{x+6}, v=\sqrt[3]{3-x}$ thu được

$$\begin{cases} u^3+v^3=9 \\ (u+v)(2+3uv)=24 \quad (2) \end{cases}$$

Ta có:

$(2) \Leftrightarrow 2(u+v)+3uv(u+v)+(u^3+v^3)=24+9$

$\Leftrightarrow (u+v)^3+2(u+v)=33.$

Đặt $t=u+v$ thu được:

$t^3+2t-33=0 \Leftrightarrow (t-3)(t^2+3t+11)=0 \Leftrightarrow t=3.$

Ta thu được: $\begin{cases} u+v=3 \\ uv=2 \end{cases} \Rightarrow u(3-u)=2$

$\Leftrightarrow u^2-3u+2=0 \Leftrightarrow u=1, u=2.$

- $u=1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+6}=1 \Leftrightarrow x=-5.$
- $u=2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+6}=2 \Leftrightarrow x=2.$

Đáp số: $x=-5; x=2.$

Câu II. 1) *Tìm tất cả các cặp số nguyên* (x, y) *thỏa mãn đẳng thức*

$25y^2+354x+60=36x^2+305y+(5y-6x)^{2022}$ (1).

2) *Trên bàn có 8 hộp rỗng (trong các hộp không có viên bi nào). Người ta thực hiện các lần thêm bi vào các hộp theo quy tắc sau: mỗi lần ta chọn ra 4 hộp bất kỳ và bỏ vào một hộp 1 viên, một hộp 2 viên, hai hộp còn lại mỗi hộp 3 viên. Hỏi số lần thêm bi ít nhất có thể để nhận được số bi ở 8 hộp trên là 8 số tự nhiên liên tiếp?*

Lời giải. 1)

$(1) \Leftrightarrow 25y^2-36x^2+354x-305y+60=(5y-6x)^{2022}$

$\Leftrightarrow (5y+6x)(5y-6x)-60(5y-6x)$

$-(5y+6x)+60=(5y-6x)^{2022}$

$\Leftrightarrow (6x+5y-60)(5y-6x-1)=(5y-6x)^{2022}$

$\Leftrightarrow 6x+5y-60=\dfrac{(5y-6x)^{2022}}{5y-6x-1}$

$=\dfrac{(5y-6x)^{2022}-1}{5y-6x-1}+\dfrac{1}{5y-6x-1}.$

Vì $\dfrac{(5y-6x)^{2022}-1}{5y-6x-1}=$

$=(5y-6x)^{2021}+(5y-6x)^{2020}+\ldots+(5y-6x)+1$

là số nguyên, suy ra:

$$\frac{1}{5y-6x-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5y-6x-1=\pm 1.$$

- Xét trường hợp $5y-6x-1=-1$, suy ra:

$\begin{cases} 5y-6x=0 \\ 5y+6x-60=0 \end{cases} \Rightarrow 10y=60 \Rightarrow y=6, x=5.$

- Xét trường hợp $5y-6x-1=1$, suy ra:

$\begin{cases} 5y-6x=2 \\ 6x+5y-60=2^{2023} \end{cases} \Rightarrow 10y=2+60+2^{2022},$

suy ra phương trình này không có nghiệm nguyên vì $2+60+2^{2022}$ có tận cùng là 6.

Đáp số: $x=5, y=6$.

2) Sau mỗi lần thêm bi, tổng số bi trong các hộp tăng $1+2+3+3=9$. Tổng 8 số tự nhiên liên tiếp nhỏ nhất bằng $0+1+2+3+4+5+6+7=28$. Suy ra để nhận được số bi ở 8 hộp là 8 số tự nhiên liên tiếp cần ít nhất 4 lần thêm bi.

Ta chỉ ra một cách thêm bi trong 4 lần thỏa mãn yêu cầu bài toán như sau:

Xét 8 hộp theo thứ tự $1 \to 8$

Lần 1: 1 2 0 0 0 0 3 3

Lần 2: 1 2 2 1 0 0 6 6

Lần 3: 1 2 2 1 3 3 7 8

Lần 4: 1 2 3 4 5 6 7 8 (thỏa mãn yêu cầu của bài toán).

Đáp số: số lần thêm bi nhỏ nhất là 4.

Câu III. *Cho hình chữ nhật $ABCD$ $(AB<AD)$ nội tiếp trong đường tròn (O). Trên cạnh AD lấy hai điểm E và F (E, F không trùng với A, D) sao cho E nằm giữa A và F, đồng thời* $\widehat{ABE}+\widehat{DCF}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}$.

1) *Chứng minh rằng BE và CF cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O).*

2) *Đường thẳng qua O song song với BC cắt BE, CF theo thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng*

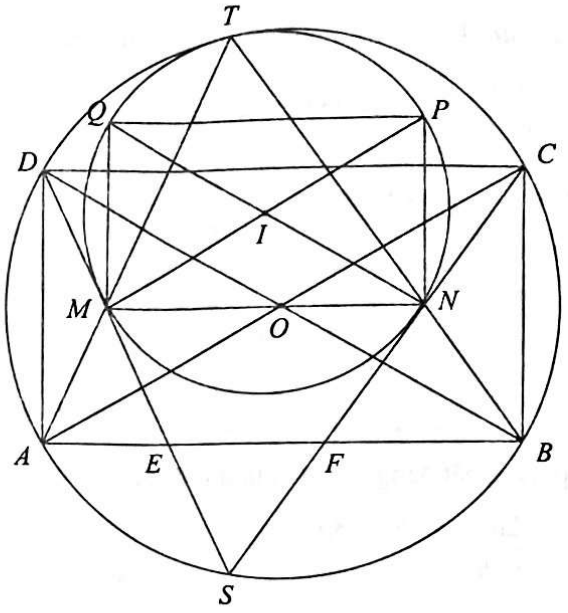
$$\widehat{DAM}+\widehat{ADN}+\frac{1}{2}\widehat{AOD}=180^\circ.$$

3) *Dựng hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho NQ song song với BD, đồng thời MP song song với AC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $MNPQ$ tiếp xúc với đường tròn (O).*

Lời giải. 1) Gọi S là giao của BM và CN. Ta có:

$$\widehat{BSC}=\widehat{ESF}=180^0-\widehat{SEF}-\widehat{SFE}$$
$$=90^0-\widehat{ABE}+90^0-\widehat{DCF}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}.$$

Suy ra $S\in(O)$.



2) Do O là trung điểm của AC, BD nên M, N theo thứ tự là trung điểm của BE, CF. Từ các tam giác ABE và DCF vuông tại A và D ta suy ra các tam giác MAE và NFD cân tại M và N. Kết hợp với câu 1) ta có:

$$\widehat{DAM}+\widehat{ADN}=\widehat{MEA}+\widehat{NFD}=180^0-\widehat{ESF}$$
$$=180^0-\frac{1}{2}\widehat{AOD}.$$

3) Gọi T là giao điểm của MA và ND. Theo câu 2) thì: $\widehat{ATD}=180^0-\widehat{MAD}-\widehat{NDA}$

$$=\frac{1}{2}\widehat{AOD}.$$

Vậy với hình chữ nhật $MNPQ$ ta cũng có T nằm trên đường tròn (I) ngoại tiếp hình chữ nhật $MNPQ$. Từ đó trong tam giác TAD có $MN \parallel AD$, ta suy ra đường tròn (TMN) tiếp xúc với đường tròn (TAD) hay (I) tiếp xúc với (O).

Câu IV. *Cho a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{2a}{a+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{6a+2c}{3b+c}+\frac{4a+3b+c}{b+c}\geq\frac{32a}{2a+b+c}.$$

Lời giải. Ta chứng minh được kết quả cần thiết sau: $\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\geq\frac{4a}{a+b}$ (1). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Thật vậy: $(1)\Leftrightarrow ab+c^2\geq\frac{4abc}{a+b}$

$$\Leftrightarrow\left(c-\frac{2ab}{a+b}\right)^2-\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}+ab\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(c-\frac{2ab}{a+b}\right)^2+ab\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta thu được:

$$\frac{2a}{a+b}+\frac{a+b}{a+c}\geq\frac{8a}{3a+c}$$

$$\Rightarrow\frac{2a}{a+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{2(3a+c)}{3b+c}\geq\frac{8a}{3a+c}+\frac{2(3a+c)}{3b+c}$$

$$=2\left(\frac{4a}{3a+c}+\frac{3a+c}{3b+c}\right)\geq 2.\frac{16a}{4a+3b+c}.$$

$$\Rightarrow\frac{2a}{a+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{2(3a+c)}{3b+c}+\frac{4a+3b+c}{b+c}$$

$$\geq\frac{32a}{4a+3b+c}+\frac{4a+3b+c}{b+c}=4\left(\frac{8a}{4a+3b+c}+\frac{4a+3b+c}{4(b+c)}\right)$$

$$\geq\frac{4.32a}{8a+4b+4c}=\frac{32a}{2a+b+c} \text{ (đpcm).}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

VÒNG 2

Câu I. 1) *Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}+\frac{1}{c+ab}\right)$$

$$\leq\sqrt{\frac{abc}{(a+bc)(b+ca)(c+ab)}}.$$

2) *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}2x^2+3xy+y^2=6\\3x+2y+1=2\sqrt{2x+y+6}.\end{cases}$$

Lời giải. 1) Ta có điều kiện $\Leftrightarrow ab+bc+ca=abc$, suy ra: $a^2+abc=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$

$$b^2+abc=b^2+ab+bc+ca=(b+c)(b+a).$$

$$c^2+abc=c^2+ab+bc+ca=(c+a)(c+b).$$

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{a^2+abc}+\frac{b}{b^2+abc}+\frac{c}{c^2+cab}$$

$$=\frac{2abc}{\sqrt{(a^2+abc)(b^2+bca)(c^2+cab)}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}$$

$$=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)=2abc$$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca=abc$ (đúng).

2) Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}(x+y)(2x+y)=6 & (1).\\3x+2y+1=2\sqrt{2x+y+6} & (2)\end{cases}$$

$$(2)\Leftrightarrow 3x+2y+1=2\sqrt{(2x+y)+(x+y)(2x+y)}$$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)+(2x+y)=2\sqrt{(2x+y)(x+y+1)}.$$

Đặt $a=x+y+1, b=2x+y$ ta thu được:

$$a+b=2\sqrt{ab}\Rightarrow a+b\geq 0\Rightarrow (a+b)^2=4ab$$

$$\Rightarrow (a-b)^2=0\Rightarrow a=b$$

$$\Rightarrow x+y+1=2x+y\Rightarrow x=1.$$

Thay vào (1): $(y+1)(y+2)=6\Rightarrow y^2+3y-4=0$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}y=1\\y=-4 \text{ (loại vì } 3.1+2.(-4)+1<0)\end{bmatrix}.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;1)$.

Câu II. 1) *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn đẳng thức*

$$(x+y)(5x+y)^3+xy^3=(5x+y)^3+x^2y^3+xy^4.$$

2) *Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn các điều kiện sau:*

$$\begin{cases} c \le b < a \le 3, \\ b^2 + 2a \le 10, \\ b^2 + 2a + 2c \le 14, \\ (a^2+1)(b^2+1) + 4ab \le 2a^3 + 2b^3 + 2a + 2b \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 4a^2 + b^4 + 2b^2 + 4c^2.$$

Lời giải. 1) Phương trình tương đương với

$$(5x+y)^3(x+y-1) + xy^3(1-x-y) = 0$$

$$\Rightarrow (x+y-1)\left((5x+y)^3 - xy^3\right) = 0.$$

Vì x, y nguyên dương $\Rightarrow x+y-1>0$ và phương trình tương đương với:

$$(5x+y)^3 = xy^3 \Rightarrow (5x+y)^3 \text{ chia hết cho } y^3$$

$$\Rightarrow (5x+y) \text{ chia hết cho } y \Rightarrow \frac{5x+y}{y} \text{ là số nguyên}$$

$$\Rightarrow \frac{5x+y}{y} = z \text{ là số nguyên dương.}$$

Ta thu được:

$$x = z^3 \Rightarrow 5z^3 + y = yz \Rightarrow 5z^3 = y(z-1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{5z^3}{z-1} = \frac{5z^3 - 5 + 5}{z-1} = 5\left(z^2+z+1\right) + \frac{5}{z-1}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{z-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow z-1 \in \{1; 5\}.$$

Mà z là số nguyên dương nên:

+ $z-1=1 \Rightarrow z=2 \Rightarrow x=8, y=40.$

+ $z-1=5 \Rightarrow z=6 \Rightarrow x=6^3=216, y=216.$

2) Ta có:

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right) + 4ab \le 2a^3 + 2b^3 + 2a + 2b$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+1-2b\right)\left(b^2+1-2a\right) \le 0.$$

Vì $a>b \Rightarrow a^2+1-2b > b^2+1-2b = (b-1)^2 \ge 0$

$$\Rightarrow b^2+1-2a \le 0 \Rightarrow b^2+1 \le 2a.$$

Đặt $A=2a, B=b^2+1, C=2c,$ ta thu được:

$$0 < C \le B \le A \le 6 \ (\text{vì } B = b^2+1 \ge 2b \ge 2c = C);$$

$$A+B \le 11, A+B+C \le 15.$$

Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = (2a)^2 + \left(b^2+1\right)^2 + (2c)^2 - 1 = A^2 + B^2 + C^2 - 1.$$

Ta chứng minh rằng:

$$A^2 + B^2 + C^2 \le 6^2 + 5^2 + 4^2$$

$$\Leftrightarrow (6-A)(6+A) + (5-B)(5+B) + (4-C)(4+C) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (6-A)\left[(6+A) - (5+B)\right] + (11-A-B)\left[(5+B) - (4+C)\right] + (15-A-B-C)(4+C) \ge 0 \text{ (đúng)}$$

$\Rightarrow \max P = 6^2 + 5^2 + 4^2 - 1 = 76$ khi $a = 3$, $b = 2$, $c = 2$.

Câu III. *Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn (O). Điểm P nằm trong tam giác ABC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh CA, AB. Giả sử tứ giác $BCEF$ nội tiếp trong đường tròn (K).*

1) *Chứng minh rằng AP vuông góc BC.*

2) *Chứng minh rằng $AP = 2OK$.*

3) *Đường thẳng qua P vuông góc với AP cắt đường tròn (O) tại hai điểm Q và R. Chứng minh rằng đường tròn tâm A bán kính AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác KQR.*

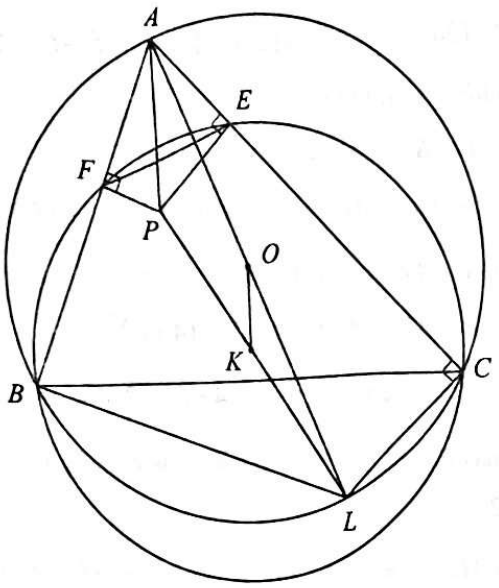
Lời giải.

1) Ta dễ thấy tứ giác $AEPF$ nội tiếp, ta có biến đổi góc: $\widehat{ACB} = \widehat{AFE} = \widehat{APE} = 90^0 - \widehat{PAE}$.

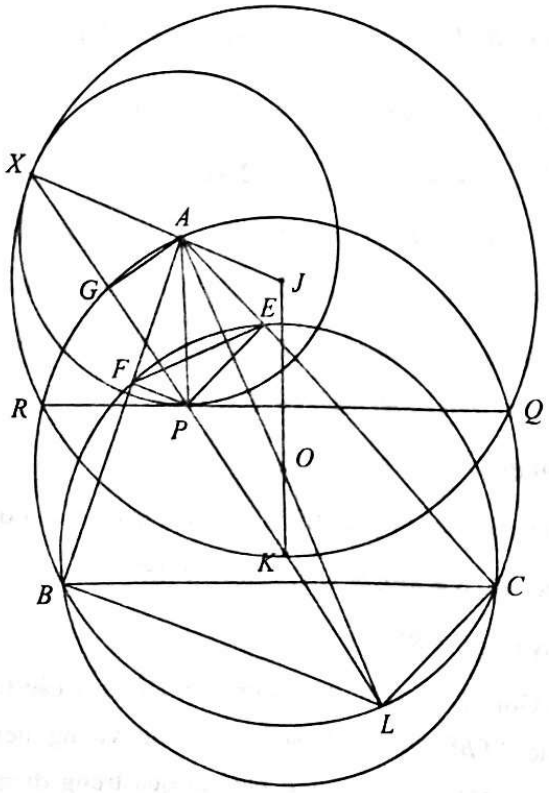
Suy ra $AP \perp BC$.

2) Gọi AL là đường kính của (O). Dễ thấy các tứ giác $PFBL$ và $PECL$ là hình thang vuông nên trung trực của BF và CE phải đi qua trung điểm

của PL. Do tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn (K) nên trung trực của BF và CE phải cắt nhau tại K. Từ đó K là trung điểm của PL, vậy theo tính chất đường trung bình thì $AP = 2OK$.



3) Gọi giao điểm thứ hai của LP và (O) là G; giao điển thứ hai của PG và (A, AP) là X. Gọi (J) là đường tròn ngoại tiếp tam giác KQR.



Từ AL là đường kính của (O) suy ra G là hình chiếu của A trên XP hay G là trung điểm XP. Kết hợp K là trung điểm PL, ta suy ra:

$$PX.PK = PG.PL = PR.PQ,$$

và ta suy ra X nằm trên đường tròn (KQR). Từ các tam giác AXP và JXK cân tại A và J kết hợp với K, O, J thẳng hàng (do cùng thuộc trung trực BC), ta suy ra X, A, J thẳng hàng. Vậy (A, AP) tiếp xúc với (J).

Câu IV. *Cho các điểm $A_1, A_2, ..., A_{30}$ theo thứ tự nằm trên một đường thẳng sao cho độ dài các đoạn A_kA_{k+1} bằng k (đơn vị dài), với $k = 1,2,...,29$. Ta tô màu mỗi đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{29}A_{30}$ bởi 1 trong 3 màu (mỗi đoạn được tô bởi đúng 1 màu). Chứng minh rằng với mọi cách tô màu, ta luôn chọn được 2 số nguyên dương $1 \le j < i \le 29$ sao cho hai đoạn A_iA_{i+1}, A_jA_{j+1} được tô cùng màu và $i - j$ là bình phương của số nguyên dương.*

Lời giải. Giả sử phản chứng bài toán không thỏa mãn $\Leftrightarrow$ có tồn tại một cách tô màu các đoạn thẳng bằng một trong ba màu A, B, C mà hiệu độ dài của 2 cạnh cùng màu bất kì không là bình phương của số nguyên dương.

