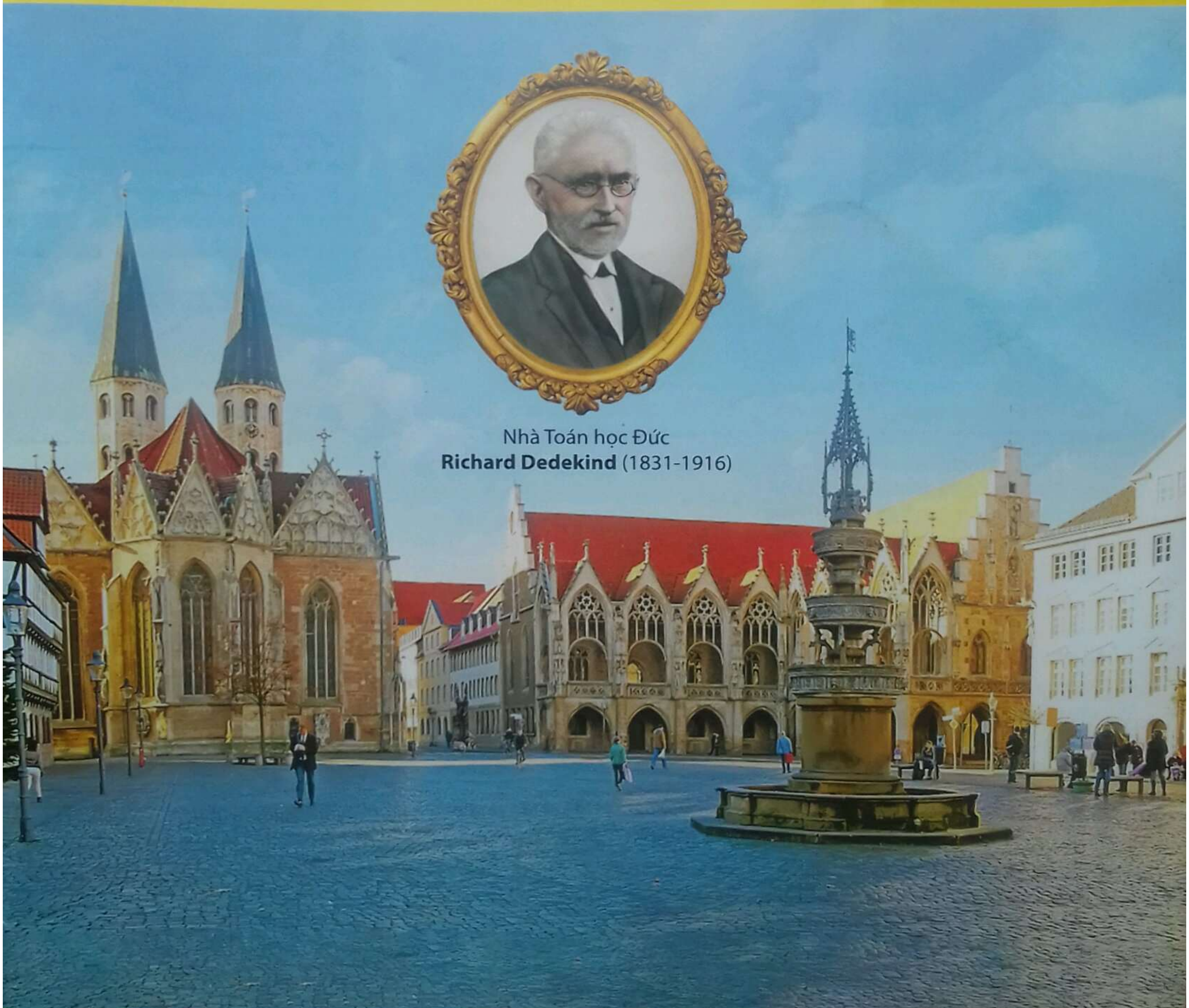
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG
JOURNAL OF MATHEMATICS AND LITERATURE IN SCHOOL

Số 549
Tháng 3 - 2023
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 60 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Nhà Toán học Đức
Richard Dedekind (1831-1916)

Cảnh đẹp Braunschweig (Đức)

ỨNG DỤNG TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG ĐỂ CHỨNG MINH CÁC ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU

ĐẶNG VĂN BIỂU
(GV THCS Đặng Xá, Gia Lâm, Hà Nội)

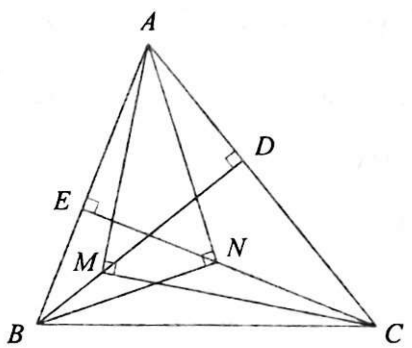
Để chứng minh hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau, ta thường nghĩ đến việc chứng minh hai tam giác bằng nhau, đưa về các cạnh đối của hình bình hành, sử dụng tính chất về đường chéo của hình thang cân, hình chữ nhật, tia phân giác của góc, … Tuy nhiên một hướng chứng minh mà ít khi chúng ta nghĩ đến là dùng … tam giác đồng dạng!

Sở dĩ như vậy là do hai tam giác đồng dạng với nhau ta chỉ suy ra các cặp góc tương ứng bằng nhau mà không trực tiếp suy ra các cạnh tương ứng bằng nhau. Tuy nhiên nếu biết kết hợp biến đổi một cách khéo léo, từ tỉ số độ dài các đoạn thẳng hoặc tích độ dài các đoạn thẳng bằng nhau ta có thể dẫn tới độ dài các đoạn thẳng bằng nhau. Sau đây xin nêu một số hướng biến đổi hay gặp.

1. Hướng 1: Để chứng minh $a = b$, ta có thể chứng minh: $\begin{cases} a^2 = cd \\ b^2 = ef \\ cd = ef \end{cases}$

Thí dụ 1 (lớp 8). *Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao BD, CE. Trên các đoạn BD, CE lần lượt lấy các điểm M, N sao cho: $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^0$. Chứng minh rằng: $AM = AN$.*

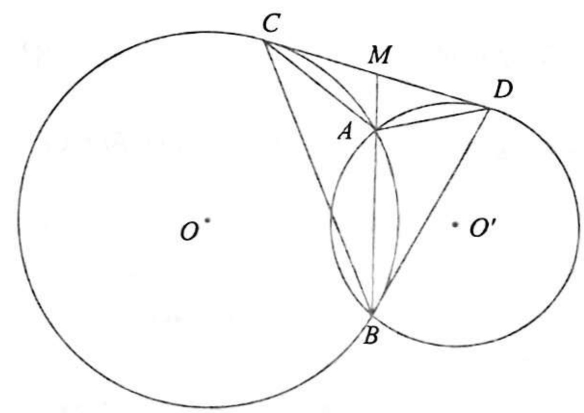
Hướng dẫn. *Sử dụng tam giác đồng dạng.*



- Chứng minh: $AM^2 = AD.AC$, $AN^2 = AE.AB$.
- Chứng minh: $AD.AC = AE.AB$.
- Suy ra: $AM = AN$.

Thí dụ 2 (lớp 9). *Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ tiếp tuyến chung CD của 2 đường tròn $(C \in (O),\ D \in (O'))$. Đường thẳng AB cắt CD tại M. Chứng minh rằng $MC = MD$.*

Hướng dẫn. *Sử dụng tam giác đồng dạng.*

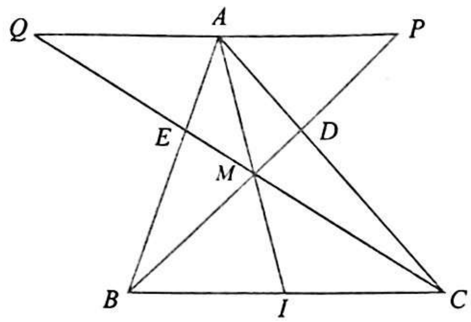


- Chứng minh: $\Delta MDA \sim \Delta MBD$
  $\Rightarrow MD^2 = MA.MB$.
- Chứng minh: $\Delta MCA \sim \Delta MBC$
  $\Rightarrow MC^2 = MA.MB$.
- Suy ra: $MD = MC$.

2. Hướng 2: Để chứng minh $a = b$, ta có thể chứng minh: $\begin{cases} \dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{c} \\ \dfrac{b}{x} = \dfrac{d}{e} \\ \dfrac{b}{c} = \dfrac{d}{e} \end{cases}$

Thí dụ 3 (lớp 8). *Cho tam giác ABC, lấy các điểm D, E lần lượt trên AC, AB sao cho* $\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{DC}$. *BD cắt CE tại M, AM cắt BC tại I. Chứng minh rằng* $IB = IC$.

Hướng dẫn. *Sử dụng tam giác đồng dạng.*



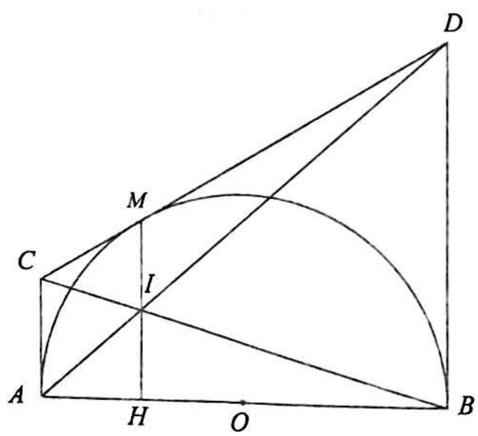
- Qua A dựng đường thẳng $m \parallel BC$, m cắt BD và CE lần lượt tại P và Q.

- Chứng minh $\frac{AQ}{BC} = \frac{AP}{BC}$, từ đó suy ra: $AP = AQ$.

- Chứng minh $\frac{BI}{AP} = \frac{CI}{AQ}$, từ đó suy ra: $BI = CI$.

Thí dụ 4 (lớp 9). *Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn. Từ một điểm M bất kì trên nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax, By lần lượt tại C, D. BC cắt AD tại I, MI cắt AB tại H. Chứng minh rằng* $MI = IH$.

Hướng dẫn. *Sử dụng tam giác đồng dạng.*



- Chứng minh $\frac{CM}{MD} = \frac{CI}{IB}\left(= \frac{CA}{DB}\right)$, từ đó suy ra $MI \parallel BD$.

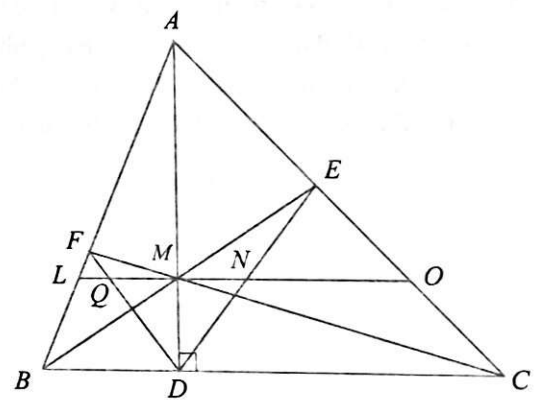
- Chứng minh $\frac{MI}{CA} = \frac{DI}{DA}, \frac{IH}{CA} = \frac{BI}{BC}$

- Chứng minh $\frac{DI}{DA} = \frac{BI}{BC}$, từ đó suy ra $MI = IH$.

3. Hướng 3: Thông qua các biến đổi tỉ số và tích số

Thí dụ 5 (lớp 8). *Cho tam giác ABC có đường cao AD. Trên AD lấy điểm M bất kì, BM cắt AC tại E, CM cắt AB tại F. Đường thẳng qua M song song với BC cắt DF, DE lần lượt tại Q, N. Chứng minh rằng* $MQ = MN$.

Hướng dẫn.



- QN cắt AB, AC lần lượt tại L, O.

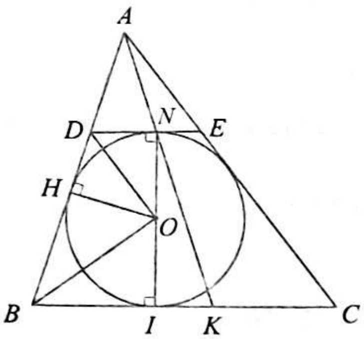
- Chứng minh $\frac{MQ}{ML} = \frac{CD}{CB}$, $\frac{MN}{MO} = \frac{BD}{BC}$.

- Suy ra $\frac{MQ}{ML} : \frac{MN}{MO} = \frac{CD}{BD}$ hay $\frac{MQ}{MN} . \frac{MO}{ML} = \frac{CD}{BD}$.

- Chứng minh $\frac{MO}{ML} = \frac{CD}{BD}$ để suy ra $\frac{MQ}{MN} = 1$ $\Rightarrow MQ = MN$.

Thí dụ 6 (lớp 9). *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O; R). Gọi I là điểm tiếp xúc của (O) và cạnh BC, vẽ đường kính IN của (O), AN cắt BC tại K. Chứng minh rằng* $BI = CK$.

Hướng dẫn. Qua N kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC thứ tự tại D và E.



- Chứng minh: $DN.BI = R^2$.
- Chứng minh: $CI.NE = R^2$, từ đó suy ra:

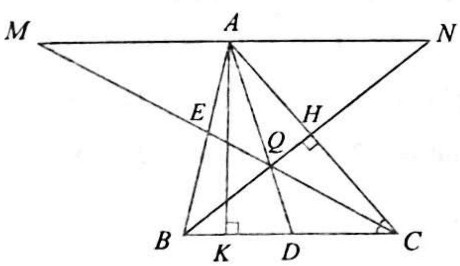
$$\frac{DN}{NE} = \frac{CI}{BI}.$$

- Chứng minh: $\frac{DN}{NE} = \frac{BK}{CK}$.
- Suy ra $\frac{CI}{BI} = \frac{BK}{CK} \Rightarrow \frac{BI+CI}{BI} = \frac{BK+CK}{CK}$

$\Rightarrow BI = CK$.

Thí dụ 7 (lớp 8). *Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AD, đường phân giác CE, đường cao BH đồng quy. Vẽ $AK \perp BC$ ($K \in BC$). Chứng minh rằng: $AH = CK$.*

Hướng dẫn.



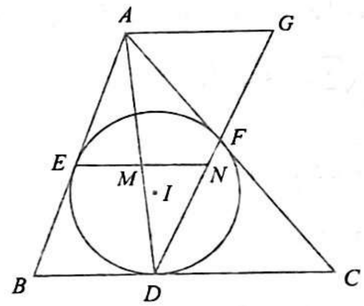
- Qua A vẽ $MN \,//\, BC$ ($M \in CE$, $N \in BH$).
- Chứng minh: $\frac{AN}{BD} = \frac{AM}{CD} \Rightarrow AM = AN$.
- Chứng minh: $\frac{AH}{HC} = \frac{AN}{BC}, \frac{AE}{EB} = \frac{AM}{BC}$, từ đó suy ra: $\frac{AH}{HC} = \frac{AE}{EB}$.
- Chứng minh: $\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC}$ (tính chất đường phân giác) $\Rightarrow AH.BC = AC.HC$ (1).
- Chứng minh: $\Delta CAK \sim \Delta CBH$

$$\Rightarrow CH.CA = CK.CB \quad (2).$$

- Từ (1) và (2) suy ra: $CK = AH$.

Thí dụ 8 (lớp 9). *Cho đường tròn (I) nội tiếp ΔABC. Gọi D, E, F lần lượt là điểm tiếp xúc của các cạnh BC, AB, CA với (I). Đường thẳng qua E song song với BC cắt AD, DF lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng $EM = MN$.*

Hướng dẫn.



- Vẽ $AG \,//\, BC$ ($G \in DF$).
- Chứng minh: $AG = AE$ ($= AF$) (1).
- Chứng minh:

$$MN = \frac{MD}{AD}.AG = \frac{BE}{AB}.AG = \frac{BD}{AB}.AG \quad (2).$$

- Chứng minh: $\Delta ABD \sim \Delta AEM$

$$\Rightarrow EM = \frac{BD}{AB}.AE \quad (3).$$

-Từ (1), (2), (3) suy ra $MN = EM$.

Các bạn hãy vận dụng các biến đổi theo hướng trên để giải các bài tập sau đây nhé:

Bài tập 1 (lớp 8). Cho tam giác ABC, các đường cao BD, CE. Gọi I là trung điểm của BC, qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AI cắt BD tại M và cắt CE tại N. Chứng minh rằng: $AM = AN$.