Vì 9, 16, 25 là bình phương nên theo giả thiết phản chứng các cạnh độ dài:

1, 10, 26 được tô bằng các màu đôi một phân biệt,

1, 17, 26 được tô bằng các màu đôi một phân biệt,

suy ra 10, 17 cùng màu (đều cùng khác màu của 1, 26).

+ Kí hiệu $f(i)$ là màu của đoạn thẳng có độ dài i thì $f(10) = f(17)$.

+ Vì 2, 11, 27 có màu đôi một phân biệt,

2, 18, 27 có màu đôi một phân biệt,

$\Rightarrow$ 11, 18 cùng màu $\Rightarrow f(11) = f(18)$.

Tương tự 3, 12, 28 có màu đôi một phân biệt,

3, 19, 28 có màu đôi một phân biệt,

$\Rightarrow$ 12, 19 cùng màu $\Rightarrow f(12) = f(19)$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TỈNH BÌNH ĐỊNH NĂM HỌC 2022 – 2023, MÔN TOÁN CHUYÊN

Thời gian làm bài: 150 *phút* (*không kể thời gian phát đề*)

Bài 1. (*2,5 điểm*) 1) Cho biểu thức

$$P = x^{2022}.\sqrt{x} - 5x^{2020}.\sqrt{x} + x^2 + 2017.$$

Tính giá trị của P khi $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

2) Cho phương trình $x^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$, trong đó b, c là các số nguyên. Biết phương trình có nghiệm $x_0 = 2+\sqrt{5}$. Tìm b, c và các nghiệm còn lại của phương trình.

Bài 2. (*2,5 điểm*)

1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(x+y) + y^2 - 4y + 1 = 0 \\ y(x+y)^2 - 2x^2 - 7y - 2 = 0 \end{cases}$$

2) Cho a, b, c là các số nguyên.

Đặt $S = (a+2021)^5 + (2b-2022)^5 + (3c+2023)^5$,

$P = a + 2b + 3c + 2022$.

Chứng minh rằng S chia hết cho 30 khi và chỉ khi P chia hết cho 30.

Bài 3. (*1,0 điểm*) Có tất cả bao nhiêu đa thức $P(x)$ có bậc không lớn hơn 2 với các hệ số nguyên không âm và thỏa mãn điều kiện $P(3) = 100$?

Bài 4. (*3,0 điểm*)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm BC.

a) Chứng minh tứ giác $DMEF$ nội tiếp;

b) Đường tròn tâm I đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Chứng minh bốn điểm P, H. M, K thẳng hàng;

c) Các tiếp tuyến tại A và P của đường tròn (I) cắt nhau tại N. Chứng minh ba đường thẳng MN, EF, AH đồng quy.

Bài 5. (*1,0 điểm*)

Cho 2 số x, y thỏa mãn: $\begin{cases} x + y \le 2 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = x^2 + y^2 - xy.$$

BÙI VĂN CHI

(*21/2 Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định*)

Giới thiệu

****

☞ Tương tự 4, 13, 29 có màu đôi một phân biệt, 4, 20, 29 có màu đôi một phân biệt,

$\Rightarrow$ 13, 20 cùng màu $\Rightarrow f(13) = f(20)$.

+ Không giảm tổng quát ta giả sử $f(10) = f(17) = A$ (có màu A).

Vì $11 - 10 = 1^2 \Rightarrow$ 10, 11 khác màu (theo giả thiết phản chứng) $\Rightarrow f(11) \neq f(10)$.

+ Lại giả sử $f(11) = f(18) = B$.

Vì $19 - 18 = 1^2 \Rightarrow$ 19, 18 khác màu (theo giả thiết phản chứng) $\Rightarrow f(19) \neq f(18) = B$.

$19 - 10 = 3^2 \Rightarrow$ 19, 10 khác màu (theo giả thiết phản chứng) $\Rightarrow f(19) \neq f(10) = A$

$\Rightarrow f(19) = C \Rightarrow f(12) = f(19) = C$.

Vì $20 - 19 = 1^2 \Rightarrow f(20) \neq f(19) = C$

$20 - 11 = 3^2 \Rightarrow f(20) \neq f(11) = B$

$\Rightarrow f(20) = A = f(13)$.

Tóm lại ta thu được $f(13) = f(17) = A$, mà $17 - 13 = 2^2 \Rightarrow$ mâu thuẫn với giả thiết phản chứng (đpcm).

NGUYỄN VŨ LƯƠNG - PHẠM VĂN HÙNG

TRẦN QUANG HÙNG

(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Giới thiệu

KHAI THÁC BÀI TOÁN VẬN DỤNG TRONG ĐỀ THI TỐT NGHIỆP NĂM 2021

ĐÀO VĂN TRUNG
(GV THPT Huỳnh Thúc Kháng, Nghệ An)

Trong đề thi tốt nghiệp THPT những năm gần đây, những câu Vận dụng phần hàm số tương đối hay và khó. Trong bài viết này tôi xin trình bày một vài phương pháp cụ thể để giải chúng.

1. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

- $\left(f(u(x))\right)' = u'_x \cdot f'_u$
- $\left(|u|\right)' = \left(\sqrt{u^2}\right)' = \dfrac{2u'u}{2\sqrt{u^2}} = \dfrac{u'u}{|u|}\ (u \neq 0)$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}\ (v \neq 0)$
- $(uv)' = u'v + uv'.$

2. MỘT SỐ THÍ DỤ

Thí dụ 1. *Cho hàm số $y = f(x)$ luôn liên tục và có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f\left(x^3 - 27x + 1\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?*

Lời giải. Ta có:

$$f'(x) = (x-1)(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x = 2 \text{ (nghiệm kép)} \end{array}\right.$$

Mặt khác ta có:

$$g'(x) = \left(3x^2 - 27\right) f'\left(x^3 - 27x + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 27 = 0 \\ f'\left(x^3 - 27x + 1\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \\ x^3 - 27x + 1 = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \\ x = 0 \\ x = \pm 3\sqrt{3} \end{array}\right.$$. Hàm số có 5 điểm cực trị.

Thí dụ 2 (Đề TNTHPT, 2021). *Cho hàm số $y = f(x)$ luôn liên tục và có đạo hàm $f'(x) = (x-7)\left(x^2 - 9\right), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(\left|x^3 + 5x\right| + m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?*

Lời giải. Ta có:

$$f'(x) = (x-7)\left(x^2 - 9\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x = 3 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x = -3 \text{ (nghiệm đơn)} \end{array}\right.$$

Mặt khác ta có:

$$g'(x) = \frac{\left(x^3 + 5x\right)\left(3x^2 + 5\right)}{\left|x^3 + 5x\right|} f'\left(\left|x^3 + 5x\right| + m\right) = 0.$$

Ta có $g'(x)$ không tồn tại tại $x = 0 \Rightarrow x = 0$ là một điểm cực trị.

$$f'\left(\left|x^3 + 5x\right| + m\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^3 + 5x\right| + m = 7 \\ \left|x^3 + 5x\right| + m = 3 \\ \left|x^3 + 5x\right| + m = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^3 + 5x\right| = 7 - m \\ \left|x^3 + 5x\right| = 3 - m \\ \left|x^3 + 5x\right| = -3 - m \end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x) = \left|x^3 + 5x\right|$

Ta có: $h'(x) = \dfrac{(3x^2 + 5)(x^3 + 5x)}{\left|x^3 + 5x\right|}\ (x \neq 0);$

$h'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0;\ h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số có ít nhất 3 điểm cực trị thì

$$\begin{bmatrix} 7-m>0 \\ 3-m>0 \\ -3-m>0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m<7 \\ m<3 \\ m<-3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow m<7.$$

Vậy giá trị cần tìm là $m \in \{1;2;3;4;5;6\}$.

Thí dụ 3. *Cho hàm số*

$$f(x)=\left(e^x+2^x\right)\left(\sqrt{x-1}+x^2+x+1\right).$$

Tìm GTLN của hàm số $f(x)$.

Lời giải. ĐK: $x \geq 1$.

Đặt $u=e^x+2^x>0 \Rightarrow u'=e^x+2^x\ln 2>0;$

$$v=\sqrt{x-1}+x^2+x+1>0$$

$$\Rightarrow v'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+2x+1>0,\ \forall x>1;$$

$$f(x)=uv \Rightarrow f'(x)=u'v+uv'>0,\ \forall x>1.$$

Vậy $\min\limits_{x\geq 1} f(x)=3(e+2)$ khi $x=1$.

Thí dụ 4. *Tìm các giá trị* $m \in \mathbb{Z}$ *để phương trình sau có nghiệm*

$$\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{x+4}=m\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}\right).$$

Lời giải. ĐK: $3 \leq x \leq 4$.

Ta có: $\dfrac{\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{x+4}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}}=m$. Xét hàm số

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{x+4}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}}.$$

Ta có: $u=\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{x+4}>0$

$$\Rightarrow u'=\frac{1}{2\sqrt{x-3}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}}>0,\ \forall x>3;$$

$$v=\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}$$

$$\Rightarrow v'=-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}<0,\ \forall x\in[3;4);$$

$$f(x)=\frac{u}{v} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}>0\ \forall x\in(3;4).$$

Do đó hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên đoạn $[3;4]$.

Phương trình luôn có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min_{x\in[3;4]}(f(x)) \leq m \leq \max_{x\in[3;4]}(f(x))$$

$$\Leftrightarrow f(3) \leq m \leq f(4) \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{7}}{1+\sqrt{2}} \leq m \leq 3.$$

Vậy $m \in \{1;\ 2;\ 3\}$.

Thí dụ 5. *Cho hàm số* $y=f(x)$ *luôn liên tục và có đạo hàm* $f'(x)=(x-1)\left(x^2-4\right)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. *Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số* $g(x)=f\left(\dfrac{e^x+2^x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}}-m\right)$ *có 1 điểm cực trị?*

Lời giải. Ta có: $f'(x)=(x-1)\left(x^2-4\right)^2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=1 & \text{(nghiệm đơn)} \\ x=2 & \text{(nghiệm bội chẵn).} \\ x=-2 & \text{(nghiệm bội chẵn)} \end{bmatrix}$$

Đặt $u=e^x+2^x>0 \Rightarrow u'=e^x+2^x\ln 2>0;$

$$v=\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}>0$$

$$\Rightarrow v'=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}<0,\ \forall x<1;$$

$$g=f\left(\frac{u}{v}-m\right) \Rightarrow g'=\left(\frac{u}{v}-m\right)' f'\left(\frac{u}{v}-m\right)$$

$$=\left(\frac{u'v-uv'}{v^2}\right)f'\left(\frac{u}{v}-m\right)=0$$

$$\Leftrightarrow f'\left(\frac{u}{v}-m\right)=0 \left(\text{do } \frac{u'v-uv'}{v^2}>0,\forall x<1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{u}{v}-m=1 \Leftrightarrow \frac{u}{v}=m+1.$$

Đặt $h(x)=\dfrac{u}{v} \Rightarrow h'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}>0 \Rightarrow$ có BBT:

x	$-\infty$		1	
$h'(x)$		$+$		
$h(x)$	0	$\nearrow$	$e+2$	

Hàm số có một điểm cực trị khi $0 < m+1 \le e+2$ $\Leftrightarrow -1 < m \le 1$. Vậy $m = 1$.

3. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$. Tìm GTLN và GTNN của hàm số $f(x) = (x^3 - 3x)$ trên $[0;2]$.

2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm $f'(x) = (x-7)(x^2-9)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $f(\sin^3 x + 3\sin x) = m$. luôn có nghiệm?

3. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(\sin x + 1)$ luôn đồng biến?

4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm $f'(x) = (x^2-1)(x-2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2 + x - 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

5. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3mx + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ luôn nghịch biến trên $[0;2]$?

6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm $f'(x) = (x-7)(x^2-9)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(\cos x - m)$ luôn đồng biến?

****

VẬN DỤNG ... *(Tiếp theo trang 7)*

Cho $2x + y + 2z = 6$ ta được:

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{8}{(z+3)^2} \ge 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1; y = 2; z = 1$.

Ta có bài toán mới sau đây:

Bài 26. *Cho x, y, z dương thỏa mãn $2x + y + 2z = 6$. Chứng minh*

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{8}{(z+3)^2} \ge 1.$$

Hướng dẫn. Với x, y, z dương, sử dụng 2 lần BĐT (1*) ta được: $\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{8}{(z+3)^2}$

$$= \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{y}{2}+1\right)^2} + \frac{8}{(z+3)^2}$$

$$\ge \frac{8}{\left(x+1+\frac{y}{2}+1\right)^2} + \frac{8}{(z+3)^2} \ge \frac{64}{\left(x+\frac{y}{2}+z+5\right)^2}$$

$$= \frac{256}{(2x+y+2z+10)^2}.$$

Vì $2x + y + 2z = 6$ nên ta có:

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{8}{(z+3)^2} \ge 1.$$

Dấu "=" khi và chỉ khi $x = 1; y = 2; z = 1$

• Để bài toán trở nên khó hơn ta thay giả thiết $2x + y + 2z = 6$ bởi giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 \le 3y$.

Vận dụng thêm BĐT (*) ta có:

$$x^2 + 1 \ge 2x; y^2 + 4 \ge 4y; z^2 + 1 \ge 2z$$

Do đó:

$$2x + 4y + 2z \le (x^2+1) + (y^2+4) + (z^2+1)$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + 6 \le 3y + 6.$$

$\Leftrightarrow 2x + y + 2z \le 6$.

Ta có bài toán sau

Bài 27. *Cho x, y, z dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \le 3y$. Chứng minh*

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{8}{(z+3)^2} \ge 1.$$

Hướng dẫn. Cách giải tương tự bài 26 và lưu ý đến $x^2 + y^2 + z^2 \le 3y$.

KỸ THUẬT ĐỐI CHIẾU NGHIỆM VỚI ĐIỀU KIỆN TRONG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CÓ ẨN Ở MẪU

VÕ THANH GIANG
(GV THPT Nguyễn Hữu Cảnh, An Giang)

1. Ý tưởng xuất phát

Xét hàm số lượng giác $y=f(x)$ có chu kì T. Nếu $x=\alpha+\dfrac{k}{m}.T$ thuộc tập xác định của hàm số đang xét, với $k\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N}^*, m\le k, \alpha\in\mathbb{R}$ thì ta có:

$$x=\alpha+\frac{k}{m}T=\alpha+\frac{mq+r}{m}.T$$
$$=\alpha+\frac{rT}{m}+qT \quad \left(q\in\mathbb{Z} \text{ và } r=\overline{0;...;m-1}\right)$$
$$\Rightarrow f\left(\alpha+\frac{k}{m}.T\right)=f\left(\alpha+\frac{rT}{m}+qT\right)=f\left(\alpha+\frac{rT}{m}\right).$$

Do đó để kiểm tra một công thức nghiệm $x=\alpha+\dfrac{k}{m}.T$ của một phương trình lượng giác có thỏa mãn điều kiện $f(x)\neq 0$ không, ta có thể viết công thức nghiệm đó lại theo chu kì của hàm số $y=f(x)$ rồi thử lại. Bài viết này trình bày cách đối chiếu nghiệm với điều kiện theo hướng này.

2. Một số thí dụ minh họa

Thí dụ 1. *Giải phương trình*: $\dfrac{\cos x-1}{\cos\dfrac{x}{2}-1}=0.$

Lời giải. ĐK: $\cos\dfrac{x}{2}-1\neq 0$. Hàm số $y=\cos\dfrac{x}{2}-1$ có chu kì $T=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$. Khi đó: $\dfrac{\cos x-1}{\cos\frac{x}{2}-1}=0$

$$\Leftrightarrow \cos x-1=0\Leftrightarrow \cos x=1$$
$$\Leftrightarrow x=k2\pi=\frac{k}{2}.4\pi \ (k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow x=\frac{2m+r}{2}.4\pi$$
$$\Leftrightarrow x=r2\pi+m4\pi(m\in\mathbb{Z}, r=0;1)$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m4\pi\\ x=2\pi+m4\pi\end{array}\right., (m\in\mathbb{Z}).$$

Thay $x=0$ và $x=2\pi$ vào $y=\cos\dfrac{x}{2}-1$, ta thấy chỉ có $x=2\pi$ thì $y=\cos\dfrac{x}{2}-1\neq 0.$

Do đó, phương trình có các nghiệm là
$$x=2\pi+m4\pi=(2m+1)2\pi, m\in\mathbb{Z}.$$

Thí dụ 2. *Giải phương trình* $\dfrac{\sin x.\cot 5x}{\cos 9x}=1.$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases}\sin 5x\neq 0\\ \cos 9x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 5x.\cos 9x\neq 0$ (*).