Bài tập 2 (lớp 9). Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường kính AD của (O), tiếp tuyến của (O) tại D cắt BC tại S. Đường thẳng SO cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng $OM = ON$.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10
THPT CHUYÊN TỈNH BÌNH ĐỊNH NĂM HỌC 2022 – 2023

Bài 1. 1) *Cho biểu thức*

$$P = x^{2022}.\sqrt{x} - 5x^{2020}.\sqrt{x} + x^2 + 2017.$$

Tính giá trị của P khi $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

2) *Cho phương trình* $x^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$, *trong đó b, c là các số nguyên. Biết phương trình có nghiệm* $x_0 = 2+\sqrt{5}$. *Tìm b, c và các nghiệm còn lại của phương trình.*

Lời giải. 1) Ta có: $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow x^3 = \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3$

$= \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3$

$+ 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}.\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)$

$\Leftrightarrow x^3 = 2+\sqrt{5}+\sqrt{5}-2+3.\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}.x$

$\Leftrightarrow x^3 = 2\sqrt{5}+3x \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2\sqrt{5} = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 5x + 2x - 2\sqrt{5} = 0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-5\right) + 2\left(x-\sqrt{5}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{5}\right)\left(x^2+\sqrt{5}.x+2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\sqrt{5}=0 \\ x^2+\sqrt{5}.x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{5} \\ x\in\varnothing\left(\Delta=-3<0\right) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{5}.$

Thay vào biểu thức P sau khi biến đổi thu được:

$$P = x^{2020}.\sqrt{x}\left(x^2-5\right) + x^2 + 2017$$
$$= 0 + \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2017 = 2022.$$

Vậy $P = 2022$ khi $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

2) Vì $x_0 = 2+\sqrt{5}$ là nghiệm của phương trình nên: $\left(2+\sqrt{5}\right)^3 + b.\left(2+\sqrt{5}\right)^2 + c\left(2+\sqrt{5}\right) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2^3 + 3.2^2.\sqrt{5} + 3.2.\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^3$

$+ b\left(4+4\sqrt{5}+5\right) + c\left(2+\sqrt{5}\right) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 8 + 12\sqrt{5} + 30 + 5\sqrt{5} + b\left(9+4\sqrt{5}\right)$

$+ 2c + c.\sqrt{5} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 39 + 17\sqrt{5} + 9b + 4b\sqrt{5} + 2c + c\sqrt{5} = 0$

$\Leftrightarrow (39+9b+2c) + \sqrt{5}.(17+4b+c) = 0$ (1).

Vì b, c là các số nguyên nên từ (1) suy ra:

$\begin{cases} 9b+2c+39=0 \\ 4b+c+17=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9b+2c=-39 \\ 4b+c=-17 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c=-4b-17 \\ 9b+2(-4b-17)=-39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-4b-17 \\ b=-5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c=3 \\ b=-5 \end{cases}.$

Thay $b = -5$; $c = 3$ vào phương trình đã cho ta có:

$x^3 - 5x^2 + 3x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x^3 - x^2) - (4x^2 - 4x) - (x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x-1) - 4x(x-1) - (x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 4x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2-4x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_0=2-\sqrt{5}; x_2=2+\sqrt{5} \end{cases}.$

Vậy phương trình $x^3 - 5x^2 + 3x - 1 = 0$ có 3 nghiệm: $x_0 = 2-\sqrt{5}; x_1 = 1; x_2 = 2+\sqrt{5}$.

Bài 2. 1) *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x(x+y)+y^2-4y+1=0 & (1) \\ y(x+y)^2-2x^2-7y-2=0 & (2) \end{cases}.$$

2) *Cho a, b, c là các số nguyên.*

Đặt $S = (a+2021)^5 + (2b-2022)^5 + (3c+2023)^5$,

$P = a + 2b + 3c + 2022.$

Chứng minh rằng: S chia hết cho 30 khi và chỉ khi P chia hết cho 30.

Lời giải. 1) Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 - 4y + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = -xy - y^2 + 4y - 1.$$

Thay $x^2 = -xy - y^2 + 4y - 1$ vào phương trình (2):

$$y(x+y)^2 - 2(-xy - y^2 + 4y - 1) - 7y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y(x+y)^2 + 2xy + 2y^2 - 15y = 0$$

$$\Leftrightarrow y(x+y)^2 + 2y(x+y) - 15y = 0$$

$$\Leftrightarrow y[(x+y)^2 + 2(x+y) - 15] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ (x+y)^2 + 2(x+y) - 15 = 0 \end{array}\right.$$

Nếu $y = 0$ thì PT(1) trở thành: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ PT vô nghiệm. Do đó: $(x+y)^2 + 2(x+y) - 15 = 0$.

Đặt $t = x + y$, PT trở thành: $t^2 + 2t - 15 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-3)(t+5) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 3; t_2 = -5.$$

+) Nếu $t = 3$ thì $x + y = 3 \Leftrightarrow y = 3 - x$.

Thay $y = 3 - x$ vào PT(1) ta được:

$$3x + (3-x)^2 - 4(3-x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 9 - 6x + x^2 - 12 + 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = -2, \text{ khi đó } y_1 = 2; y_2 = 5.$$

Ta tìm được 2 nghiệm $(x; y)$ là: $(1; 2), (-2; 5)$.

+) Nếu $t = -5$ thì $x + y = -5 \Leftrightarrow y = -x - 5$.

Thay vào phương trình (1) ta được:

$$-5x + (-x-5)^2 - 4(-x-5) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -5x + x^2 + 10x + 25 + 4x + 20 + 1 = 0$$

$\Leftrightarrow x^2 + 9x + 46 = 0$, $\Delta = -103 < 0 \Rightarrow$ PT vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x; y)$ là:

$$(1; 2), (-2; 5).$$

2) Ta có: $P = a + 2b + 3c + 2022$

$$= (a + 2021) + (2b - 2022) + (3c + 2023).$$

Đặt $x = a + 2021$, $y = 2b - 2022$, $z = 3c + 2023$ thì $P = x + y + z$. Khi đó $S = x^5 + y^5 + z^5$.

Xét hiệu: $S - P = (x^5 + y^5 + z^5) - (x + y + z)$

$$= (x^5 - x) + (y^5 - y) + (z^5 - z)$$

(với $x, y, z \in \mathbb{Z}$).

Ta chứng minh: $m^5 - m \,\vdots\, 30, \quad \forall m \in \mathbb{Z}$.

Biến đổi:

$$m^5 - m = m(m^4 - 1)$$
$$= m(m^2 - 1)(m^2 + 1)$$
$$= m(m-1)(m+1)[(m^2 - 4) + 5]$$
$$= m(m-1)(m+1)(m^2 - 4) + 5m(m-1)(m+1)$$
$$= m(m-1)(m+1)(m-2)(m+2) + 5m(m-1)(m+1).$$

Vì $(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)$ là tích của 5 số nguyên liên tiếp nên tích đồng thời chia hết cho 2, cho 3, cho 5 và do các số 2; 3; 5 là nguyên tố cùng nhau đôi một nên tích đó chia hết cho 2.3.5, do đó tích chia hết cho 30.

Tương tự: $(m-1)m(m+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên tích chia hết cho 6, do đó $5(m-1)m(m+1)$ chia hết cho 30.

Vì vậy $m^5 - m \,\vdots\, 30$, suy ra:

$$[(x^5 - x) + (y^5 - y) + (z^5 - z)] \,\vdots\, 30.$$

Từ đó $S - P \,\vdots\, 30$.

Nếu $P \,\vdots\, 30$ thì $S \,\vdots\, 30$ và ngược lại $S \,\vdots\, 30$ thì $P \,\vdots\, 30$.

Vậy S chia hết cho 30 khi và chỉ khi P chia hết cho 30.

Bài 3. *Có tất cả bao nhiêu đa thức $P(x)$ có bậc không lớn hơn 2 với các hệ số nguyên không âm và thỏa mãn điều kiện $P(3) = 100$?*

Lời giải. Đa thức $P(x)$ có bậc không lớn hơn 2 với hệ số nguyên không âm nên có dạng:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

($a, b, c \in \mathbb{N}$ và a, b, c không đồng thời bằng 0).

Vì $P(3) = 100$ nên ta có: $9a + 3b + c = 100$ (1).

Vì a, b, c là các số nguyên không âm nên từ (1) ta có: $0 \le a \le 11 \Rightarrow a$ lấy 12 giá trị khác nhau.

+) Nếu $a = 0$ thì ta có: $3b + c = 100 \Rightarrow 0 \le b \le 33$ $\Rightarrow b$ lấy 34 giá trị khác nhau và c cũng lấy 34 giá trị tương ứng.

+) Nếu $a = 1$ thì $9.1 + 3b + c = 100 \Rightarrow 3b + c = 91$ $\Rightarrow 0 \le b \le 30 \Rightarrow b$ lấy 31 giá trị khác nhau và c cũng lấy 31 giá trị tương ứng.

....

+) Nếu $a = 11$ thì $9.11 + 3b + c = 100 \Rightarrow 3b + c = 1$ $\Rightarrow b = 0$ và $c = 1 \Rightarrow b$ lấy 1 giá trị và c cũng lấy 1 giá trị tương ứng.

Do đó số các bộ giá trị của $(a;\ b;\ c)$ thỏa mãn đề bài là tổng của dãy số:

$34 + 31 + 28 + \ldots + 4 + 1$ (có 12 số hạng)

$$= \frac{(34+1).12}{2} = 210.$$

Vậy ta tìm được 210 đa thức $P(x)$ có bậc không lớn hơn 2, có dạng $P(x) = ax^2 + bx + c$ trong đó a, b, c là các số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $P(3) = 100$.

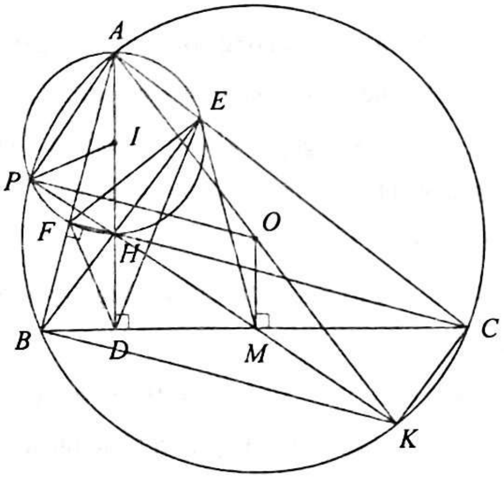
Bài 4. *Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm BC.*

a) *Chứng minh tứ giác DMEF nội tiếp;*

b) *Đường tròn tâm I đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Chứng minh bốn điểm P, H, M, K thẳng hàng;*

c) *Các tiếp tuyến tại A và P của đường tròn (I) cắt nhau tại N. Chứng minh ba đường thẳng MN, EF, AH đồng quy.*

Lời giải. a)



Ta có: $AD \perp BC \Rightarrow \widehat{BDH} = 90^0$;

$CF \perp AB \Rightarrow \widehat{BFH} = 90^0$.

Do đó $\widehat{BDH} + \widehat{BFH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $BDHF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DFH} = \widehat{DBH}$ (cùng chắn cung DH) (1).

Chứng minh tương tự, tứ giác $AEHF$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EFH} = \widehat{EAH}$ (2).

Tứ giác $ABDE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EAH} = \widehat{DBH}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{DFH} = \widehat{EFH} \Rightarrow FH$ là phân giác góc $\widehat{EFD}$

$\Rightarrow \widehat{DFE} = 2\widehat{DFH} = 2\widehat{DBH} = 2\widehat{MBE}$.

Chứng minh tương tự ta có H là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác DEF.

Tam giác BEC vuông tại E có EM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC nên

$$EM = MB = MC$$

$\Rightarrow \Delta MBE$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MBE} = \widehat{MEB}$.

ΔMBE cho ta: $\widehat{MBE} + \widehat{MEB} + \widehat{BME} = 180^0$

$\Rightarrow 2\widehat{MBE} + \widehat{BME} = 180^0$ hay $\widehat{DFE} + \widehat{BME} = 180^0$.

Vậy tứ giác $DMEF$ nội tiếp.

Lưu ý: Đường tròn $(DMEF)$ là đường tròn Euler của ΔABC.

b) Ta có: $\widehat{APK} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow KP \perp AP$ (4).

$\widehat{APH} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (I)) $\Rightarrow HP \perp AP$ (5).

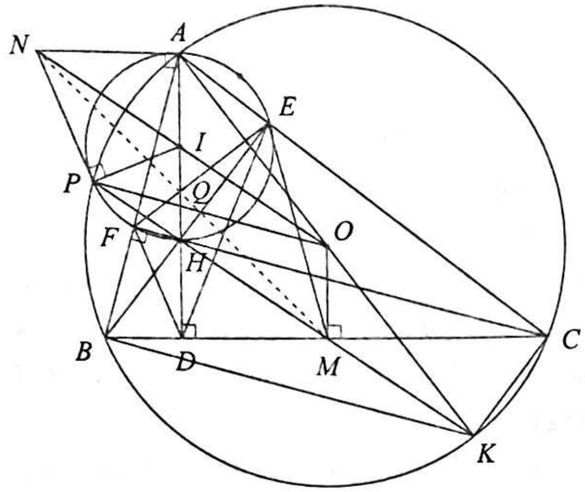
Từ (4), (5) $\Rightarrow KP$ và HP trùng nhau, do đó P, H, K thẳng hàng (6).

Mặt khác, $\widehat{ABK} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow KB \perp AB$, vì $CH \perp AB$ nên $BK \parallel CH$.

Chứng minh tương tự ta có: $CK \parallel BH$.

Vậy tứ giác $BHCK$ là hình bình hành, nên hai đường chéo BC và HK cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Vì M là trung điểm của BC nên M là trung điểm HK. Vậy từ (6) suy ra các điểm P, H, M, K thẳng hàng.

c)



Gọi Q là giao điểm của AH và EF. Ta chứng minh: M, Q, N thẳng hàng.

Ta có: $NA = NP$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau của (I)), $OA = OP$ (bán kính của (O)), do đó ON là đường trung trực của $AP \Rightarrow ON \perp AP$. Mặt khác, OI là đường nối tâm của hai đường tròn (O) và (I) với dây chung là AP nên $OI \perp AP$.

Do đó O, I, N thẳng hàng.

Tương tự như trên, ta chứng minh được EH là phân giác góc FED.

Vì $EA \perp EH$ nên EA là phân giác ngoài tại E của góc FED. Theo tính chất đường phân giác trong và ngoài của tam giác QED ta có:

$$\frac{HQ}{HD} = \frac{AQ}{AD}\left(= \frac{EQ}{ED}\right) \Rightarrow \frac{IH - IQ}{ID - IH} = \frac{IQ + IA}{IA + ID}$$

$\Rightarrow (IH - IQ)(IA + ID) = (ID - IH)(IQ + IA)$ (7).

Vì I là trung điểm của AH nên $IA = IH$, do đó:

$$(7) \Leftrightarrow (IA - IQ)(IA + ID) = (ID - IA)(IQ + IA)$$

$$\Leftrightarrow IA^2 + IA.ID - IA.IQ - ID.IQ = ID.IQ + IA.ID - IA.IQ - IA^2$$

$$\Leftrightarrow IA^2 + IA.ID - IA.IQ - ID.IQ - ID.IQ - IA.ID + IA.IQ + IA^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2IA^2 - 2ID.IQ = 0 \Leftrightarrow IA^2 = ID.IQ$$

$$\Leftrightarrow IA.IH = ID.IQ \Leftrightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{IQ}{IH}$$

$$\Rightarrow \frac{IA}{ID - IA} = \frac{IQ}{IH - IQ} \Leftrightarrow \frac{IA}{HD} = \frac{IQ}{HQ} \quad (8).$$

Mặt khác, OM là đường trung bình của ΔAHK nên $OM \mathbin{//} AH$ và $OM = \dfrac{AH}{2} = AI = IH$

$\Rightarrow$ tứ giác $OIHM$ là hình bình hành

$\Rightarrow OI \mathbin{//} HM \Rightarrow \widehat{AIN} = \widehat{DHM}$ (so le ngoài).

Ta lại có NA là tiếp tuyến của (I) tại A và AD là đường cao của ΔABC nên $\widehat{NAI} = \widehat{MDH} = 90^0$.