Vì $y=\sin 5x$ có chu kỳ $T_1=\dfrac{2\pi}{5}$ và $y=\cos 9x$ có chu kỳ $T_2=\dfrac{2\pi}{9}$ nên $y=\sin 5x.\cos 9x$ có chu kỳ

$$T=m_1.\frac{2\pi}{5}=m_2.\frac{2\pi}{9}(m_1,m_2\in\mathbb{N}^*, \text{ƯCLN}(m_1,m_2)=1)$$
$$\Rightarrow m_1=5, m_2=9\Rightarrow T=2\pi.$$ Biến đổi PT về dạng:
$$\cos 5x.\sin x=\cos 9x.\sin 5x$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 6x-\sin 4x)=\frac{1}{2}(\sin 14x-\sin 4x)$$
$$\Leftrightarrow \sin 14x=\sin 6x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}14x=6x+k2\pi\\ 14x=\pi-6x+k2\pi\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{4}=\dfrac{k}{8}.2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{10}=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k}{20}.2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{8m+r}{8}.2\pi \ (r=0;1;...;7)\\ x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{20m+r'}{20}.2\pi (r'=0;1;...;19)\end{array}\right., m\in\mathbb{Z}.$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{r\pi}{4}+m2\pi \ (r=0;1;...;7)\\ x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{r'\pi}{10}+m2\pi \ (r'=0;1;...;19)\end{array}\right., m\in\mathbb{Z}.$$

- Thay $x=\frac{r\pi}{4}\left(r=0;1;...;7\right)$ vào $y=\sin 5x.\cos 9x$ ta thấy ứng với $r=1;3;5;7$ thì $\sin 5x.\cos 9x\neq 0$. Do đó $x=\frac{\pi}{4}+m2\pi;$

$$x=\frac{3\pi}{4}+m2\pi;x=\frac{5\pi}{4}+m2\pi;\ x=\frac{7\pi}{4}+m2\pi$$

$\left(m\in\mathbb{Z}\right)$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

- Thay $x=\frac{\pi}{20}+\frac{r'\pi}{10}\left(r'=0;1;...;19\right)$ vào $y=\sin 5x.\cos 9x$ ta thấy ứng tất cả các giá trị đó thì $\sin 5x.\cos 9x\neq 0$. Do đó, $x=\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}$ (viết gọn) là các nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy PT đã cho có các nghiệm là:

$$x=\frac{\pi}{4}+m2\pi;x=\frac{3\pi}{4}+m2\pi;x=\frac{5\pi}{4}+m2\pi;$$

$$x=\frac{7\pi}{4}+m2\pi\left(m\in\mathbb{Z}\right),\ x=\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}(k\in\mathbb{Z}).$$

Thí dụ 3. *Giải phương trình*

$$\cot x=\tan x+\frac{2\cos 4x}{\sin 2x}.$$

Lời giải. ĐK: $\sin 2x\neq 0$. Hàm số $y=\sin 2x$ có chu kì $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. Khi đó:

$$\cot x=\tan x+\frac{2\cos 4x}{\sin 2x}\Leftrightarrow\cot x-\tan x=\frac{2\cos 4x}{\sin 2x}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{2\cos 4x}{\sin 2x}\Leftrightarrow\cos 4x=\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=\frac{k}{3}\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=\left(\frac{3m+r}{3}\right)\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=\frac{r\pi}{3}+m\pi\end{array}\right.\left(k,m\in\mathbb{Z};r=0;1;2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\pi\\x=\frac{\pi}{3}+m\pi\\x=\frac{2\pi}{3}+m\pi\end{array}\right.\left(m\in\mathbb{Z}\right).$$

Thay $x=0;x=\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}$ vào $y=\sin 2x$, ta thấy chỉ có $x=\frac{\pi}{3};x=\frac{2\pi}{3}$ thì $y=\sin 2x\neq 0$. Do đó PT có các nghiệm là

$$x=\frac{\pi}{3}+m\pi;\ x=\frac{2\pi}{3}+m\pi\left(m\in\mathbb{Z}\right).$$

Thí dụ 4. *Giải phương trình*

$$2\tan 3x+\cot 2x=\tan x+\frac{2}{\sin 4x}.$$

Lời giải. ĐK: $\cos x.\cos 3x.\sin 2x.\sin 4x\neq 0$.

Vì $y=\cos x$ có chu kỳ $T_1=2\pi$, $y=\cos 3x$ có chu kỳ $T_2=\frac{2\pi}{3}$, $y=\sin 2x$ có chu kỳ $T_3=\pi$, $y=\sin 4x$ có chu kỳ $T_4=\frac{\pi}{2}$ nên $y=\cos 3x.\sin 2x.\sin 4x$ có chu kỳ

$$T=m_1.2\pi=m_2.\frac{2\pi}{3}=m_3.\pi=m_4\frac{\pi}{2}$$

$(m_1,m_2,m_3,m_4\in\mathbb{N}^*,(m_1,m_2,m_3,m_4)=1)$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{3}\\\frac{m_1}{m_3}=\frac{1}{2}\\\frac{m_1}{m_4}=\frac{1}{4}\end{array}\right.\Rightarrow m_1=1,m_2=3,m_3=2,m_4=4\Rightarrow T=2\pi.$$

Khi đó: $2\tan 3x+\cot 2x=\tan x+\frac{2}{\sin 4x}$

$$\Leftrightarrow\left(\tan 3x+\cot 2x\right)+\left(\tan 3x-\tan x\right)=\frac{2}{\sin 4x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos x}{\cos 3x.\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{\cos 3x.\cos x}=\frac{2}{\sin 4x}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x.\cos 2x+2\sin 4x.\sin x=2\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow\cos 3x+\cos x+2\sin 4x.\sin x=2\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x.\sin x=\cos 3x-\cos x$$

$$\Leftrightarrow 4\cos 2x.\sin 2x.\sin x=-2\sin 2x.\sin x.$$

$$\Leftrightarrow\cos 2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\2x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+\frac{k}{2}.2\pi\\x=-\frac{\pi}{3}+\frac{k}{2}.2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2m+r}{2}.2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2m+r}{2}.2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+m2\pi \\ x=\dfrac{4\pi}{3}+m2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{3}+m2\pi \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+m2\pi \end{array}\right.$$

$(m\in\mathbb{Z}, r=0;1)$. Thay $x=\dfrac{\pi}{3};x=\dfrac{4\pi}{3};x=-\dfrac{\pi}{3};x=\dfrac{2\pi}{3}$ vào $y=\cos 3x.\sin 2x.\sin 4x$, ta thấy các giá trị đều làm $y=\cos 3x.\sin 2x.\sin 4x\neq 0$. Vậy PT có các nghiệm là: $x=\dfrac{\pi}{3}+m2\pi;\ x=\dfrac{4\pi}{3}+m2\pi;$

$$x=-\frac{\pi}{3}+m2\pi; x=\frac{2\pi}{3}+m2\pi\ (m\in\mathbb{Z}).$$

Thí dụ 5. *Giải phương trình*

$$\frac{4\cos^3 x+2\cos^2 x(2\sin x-1)-\sin 2x-2(\sin x+\cos x)}{2\sin^2 x-1}=0.$$

Lời giải. ĐK: $2\sin^2 x-1\neq 0\Leftrightarrow \cos 2x\neq 0$.

Hàm số $y=\cos 2x$ có chu kì $T=\pi$. Khi đó:

$$\frac{4\cos^3 x+2\cos^2 x(2\sin x-1)-\sin 2x-2(\sin x+\cos x)}{2\sin^2 x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x+2\cos^2 x(2\sin x-1)$$
$$-\sin 2x-2(\sin x+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x+4\cos^2 x.\sin x-2\cos^2 x$$
$$-2\sin x.\cos x-2(\sin x+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x(\sin x+\cos x)-2\cos x(\cos x+\sin x)$$
$$-2(\sin x+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x+\cos x)(2\cos^2 x-\cos x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+\cos x=0 \\ \cos x=1 \\ \cos x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=k2\pi \\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Thay $x=-\dfrac{\pi}{4};x=0;x=\dfrac{2\pi}{3};x=-\dfrac{2\pi}{3}$ vào $y=\cos 2x$, chỉ có $x=0;x=\dfrac{2\pi}{3};x=-\dfrac{2\pi}{3}$ thì $y=\cos 2x\neq 0$. Do đó PT có các nghiệm là:

$$x=k2\pi;\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Thí dụ 6. *Giải phương trình*

$$\frac{2(\sin^6 x+\cos^6 x)-\sin x.\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}=0.$$

Lời giải. ĐK: $\sqrt{2}-2\sin x\neq 0$.

Hàm số $y=\sqrt{2}-2\sin x$ có chu kì $T=2\pi$.

Khi đó: $\dfrac{2(\sin^6 x+\cos^6 x)-\sin x.\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}=0$

$$\Leftrightarrow 2(\sin^6 x+\cos^6 x)-\sin x.\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)-\frac{1}{2}\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x+\sin 2x-4=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=1\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k}{2}.2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{2m+r}{2}.2\pi\ (m\in\mathbb{Z}, r=0;1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+m2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{4}+m2\pi \end{array}\right.$$. Thay $x=\dfrac{\pi}{4};x=\dfrac{5\pi}{4}$ vào $y=\sqrt{2}-2\sin x$, chỉ có $x=\dfrac{5\pi}{4}$ thì $y=\sqrt{2}-2\sin x\neq 0$. Vậy PT có các nghiệm là $x=\dfrac{5\pi}{4}+m2\pi\ (m\in\mathbb{Z})$.

Thí dụ 7. *Giải các phương trình*

$$\cos 3x.\tan 5x=\sin 7x.$$

Lời giải. ĐK: $\cos 5x\neq 0$. Hàm số $y=\cos 5x$ có chu kì $T=\dfrac{2\pi}{5}$. Khi đó:

$$\cos 3x.\tan 5x=\sin 7x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 5x.\cos 3x=2\sin 7x.\cos 5x$$

$$\Leftrightarrow \sin 8x=\sin 12x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{k\pi}{2}=\dfrac{5k}{4}.\dfrac{2\pi}{5} \\ x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{10}=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k}{4}.\dfrac{2\pi}{5} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5(4m+r)}{4}.\dfrac{2\pi}{5} \\ x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{4m+r}{4}.\dfrac{2\pi}{5} \end{array}\right. (m\in\mathbb{Z}, r=0;1;2;3)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{r\pi}{2}+m2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{r\pi}{10}+\dfrac{m2\pi}{5} \end{array}\right.$$

• Thay $x=\dfrac{r\pi}{2}\ (r=0;1;2;3)$ vào $y=\cos 5x$, chỉ có $x=0; x=\pi$ thì $y=\cos 5x\neq 0$. Do đó: $x=m2\pi; x=\pi+m2\pi, (m\in\mathbb{Z})$ là các nghiệm của PT.

• Thay $x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{r\pi}{10}\ (r=0;1;2;3)$ vào $y=\cos 5x$, ta thấy các giá trị đều làm cho $y=\cos 5x\neq 0$. Do đó: $x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{10}\ (k\in\mathbb{Z})$ (viết gọn) là các nghiệm của PT. Vậy PT đã cho có các nghiệm là:

$$x=m2\pi; x=\pi+m2\pi\ (m\in\mathbb{Z})$$

và $x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{10}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Thí dụ 8 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A, 2009). *Giải phương trình*

$$\frac{(1-2\sin x).\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}.$$

Lời giải. ĐK: $(1+2\sin x)(1-\sin x)\neq 0$

$\Leftrightarrow 1+\sin x-2\sin^2 x\neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x+\sin x\neq 0.$

Vì $y=\cos 2x$ có chu kỳ $T_1=\pi$, $y=\sin x$ có chu kỳ $T_2=2\pi$ nên $y=\cos 2x+\sin x$ có chu kỳ

$T=m_1.\pi=m_2.2\pi\ \ (m_1,m_2\in\mathbb{N}^*, (m_1,m_2)=1)$

$\Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=2\Rightarrow m_1=2, m_2=1\Rightarrow T=2\pi$. Khi đó:

$$\frac{(1-2\sin x).\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos x-\sqrt{3}\sin x=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k.2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k}{3}.2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k.2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{3m+r}{3}.2\pi \end{array}\right. (m,k\in\mathbb{Z}, r=0;1;2)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k.2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{18}+m.2\pi \\ x=\dfrac{11\pi}{18}+m2\pi \\ x=\dfrac{23\pi}{18}+m2\pi \end{array}\right.$$

Thay $x=\dfrac{\pi}{2}; x=-\dfrac{\pi}{18}; x=\dfrac{11\pi}{18}; x=\dfrac{23}{18}$ vào $y=\cos 2x+\sin x$ thì chỉ có $x=-\dfrac{\pi}{18}; x=\dfrac{11\pi}{18}; x=\dfrac{23}{18}$ thì $y=\cos 2x+\sin x\neq 0$. Do đó, nghiệm của PT đã cho là $x=-\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Thí dụ 9. *Giải phương trình*

$$\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\sqrt{3}.$$

Lời giải. ĐK: $\cos x+\cos 2x+\cos 3x\neq 0$.

Vì $y=\cos x$ có chu kỳ $T_1=2\pi$, $y=\cos 2x$ có chu kỳ $T_2=\pi$, $y=\cos 3x$ có chu kỳ $T_3=\dfrac{2\pi}{3}$ nên $y=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$ có chu kỳ

$$T=m_1.2\pi=m_2.\pi=m_3.\frac{2\pi}{3}$$

$(m_1,m_2,m_3\in\mathbb{N}^*, (m_1,m_2,m_3)=1)$. Suy ra:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{m_1}{m_3}=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow m_1=1, m_2=2, m_3=3\Rightarrow T=2\pi.$$

Khi đó: $\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin 2x\cos x+\sin 2x}{2\cos 2x.\cos x+\cos 2x}=\sqrt{3}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x(2\cos x+1)}{\cos 2x(2\cos x+1)}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan 2x=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{k}{4}.2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{4m+r}{4}.2\pi \ (m\in\mathbb{Z}, r=0;1;2;3)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{r\pi}{2}+m2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+m2\pi \\ x=\frac{2\pi}{3}+m2\pi \\ x=\frac{7\pi}{6}+m2\pi \\ x=\frac{5\pi}{3}+m2\pi \end{array}\right. (m\in\mathbb{Z}).$$

Thay $x=\frac{\pi}{6};x=\frac{2\pi}{3};x=\frac{7\pi}{6};x=\frac{5\pi}{3}$ vào

$$y=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$$

chỉ có $x=\frac{\pi}{6};x=\frac{7\pi}{6};x=\frac{5\pi}{3}$ thì

$$y=\cos x+\cos 2x+\cos 3x\neq 0.$$

Vậy các nghiệm của PT là: $x=\frac{\pi}{6}+m2\pi;$

$$x=\frac{7\pi}{6}+m2\pi; x=\frac{5\pi}{3}+m2\pi \ (m\in\mathbb{Z}).$$

Thí dụ 10. *Giải phương trình*

$$\frac{1}{\tan x+\cot 2x}=\frac{\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{\cot x-1}.$$

Lời giải. ĐK: $\sin x.\cos x.(\tan x+\cot 2x).(\cot x-1)\neq 0.$

Xét hàm số:

$$y=f(x)=\sin x.\cos x.(\tan x+\cot 2x).(\cot x-1).$$

Với $T=2\pi$ ta có:

$$f(x+T)=\sin(x+2\pi).\cos(x+2\pi)\times$$

$$\times\left[\tan(x+2\pi)+\cot(2x+4\pi)\right].\left[\cot(x+2\pi)-1\right]$$

$$=\sin x.\cos x.(\tan x+\cot 2x).(\cot x-1)=f(x).$$

Khi đó: $\frac{1}{\tan x+\cot 2x}=\frac{\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{\cot x-1}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{2\sin^2 x+\cos 2x}=-\sqrt{2}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=-\sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow \sin x\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \\ x=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Thay $x=0;x=\frac{3\pi}{4};x=-\frac{3\pi}{4}$ vào

$$f(x)=\sin x.\cos x.(\tan x+\cot 2x).(\cot x-1)$$

chỉ có $x=\frac{3\pi}{4}$ thì $f(x)\neq 0$. Vậy PT có các nghiệm là $x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z}).$

Nhận xét. Hàm số

$$y=f(x)=\sin x.\cos x.(\tan x+\cot 2x).(\cot x-1)$$

khá phức tạp nên việc tìm chu kì là tương đối khó với nhiều học sinh. Như vậy ta có thể không tìm chu kì mà tìm số T thỏa mãn $f(x+T)=f(x)$ và dễ dàng tìm được $T=2\pi$. Chu kì của hàm số này là π.

3. Bài tập rèn luyện

Giải các phương trình sau:

1. $2\tan x+\cot 2x=2\sin 2x+\frac{1}{2\sin 2x}.$

2. $\frac{3(\sin x+\tan x)}{\tan x-\sin x}-2\cos x=2.$

3. $2\sin x+\cot x=2\sin 2x+1.$

4. $4).\tan^4 x+1=\frac{(2-\sin^2 2x).\sin 3x}{\cos^4 x}.$

5. $\frac{\cos^2 x(\cos x-1)}{\sin x+\cos x}=2(1+\sin x).$

6. $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}.$

7. $\frac{\tan^2 x+\tan x}{\tan^2 x+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$

8. $\frac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}.$

9. $5\sin x-2=3(1-\sin x)\tan^2 x.$

10. $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=5\sin^2 x+1.$

CÁC LỚP THCS

Bài T1/548 (Lớp 6). Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p; q)$ mà $p - q$ và $pq - q$ đều là số chính phương.

NGUYỄN ĐỨC TƯỞNG
(Gia Lai)

Bài T2/548 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông tại A có góc $\widehat{ACB}=30^0$. Trên cạnh BC lấy hai điểm D, E sao cho $AB = BD, AC = CE$. Tính tỷ số $\dfrac{BE}{BD}$.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T3/548. Viết lên bảng bộ số

$$(-69; -68; -67; \ldots; 94; 95; 96).$$

Mỗi lượt chơi *Quang Linh* xóa đi một bộ 6 số có dạng: $(a + b; b + c; c + a; a - b; b - c; c - a)$ với a, b, c là các số nguyên và thay bởi bộ 3 số có dạng $(2a; 2b; 2c)$. Chứng minh rằng *Quang Linh* không thể chơi quá 51 lượt.

PHAN QUANG LINH
(SV lớp K70K, ĐHSP Hà Nội)

Bài T4/548. Cho tam giác ABC cân tại A, một điểm D bất kỳ trên cạnh BC (D khác B, C). Đường thẳng qua D vuông góc với AB cắt đường thẳng qua C vuông góc với AC tại E. Gọi K là giao điểm của ED và AB, F là trung điểm của BD. Chứng minh $\widehat{EAF} = \widehat{BDK}$.

NGUYỄN HÀM THÀNH
(GV THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài T5/548. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2 = 2(x + y + xy) \\ x^5 + y^5 = \dfrac{1}{16} \end{cases}.$$

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/548. Tìm giá trị lớn nhất của tham số a sao cho phương trình $a^x = \log_a x$ có nghiệm.

LA ĐẠI CƯƠNG
(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Bài T7/548. Cho phương trình

$$x^6 - x^4 - 2(m-1)x^3 + (m-1)^2 = 0.$$

Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

HOÀNG SĨ LUYỆN
(GV THPT-DTNT Quỳ Châu, Quỳ Châu, Nghệ An)

Bài T8/548. Trong không gian, trên 3 tia Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc lần lượt lấy 3 điểm bất kỳ A, B, C không trùng với O. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Ký hiệu S_O, S_A, S_B, S_C theo thứ tự là diện tích các tam giác ABC, OBC, OCA, OAB. Chứng minh rằng

$$\frac{S_O}{S_A} + \frac{S_O}{S_B} + \frac{S_O}{S_C} - \frac{S_A}{S_O} - \frac{S_B}{S_O} - \frac{S_C}{S_O} \geq 2\sqrt{3}.$$

CAO HẢI VÂN
(GV THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, Gia Lai)

Bài T9/548. Cho n là số nguyên dương. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^n + b^n + c^n = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{a+bc} + \frac{b^2}{b+ca} + \frac{c^2}{c+ab} + \frac{n}{a^2+b^2+c^2}.$$

HOÀNG NGỌC MINH
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/548. Cho dãy số nguyên (a_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} a_0 = 2023;\ a_1 = 2.2023^2 \\ a_{n+2} = 2023^2 a_n + 2.2023^{n+3}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k, tồn tại vô số số tự nhiên a dạng $6m + 1$ sao cho $a_{4k^4-1} + a$ là hợp số.

PHẠM MINH TRÍ
(*SV ĐHSP TP. Hồ Chí Minh*)

Bài T11/548. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn: $f\left(f(x)+y^2+4\right)+4y = x + f^2(y+2), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

HỒ THANH LAI
(*GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định*)

Bài T12/548. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). I là tâm đường tròn nội tiếp. IB, IC lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai E, F. Gọi E',F' lần lượt đối xứng với E, F qua AC, AB. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $OE'F'$ nằm trên đường thẳng AI.

TRẦN QUANG HÙNG
(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Bài L1/548. Một con lắc đơn dao động điều hoà trong một thang máy chuyển động thẳng đứng lên cao chia thành 3 giai đoạn liên tục. Giai đoạn một, thang máy chuyển động nhanh dần đều từ trạng thái nghỉ được đoạn đường h. Giai đoạn hai, thang máy chuyển động thẳng đều với tốc độ bằng tốc độ cuối giai đoạn một và đi được đoạn đường $2h$. Giai đoạn ba thang máy chuyển động chậm dần đều với tốc độ đầu bằng tốc độ chuyển động thẳng đều, đồng thời đi được đoạn đường h rồi dừng lại. Số dao động toàn phần trong giai đoạn một và hai tương ứng là 18 lần và 17 lần. Giai đoạn ba của thang máy thì con lắc thực hiện được số dao động toàn phần bằng bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/548. Đặt điện áp xoay chiều $u = U\sqrt{2}\cos 2\pi ft$ (V) có tần số f thay đổi được vào hai đầu đoạn mạch gồm điện trở thuần R, tụ điện có điện dung C và cuộn cảm thuần có độ tự cảm L mắc nối tiếp (với $2L > R^2C$). Khi $f = f_0$ thì $U_C = U$ và $6(R + Z_L)(Z_L + Z_C) = 7R(R + Z_C)$; khi $f = f_0 + 75$ Hz thì $U_L = U$. Tính giá trị của f_0.

THANH LÂM (*Hà Nội*))

****

ĐÍNH CHÍNH: Trong TH&TT số 547, tháng 1 năm 2023, mục "*Đề ra kỳ này*", bài T9/547:

Đã viết: $\ldots \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2} \ldots$

xin được sửa là: $\ldots \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \ldots$

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

Tòa soạn TH&TT

PROBLEM IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/548 (For 6th grade). Find all pairs of prime numbers $(p; q)$ so that both $p - q$ and $pq - q$ are perfect squares.

Problem T2/548 (For 7th grade). Given a right triangle ABC A and the angle $\widehat{ACB} = 30^0$. On the side BC choose two points D and E so that $AB = BD$, $AC = CE$. Find the ratio $\frac{BE}{BD}$.

Problem T3/548. Quang Linh writes the following numbers on a board

$$(-69; -68; -67; \ldots; 94; 95; 96).$$

Each time, he erases 6 numbers of the form $(a + b; b + c; c + a; a - b; b - c; c - a)$ where a, b, c are integers and replaces by 3 numbers $(2a; 2b; 2c)$. Show that he cannot do this more than 51 times.

Problem T4/548. Given a isosceles triangle ABC with the vertex angle A, and an arbitrary point D inside the side BC. The line which passes through D and is perpendicular to AB intersects the line which passes through C and is perpendicular to AC at E. Let K be the intersection between ED and AB and F the midpoint of BD. Show that $\widehat{EAF} = \widehat{BDK}$.

Problem T5/548. Solve the following system of equations $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2 = 2(x + y + xy) \\ x^5 + y^5 = \frac{1}{16} \end{cases}$.

(*Xem tiếp trang 47*)

Bài T1/544. *Tính tổng tất cả các ước số lẻ lớn nhất của các số* 2022, 2023, …, 4044.

Lời giải. *Nhận xét: Mỗi số nguyên dương a luôn viết được một cách duy nhất thành tích của lũy thừa của* 2 *và một số lẻ, dạng* $a = 2^n.b$ *với số mũ tự nhiên n và số lẻ b .*

Thực vậy, nếu a là số lẻ thì lấy $n = 0$, nếu a là số chẵn thì chia a cho 2, nếu thương là số chẵn thì tiếp tục chia thương đó cho 2, giả sử chia được n lần, đến khi được thương là số lẻ b thì có $a = 2^n.b$, lúc đó b là số lẻ lớn nhất của số a (số lẻ nhỏ nhất của số a là 1). Giả sử số nguyên dương a có hai cách viết là $a = 2^n.b = 2^m.c$ với các số mũ tự nhiên n, m và các số lẻ b, c. Giả sử $n \le m$ thì từ $2^n.b = 2^m.c$ có $b = 2^{m-n}.c$ mà b, c đều là số lẻ nên $m = n$ và $b = c$, tức là cách viết $a = 2^n.b$ là duy nhất.

Trở lại bài toán. Xét hai số nguyên bất kì a, c mà $a < c$ trong dãy số nguyên liên tiếp từ 2022 đến 4043. Giả sử a và c có ước số lẻ lớn nhất bằng nhau, tức là $a = 2^n.b$ và $c = 2^m.b$ thì $n < m$, hay là $n + 1 \le m$, lúc đó:

$c = 2^m.b \ge 2^{n+1}.b = 2.2^n.b = 2a \ge 2.2022 = 4044$, điều này không xảy ra, tức là a và c có ước số lẻ lớn nhất khác nhau. Dãy số nguyên liên tiếp từ 2022 đến 4043 có 2022 số và do ước số lẻ lớn nhất của chúng khác nhau nên các ước số lẻ lớn nhất của chúng là 1; 3; 5;...; 4043 gồm 2022 số. Ta thấy $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$.

Giả sử $1 + 3 + ... + (2k - 1) = k^2$ với số nguyên dương k tùy ý thì

$1 + 3 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$.

Như vậy tổng các số lẻ liên tiếp từ 1 đến 4043 bằng 2022^2 . Số 4044 có ước số lẻ lớn nhất bằng 1011 nên tổng tất cả các ước số lẻ lớn nhất của các số 2022, 2023,..., 4044 bằng

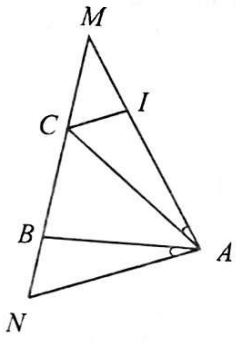
$1011 + 2022^2 = 1011 + 4088484 = 4089495$.

Nhận xét. Đây là bài toán khó nên không có em nào giải đúng bài này.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/544. *Cho tam giác ABC có* $\hat{B} = 80^0$, $\hat{C} = 60^0$. *Trên tia đối của tia CB lấy điểm M sao cho* $\widehat{MAB} = 60^0$. *So sánh độ dài hai đoạn thẳng BM và AC.*

Lời giải. Trong tam giác ABC ta có $\hat{A} = 40^0$. Dựng tam giác đều CAN (xem hình vẽ), ta có:



$\widehat{MAC} = \widehat{BAN} = 60^0 - 40^0 = 20^0$.

Lấy điểm I trên AM sao cho $AI = AB$. Hai tam giác ICA và BNA bằng nhau do $AC = AN, AI = AB$ và $\widehat{MAC} = \widehat{BAN}$ (c.g.c), do đó $CI = BN$, $\widehat{ICA} = \widehat{BNA}$.

Trong tam giác MCI có:

$$\widehat{IMC} = 180^0 - \left(\hat{B} + \widehat{MAB}\right) = 40^0;$$

$$\widehat{MIC} = \widehat{MAC} + \widehat{ICA} = \widehat{MAC} + \widehat{BNA} = 20^0 + 60^0 = 80^0.$$

Do đó $MC > IC = BN$.

Ta có: $BM = BC + CM > BC + BN = CN = CA$

($CN = CA$ do tam giác NCA là tam giác đều).

Vậy ta có $BM > AC$.

Nhận xét. Các bạn sau đây (chỉ dành cho các bạn lớp 7 và lớp 6) có lời giải đúng:

Nghệ An: *Lương Thị Hải Yến, Hoàng Văn Nhân,* 7C, THCS Lý Nhật Quang; **Hưng Yên** *: Lê Tuấn Hiệp,* 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/544. *Tìm tất cả các số tự nhiên a sao cho* $3a^{2n}+6a^n+27$ *là số chính phương với mọi số nguyên dương n.*

Lời giải.

Cách 1. Do $3a^{2n}+6a^n+27$ là số chính phương với mọi số nguyên dương n. Ta đặt:

$$3a^{2n}+6a^n+27=b^2\ (b\in\mathbb{N}^*).$$

Nhận thấy $3a^{2n}+6a^n+27$ chia hết cho 3 nên $b^2\vdots 3$, suy ra $b\vdots 3$. Đặt $b=3k\ (k\in\mathbb{N}^*)$ thì

$$3a^{2n}+6a^n+27=9k^2$$

nên $a^{2n}+2a^n+9=3k^2$. Do đó $(a^n+1)^2+8=3k^2$.

Ta có: $(a^n+1)^2<3k^2\Rightarrow a^n+1<\sqrt{3}k$

$\Rightarrow a^n+2\le\sqrt{3}k\Rightarrow(a^n+2)^2\le 3k^2$

$\Rightarrow a^{2n}+4a^n+4\le 3k^2.$

Do đó: $a^{2n}+4a^n+4\le a^{2n}+2a^n+9$

$\Rightarrow 2a^n\le 5\Rightarrow a^n<3.$

Do a là số tự nhiên nên $a\in\{0;1;2\}$.

Với $a=0$ thì $3a^{2n}+6a^n+27=27$ không là số chính phương.

Với $a=1$ thì $3a^{2n}+6a^n+27=36=6^2$ là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

Với $a=2$ và cho $n=1$ thì $3a^{2n}+6a^n+27=51$ không là số chính phương.

Vậy $a=1$.

Cách 2. Với $a\ge 7$, theo điều kiện bài ra với $n=1$, $n=2$ ta có $3a^2+6a+27$, $3a^4+6a^2+27$ là các số chính phương và cùng chia hết cho 3, suy ra

$$A=\frac{1}{9}(3a^2+6a+27)(3a^4+6a^2+27)$$
$$=(a^2+2a+9)(a^4+2a^2+9)$$

cũng là số chính phương.

Mặt khác, với a là số tự nhiên thì

$(a^2+2a+9)(a^4+2a^2+9)-(a^3+a^2+5a-3)^2$

$=8(a+3)^2>0;$

$(a^2+2a+9)(a^4+2a^2+9)-(a^3+a^2+5a-2)^2$

$=-2a^3+6a^2+38a+77$

$=-(a-7)[(a+2)^2+5]-49<0.$

Do vậy:

$(a^3+a^2+5a-3)^2<A<(a^3+a^2+5a-2)^2,$

mà $(a^3+a^2+5a-3)^2$ và $(a^3+a^2+5a-2)^2$ là hai số chính phương liên tiếp nên A không là số chính phương.

Với $a=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ thì ứng với $n=1$ ta có:

a	0	1	2	3
$3a^2+6a+27$	27	36	51	72

a	4	5	6
$3a^2+6a+27$	99	132	171

Chỉ thấy với $a=1$ thì $3a^2+6a+27=36$ là số chính phương. Hơn nữa, với $a=1$ thì

$$3a^{2n}+6a^n+27=3+6+27=36$$

là số chính phương. Vậy $a=1$ thoả mãn điều kiện bài toán.

Nhận xét. Bài này có ít bạn tham gia gửi bài. Tuyên dương các bạn sau có lời giải có lập luận chặt chẽ và ngắn gọn:

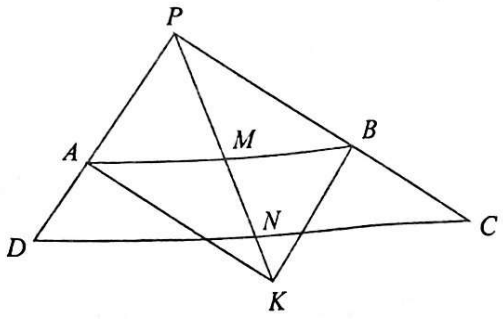
Hà Nội: *Trần Việt Anh,* 9A7, TH, THCS & THPT Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy; **Thái Nguyên**: *Hoàng Thu Hoài,* 9A4, THCS Chu Văn An; **Nghệ An**: *Nguyễn Văn Việt,* 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/544. *Cho hình thang ABCD (AB // CD, AB < CD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Qua A kẻ đường thẳng* (d_1) *vuông góc với AD. Qua B kẻ đường thẳng* (d_2) *vuông góc với BC. Chứng minh rằng nếu CD − AB = 2MN thì ba đường thẳng* (d_1), (d_2) *và MN đồng quy.*

Lời giải. Gọi K là giao điểm của d_1 và d_2, P là giao điểm của AD và BC. Theo bổ đề hình thang ta có M, N, P thẳng hàng.

Áp dụng hệ quả định lí Thales ta có:



$$\frac{PA}{PD}=\frac{PM}{PN}=\frac{AM}{DN}\Rightarrow\frac{PM}{MN}=\frac{AM}{DN-AM}.$$

Vì $CD-AB=2MN$, nên $DN-AM=MN$.

Suy ra $\frac{PM}{MN}=\frac{AM}{MN}\Rightarrow PM=AM$, mà M là trung điểm của AB nên tam giác APB vuông tại P.

Từ đó suy ra $APBK$ là hình chữ nhật, do đó ba điểm P, M, K thẳng hàng. Vậy d_1, d_2, MN đồng quy.

Nhận xét. Bài toán có nhiều cách giải. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Phú Thọ: *Đỗ Tuấn Minh, Hà Phương Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Nghệ An:** *Nguyễn Đăng Quang*, 9B, THCS Lý Nhật Quang; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Đức Quảng*, 9K, THCS Trần Mai Ninh.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/544. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}20x+11y=2024 & (1)\\ x^3+4x=y^3+3(x^2+y^2)+4y+4 & (2)\end{cases}.$$

Lời giải. Phương trình (2) tương đương với

$$x^3-3x^2+3x-1+x-1=y^3+3y^2+3y+1+y+1$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^3+x-1=(y+1)^3+y+1.$$

Đặt $u=x-1;\ v=y+1$, suy ra:

$$u^3+u=v^3+v \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow(u-v)(u^2+uv+v^2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow u=v$$

(vì $u^2+uv+v^2+1=\left(u+\frac{v}{2}\right)^2+\frac{3v^2}{4}+1>0$).

Ta có: $u=v\Leftrightarrow x-1=y+1\Leftrightarrow y=x-2$.

Thay vào (1) ta được:

$$20x+11(x-2)=2024\Leftrightarrow 31x=2046$$

Suy ra: $x=66; y=64$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$(x;y)=(66;64).$$

Nhận xét. 1) Từ (3) có thể làm như sau:

Nếu $u>v\Rightarrow u^3+u>v^3+v$ không thỏa mãn.

Nếu $u<v\Rightarrow u^3+u<v^3+v$ không thỏa mãn.

Vậy $(3)\Leftrightarrow u=v$.

Tổng quát, nếu $f(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ là hàm số luôn đồng biến (hoặc nghịch biến) thì $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$.

2) Có thể giải bài toán bằng cách biến đổi phương trình (2) về dạng tích:

$$(2)\Leftrightarrow(x-y-2)(y^2+xy+y+x^2-x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow y=x-2$$

(vì $y^2+xy+y+x^2-x+2>0$, bạn đọc tự kiểm tra).

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Nghệ An: *Thái Bá Nhân, Nguyễn Đăng Quang, Bùi Thị Thùy Linh, Nguyễn Thái Triệu, Phạm Xuân Hoàng, Nguyễn Văn Lâm, Nguyễn Văn Việt*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Hoàng Gia Huy*, Diễn Thành, Diễn Châu; **Hà Nội:** *Trần Việt Anh*, 9A7, TH, THCS&THPT Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Đức Quảng*, 9K, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Phú Thọ:** *Trần Lan Anh, Nguyễn Trung Dũng*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Hà Tĩnh:** *Trần Diệu Linh*, 9A, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/544. *Cho x, y, z là các số thực lớn hơn 1 và thỏa mãn* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. *Chứng minh rằng*

$$x+y+z\le xyz+\frac{9}{8}.$$

Lời giải. (Của tác giả *Trần Minh Vũ* và nhiều bạn) Trước tiên ta phát biểu Bất đẳng thức Schur.

Bổ đề (Bất đẳng thức Schur). Với a, b, c là các số thực không âm và một số thực t ta có:

$$a^t(a-b)(a-c)+b^t(b-c)(b-a)+c^t(c-a)(c-b)\ge 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc hai trong ba số a, b, c bằng nhau và số còn lại bằng 0.

Trong trường hợp t là một số nguyên dương chẵn thì bất đẳng thức trên đúng với mọi số thực a,b,c (nghĩa là a, b, c không cần điều kiện không âm).

Chứng minh Bổ đề. Không hạn chế tổng quát, có thể coi $a\ge b\ge c$. Ta có:

$$a^t(a-b)(a-c)+b^t(b-c)(b-a)+c^t(c-a)(c-b)$$
$$=(a-b)\left[a^t(a-c)-b^t(b-c)\right]+c^t(c-a)(c-b).$$

Vì $a\ge b\ge c\ge 0$ nên với $t>0$ thì $a^t\ge b^t$ và $a-c\ge b-c$. Suy ra:

$$(a-b)\left[a^t(a-c)-b^t(b-c)\right]+c^t(c-a)(c-b)\ge 0.$$

Với $t<0$ thì từ $a\ge b\ge c\ge 0$ ta có $c^t\ge b^t$ và $a-c\ge a-b$. Do đó: $c^t(a-c)-b^t(a-b)$ và

$$a^t(a-b)(a-c)+b^t(b-c)(b-a)+c^t(c-a)(c-b)$$
$$=(b-c)\left[c^t(a-c)-b^t(a-b)\right]+a^t(a-b)(a-c)\ge 0.$$

Quay lại bài toán. Đặt $a=\dfrac{1}{x},b=\dfrac{1}{y},c=\dfrac{1}{z}$. Điều kiện $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2$ trở thành $a+b+c=2$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{1}{abc}+\frac{9}{8}$$
$$\Leftrightarrow 8+9abc\ge 8(ab+bc+ca).$$

Vì $a+b+c=2$ nên bất đẳng thức trên có thể viết lại đưới dạng:

$$(a+b+c)^3+9abc\ge 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$$
$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì là bất đẳng thức Schur khi $t=1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{2}{3}$ hay $x=y=z=\dfrac{3}{2}$.