Do đó $\Delta NAI \sim \Delta MDH$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{IA}{HD} = \dfrac{NI}{MH}$ (9).

Từ (8), (9) suy ra: $\dfrac{IQ}{HQ} = \dfrac{NI}{MH}$ (10).

Vì $NI \mathbin{//} HM$ nên $\widehat{NIQ} = \widehat{MHQ}$ (so le trong) (11).

Từ (10), (11) suy ra: $\Delta NIQ \sim \Delta MHQ$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{IQN} = \widehat{HQM}.$$

Ta lại có: $\widehat{HQM} + \widehat{AQM} = 180^0$ (kề bù) nên $\widehat{IQN} + \widehat{AQM} = 180^0 \Rightarrow M, Q, N$ thẳng hàng.

Vậy ba đường thẳng MN, EF, AH đồng quy.

Bài 5. *Cho 2 số x, y thỏa mãn:*

$$\begin{cases} x + y \le 2 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \quad (1) \end{cases}.$$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = x^2 + y^2 - xy.$$

Lời giải. • Biến đổi:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + xy = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - xy + 2xy = 3$$

$$\Rightarrow T + 2xy = 3 \Leftrightarrow T = 3 - 2xy.$$

Từ $x^2 + y^2 + xy = 3 \Leftrightarrow (x + y)^2 - xy = 3$

$$\Leftrightarrow -xy = 3 - (x + y)^2 \le 3$$

suy ra:

$$3 - 2xy \le 3 + 2.3 = 9 \Leftrightarrow T \le 9.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$.

Thay vào (1) ta có:

$$x^2 + x^2 - x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y = \mp\sqrt{3}.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TỈNH HƯNG YÊN
NĂM HỌC 2022 - 2023
MÔN TOÁN CHUYÊN

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I (*2,0 điểm*). Cho biểu thức

$$A=\left(\frac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}+\frac{2}{x-\sqrt{x}}\right):\frac{1}{\sqrt{x}-1}.$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của x để $A=3$.

Câu II (*2,0 điểm*)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=(m+1)x-m+5$. Tìm giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ sao cho $x_1;x_2$ là các số nguyên.

2) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình

$$x^4-2x^3+x^2-16y^2+12x-16y+4=0.$$

Câu III (*2,0 điểm*).

1) Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{3x-2}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}=1.$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3+y^3+xy=2x+4y-1\\ xy+x+2y=1\end{cases}.$$

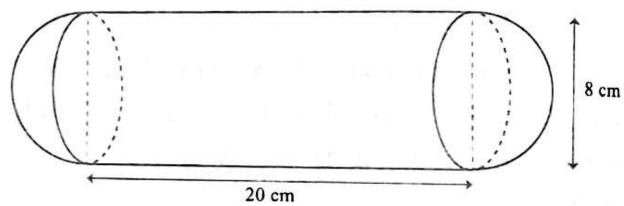
Câu IV (*3,0 điểm*).

1) Cho ΔABC nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC.

a) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp, từ đó suy ra $KF.KE=KB.KC$.

b) Đường thẳng AK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M (M khác A). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh ba điểm M, H, I thẳng hàng.

2) Một chi tiết máy gồm hai nửa hình cầu bằng nhau và một hình trụ (hình vẽ). Hãy tính thể tích của chi tiết máy đó theo các kích thước cho trên hình vẽ.



Câu V (*3,0 điểm*). Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $4xy+2yz+3xz=24$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+9}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+16}}.$$

PHẠM TRUNG KIÊN

(GV THCS Hồ Tùng Mậu, Ân Thi, Hưng Yên)

Giới thiệu

****

☞ Do đó $\max T=9$ khi

$$(x;y)\in\left\{\left(\sqrt{3};-\sqrt{3}\right),\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)\right\}.$$

• Biến đổi:

$$(1)\Leftrightarrow x^2+y^2+xy=3$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2+3xy=3$$
$$\Leftrightarrow xy=\frac{3-(x-y)^2}{3}=1-\frac{(x-y)^2}{3}\le 1.$$

Suy ra: $3-2xy\ge 3-2.1=1 \Leftrightarrow T\ge 1$.

Dấu "=" xảy ra khi $(x-y)^2=0 \Leftrightarrow x=y$.

Thay vào (1) ta được:

$$x^2+x^2+x^2=3$$
$$\Leftrightarrow x^2=1$$
$$\Leftrightarrow x=\pm 1 \Rightarrow y=\pm 1$$

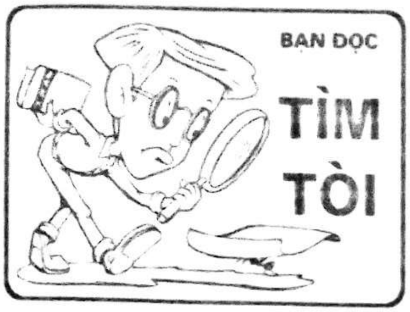
thỏa mãn điều kiện $x+y\le 2$.

Do đó $\min T=1$ khi $(x;y)\in\{(1;1),(-1;-1)\}$.

BÙI VĂN CHI

(21/2 Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Giới thiệu



TRAO ĐỔI THÊM VỀ ĐIỂM RƠI TRONG BÀI TOÁN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BÀI TOÁN CỰC TRỊ

PHAN THỊ BẠCH HƯỜNG
(GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An)

Điểm rơi trong các bài toán bất đẳng thức, cực trị là mấu chốt cho cách tìm lời giải cho bài toán đó. Việc dự đoán điểm rơi đúng khi nó thỏa mãn yêu cầu bài ra. Có nhiều bài toán từ giả thiết ta đã dự đoán được điểm rơi một cách dễ dàng và sử dụng điểm rơi đó như thế nào để xử lý bài toán cũng là "mẹo" của người giải toán. Sau đây chúng tôi xin đưa ra một số bài toán xử lý điểm rơi theo một khía cạnh mà khi giải toán chúng tôi đã vận dụng được.

Bài 1 (Bài T3/529- Tạp chí TH&TT).

Cho $x \ge 1;\ y \ge 2;\ z \ge 3$. *Chứng minh*

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + 25 \ge 7x + 8y + 9z.$$

Phân tích. Dự đoán điểm rơi tại $x = 1;\ y = 2;\ z = 3$ nên các bất đẳng thức nhỏ có thể vận dụng là:

$$x - 1 \ge 0;\ y - 2 \ge 0;\ z - 3 \ge 0.$$

Từ các bất đẳng thức này ta có thể tạo ra các bất đẳng thức dạng tích, thương khác như

$$(x-1)(y-2) \ge 0;\ (x-1)(z-3) \ge 0;\ (x-1)^2 \ge 0 \ldots.$$

Trong bài toán trên để có 25 ta phải dựa vào các bất đẳng thức tích nào để tổng lại xuất hiện số 25. Từ đó ta lập được bất đẳng thức sau thông qua tổng các bất đẳng thức trên:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 + (x-1)(y-2) + (x-1)(z-3) + (y-2)(z-3) \ge 0$$

hay

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + 25 \ge 7x + 8y + 9z.$$

Bài 2. *Cho* a, b, c *không âm và* $a + b + c = 1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \sqrt{a^2 + a} + \sqrt{b^2 + b} + \sqrt{c^2 + c}.$$

Phân tích. Từ giả thiết ta có $0 \le a \le 1; 0 \le b \le 1; 0 \le c \le 1$ nên các bất đẳng thức được vận dụng là: $a^2 \le a;\ b^2 \le b;\ c^2 \le c$. Suy ra:

$$P \ge \sqrt{a^2 + a^2} + \sqrt{b^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + c^2}$$

$$\Leftrightarrow P \ge \sqrt{2}(a + b + c) \quad \text{hay} \quad P \ge \sqrt{2}.$$

Bài 3 (Đề thi vào lớp 10 THPT tỉnh Hà Tĩnh). *Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn* $a + b + c = 2021$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:* $P = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}$.

Phân tích. Bài toán này có nhiều cách giải nhưng ở đây tôi muốn đưa ra một hướng tìm lời giải cho bài toán từ điểm rơi.