Nhận xét. Nhiều bạn đã nhận xét rằng: *Bài toán vẫn đúng với x,y,z là các số thực dương.* Các bạn dưới đây gửi bài giải đúng với các cách giải khác nhau, đa số là sử dụng bất đẳng thức Schur hoặc biến đổi tương đương:

Bình Định: *Nguyễn Hữu Trí*, 11A1, THPT Số 2 Phù Cát. **Đà Nẵng**: *Tô Đông Hải*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Đồng Tháp**: *Lư Gia Hưng*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu. **Gia Lai**: *Phan Trịnh Nguyên*, 10A1, THPT Chi Lăng. **Hà Nội**: *Trần Việt Anh*, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy. **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thị Thùy Dung, Nguyễn Xuân Minh Đức, Trần Minh Hoàng, Nguyễn Phúc Lương, Phan Nhật Minh, Nguyễn Trọng Hoàng Nguyên, Lê Hữu Mạnh Tiến*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh. **Hưng Yên**: *Hoàng Trung Hiếu, Lê Tuấn Nghĩa*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Lâm Đồng**: *Cao Quốc Hưng*, 11 Toán, *Trần Công Minh*, 12 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc, TP. Bảo Lộc. **Nghệ An**: *Thái Bá Nhân, Nguyễn Hải Triều*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, huyện Đô Lương; *Lưu Trọng Phúc*, 9B, THCS Đội Cung, TP. Vinh. **Phú Thọ**: *Hà Phương Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, huyện Tam Nông. **Quảng Bình**: *Nguyễn Trần Hoàng, Nguyễn Thị Thu Phương*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Sóc Trăng**: *Tiết Trọng Khiêm*, 11A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai. **Thanh Hóa**: *Nguyễn Văn Đức Quảng*, 9K, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa. **TP. Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3. **Thừa Thiên Huế**: *Đoàn Văn Hoàng Lân, Phan Quốc Thắng*, 11 Toán 1, *Huỳnh Nguyên Vũ*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế. **Vĩnh Long**: *Nguyễn Quốc Hưng*, 10 T2, THPT

chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long. **Vĩnh Phúc**: *Vũ Kim Hoàn, Nguyễn Huy Hiệu, Nghiêm Xuân Hùng, Phạm Đình Khôi, Bùi Nhật Quang, Chu Vĩnh Thanh, Nguyễn Doãn Thuận*, 10A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

Và trongnguyen01807@gmail.com

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T7/544. *Tìm cặp đa thức với hệ số nguyên $P(x)$, $Q(x)$ khác đa thức không sao cho*

$$\frac{P(\sqrt{2}+\sqrt{17}+\sqrt{19})}{Q(\sqrt{2}+\sqrt{17}+\sqrt{19})}=\sqrt{2}+\sqrt{17}.$$

Lời giải. Đặt $a=\sqrt{2}+\sqrt{17}+\sqrt{19}$. Ta có:

$$\Rightarrow (a-\sqrt{19})^2=(\sqrt{2}+\sqrt{17})^2$$
$$\Leftrightarrow a^2+19-2\sqrt{19}a=19+2\sqrt{34}$$
$$\Rightarrow a^2-2\sqrt{19}a=2\sqrt{34}\Rightarrow a^4+76a^2-4\sqrt{19}a^3=136$$
$$\Leftrightarrow a^4+76a^2-136=4\sqrt{19}a^3$$
$$\Rightarrow \sqrt{19}=\frac{a^4+76a^2-136}{4a^3}.$$

Ta cũng có:

$$\sqrt{2}+\sqrt{17}=a-\sqrt{19}=a-\frac{a^4+76a^2-136}{4a^3}$$
$$=\frac{3a^4-76a^2+136}{4a^3}.$$

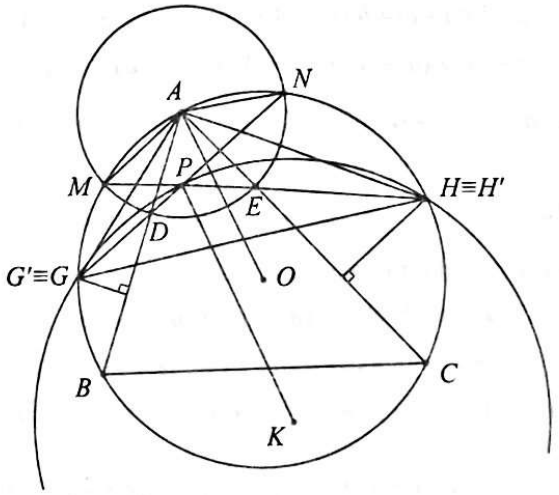
Do đó ta chọn $P(x)=3x^4-76x^2+136, Q(x)=4x^3$ thì thử lại ta thấy hai đa thức $P(x)$, $Q(x)$ thỏa mãn bài toán.

Nhận xét. Các bạn tham gia giải bài này đều có lời giải đúng. Cặp đa thức tìm được không duy nhất, tùy theo cách chọn mà ta có thể tìm được các cặp đa thức khác nhau thỏa mãn bài toán. Các bạn sau có lời giải tốt: **Thừa Thiên Huế:** *Trần Thị Thanh Thư*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thị Thu Phương, Nguyễn Trần Hoàng*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Đức Quảng*, 9K, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Hà Nội:** *Trần Việt Anh*, 9A7, TH, THCS&THPT Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy.

NHƯ HOÀNG

Bài T8/544. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Hai điểm D, E lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $AD = AE$. Đường trung trực của các đoạn thẳng BD và CE lần lượt cắt cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ của (O) tại các điểm G, H. Gọi P là giao điểm của GD và EH; K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PGH. Chứng minh OA song song với KP.*

Lời giải.



Giả sử đường tròn tâm A, bán kính AD cắt đường tròn (O) tại M, N với M, N lần lượt thuộc các cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ của (O). Phân giác góc $\widehat{MAB}$ cắt (O) tại điểm thứ hai là G', phân giác góc $\widehat{NAC}$ cắt (O) tại điểm thứ hai là H'. Dễ thấy AG' là trung trực của DM nên $G'B = G'M = G'D$ suy ra G' thuộc trung trực đoạn BD, do đó $G' \equiv G$. Tương tự ta cũng có $H' \equiv H$.

Mặt khác từ

$$\widehat{AGD}=\widehat{AGM}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AN}=\widehat{AGN}$$

suy ra G, D, N thẳng hàng. Tương tự cũng có H, E, M thẳng hàng. Do $OA \perp MN$ nên điều cần chứng minh $OA \,//\, KP$ tương đương với

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PK} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PK}.\left(\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}\right) = 0$$

hay $\overrightarrow{PK}.\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PK}.\overrightarrow{PM}$

$$\Leftrightarrow PK.PN.\cos\widehat{NPK} = PK.PM.\cos\widehat{MPK}$$

$$\Leftrightarrow \frac{PN}{PM} = \frac{\cos\widehat{MPK}}{\cos\widehat{NPK}} = \frac{\cos\widehat{KPH}}{\cos\widehat{KPG}} = \frac{\frac{1}{2}PH}{\frac{1}{2}PG} = \frac{PH}{PG} \ (*).$$

Chú ý rằng $PN.PG = PM.PH \Leftrightarrow \dfrac{PN}{PM} = \dfrac{PH}{PG}$ nên (*) luôn đúng. Từ đó ta có điều cần chứng minh

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: *Bạch Thái Sơn, Bùi Nhật Quang, Nguyễn Huy Hiệu, Chu Vĩnh Thanh, Nguyễn Diệu Quỳnh Hương, Nguyễn Doãn Thuận, Phạm Đình Khôi, Nguyễn Bích Phượng*, 10A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thanh Hoá**: *Nguyễn Văn Đức Quảng*, 9K, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hoá; **Nghệ An**: *Lưu Trọng Phúc*, 9B, THCS Đội Cung, TP. Vinh; **Hà Tĩnh**: *Trần Minh Hoàng, Phan Nhật Minh, Nguyễn Thị Thuỳ Dung*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình**: *Nguyễn Trần Hoàng*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế**: *Nguyễn Trường Quang Khải*, 10 Toán 1, *Phan Quốc Thắng, Đoàn Văn Hoàng Lân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Đà Nẵng**: *Tô Đông Hải*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Lâm Đồng**: *Phạm Quốc Thắng*, 12 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt, *Cao Quốc Hưng*, 11 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc, TP. Bảo Lộc.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/544. *Cho các số dương x, y. Xác định giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$F = \frac{xy}{\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2}.$$

Lời giải. Cách 1. Ta có:

$$F = \frac{xy}{\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2} = \frac{\frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}\right)^2}$$

$$= \frac{t}{(t + \sqrt{t^2 + 1})^2} \text{ với } t = \frac{x}{y} > 0.$$

Đặt $u = t + \sqrt{t^2 + 1} > 0$, suy ra:

$$\sqrt{t^2 + 1} = u - t \Leftrightarrow t^2 + 1 = u^2 - 2ut + t^2 \Leftrightarrow t = \frac{u^2 - 1}{2u}.$$

Khi đó: $F = \dfrac{\frac{u^2 - 1}{2u}}{u^2} = \dfrac{u^2 - 1}{2u^3}$.

Xét hàm số $f(u) = \dfrac{u^2 - 1}{2u^3}$ có:

$$f'(u) = \frac{2u.2u^3 - (u^2 - 1)6u^2}{(2u^3)^2} = \frac{3 - u^2}{2u^4} = 0 \overset{u>0}{\Leftrightarrow} u = \sqrt{3}.$$

Ta có bảng biến thiên:

u	0 $+\infty$	$\sqrt{3}$	
$f'(u)$	$+$	0	$-$
$f(u)$	↗	$\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$	↘

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max f(u) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ khi $u = \sqrt{3}$ hay $t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ hay $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = x\sqrt{3}$.

Vậy $\max F = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ khi $y = x\sqrt{3}$.

Cách 2. Đặt $k = \dfrac{y}{x} > 0$. Khi đó ta có:

$$F = \frac{k}{(1 + \sqrt{k^2 + 1})^2} = \frac{k}{k^2 + 2 + 2\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Theo các bất đẳng thức Bunyakovsky và Cauchy ta có:

$$(\sqrt{3}k + 1)^2 \le (3 + 1)(k^2 + 1) \Rightarrow 2\sqrt{k^2 + 1} \ge \sqrt{3}k + 1$$

$$\Rightarrow k^2 + 2 + 2\sqrt{k^2 + 1} \ge k^2 + 3 + \sqrt{3}k \ge 3\sqrt{3}k$$

$\Rightarrow F \le \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow k = \sqrt{3}$ hay $y = \sqrt{3}x$. Vậy $\max F = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Nhận xét. Việc chuyển từ bài toán tìm cực trị của hàm hai biến thành tìm cực trị của hàm một biến là một hướng hay dùng cho các bài toán dạng này. Đa số các bạn giải bài này theo cách thứ hai, một ít bạn giải theo cách thứ nhất. Cách dùng đạo hàm (cách 1) dài hơn so với cách dùng bất đẳng thức (cách 2) nhưng cách dùng đạo hàm có thể áp dụng cho nhiều hàm phức tạp. Khen ngợi các em sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Bạch Thái Sơn, Nghiêm Xuân Hùng, Bùi Nhật Quang, Phạm Đình Khôi, Nguyễn Doãn Thuận, Nguyễn Huy Hiệu*, 10A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nội:** *Trần Việt Anh*, 9A7, Archimedes Acadamy Trung Yên, Cầu Giấy; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Đức Quảng*, 9K, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Hải Triều*, 9B, THCS Lý Nhật Quang; **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng, Nguyễn Thị Thu Phương*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Gia Lai:** *Phạm Nguyễn Gia Thiện*, 12A3, THPT Chi Lăng; **Thừa Thiên Huế:** *Đoàn Văn Hoàng Lân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Sóc Trăng:** *Tiết Trọng Khiêm*, 11A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/544. *Cho dãy số thực (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}.a_n + \frac{1}{n+1}$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$. Chứng minh rằng dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.*

Lời giải (Của bạn *Trần Minh Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà tĩnh, **Hà Tĩnh**). Đặt $v_n = \sqrt{n}a_n$. Khi đó:

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}a_n + \frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n+1}a_{n+1} = \sqrt{n}a_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = v_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_{n+1} - v_n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\left(v_{n+1} - v_n\right) = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{v_{n+1} - v_n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2.$$

Áp dụng định lý Stolz ta có:

$$\lim \frac{v_n}{\sqrt{n}} = 2 \Leftrightarrow \lim a_n = 2$$

(Định lý Stolz: Cho hai dãy số $(x_n), (y_n)$ sao cho dãy (y_n) là dãy tăng thực sự tới $+\infty$. Khi đó nếu tồn tại $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a$ thì $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt

Lâm đồng: *Cao Quốc Hưng*, 11 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thị Thu Phương, Nguyễn Trần Hoàng*, 12 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Phúc:** *Bạch Thái Sơn*, 10A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Trần Việt Anh*, 9A7, Archimedes Acadamy Trung Yên, Cầu Giấy; **Gia Lai:** *Nguyễn thị Ánh Ngọc*, 12, THPT Chi lăng.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/544. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(xy) - f(f(x) - f(y)) = xf(y) + x + y \quad (1)$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải (Dựa theo đa số các bạn).

Giả sử $f(t)$ thỏa mãn (1). Thay $x = 1$ vào (1) ta thu được:

$$f(y) - f(f(1) - f(y)) = f(y) + 1 + y, \forall y \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow f(f(1)-f(y))=-y-1, \forall y\in\mathbb{R}$ (2).

Theo (2) thì khi $f(x_1)=f(x_2)$ ứng với $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ thì $f(f(1)-f(x_1))=f(f(1)-f(x_2))$ nên $-x_1-1=-x_2-1$, suy ra $x_1=x_2$ nên f là đơn ánh trên $\mathbb{R}$.

Thay $y=1$ vào (2) ta được $f(0)=-2$.

Thay $x=0, y=-t$ vào (1) ta thu được:

$$f(0)-f(f(0)-f(-t))=-t, \forall t\in\mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow f(-2-f(-x))=x-2, \forall x\in\mathbb{R}$ (3).

Thay $y=0$ vào (1) ta thu được:

$$f(0)-f(f(x)-f(0))=xf(0)+x$$

$\Leftrightarrow f(f(x)+2)=x-2, \forall x\in\mathbb{R}$ (4).

Sử dụng tính đơn ánh của f, từ (3) và (4) suy ra:

$$f(x)+f(-x)=-4, \forall x\in\mathbb{R} \quad (5).$$

Tiếp theo, lần lượt thay $x=1$ và $y=1$ vào (1), ta thu được:

$$f(y)-f(f(1)-f(y))=f(y)+1+y, \forall y\in\mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow f(f(1)-f(x))=-x-1, \forall x\in\mathbb{R}$ (6);

$f(f(x)-f(1))=f(x)-xf(1)-x-1, \forall x\in\mathbb{R}$ (7).

Từ (5), (6) và (7) suy ra:

$$f(x)=(f(1)+2)x-2, \forall x\in\mathbb{R}$$

hay $f(x)=ax-2$. Thế vào (1) ta được: $a=\pm 1$.

Kết luận: Các hàm số cần tìm là

$$f(x)=x-2 \text{ và } f(x)=-x-2.$$

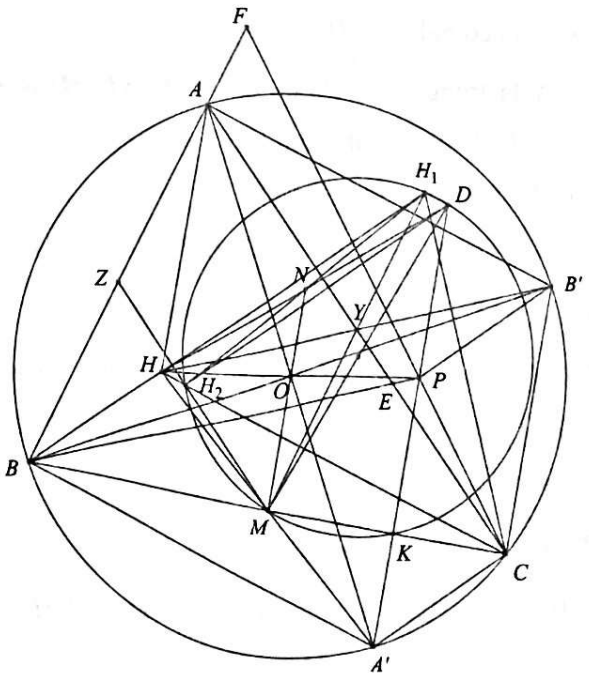
Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về phương trình hàm với cặp biến tự do nên có nhiều bạn tham gia giải. Đa số các bạn đều giải theo cách đã trình bày ở trên. Một số bạn giải trực tiếp không cần sử dụng tính đơn ánh, toán ánh cũng cho kết quả đúng. Các bạn sau có lời giải đúng:

Đồng Tháp: *Lê Gia Hưng, Hoàng Ngọc Hân*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Xuân Minh Đức, Trần Minh Hoàng, Nguyễn Phúc Lương*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Lâm Đồng:** *Cao Quốc Hưng*, 11T, *Trần Công Minh*, 12T, THPT chuyên Bảo Lộc; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 10T1, *Nguyễn Văn Khiêm*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** *Đoàn Văn Hoàng Lân, Phan Quốc Thắng*, 11T1, *Nguyễn Như Thuật, Huỳnh Nguyên Vỹ*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Nam:** *Lê Tự Thanh*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Doãn Thuận*, 10A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/544. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H. P là điểm đối xứng với H qua O. Kẻ $PK\perp BC$ $(K\in BC)$. M là trung điểm BC. BP, CP cắt AC, AB lần lượt tại E, F. Gọi H_1, H_2 lần lượt là trực tâm của tam giác BEC, BFC. Chứng minh các điểm H_1, H_2, K, M cùng thuộc một đường tròn.*

Lời giải. (Theo bạn *Trần Minh Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**).



Trong lời giải này, kí hiệu UVW chỉ đường thẳng đi qua ba điểm thẳng hàng U, V, W. Gọi Y, Z, N theo thứ tự là trung điểm của AC, AB, H_1H_2; D là điểm đối xứng của H qua N; A', B' theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AO, BO và (O).

Vì $BH \perp AC; BH_1 \perp AE \equiv AC$ nên B, H, H_1 thẳng hàng. Do đó $CY \equiv CA \perp HB \equiv HH_1$ (1).

Dễ thấy $AH \perp BC \perp B'C; CH \perp AB \perp B'A$.

Do đó $AH // B'C; CH // B'A$. Nói cách khác, $AHCB'$ là hình bình hành. Do đó Y thuộc HB'. Vì O là trung điểm chung của BB' và HP nên $BP // HB' \equiv HY$. Từ đó, chú ý rằng $BP \perp CH_1$, suy ra $HY \perp CH_1$ (2). Từ (1) và (2) suy ra H_1 là trực tâm của tam giác CHY. Vậy $CH \perp YH_1$ (3).

Vì Y, M theo thứ tự là trung điểm của AC, BC nên $CH \perp AB // YM$ (4). Từ (3) và (4) suy ra Y, H_1, M thẳng hàng. Tương tự Z, H_2, M thẳng hàng. Vậy

$$HH_1 \equiv BH \perp AC // ZM \equiv H_2M;$$
$$HH_2 \equiv CH \perp AB // YM \equiv H_1M.$$

Do đó H là trực tâm của tam giác MH_1H_2 (5).

Điều đó có nghĩa là $HM \perp H_1H_2$.

Vì N là trung điểm chung của H_1H_2 và HD nên HH_1DH_2 là hình bình hành (6).

Từ (5) và (6) suy ra:

$$DH_1 // HH_2 \perp MH_1; DH_2 // HH_1 \perp MH_2 \text{ (7)}.$$

Dễ thấy $BH \perp AC \perp A'C$; $CH \perp AB \perp A'B$.

Do đó $BH // A'C$; $CH // A'B$. Nói cách khác, $BHCA'$ là hình bình hành. Điều đó có nghĩa là H, M, A' thẳng hàng (8).

Từ (5) và (8) suy ra $HA' \perp H_1H_2$. Kết hợp với $BH \perp AC // ZM \equiv MH_2$; $BA' \perp AB // YM \equiv MH_1$, suy ra các tam giác BHA' và MH_2H_1 có các cạnh tương ứng vuông góc.

Từ đó, chú ý rằng BM, MN theo thứ tự là trung tuyến của các tam giác BHA' và MH_2H_1, suy ra $BM \perp MN$. Kết hợp với $BM \perp BO$, suy ra O, N, M thẳng hàng.

Từ đó, chú ý rằng O, N, M theo thứ tự là trung điểm của HP, HD, HA' suy ra P, D, A' thẳng hàng và $PDA' // ONM \perp BC$. Kết hợp với $PK \perp BC$, suy ra $DK \perp BC \equiv MK$ (9).

Từ (7) và (9) suy ra H_1, H_2, K, M cùng thuộc một đường tròn (đường kính MD).

Nhận xét. 1) Bài toán này khó, ngoài bạn *Hoàng*, các bạn cũng có lời giải tốt: **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Khương Duy*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Sóc Trăng:** *Phạm Nguyên Khang*, 10A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, TP. Sóc Trăng.

2) TH&TT có nhận được lời giải của các bạn *Nguyễn Trần Hoàng*, *Nguyễn Thị Thu Phương*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**, tuy nhiên, hình vẽ trong lời giải của các bạn quá mờ (vì tô màu). Do đó không thể xác định được các bạn *Hoàng*, *Phương* giải đúng hay sai.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/544. *Sóng cơ truyền từ một nguồn điểm trên mặt nước với bước sóng* 12 cm *và tốc độ* 6 m/s. *Hai điểm A, B cùng nằm trên một phương truyền sóng cách nhau* 2 cm. *Tại thời điểm t, khi li độ dao động tại A là* $u_A = +2$ mm *thì li độ dao động tại B là* $u_B = -2$ mm. *Biết sóng truyền từ B đến A. Điểm A có li độ* $2\sqrt{3}$ cm *sau thời gian ngắn nhất kể từ thời điểm t là bao nhiêu?*

Lời giải. Gọi C là trung điểm của AB. Vì $AC = 1 \text{ cm} = \dfrac{\lambda}{12}$, nên A có li độ $u_A = \dfrac{a}{2}$ và đang

đi ngược chiều dương (để sau đó A có trạng thái dao động giống như C và ở vị trí cân bằng). Thời gian đi từ vị trí cân bằng tới điểm có li độ $2\sqrt{3} = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ là $\dfrac{T}{6}$. Thời gian cần tìm là:

$$\frac{T}{12}+\frac{T}{2}+\frac{T}{6}=\frac{3T}{4}=\frac{3\lambda}{4v}=0,015\text{s}.$$

Nhận xét. Chúc mừng bạn duy nhất đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Đặng Hồng Hà*, lớp 10 Lý, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/544. *Nhà máy điện gió được coi là thân thiện với môi trường hơn nhiều so với các nhà máy nhiệt điện, thuỷ điện. Gió làm quay cánh quạt của các cột điện gió, từ đó làm quay rôto của máy phát điện và tạo ra điện năng. Máy phát điện gió thường sử dụng là loại máy phát điện xoay chiều một pha. Nối hai cực của một máy phát điện gió với hai đầu đoạn mạch mắc nối tiếp gồm điện trở thuần R, cuộn cảm thuần L và tụ điện C. Khi rôto quay với tốc độ 1200 (vòng/phút) thì điện áp hiệu dụng giữa hai đầu điện trở đạt giá trị cực đại. Khi rôto của máy phát quay với tốc độ 900 (vòng/phút) thì điện áp hiệu dụng giữa hai đầu điện trở có giá trị bằng U. Để điện áp hiệu dụng giữa hai đầu điện trở cũng có giá trị bằng U thì rôto của máy phát quay với tốc độ bằng bao nhiêu?*

Lời giải. Theo đề bài, khi rôto của máy phát quay với tốc độ $n_1=\dfrac{900}{60}=15$ (vòng/s) hoặc n_2 (vòng/s) thì $U_{1_R}=U_{2_R}=U$ (khi đó $I_1=I_2$), và khi rôto quay với tốc độ $n_0=\dfrac{1200}{60}=20$ (vòng/s) thì U_R đạt cực đại.

Ta có:

$$\begin{cases}E=\dfrac{E_0}{\sqrt{2}}=\dfrac{N\Phi_0}{\sqrt{2}}\omega\\ \omega=2\pi f=2\pi np\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\frac{E}{Z}=\frac{N\Phi_0}{\sqrt{2}}\frac{\omega}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$=\frac{N\Phi_0}{\sqrt{2}}\frac{\omega}{\sqrt{\dfrac{1}{C^2}.\dfrac{1}{\omega^4}-2\left(\dfrac{L}{2}-\dfrac{R^2}{C}\right)^2\dfrac{1}{\omega^2}+1}}$$

$$=\frac{N\Phi_0}{\sqrt{2}}.\frac{\omega}{\sqrt{y}}.$$

Đặt: $y=\dfrac{1}{C^2}.\dfrac{1}{\omega^4}-2\left(\dfrac{L}{2}-\dfrac{R^2}{C}\right)^2\dfrac{1}{\omega^2}+1.$

Hàm số y có dạng :

$$y=ax^2+bx+c \text{ với } x=\frac{1}{\omega^2}.$$

Gọi x_0 là nghiệm ứng với $y=y_{\min}$ để có $I_{\max}$ và x_1, x_2 là hai nghiệm sao cho $y_1=y_2$ (tương ứng với $\omega_1=2\pi n_1 p$; $\omega_2=2\pi n_2 p$, sao cho $I_1=I_2$).

Theo định lí Viète ta có:

$$x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_0^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega_1^2}+\frac{1}{\omega_2^2}\right).$$

Như vậy ta có hệ thức: $\dfrac{2}{n_0^2}=\dfrac{1}{n_1^2}+\dfrac{1}{n_2^2}$

$$\Rightarrow n_2^2=\frac{n_0^2 n_1^2}{2n_1^2-n_0^2}.$$

Thay số: $n_2^2=\dfrac{n_0^2 n_1^2}{2n_1^2-n_0^2}=\dfrac{(20)^2.(15)^2}{2(20)^2-(15)^2}$

$$=\frac{3600}{23}$$

$\Rightarrow n_2\approx 12,5$ vòng/s ≈ 750 vòng/phút.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào gửi lời giải bài này về Tòa soạn.

NGUYỄN XUÂN QUANG

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG CỦA TAM GIÁC DƯỚI GÓC ĐỘ LƯỢNG GIÁC

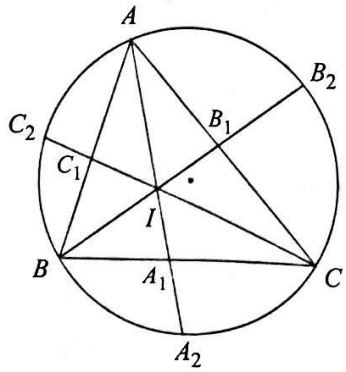
PHẠM DUY KHÁNH
(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)

Trong *Toán học và Tuổi trẻ* số 545 tháng 11 năm 2022 có bài viết ***" Một số bất đẳng thức liên quan đến tâm đường tròn nội tiếp tam giác"*** của bạn *Hoàng Minh Quân*. Trong bài viết này tác giả tiếp tục khai thác các bất đẳng thức về đường phân giác trong của tam giác dưới góc độ lượng giác, điều đó thể hiện qua nội dung sau.

I. Kiến thức cơ sở

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R, các đường phân giác trong AA_1, BB_1, CC_1 lần lượt cắt đường tròn tâm O tại $A_2; B_2; C_2$.

Đặt $AB = c, BC = a, CA = b$, gọi I là tâm đường nội tiếp và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



Sử dụng hệ thức $\frac{r}{R} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, ta có:

$$IA = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Hoàn toàn tương tự: $IB = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}} = 4R\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}$;

$$IC = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}} = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

Lại có: $\widehat{BIA_2} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = \widehat{IBA_2}$, do đó tam giác BA_2I cân tại A_2 nên $IA_2 = BA_2 = 2R\sin\frac{A}{2}$.

Tương tự: $IB_2 = 2R\sin\frac{B}{2}$, $IC_2 = 2R\sin\frac{C}{2}$.

Ta có: $AA_1 = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$ và $IA = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, lúc đó:

$$IA_1 = AA_1 - IA = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} - 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= \frac{4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

Tương tự: $IB_1 = \frac{4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{C-A}{2}}$;

$$IC_1 = \frac{4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

Ta có: $\frac{BA_1}{BA} = \frac{CA_1}{CA} = \frac{BA_1 + CA_1}{BA + CA} = \frac{BC}{BA + CA} = \frac{a}{b+c}$,

từ đó suy ra: $BA_1 = \frac{ac}{b+c}$ và $CA_1 = \frac{ab}{b+c}$.

Lại có $AA_1.A_1A_2 = BA_1.CA_1$, suy ra:

$$A_1A_2 = \frac{BA_1.CA_1}{AA_1} = \frac{a^2bc}{(b+c)^2}\cdot\frac{b+c}{2bc\cos\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{a^2}{2(b+c)\cos\frac{A}{2}}.$$

Tương tự:

$$B_1B_2 = \frac{b^2}{2(c+a)\cos\frac{B}{2}};\ C_1C_2 = \frac{c^2}{2(a+b)\cos\frac{C}{2}}.$$

II. Các bất đẳng thức liên quan đến đường phân giác trong của tam giác.

1. Bất đẳng thức liên quan tới bán kính đường tròn ngoại tiếp

Trong mục này tác giả chỉ giới thiệu các bất đẳng thức bậc nhất và nghịch đảo của nó còn các BĐT bậc hai và các nghịch đảo của nó được tác giả để ở phần bài tập dành cho độc giả.

Bài toán 1. $IA + IB + IC \le 3R.$

Chứng minh. $IA = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2};$

$$IB = 4R\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2};\ IC = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

Lúc đó:

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \le \frac{3}{4}.$$

Lại có: $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$, do đó:

$$\text{VT} \le \frac{1}{3}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^2 \le \frac{3}{4} \text{ (đpcm).}$$

Bài toán 2. $\frac{1}{IA} + \frac{1}{IB} + \frac{1}{IC} \ge \frac{3}{R}.$

Chứng minh.

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}} \ge 12.$$

Ta có: $\text{VT} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2}} \ge 12$ (đpcm)

(do $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$).

Bài toán 3. $IA_2 + IB_2 + IC_2 \le 3R.$

Chứng minh. Sử dụng các hệ thức:

$$IA_2 = 2R\sin\frac{A}{2};\ IB_2 = 2R\sin\frac{B}{2};\ IC_2 = 2R\sin\frac{C}{2},$$

khi đó: $\text{BĐT} \Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2} \le 3$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2} \text{ (BĐT đúng).}$$

Bài toán 4. $\frac{1}{IA_2} + \frac{1}{IB_2} + \frac{1}{IC_2} \ge \frac{3}{R}.$

Chứng minh. $\text{BĐT} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \ge 6.$

Ta có: $\text{VT} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}} \ge 6$ (đpcm).

Bài toán 5. $IA_1 + IB_1 + IC_1 \le \frac{3R}{2}.$

Chứng minh. $IA_1 + IB_1 + IC_1 \le \frac{3R}{2}$

$$\Leftrightarrow 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{\cos\frac{A-B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B-C}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C-A}{2}}\right) \le \frac{3R}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}} \times$$

$$\times\left(\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2} + \cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right) \le 3.$$

$$\text{VT} \le \frac{24\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}},$$

ta chứng minh: $\dfrac{8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}} \le 1$

$$\Leftrightarrow \frac{8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \le 1$$

$$\Leftrightarrow (\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A) \ge 8\sin A\sin B\sin C.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho từng nhân tử ở vế trái sau đó nhân theo vế các BĐT cùng chiều ta có đpcm.

Bài toán 6. $\dfrac{1}{IA_1}+\dfrac{1}{IB_1}+\dfrac{1}{IC_1} \ge \dfrac{6}{R}$.

Chứng minh. $\dfrac{1}{IA_1}+\dfrac{1}{IB_1}+\dfrac{1}{IC_1} \ge \dfrac{6}{R}$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \ge \frac{6}{R}$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \ge 24 \quad (*).$$

Ta có: $\dfrac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \dfrac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$

$$= \frac{\sin B+\sin C}{\sin A\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}},$$

do đó: $(*) \Leftrightarrow \dfrac{\sin B+\sin C}{\sin A\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \dfrac{\sin C+\sin A}{\sin A\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}} + \dfrac{\sin A+\sin B}{\sin C\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} \ge 24.$

Áp dụng BĐT Cauchy cho vế trái ta có:

$$\text{VT} \ge 3\sqrt[3]{\frac{(\sin A+\sin B)(\sin A+\sin B)(\sin A+\sin B)}{\sin A\sin B\sin C\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}}$$

Mặt khác ta có:

$$(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A) \ge 8\sin A\sin B\sin C$$

và $\dfrac{1}{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}} \ge 64$, suy ra:

$$\text{VT} \ge 24 \quad (\text{đpcm}).$$

Bài toán 7. $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2 \ge \dfrac{3R}{2}$.

Chứng minh.

$$A_1A_2 = \frac{a^2}{2(b+c)\cos\frac{A}{2}} = \frac{16R^2\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{8R\cos\frac{B-C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{2R\sin^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}} \ge 2R\sin^2\frac{A}{2}.$$

Tương tự ta cũng có:

$$B_1B_2 \ge 2R\sin^2\frac{B}{2};\ C_1C_2 \ge 2R\sin^2\frac{C}{2}.$$

Do đó :

$$\text{VT} \ge 2R\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right) \ge \frac{3R}{2}$$

(do $\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}$

$$= \frac{3-(\cos A+\cos B+\cos C)}{2} \ge \frac{3-\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}).$$

Bài toán 8. $\dfrac{1}{A_1A_2}+\dfrac{1}{B_1B_2}+\dfrac{1}{C_1C_2} \ge \dfrac{6}{R}$.

Chứng minh.

$$\frac{1}{A_1A_2}+\frac{1}{B_1B_2}+\frac{1}{C_1C_2} \ge \frac{6}{R} \Leftrightarrow \sum \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{2R\sin^2\frac{A}{2}} \ge \frac{6}{R}$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}} \ge 12 \quad (*).$$

Ta có:

$$\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A\sin\frac{A}{2}},$$

lúc đó:

$$(*)\Leftrightarrow\frac{\sin A+\sin B}{\sin C\sin\frac{C}{2}}+\frac{\sin B+\sin C}{\sin A\sin\frac{A}{2}}+\frac{\sin C+\sin A}{\sin B\sin\frac{B}{2}}\geq 12.$$

Ta có các kết quả sau:

$$(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)\geq 8\sin A\sin B\sin C$$

và $$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\geq 8.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho vế trái ta có đpcm.

2. Các bất đẳng thức liên quan đến tỷ lệ các đoạn nằm trên đường phân giác trong

Bài toán 1. $\frac{IA_1}{IA}+\frac{IB_1}{IB}+\frac{IC_1}{IC}\geq\frac{3}{2}.$

Chứng minh. Ta có:

$$\frac{IA_1}{IA}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}.$$

Tương tự ta có:

$$\frac{IB_1}{IB}=\frac{\sin B}{\sin C+\sin A};\frac{IC_1}{IC}=\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}.$$

Lúc đó:

$$\text{BĐT}\Leftrightarrow\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}+\frac{\sin B}{\sin C+\sin A}+\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}\geq\frac{3}{2}$$

(đúng theo BĐT Nesbitt) (đpcm).

Bài toán 2. $\frac{IA}{IA_1}+\frac{IB}{IB_1}+\frac{IC}{IC_1}\geq 6.$

Chứng minh. Ta có:

$$\frac{IA}{IA_1}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}.$$

Tương tự:

$$\frac{IB}{IB_1}=\frac{\sin C+\sin A}{\sin B};\frac{IC}{IC_1}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}.$$

$$\text{BĐT}\Leftrightarrow\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}+\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}+\frac{\sin C+\sin A}{\sin B}\geq 6.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho từng cặp số:

$$\frac{\sin A}{\sin B},\frac{\sin B}{\sin A};\frac{\sin B}{\sin C},\frac{\sin C}{\sin B};\frac{\sin C}{\sin A},\frac{\sin A}{\sin C}$$

ta có đpcm.

Bài toán 3. $\frac{A_1A_2}{IA}+\frac{B_1B_2}{IB}+\frac{C_1C_2}{IC}\geq\frac{3}{2}.$

Chứng minh. Xét tỷ số:

$$\frac{A_1A_2}{IA}=\frac{a^2}{8R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}(b+c)\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{2\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\geq\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

Tương tự ta có:

$$\frac{B_1B_2}{IB}\geq\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}};\frac{C_1C_2}{IC}\geq\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}.$$

Do đó: $\frac{A_1A_2}{IA}+\frac{B_1B_2}{IB}+\frac{C_1C_2}{IC}$

$$\geq\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}+\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}\right)$$

$\geq\frac{3}{2}$ (đpcm).