Ta dự đoán điểm rơi tại $a = b = 0$, $c = 2021$ (hoặc các hoán vị của a, b, c). Từ giả thiết ta ta có:

$$0 \le a + b \le 2021; 0 \le b + c \le 2021;\ 0 \le c + a \le 2021.$$

Khi đó ta đánh giá được:

$$0 \le \sqrt{a+b} \le \sqrt{2021};$$
$$0 \le \sqrt{a+c} \le \sqrt{2021};$$
$$0 \le \sqrt{b+c} \le \sqrt{2021}.$$

Nên ta có: $$\begin{cases} \sqrt{a+b}\left(\sqrt{a+b} - \sqrt{2021}\right) \le 0 \\ \sqrt{a+c}\left(\sqrt{a+c} - \sqrt{2021}\right) \le 0 \\ \sqrt{b+c}\left(\sqrt{b+c} - \sqrt{2021}\right) \le 0 \end{cases}$$

hay $\begin{cases}\sqrt{a+b} \ge \dfrac{a+b}{\sqrt{2021}} \\ \sqrt{a+c} \ge \dfrac{a+c}{\sqrt{2021}}. \\ \sqrt{b+c} \ge \dfrac{b+c}{\sqrt{2021}}\end{cases}$

Do đó: $P = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \ge \dfrac{2(a+b+c)}{\sqrt{2021}}$

mà $a + b + c = 2021$ nên $P \ge 2\sqrt{2021}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = 0, c = 2021$.

Vậy $\min P = 2\sqrt{2021}$ khi $a = b = 0, c = 2021$.

Từ cách giải bài toán trên ta liên hệ đến các bài toán tương tự có chứa căn sau:

Bài 4. *Cho a, b, c không âm thỏa mãn a + b + c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$A = \sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1}.$$

Phân tích. Tương tự bài toán trên ta dự đoán điểm rơi tại $a = b = 0$ và $c = 1$.

Từ giả thiết ta có: $0 \le a \le 1; 0 \le b \le 1; 0 \le c \le 1$.

Khi đó ta có đánh giá sau:

$$1 \le \sqrt{3a+1} \le 2; 1 \le \sqrt{3b+1} \le 2; 1 \le \sqrt{3c+1} \le 2.$$

Do đó $\begin{cases}\left(\sqrt{3a+1}-1\right)\left(\sqrt{3a+1}-2\right) \le 0 \\ \left(\sqrt{3b+1}-1\right)\left(\sqrt{3b+1}-2\right) \le 0 \\ \left(\sqrt{3c+1}-1\right)\left(\sqrt{3c+1}-2\right) \le 0\end{cases}$

hay $\begin{cases}3\sqrt{3a+1} \ge 3a+3 \\ 3\sqrt{3b+1} \ge 3b+3 \\ 3\sqrt{3c+1} \ge 3c+3\end{cases} \Rightarrow 3A \ge 3(a+b+c)+9.$

Do đó: $A \ge 4$ (do $a + b + c = 1$).

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = 0$ và $c = 1$.

Vậy $\min A = 4$ khi $a = b = 0$ và $c = 1$.

Bài 5. *Cho a, b, c không âm và a + b + c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:*

$$A = \sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4}.$$

Phân tích. Tương tự bài 4 ta xét

$$\left(\sqrt{5a+4}-2\right)\left(\sqrt{5a+4}-3\right) \le 0$$

hay $\sqrt{5a+4} \ge a+2$, từ đó ta có:

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4} \\ &\ge (a+2)+(b+2)+(c+2) \\ &= a+b+c+6.\end{aligned}$$

Do đó $A \ge 7$ (vì $a + b + c = 1$).

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = 0, c = 1$.

Vậy $\min A = 7$ khi $a = b = 0, c = 1$.

Bài 6. *Cho x, y, z không âm, x + y + z = 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$A = \sqrt{x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{3z+1}.$$

Phân tích. Dự đoán điểm rơi $x = 5, y = 0, z = 0$.

Từ giả thiết ta có $0 \le x \le 5; 0 \le y \le 5; 0 \le z \le 5$.

Ta có: $\begin{cases}\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{6}\right) \le 0 \\ \left(\sqrt{2y+1}-1\right)\left(\sqrt{2y+1}-\sqrt{11}\right) \le 0 \\ \left(\sqrt{3z+1}-1\right)\left(\sqrt{3z+1}-4\right) \le 0\end{cases}$

hay $\begin{cases}\sqrt{x+1} \ge \dfrac{x}{1+\sqrt{6}}+1 \\ \sqrt{2y+1} \ge \dfrac{2y}{1+\sqrt{11}}+1 \\ \sqrt{3z+1} \ge \dfrac{3z}{5}+1\end{cases}$

$$A \ge \frac{1}{1+\sqrt{6}}(x+y+z) + \left(\frac{2}{1+\sqrt{11}} - \frac{1}{1+\sqrt{6}}\right)y + \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{1+\sqrt{6}}\right)z + 3 \ge \frac{1}{1+\sqrt{6}}(x+y+z)+3$$

hay $A \ge \dfrac{5}{1+\sqrt{6}} + 3 \Leftrightarrow A \ge 2+\sqrt{6}$

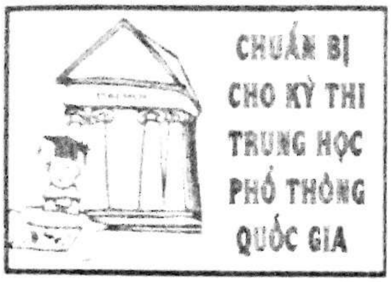
(do $x + y + z = 5$ và $y \ge 0; z \ge 0$).

Dấu "=" xảy ra khi $x = 5, y = z = 0$.

Vậy $\min A = 2+\sqrt{6}$ khi $x = 5, y = z = 0$.

Tương tự các bạn hãy giải bài tập sau:

Bài 7. *Cho x, y, z không âm và x + y + z = 4. Tìm min của* $A = \sqrt{2x+1} + \sqrt{3y+1} + \sqrt{4z+1}.$



SỬ DỤNG HÀM ĐẶC TRƯNG ĐỂ GIẢI MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CHỦ ĐỀ MŨ VÀ LÔGARIT

NGUYỄN CÔNG CHUẨN
(GV THPT chuyên, Đại học Vinh, Nghệ An)

Trong kì thi tốt nghiệp THPT Quốc gia và thi học chọn sinh giỏi tỉnh những năm gần đây thường xuất hiện các câu phân loại rơi vào chủ đề mũ và lôgarit. Các em thường gặp rất nhiều khó khăn khi giải dạng toán này. Để giúp các em ôn tập và chuẩn bị tốt cho kì thi sắp tới, bài viết này xin giới thiệu đến các em phương pháp thường sử dụng để giải dạng toán này đó là biến đổi về hàm đặc trưng. Đi theo phương pháp này ta tiến hành qua các bước sau:

- Biến đổi phương trình (bất phương trình) về dạng $f(u)=f(v)$ $\left(f(u)\geq f(v)\right)$ với $u,v\in(a;b)$.

- Chứng minh hàm số $y=f(t)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$.

- Suy ra $u=v$ ($u\geq v$ hoặc $u\leq v$). Từ giả thiết này ta sẽ đưa bài toán về dạng quen thuộc để giải.

Sau đây là một số dạng toán thường gặp:

1. TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Thí dụ 1. *Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện $e^{x^2-xy-2y^2}=\dfrac{3y}{x+y}$. Giá trị biểu thức $P=\log_3\left(\dfrac{x+y}{4x+y}\right)$ là*

A. 3 　　**B.** 1
C. -1 　　**D.** -3.

Lời giải. Ta đưa giả thiết về dạng

$$e^{(x+y)^2-3y(x+y)}=\frac{3y(x+y)}{(x+y)^2}.$$

Đặt $\begin{cases}u=(x+y)^2\\ v=3y(x+y)\end{cases}$. Vì $x,y>0\Rightarrow u,v>0$.

Ta thu được: $e^{u-v}=\dfrac{v}{u}\Leftrightarrow ue^u=ve^v$ (1).