Bài toán 4. $\frac{IA}{A_1A_2}+\frac{IB}{B_1B_2}+\frac{IC}{C_1C_2}\geq 6.$

Chứng minh.

$$\frac{IA}{A_1A_2}=\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)}{\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\sin B \sin C}{2\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{2\sin^2 \frac{B}{2}\sin^2 \frac{C}{2}}{\sin^2 \frac{A}{2}}.$$

Ta có: $\frac{\sin B \sin C}{2\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{\cos(B-C)+\cos A}{4\sin^2 \frac{A}{2}}$

$$= \frac{1+\cos(B-C)}{4\sin^2 \frac{A}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{\cos^2 \frac{B-C}{2}}{2\sin^2 \frac{A}{2}} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin B \sin C}{2\sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{B-C}{2}}{2\sin^2 \frac{A}{2}} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\cos^2 \frac{A}{2}\cos^2 \frac{B-C}{2}}{2\cos^2 \frac{A}{2}\sin^2 \frac{A}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin B + \sin C}{\sin A}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

Khi đó:

$$\frac{IA}{A_1A_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin B + \sin C}{\sin A}\right)^2 + \frac{2\sin^2 \frac{B}{2}\sin^2 \frac{C}{2}}{\sin^2 \frac{A}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Tương tự ta có:

$$\frac{IB}{B_1B_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin C + \sin A}{\sin B}\right)^2 + \frac{2\sin^2 \frac{C}{2}\sin^2 \frac{A}{2}}{\sin^2 \frac{B}{2}} - \frac{1}{2};$$

$$\frac{IC}{C_1C_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin A + \sin B}{\sin C}\right)^2 + \frac{2\sin^2 \frac{A}{2}\sin^2 \frac{B}{2}}{\sin^2 \frac{C}{2}} - \frac{1}{2}.$$

$$\text{VT} = \frac{1}{2}\sum\left(\frac{\sin A + \sin B}{\sin C}\right)^2 + 2\sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}\sin^2 \frac{B}{2}}{\sin^2 \frac{C}{2}} - \frac{3}{2}.$$

Ta có các kết quả sau:

$$\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\sin A + \sin B}{\sin C}\right)^2 \geq 6;\ \sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}\sin^2 \frac{B}{2}}{\sin^2 \frac{C}{2}} \geq \frac{3}{4}.$$

Do đó: $\frac{IA}{A_1A_2} + \frac{IB}{B_1B_2} + \frac{IC}{C_1C_2} \geq 6$ (đpcm).

Bài toán 5. $\frac{A_1A_2}{AA_1} + \frac{B_1B_2}{BB_1} + \frac{C_1C_2}{CC_1} \geq 1.$

Chứng minh.

$$\frac{A_1A_2}{AA_1} = \frac{a^2}{2(b+c)\cos \frac{A}{2}} \cdot \frac{b+c}{2bc\cos \frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{4\sin B \sin C \cos^2 \frac{A}{2}}.$$

Tương tự: $\frac{B_1B_2}{BB_1} = \frac{\sin^2 B}{4\sin C \sin A \cos^2 \frac{B}{2}};$

$$\frac{C_1C_2}{CC_1} = \frac{\sin^2 C}{4\sin A \sin B \cos^2 \frac{C}{2}}.$$

Lúc đó: $\frac{A_1A_2}{AA_1} + \frac{B_1B_2}{BB_1} + \frac{C_1C_2}{CC_1}$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sin^2 A}{\sin B \sin C \cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{\sin^2 B}{\sin C \sin A \cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{\sin^2 C}{\sin A \sin B \cos^2 \frac{C}{2}}\right)$$

$$\geq \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}\cos^2 \frac{B}{2}\cos^2 \frac{C}{2}}} \geq 1$$

(do $\cos \frac{A}{2}\cos \frac{B}{2}\cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$).

Bài toán 6. $\frac{AA_1}{A_1A_2} + \frac{BB_1}{B_1B_2} + \frac{CC_1}{C_1C_2} \geq 9.$

Chứng minh.

$$\frac{AA_1}{A_1A_2} = \frac{2bc\cos \frac{A}{2}}{b+c} \cdot \frac{2(b+c)\cos \frac{A}{2}}{a^2}$$

$$= \frac{4\sin B \sin C \cos^2 \frac{A}{2}}{\sin^2 A} = \frac{\sin B \sin C}{\sin^2 \frac{A}{2}}.$$

Tương tự: $\frac{BB_1}{B_1B_2}=\frac{\sin C\sin A}{\sin^2\frac{B}{2}};\frac{CC_1}{C_1C_2}=\frac{\sin A\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}.$

Lúc đó ta có:

$$\frac{AA_1}{A_1A_2}+\frac{BB_1}{B_1B_2}+\frac{CC_1}{C_1C_2}$$
$$=\frac{\sin A\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin B\sin C}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin C\sin A}{\sin^2\frac{B}{2}}.$$

Ta chứng minh:

$$\frac{\sin A\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin B\sin C}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin C\sin A}{\sin^2\frac{B}{2}}\geq 9.$$

Thật vậy, ta có:

$$\frac{\sin A\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}=\frac{\cos(A-B)+\cos C}{2\sin^2\frac{C}{2}}$$
$$=\frac{1+\cos(A-B)}{2\sin^2\frac{C}{2}}-1=\frac{\cos^2\frac{A-B}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}}-1$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin A\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}=\frac{\cos^2\frac{A-B}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}}-1$$
$$=\frac{\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{C}{2}}-1=\left(\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}\right)^2-1$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{\sin B\sin C}{\sin^2\frac{A}{2}}=\left(\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}\right)^2-1;$$

$$\frac{\sin C\sin A}{\sin^2\frac{B}{2}}=\left(\frac{\sin C+\sin A}{\sin B}\right)^2-1.$$

$$\text{VT}=\left(\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}\right)^2+\left(\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}\right)^2+\left(\frac{\sin C+\sin A}{\sin B}\right)^2-3$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\text{VT}\geq 3\sqrt[3]{\left[\frac{(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)}{\sin A\sin B\sin C}\right]^2}-3$$
$$\geq 9 \text{ (đpcm).}$$

3. Các bài toán bất đẳng thức liên quan đến tỷ lệ giữa các đoạn với cạnh đối diện của tam giác.

Bài toán 1. $\frac{IA_2}{a}+\frac{IB_2}{b}+\frac{IC_2}{c}\geq\sqrt{3}.$

Chứng minh. Ta có: $\frac{IA_2}{a}=\frac{2R\sin\frac{A}{2}}{2R\sin A}=\frac{1}{2\cos\frac{A}{2}}.$

Tương tự ta có:

$$\frac{IB_2}{b}=\frac{2R\sin\frac{B}{2}}{2R\sin B}=\frac{1}{2\cos\frac{B}{2}};$$

$\frac{IC_2}{c}=\frac{2R\sin\frac{C}{2}}{2R\sin C}=\frac{1}{2\cos\frac{C}{2}}$. Khi đó:

$$\frac{IA_2}{a}+\frac{IB_2}{b}+\frac{IC_2}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right)$$
$$\geq\frac{3}{2\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}\geq\sqrt{3}\text{ (đpcm).}$$

Bài toán 2. $\frac{a}{IA_2}+\frac{b}{IB_2}+\frac{c}{IC_2}\leq 3\sqrt{3}.$

Chứng minh. Ta có: $\frac{a}{IA_2}=\frac{2R\sin A}{2R\sin\frac{A}{2}}=2\cos\frac{A}{2}.$

Tương tự ta có: $\frac{b}{IB_2}=2\cos\frac{B}{2};\frac{c}{IC_2}=2\cos\frac{C}{2}.$

Lúc đó:

$$\frac{a}{IA_2}+\frac{b}{IB_2}+\frac{c}{IC_2}=2\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$$
$$\leq 3\sqrt{3}\text{ (đpcm).}$$

Bài toán 3. $\frac{A_1A_2}{a}+\frac{B_1B_2}{b}+\frac{C_1C_2}{c}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chứng minh. Ta có:

$$A_1A_2=\frac{a^2}{2(b+c)\cos\frac{A}{2}}\Leftrightarrow\frac{A_1A_2}{a}=\frac{a}{2(b+c)\cos\frac{A}{2}}.$$

Ta có đánh giá sau:

$$\frac{A_1A_2}{a}=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{8R\cos^2\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}\ge\frac{\tan\frac{A}{2}}{2}.$$

Tương tự:

$$\frac{B_1B_2}{b}=\frac{4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{8R\cos^2\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}}\ge\frac{\tan\frac{B}{2}}{2}$$

và $\frac{C_1C_2}{c}=\frac{4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{8R\cos^2\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}}\ge\frac{\tan\frac{C}{2}}{2}$.

Lúc đó:

$$\frac{A_1A_2}{a}+\frac{B_1B_2}{b}+\frac{C_1C_2}{c}\ge\frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{(đpcm)}.$$

Bài toán 4. $\frac{a}{A_1A_2}+\frac{b}{B_1B_2}+\frac{c}{C_1C_2}\ge6\sqrt{3}$.

Chứng minh. Ta có:

$$A_1A_2=\frac{a^2}{2(b+c)\cos\frac{A}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{A_1A_2}=\frac{2(b+c)\cos\frac{A}{2}}{a}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Tương tự: $\frac{b}{B_1B_2}=\frac{\sin C+\sin A}{\sin\frac{B}{2}}$;

$$\frac{c}{C_1C_2}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Khi đó:

$$\frac{a}{A_1A_2}+\frac{b}{B_1B_2}+\frac{c}{C_1C_2}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin\frac{C}{2}}+\frac{\sin B+\sin C}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\sin C+\sin A}{\sin\frac{B}{2}}.$$

Ta có:

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c-a)}}{2bc};$$

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\sqrt{1-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^2}=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{2ca};$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{2}}=\sqrt{\frac{(c+a-b)(c+b-a)}{4ab}}.$$

Do đó:

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{(a+b)\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)}}{c\sqrt{ab}}\ge\frac{2\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)}}{c}.$$

Tương tự:

$$\frac{\sin B+\sin C}{\sin\frac{A}{2}}\ge\frac{2\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}}{a};$$

$$\frac{\sin C+\sin A}{\sin\frac{B}{2}}\ge\frac{2\sqrt{(a+b+c)(c+a-b)}}{b}.$$

Bây giờ ta chứng minh:

$$\frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}}{a}+\frac{\sqrt{(a+b+c)(c+a-b)}}{b}+\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)}}{c}\ge3\sqrt{3}.$$

Ta có đánh giá sau:

$$\frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}}{a} \geq \frac{3\sqrt{3}(b+c-a)}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow 27a^2(b+c-a) \leq (a+b+c)^3 \text{ (đúng).}$$

Tương tự:

$$\frac{\sqrt{(a+b+c)(c+a-b)}}{b} \geq \frac{3\sqrt{3}(c+a-b)}{a+b+c};$$

$$\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)}}{c} \geq \frac{3\sqrt{3}(a+b-c)}{a+b+c}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức cùng chiều trên ta có đpcm.

Bài toán 5. $\frac{a}{IA}+\frac{b}{IB}+\frac{c}{IC} \geq 3\sqrt{3}.$

Chứng minh. Ta có: $IA = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. Suy ra:

$$\frac{a}{IA} = \frac{2R\sin A}{4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{\sin A}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

Tương tự:

$$\frac{b}{IB} = \frac{\sin B}{2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}; \frac{c}{IC} = \frac{\sin C}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}.$$

$$\frac{a}{IA}+\frac{b}{IB}+\frac{c}{IC}$$
$$= \frac{\sin A}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \frac{\sin B}{2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}} + \frac{\sin C}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho vế phải ta có:

$$\frac{a}{IA}+\frac{b}{IB}+\frac{c}{IC} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\sin A\sin B\sin C}{8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}}$$

$$= 3\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}$$

$$\geq 3\sqrt{3} \text{ (đpcm).}$$

BÀI TẬP

Chứng minh các bất đẳng thức sau

1. $IA^2+IB^2+IC^2 \leq 3R^2$

$(A,B,C \geq \left(\pi - 4\arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}\right))$.

2. $IA_2^2+IB_2^2+IC_2^2 \geq 3R^2$

3. $\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}+\frac{1}{IC^2} \geq \frac{3}{R^2}$

4. $\frac{1}{IA_2^2}+\frac{1}{IB_2^2}+\frac{1}{IC_2^2} \geq \frac{3}{R^2}$

5. $IA_1^2+IB_1^2+IC_1^2 \leq \frac{3R^2}{4}$

6. $\frac{1}{IA_1^2}+\frac{1}{IB_1^2}+\frac{1}{IC_1^2} \geq \frac{12}{R^2}$

7. $A_1A_2^2+B_1B_2^2+C_1C_2^2 \geq \frac{3R^2}{4}$

8. $\frac{1}{A_1A_2^2}+\frac{1}{B_1B_2^2}+\frac{1}{C_1C_2^2} \geq \frac{12}{R^2}$

9. $\frac{IA_1}{IA_2}+\frac{IB_1}{IB_2}+\frac{IC_1}{IC_2} \leq \frac{3}{2}$

10. $\frac{IA_2}{IA_1}+\frac{IB_2}{IB_1}+\frac{IC_2}{IC_1} \geq 6$

11. $\frac{IA_1}{A_1A_2}+\frac{IB_1}{B_1B_2}+\frac{IC_1}{C_1C_2} \geq 3$

12. $\frac{A_1A_2}{IA_1}+\frac{B_1B_2}{IB_1}+\frac{C_1C_2}{IC_1} \geq 3$

13. $\frac{IA}{a}+\frac{IB}{b}+\frac{IC}{c} \geq \sqrt{3}$

14. $\frac{a}{IA}+\frac{b}{IB}+\frac{c}{IC} \geq 3\sqrt{3}$

15. $\frac{IA_1}{a}+\frac{IB_1}{b}+\frac{IC_1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

16. $\frac{a}{IA_1}+\frac{b}{IB_1}+\frac{c}{IC_1} \geq 6\sqrt{3}.$

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 89

PROBLEM. *Show that* $(2^n)!$ *is divisible by* 2^{2n-1} *for any positive integer* n.

Solution. We have $2^{2n-1} = 2^n \times 2^{n-1}$ and $(2^n)! = 1 \times 2 \times \cdots \times (2^n - 1) \times 2^n$. Therefore, it is enough to show that $1 \times 2 \times \cdots \times (2^n - 1)$ is divisible by 2^{n-1} (1).

But for any positive integer n, we have $2^{n-1} \le 2^n - 1$. In other words, 2^{n-1} must appears somewhere in the product of consecutive numbers $1 \times 2 \times \cdots \times (2^n - 1)$. Thus (1) is verified.

TỪ VỰNG

divisible by : *chia hết cho*

enough to show that : *chỉ cần chỉ ra/ chứng minh*

in other words : *nói cách khác*

consecutive : *liên tiếp*

is verified : *được xác nhận*

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

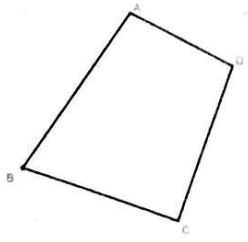
(*College of Science–Vietnam National University, Hanoi*)

****

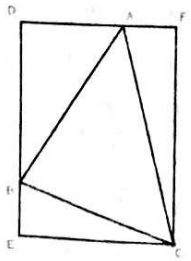
BÀI DỊCH SỐ 87

BÀI TOÁN. *Cho một đa giác với các đỉnh có toạ độ nguyên (các điểm trên lưới có toạ độ nguyên). Chứng minh rằng diện tích của đa giác đó là một số hữu tỉ.*

Lời giải.



Hình 1



Hình 2

Ta chỉ cần chứng minh mệnh đề đúng với một tam giác vì chúng ta luôn có thể chia một đa giác bất kì thành nhiều tam giác.

Đối với tam giác ABC chúng ta có thể mở rộng thành hình chữ nhật $CEDF$ như trong hình 2. Rõ ràng các đỉnh C, E, D, F đều có toạ độ nguyên.

Từ đó diện tích của hình chữ nhật $CEDF$ và diện tích các tam giác ABD, AFC, BEC là các số hữu tỉ. Do đó diện tích tam giác ABC cũng là một số hữu tỉ.

Lưu ý: Chúng ta có một công thức đẹp về diện tích của các đa giác mà các đỉnh có tọa độ nguyên. Đó là *định lí Pick*:

Cho đa giác đơn (không tự cắt) P. Khi đó:

$$A_P = I_P + \frac{1}{2} B_P - 1$$

với A_P, I_P, B_P *lần lượt là diện tích đa giác P, số các điểm có tọa độ nguyên nằm trong P, số các điểm có tọa độ nguyên nằm trên các cạnh của P.*

Nhận xét. Các bạn *Trần Thị Thanh Thư*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, **Thừa Thiên Huế;** *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm. Xin hoan nghênh các bạn.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

BÀI TOÁN 68. *Giải phương trình*

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=2\sqrt{2}.$$

Lời giải. ĐK: $x^2-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>1\end{array}\right.$.

Với $x<-1$ ta có: $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}<0<2\sqrt{2}$.

Vậy ĐK trở thành $x>1$.

Cách 1. Bình phương hai vế ta có:

$$x^2+2\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{x^2}{x^2-1}=8$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2-1}+2\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-8=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=2\Leftrightarrow x^4-4x^2+4=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\sqrt{2}.$$

Cách 2. $x=0$ không là nghiệm PT nên

$$\text{PT}\Leftrightarrow x^2\sqrt{x^2-1}+x^2=2\sqrt{2}x\sqrt{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}\right)^2+\sqrt{x^2-1}\left(x^2-2\sqrt{x^2-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}\right)^2+\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2-1}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}=0\\\sqrt{x^2-1}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}.$$

Cách 3. PT tương đương với

$$x\sqrt{x^2-1}+x=2\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow\left(x\sqrt{x^2-1}-x\right)+\left(2x-2\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x^2-1}+1}-\frac{2\left(x^2-2\right)}{x+\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)\left(x^2+\sqrt{2}x\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{x^2-1}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$$

Cách 4. PT trở thành

$$x\sqrt{x^2-1}+x=2\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}(x-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{x^2-1})+(x-\sqrt{2})=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\\\sqrt{x^2-1}+1-\dfrac{\sqrt{2}\left(x+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{x^2-1}+1}=0\ (1)\end{array}\right.$$

PT (1) trở thành

$$x^2+2\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2}x-2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}+x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2=0\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$$

Vậy nghiệm của PT là $x=\sqrt{2}$.

Cách 5. PT tương đương với

$$x\sqrt{x^2-1}+x=2\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}\left(x-\sqrt{2}\right)+\left(x-\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\\\sqrt{x^2-1}-\dfrac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}+x}=0\ (2)\end{array}\right.$$

PT (2) trở thành:

$$\sqrt{2}\left(x^2-1\right)+x\sqrt{x^2-1}-x-\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x^2-1}-1\right)+\sqrt{2}\left(x^2-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}+1}+\sqrt{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2=0\Leftrightarrow x=\sqrt{2}.$$

Cách 6. Đặt $t=\sqrt{x^2-1}$, $t>0$. Khi đó

$$x^2=t^2+1\Leftrightarrow x=\sqrt{t^2+1}.$$

PT trở thành: $\sqrt{t^2+1}+\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t}=2\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow(t+1)\sqrt{t^2+1}=2\sqrt{2}t$$

$$\Leftrightarrow(t+1)\left(\sqrt{t^2+1}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}t+\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ \dfrac{(t+1)^2}{\sqrt{t^2+1}+\sqrt{2}}-\sqrt{2}=0 \ (3) \end{array}\right.$$. PT(3) trở thành:

$$t^2+2t-1=\sqrt{2}\sqrt{t^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge -1+\sqrt{2} \\ t^4+4t^3-4t-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge -1+\sqrt{2} \\ \left(t^2-1\right)\left(t^2+4t+1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1$$

Vậy $t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=1 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

Cách 7. Đặt $a=\dfrac{1}{x}, b=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, $0<a,b<1$.

Ta có: $\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=1 \\ a+b=2\sqrt{2}ab \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8a^2b^2-2ab-1=0 \\ a+b=2\sqrt{2}ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=\dfrac{1}{2} \\ a+b=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ b=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Khi đó $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

Cách 8. Sử dụng lượng giác

Đặt $x=\dfrac{1}{\cos\alpha}$ với $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Phương trình trở thành: $\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{\dfrac{1}{\cos\alpha}}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1}}=2\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}=2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha+\cos\alpha=2\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ \alpha=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{k2\pi}{3}.$$

Do $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow x=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{4}}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

Cách 9. Xét hàm số $f(x)=x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ với $x>1$

$$\Rightarrow f'(x)=1+\frac{\sqrt{x^2-1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}$$

$$=1-\frac{1}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3-1}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}.$$

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}=1\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

Lập BBT ta được $\min\limits_{(1;+\infty)} f(x)=2\sqrt{2}$ tại $x=\sqrt{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\sqrt{2}$

TRẦN ĐỨC PHƯƠNG
(GV THPT Giao Thủy, Nam Định)

Nhận xét. Kỳ này TH&TT xin biểu dương các bạn *Nguyễn Trung Dũng*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Phú Thọ;** *Đinh Nhật Ý Anh*, 9K, THCS Trần Mai Ninh, **Thanh Hóa;** *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**; *Lê Phạm Minh Toàn*, *Lê Viết Thịnh*, 10B2, *Nguyễn Hà Anh*, GV TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, **TP. Hồ Chí Minh** đã đóng góp một số cách giải đúng tương tự với những cách giải trên của bạn *Trần Đức Phương*.

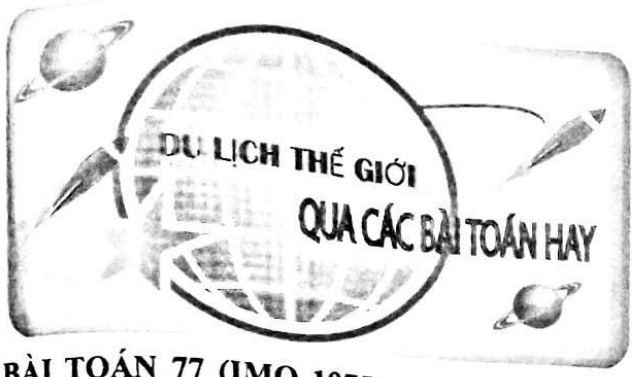
LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 70 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.3.2023.

BÀI TOÁN 70. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 2022. Chứng minh rằng*

$$\frac{\sqrt{a^2+2022}+\sqrt{b^2+2022}+\sqrt{c^2+2022}}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}\ge 2.$$

MAI VĂN NĂM
(GV THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Bình)

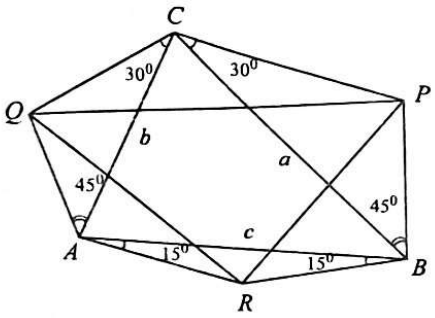


BÀI TOÁN 77 (IMO 1975). *Trong mặt phẳng của tam giác bất kỳ ABC và về phía ngoài tam giác ấy người ta dựng các tam giác BCP, CAQ, ABR sao cho*

$\widehat{PBC}=\widehat{CAQ}=45^0$, $\widehat{BCP}=\widehat{QCA}=30^0$, $\widehat{ABR}=\widehat{BAR}=15^0$.

Chứng minh rằng $\widehat{QRP}=90^0$ và $QR=RP$.

Lời giải.



Ký hiệu $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ và S là diện tích tam giác ABC. Áp dụng định lý hàm số sin cho tam giác ACQ, ABR, BCP ta có:

$$QA=\frac{b\sin 30^0}{\sin 105^0}=\frac{b}{2\sin(90^0+15^0)}=\frac{b}{2\cos 15^0};$$

$$QC=\frac{b}{\sqrt{2}\sin 105^0}=\frac{b}{\sqrt{2}\cos 15^0};$$

$$AR=BR=\frac{c\sin 15^0}{\sin 150^0}=\frac{c\sin 15^0}{\sin 30^0}=\frac{c}{2\cos 15^0};$$

$$BP=\frac{a}{2\cos 15^0};\ CP=\frac{a}{\sqrt{2}\cos 15^0}.$$

Như vậy: $QA=\frac{kb}{2}$, $QC=\frac{kb}{\sqrt{2}}$, $AR=BR=\frac{kc}{2}$,

$BP=\frac{ka}{2}$, $CP=\frac{ka}{\sqrt{2}}$ với $k=\frac{1}{\cos 15^0}$.

Áp dụng định lý côsin ta có:

$$QR^2=AR^2+QA^2-2AR.QA\cos(\widehat{A}+60^0)$$

$$=\frac{k^2}{4}\left(c^2+b^2-2bc\cos(\widehat{A}+60^0)\right);$$

$$PR^2=BR^2+PB^2-2BR.PB\cos(\widehat{C}+60^0)$$

$$=\frac{k^2}{4}\left(c^2+a^2-2ac\cos(\widehat{C}+60^0)\right)$$

$$PQ^2=CP^2+CQ^2-2CP.CQ\cos(\widehat{C}+60^0)$$

$$=\frac{k^2}{2}\left(a^2+b^2-2ab\cos(\widehat{C}+60^0)\right)$$

Ta chứng minh: $QR^2=PR^2$

$$\Leftrightarrow c^2+b^2-2bc\cos(\widehat{A}+60^0)=c^2+a^2-2ac\cos(\widehat{C}+60^0)$$

$$\Leftrightarrow b^2-2bc\left[\cos A.\frac{1}{2}-\sin A.\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$=a^2-2ac\left[\cos C.\frac{1}{2}-\sin C.\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow b^2-bc\cos A+\sqrt{3}bc\sin A=a^2-ac\cos C+\sqrt{3}ac\sin C$$

$$\Leftrightarrow b^2-\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+2\sqrt{3}.S=a^2-\frac{a^2+c^2-b^2}{2}+2\sqrt{3}.S$$

$\Leftrightarrow b^2-\frac{b^2+c^2-a^2}{2}=a^2-\frac{a^2+c^2-b^2}{2}$: đẳng thức này đúng nên ta có $QR^2=PR^2$ hay $QR=PR$. Ta có:

$$QR^2+PR^2=2QR^2=\frac{k^2}{2}\left(c^2+b^2-2bc\cos(\widehat{A}+60^0)\right)$$

Mà tương tự như trên ta chứng minh được:

$$c^2+b^2-2bc\cos(\widehat{A}+60^0)=a^2+b^2-2ab\cos(\widehat{C}+60^0)$$

Do đó $QR^2+PR^2=PQ^2$ hay tam giác PQR vuông tại R (đpcm).

Nhận xét. Bạn đọc có thể dùng phép quay để giải bài toán này. Hoan nghênh các bạn: *Hà Phương Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Phú Thọ** và *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã có lời giải đúng.

NHƯ HOÀNG

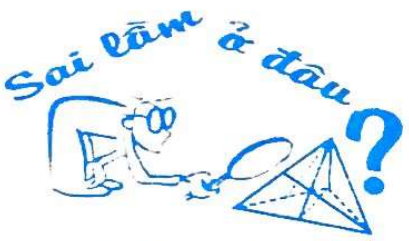
Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.3.2023.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 79. *Chứng minh rằng với mọi số thực w, x, y, z ta có*

$$\sqrt[3]{w^3+x^3+y^3+z^3}\le\sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2}.$$

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG?

(Đề đăng trên TH&TT số 543, tháng 9 năm 2022)

Phân tích sai lầm. Lời giải là không đúng ở bước: *Và theo cách đặt thì*

$$a=\sqrt{(x-1)^2+1} \Leftrightarrow a^2-1=(x-1)^2,$$

cho nên ta được $x-1=\sqrt{a^2-1}$.

Lẽ ra từ $a^2-1=(x-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=\sqrt{a^2-1} \\ x-1=-\sqrt{a^2-1} \end{array}\right.$.

Lời giải đúng. Ta biến đổi PT đã cho như sau

$$5x^2-10x=4(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2-2x+2)-4(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}+(x-1)^2=9.$$

Do đó ta được $\left(2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)\right)^2=9$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)=3 \\ 2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)=-3 \end{array}\right.$.

TH1: $2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)=3$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x+2}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ 4(x^2-2x+2)=(x+2)^2 \end{cases}.$$

Khi đó $4(x^2-2x+2)=(x+2)^2$

$$\Leftrightarrow 3x^2-12x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{6+2\sqrt{6}}{3} \\ x=\dfrac{6-2\sqrt{6}}{3} \end{array}\right.$$

So với điều kiện ta nhận cả hai nghiệm trên.

TH2: $2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)=-3$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x+2}=x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 4 \\ 4(x^2-2x+2)=(x-4)^2 \end{cases}.$$

Ta có $4(x^2-2x+2)=(x-4)^2 \Leftrightarrow 3x^2-8=0$.

PT trên có nghiệm đều nhỏ hơn 4 nên bị loại.

Kết luận: PT có nghiệm $x=\dfrac{6\pm 2\sqrt{6}}{3}$.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm.

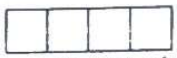
KIHIVI

ĐÁP ÁN NÀO ?

Trong một đề thi có câu hỏi sau đây: *Từ các chữ số* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 *lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có* 5 *chữ số đôi một khác nhau sao cho có đúng* 2 *chữ số lẻ và* 2 *chữ số lẻ đó luôn đứng cạnh nhau*?

A. 860 **B.** 408 **C.** 360 **D.** 240.

Bạn *Mai* đưa ra lập luận như sau: Ta xét một dãy gồm 4 ô như sau:



Mỗi số cần lập ứng với một cách chọn ra 4 phần tử của tập $\{0;2;4;6;a\}$ và hoán vị 4 phần tử vừa chọn vào 4 ô trên sao cho ô đầu tiên không phải chữ số 0, ô cuối cùng phải là chữ số chẵn, với

$$a \in \{13;31;15;51;35;53\}.$$

Bước 1: Chọn $a \in \{13;31;15;51;35;53\}$, có 6 cách chọn.

Bước 2: Trường hợp 1, chọn chữ số 0 để điền vào ô cuối cùng, có 1 cách. Số cách điền vào 3 ô đầu tiên bằng với số chỉnh hợp chập 3 của $\{2;4;6;a\}$ nên có A_4^3 cách.

Trường hợp 2, chọn chữ số 2 hoặc 4 hoặc 6 để điền vào ô cuối cùng, có 3 cách. Có 3 cách điền số vào ô đầu tiên, có A_3^2 cách điền số vào 2 ô ở giữa.

Số cách hoàn thành bước 2 là

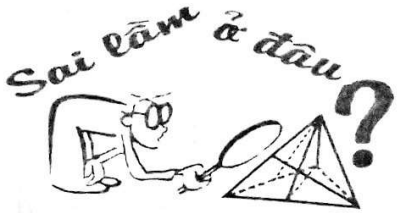
$$1.A_4^3+3.3.A_3^2=24+54=68 \text{ cách.}$$

Vậy lập được tất cả $6.68=408$ số theo yêu cầu của bài toán. Chọn **B**.

Các bạn có đồng ý với lập luận của bạn Mai không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)



GIẢI ĐÁP:

LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG?

(Đề đăng trên TH&TT số 544, tháng 10 năm 2022)

Phân tích sai lầm.

Ta có: $0 < x < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < 2x < \frac{3\pi}{2}$,

mà $\cos 2x = \frac{4}{5}$ suy ra:

$$0 < 2x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \tan x < 1.$$

Lời giải đúng như sau.

Cách 1. Ta có: $\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$.

Khi đó, với $\cos 2x = \frac{4}{5}$ ta được:

$$\tan^2 x = \frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}} = \frac{1}{9}.$$

Mà $0 < 2x < \frac{3\pi}{2}$, $\cos 2x = \frac{4}{5}$ suy ra:

$$0 < 2x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \tan x < 1.$$

Vậy $\tan x = \frac{1}{3}$.

Cách 2. Ta có $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Khi đó, với $\cos 2x = \frac{4}{5}$ ta được:

$$\cos^2 x = \frac{1+\frac{4}{5}}{2} = \frac{9}{10}.$$

Lại có $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, suy ra:

$$\tan^2 x = \frac{1}{\frac{9}{10}} - 1 = \frac{1}{9}.$$

Mà $0 < 2x < \frac{3\pi}{2}$, $\cos 2x = \frac{4}{5}$, suy ra:

$$0 < 2x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \tan x < 1.$$

Vậy $\tan x = \frac{1}{3}$.

Cách 3. Ta có $\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$.

Khi đó, với $\cos 2x = \frac{4}{5}$ ta được:

$$\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{9}.$$

Mà $0 < 2x < \frac{3\pi}{2}$, $\cos 2x = \frac{4}{5}$ suy ra:

$$0 < 2x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \tan x < 1.$$

Vậy $\tan x = \frac{1}{3}$.

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Hoàng Anh Thư*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** và bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã phát hiện đúng sai lầm và đưa ra lời giải như ở cách 1 trên. Xin hoan nghênh hai bạn.

KIHIVI

ĐÁP ÁN NÀO ?

Trong giờ bài tập tại lớp 12 Văn, thầy giáo có nêu bài toán sau:

Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-2x+m}$. *Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng?*

A. 1 **B.** 2 **C.** 3. **D.** 0

Sau vài phút suy nghĩ, bạn *Cẩm Tú* xung phong lên bảng giải, sau đây là lời giải của bạn *Cẩm Tú*.

Lời giải: Ta biết $x = x_0$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-2x+m}$ khi

PROBLEM ...

(Tiếp theo trang 23)

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/548. Find the largest value of the parameter a so that the equation $a^x = \log_a x$ has solution.

Problem T7/548. Given the equation with a parameter m: $x^6 - x^4 - 2(m-1)x^3 + (m-1)^2 = 0$. Find the values of m so that the equation has 4 distinct solutions.

Problem T8/548. On 3 rays Ox, Oy, Oz (on the space) which are mutually perpendicular to each other choose 3 arbitrary points A, B, C which are different from O. Let H be the orthocenter of ABC. Denote by S_O, S_A, S_B, S_C the areas of the triangles ABC, OBC, OCA, OAB respectively. Show that

$$\frac{S_O}{S_A} + \frac{S_O}{S_B} + \frac{S_O}{S_C} - \frac{S_A}{S_O} - \frac{S_B}{S_O} - \frac{S_C}{S_O} \geq 2\sqrt{3}.$$

Problem T9/548. Given a positive integer n. Suppose that a, b, c are positive number so that $a^n + b^n + c^n = 3$. Find the minimum value of the expression

$$P = \frac{a^2}{a+bc} + \frac{b^2}{b+ca} + \frac{c^2}{c+ab} + \frac{n}{a^2+b^2+c^2}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/548. Consider the sequence (a_n)

$$\begin{cases} a_0 = 2023;\ a_1 = 2.2023^2 \\ a_{n+2} = 2023^2 a_n + 2.2023^{n+3}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Show that for any positive integer k, there exist infinitely many natural numbers a of the form $6m + 1$ so that $a_{4k^4-1} + a$ is a composite number.

Problem T11/548. Find all functions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying

$$f\left(f(x) + y^2 + 4\right) + 4y = x + f^2(y+2), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Problem T12/548. Given a triangle ABC inscribed in a circle (O). Let I be the incenter of the triangle. IB and IC intersect (O) at the second points E, F. Let E', F' respectively be the reflection points of E, F in AC, AB. Show that the circumcenter of $OE'F'$ lies on the line AI.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science - Vietnam National University, Hanoi)

****

☞

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x-2}{x^2-2x+m} = \pm\infty$$

hoặc $$\lim_{x \to x_0^-} \frac{x-2}{x^2-2x+m} = \pm\infty$$

$\Rightarrow x_0$ là một nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 2x + m = 0 \quad (1).$$

Do đó, đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng khi PT(1) có đúng một nghiệm, điều này tương đương với PT(1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Với $m = 1$ ta có:

$$y = \frac{x-2}{x^2-2x+1} \text{ và } \lim_{x \to 1} \frac{x-2}{x^2-2x+1} = -\infty$$

$\Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng duy nhất của đồ thị hàm số đã cho. Vậy $m = 1$ thoả mãn yêu cầu bài toán. Chọn đáp án **A**.

Sau khi giải xong, các bạn trong lớp 12 Văn tỏ thái độ đồng ý với lời giải của bạn *Cẩm Tú*. Thầy giáo hỏi: *Các bạn có nghi ngờ gì về lời giải của bạn Cẩm Tú không?*

Cả lớp trả lời đồng thanh: *Đúng rồi ạ!*

Ý kiến của bạn thế nào?

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định)