Xét hàm $f(t)=te^t$ trên $(0;+\infty)$. Ta có:

$$f'(t)=e^t+te^t>0,\forall t\in(0;+\infty).$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Từ (1) ta được:

$$u=v\Leftrightarrow x^2-xy-2y^2=0$$
$$\Leftrightarrow(x+y)(x-2y)=0\Leftrightarrow x=2y.$$

Vậy $P=\log_3\left(\dfrac{3y}{9y}\right)=\log_3\dfrac{1}{3}=-1$. Chọn **C.**

Thí dụ 2. *Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $5^{x^2+1}+x^2+2x-1=25^{1-x}$. Giá trị biểu thức $P=\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$ là*

A. 4 　　**B.** 5
C. 7 　　**D.** 6.

Lời giải. Ta biến đổi phương trình đã cho về dạng

$$5^{x^2+1}+x^2+1=5^{2-2x}+2-2x \text{ (2)}.$$

Xét hàm $f(t)=5^t+t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có:

$$f'(t)=5^t\ln5+1>0,\forall t\in\mathbb{R}.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ (2) ta được:

$$x^2+1=2-2x\Leftrightarrow x^2+2x-1=0 \quad (3).$$

Suy ra x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (3).

Theo định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$.

Suy ra: $P = \dfrac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1^2 x_2^2} = 6$. Chọn **D**.

2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ, LÔGARIT

Thí dụ 3. *Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn*

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$$

A. 3 **B.** 2

C. 4 **D.** 8.

Lời giải. Ta đưa phương trình đã cho về dạng

$$3(x+y) + \log_{\sqrt{3}} 3(x+y)$$
$$= x^2 + y^2 + xy + 2 + \log_{\sqrt{3}}\left(x^2 + y^2 + xy + 2\right) \ (4).$$

Xét hàm $f(t) = t + \log_{\sqrt{3}} t$ trên $(0;+\infty)$. Ta có:

$$f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln\sqrt{3}} > 0,\ \forall t \in (0;+\infty).$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó từ (4) ta được:

$$3(x+y) = x^2 + y^2 + xy + 2$$
$$\Leftrightarrow x^2 + (y-3)x + y^2 - 3y + 2 = 0 \quad (5).$$

Phương trình bậc hai ẩn x có nghiệm khi

$$\Delta = (y-3)^2 - 4\left(y^2 - 3y + 2\right) = -3y^2 + 6y + 1 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3-2\sqrt{3}}{3} \le y \le \frac{3+2\sqrt{3}}{3}.$$

Vì y nguyên dương nên $y \in \{1;2\}$.

Với $y = 1$ thay vào phương trình (5) ta tìm được $x = 2$.

Với $y = 2$ thay vào phương trình (5) ta tìm được $x = 1$. Chọn **B**.

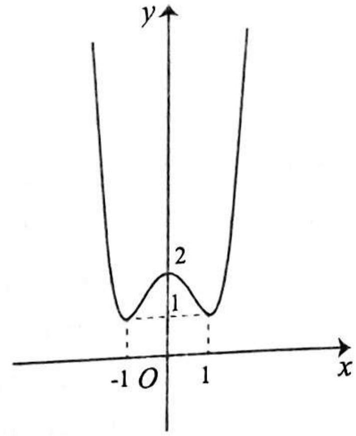
Thí dụ 4. *Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình*

$$e^{(f(x)-1)(f(x)-2)} = \log_{f^2(x)+1}\left(3f(x) - 1\right)$$

có bao nhiêu nghiệm?

A. 4 **B.** 5

C. 2 **D.** 3.



Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$e^{f^2(x)+1-(3f(x)-1)} = \frac{\ln\left(3f(x)-1\right)}{\ln\left(f^2(x)+1\right)}.$$

Từ đồ thị ta suy ra $f(x) \ge 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\begin{cases} u = f^2(x) + 1 \\ v = 3f(x) - 1 \end{cases} (u, v \ge 2)$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$e^{u-v} = \frac{\ln v}{\ln u} \Leftrightarrow e^u \ln u = e^v \ln v \ (6).$$

Xét hàm $f(t) = e^t \ln t$ trên $[2;+\infty)$. Ta có:

$$f'(t) = e^t \ln t + \frac{e^t}{t} > 0, \forall t \in [2;+\infty).$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[2;+\infty)$. Do đó: $(6) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow f^2(x) - 3f(x) + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 1 \\ f(x) = 2 \end{array}\right..$$

Từ đồ thị suy ra phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt. Chọn **B**.

3. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Thí dụ 5. *Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của*

$m \in (-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm ?

A. 20 **B.** 19

C. 9 **D.** 21.

Lời giải. Điều kiện $x > m.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$5^x + x = 5^{\log_5(x-m)} + \log_5(x-m) \quad (7).$$

Xét hàm $f(t) = 5^t + t$. Ta có hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (7) ta được:

$$x = \log_5(x-m) \Leftrightarrow x - 5^x = m. \ (8)$$

Xét hàm $g(x) = x - 5^x$ trên $\mathbb{R}$ có:

$$g'(x) = 1 - 5^x \ln 5;$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right) = a.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		a		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$g(a)$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra điều kiện để phương trình có nghiệm là $m \le g(a) \approx -0{,}92$.

Kết hợp với m nguyên thuộc khoảng $(-20;20)$ ta được $m \in \{-19;-18;...;-1\}$. Chọn **B**.

Thí dụ 6. *Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$?*

A. 3 **B.** 5

C. 4 **D.** 6.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = 3x + 5y - 10 \\ v = x + 3y - 9 \end{cases}$

$$\Rightarrow v - u = 1 - 2x - 2y.$$

Từ giả thiết thứ nhất ta được:

$$e^u - e^v = v - u \Leftrightarrow e^u + u = e^v + v \quad (9).$$

Xét hàm $f(t) = e^t + t$. Ta có hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (9) ta được: $u = v \Leftrightarrow 2y = 1 - 2x.$

Thế vào phương trình thứ hai ta được

$$\log_5^2(x+5) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$$

(điều kiện $x > -5$).

Đặt $t = \log_5(x+5)$, phương trình trên trở thành:

$$t^2 - (m+6)t + m^2 + 9 = 0 \quad (10).$$

Bài toán quy về tìm m để phương trình (10) có nghiệm. Phương trình (10) có nghiệm khi

$$\Delta = -3m^2 + 12m \ge 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m \le 0 \Leftrightarrow m \in [0;4].$$

Vì m nhận giá trị nguyên dương nên $m \in \{1;2;3;4\}$. Chọn **C**.

4. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ, LÔGARIT

Thí dụ 7. *Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình*

$$2023^{2x^2-4x+9} - 2023^{x^2+5x+1} - (x-1)(8-x) < 0.$$

A.7 **B.** 8

C. 6 **D.** 5.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = 2x^2 - 4x + 9 \\ v = x^2 + 5x + 1 \end{cases}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2023^u + u < 2023^v + v \quad (11).$$

Xét hàm $f(t) = 2023^t + t.$ Ta có hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (11) ta được:

$$u < v \Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 8.$$

Vì x nhận giá trị nguyên nên $x \in \{2;3;4;5;6;7\}$. Chọn **C**.

Thí dụ 8. *Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình* $\log_2\left(x\sqrt{x^2+3}-x^2\right) \le \sqrt{x^2+3}-2x$.

A. 2 B. 1

C. 3 D. Vô số.

Lời giải. Điều kiện:

$$x\sqrt{x^2+3}-x^2>0 \Leftrightarrow x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{x^2+3}+x}>0 \Leftrightarrow x>0.$$

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2\left(\frac{3x}{\sqrt{x^2+3}+x}\right) \le \sqrt{x^2+3}-2x$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x)+3x \le \log_2\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)+\sqrt{x^2+3}+x.$$

Xét hàm $f(t)=\log_2 t+t$ trên $(0;+\infty)$. Ta có:

$$f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+t>0, \forall t \in (0;+\infty).$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó bất phương trình trên tương đương với

$$3x \le \sqrt{x^2+3}+x \Leftrightarrow 2x \le \sqrt{x^2+3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 \le 1 \Leftrightarrow x \in [-1;1].$$

Đối chiếu với điều kiện và yêu cầu đề bài suy ra $x=1$. Chọn **B**.

5. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Thí dụ 9. *Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1} \ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+6x+4y$ bằng*

A. $\frac{65}{8}$ B. $\frac{33}{4}$

C. $\frac{49}{8}$ D. $\frac{57}{8}$

Lời giải. Giả thiết bài toán tương đương với

$$2y.2^{2y} \ge (3-2x).2^{3-2x} \ (12).$$

Nếu $y \ge 0, x \ge \frac{3}{2}$ thì (12) được thỏa mãn. Khi đó:

$$P=x^2+y^2+6x+4y>\frac{45}{4} \quad (13).$$

Nếu $y \ge 0, 0 \le x < \frac{3}{2}$ ta xét hàm hàm $f(t)=t.2^t$ trên $[0;+\infty)$. Ta có:

$$f'(t)=2^t+t.2^t.\ln 2>0, \forall t \in [0;+\infty).$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Do đó

$$(12) \Leftrightarrow 2y \ge 3-2x \Leftrightarrow (x+3)+(y+2) \ge \frac{13}{2}.$$

Ta có:

$$P=x^2+y^2+6x+4y=(x+3)^2+(y+2)^2-13$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y+2)^2=P+13.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$P+13=(x+3)^2+(y+2)^2$$

$$\ge \frac{1}{2}\left[(x+3)+(y+2)\right]^2 \ge \frac{169}{8}$$

$$\Leftrightarrow P \ge \frac{65}{8} \quad (14).$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{5}{4} \end{cases}$.

Từ (13) và (14) suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{65}{8}$. Chọn **A**.

Thí dụ 10. *Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2022^{2(x^2-y+1)}=\frac{2x+y}{(x+1)^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=2y-x$.*

A. $P_{\min}=\frac{1}{4}$ B. $P_{\min}=\frac{1}{2}$

C. $P_{\min}=\frac{7}{8}$ D. $P_{\min}=\frac{15}{8}$.

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$2022^{(2x^2+4x+2)-(4x+2y)}=\frac{4x+2y}{2x^2+4x+2} \quad (15).$$

Đặt $\begin{cases}u=2x^2+4x+2\\ v=4x+2y\end{cases}(u,v>0)$.

Phương trình (15) trở thành:

$$2022^{u-v}=\frac{v}{u}\Leftrightarrow u.2022^u=v.2022^v \quad (16).$$

Xét hàm $f(t)=t.2022^t$ trên $(0;+\infty)$. Ta có:

$$f'(t)=2022^t+t.2022^t.\ln 2022>0,\forall t\in(0;+\infty).$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó từ (15) ta được:

$$u=v\Leftrightarrow y=x^2+1.$$

Ta có: $P=2y-x=2x^2-x+2$

$$=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}\geq\frac{15}{8}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\ y=\frac{17}{16}\end{cases}$. Chọn **D**.

SAU ĐÂY LÀ MỘT SỐ BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI TƯƠNG TỰ

Bài 1. Tính tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình

$$\log_2(x^2+3)-\log_2 x+x^2-4x+1\leq 0$$

A. 4 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 3.

Bài 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để phương trình

$$3^x+4=3m+\log_{\sqrt[4]{3}}\left(3(5x+1)+9m\right)$$

có nghiệm?

A. 2023 **B.** 2024 **C.** 2025 **D.** 2020.

Bài 3. Có bao nhiêu cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn đồng thời các điều kiện x,y thuộc đoạn $[-2;10]$ và $2^x+y\leq\log_2(x-y)$?

A. 7 **B.** 8 **C.** 6 **D.** 5.

Bài 4. Biết phương trình

$$\log_2\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

có một nghiệm dạng $x=a+b\sqrt{2}$ trong đó a,b là các số nguyên. Tính $2a-b$.

A. 3 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 5.

Bài 5. Xét các số thực dương x,y thỏa mãn

$$\log_3\frac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$.

A. $\frac{4\sqrt{3}+4}{3}$ **B.** $\frac{4\sqrt{3}-4}{3}$

C. $\frac{4\sqrt{3}-4}{9}$ **D.** $\frac{4\sqrt{3}+4}{9}$.

Bài 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2023;2023)$ để phương trình

$$e^{x-m}=\ln x+m$$

có nghiệm thực?

A. 2019 **B.** 2022 **C.** 2020 **D.** 2021.

Bài 7. Xét các số thực dương x,y thỏa mãn

$$4(x^2+y^2+4)+\log_2\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)=(xy-4)^2.$$

Khi $x+4y$ đạt giá trị nhỏ nhất, $\frac{x}{y}$ bằng

A. 2 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 4 **D.** $\frac{1}{4}$.

Bài 8. Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $x+3y.3^{x+3y-4}\geq 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+5x+4y$ bằng

A. $\frac{43}{8}$ **B.** $\frac{33}{4}$ **C.** $\frac{49}{8}$ **D.** $\frac{57}{8}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Đề thi tốt nghiệp THPT Quốc gia những năm gần đây.

- Đề thi thử của trường THPT chuyên Đại học Vinh và các trường THPT trên toàn quốc.

- Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 của một số tỉnh.

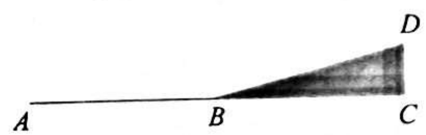
HƯỚNG DẪN HỌC SINH LỚP 9 GIẢI MỘT SỐ DẠNG TOÁN THỰC TẾ TRONG ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT

VŨ THỊ THÚY (GV THPT Nguyễn Trung Ngạn, Hưng Yên)
PHẠM TRUNG KIÊN (GV THCS Hồ Tùng Mậu, Ân Thi, Hưng Yên)

Dạy học theo định hướng phát triển năng lực và phẩm chất học sinh đang là xu thế của Việt Nam và thế giới. Dạy học môn Toán cũng vậy, qua nội dung kiến thức này hoặc chuyên đề Toán học kia học sinh sẽ giải quyết được cụ thể bài toán nào trong thực tế cuộc sống hoặc trong khoa học. Vì vậy, trong các đề thi vào lớp 10 THPT, THPT chuyên hoặc đề thi học sinh giỏi Toán lớp 9 THCS ở một số tỉnh, thành phố cũng có đưa vào các bài toán thực tế. Không ít học sinh lúng túng không biết vận dụng kiến thức nào để giải quyết các bài toán đó. Trong bài viết này chúng tôi xin trình bày một số dạng toán thực tế hay gặp và cách giải chúng.

DẠNG 1. Một số bài toán thực tế về hệ thức lượng trong tam giác vuông

Thí dụ 1. *Buổi sáng hàng ngày, bạn An đi bộ từ nhà (ở vị trí A) đến trường (ở vị trí D), giai đoạn đầu đi trên đoạn đường thẳng AB = 400 mét với vận tốc 4 km/giờ, sau đó đi đoạn đường dốc BD với vận tốc 3 km/giờ. Hỏi bạn An mất thời gian bao nhiêu phút để đi từ nhà đến trường? Biết rằng đoạn đường dốc hợp với phương nằm ngang một góc* $\widehat{CBD} = 3^0 50'$ *và chiều cao con dốc CD = 10 mét (CD vuông góc với BC).*



Lời giải. Vì tam giác BCD vuông tại C nên

$$BD = \frac{CD}{\sin\widehat{CBD}} = \frac{10}{\sin 3^0 50'} \approx 150\ (\text{m}) = 0{,}15\ (\text{km}).$$

Thời gian đi trên đoạn đường dốc BD là:

$$\frac{0{,}15}{3} = \frac{1}{20}\,(\text{h}) = 3 \text{ phút}.$$

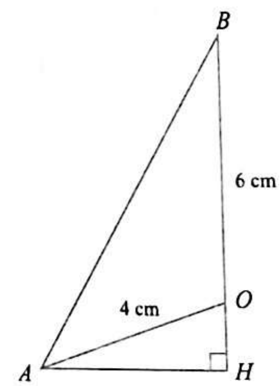
Thời gian đi trên đoạn đường bằng AB là:

$$\frac{0{,}4}{4} = \frac{1}{10}(\text{h}) = 6 \text{ phút}.$$

Vậy thời gian để bạn An đi từ nhà đến trường là: 9 phút

Thí dụ 2. *Một chiếc đồng hồ có kim phút dài 6 cm, kim giờ dài 4 cm. Tại thời điểm 8 giờ đúng, khoảng cách giữa hai đầu kim giờ và kim phút là bao nhiêu?*

Lời giải.



Gọi độ dài kim giờ, kim phút lần lượt là OA, OB. Khi đó khoảng cách giữa hai đầu kim giờ và kim phút là AB. Ta có lúc 8 giờ đúng thì $\widehat{AOB} = 120^0$. Kẻ $AH \perp OB$. Vì ΔAOH vuông tại H nên áp dụng hệ thức liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông AOH, ta có: $OH = OA.\cos 60^0 = 2$ cm,

$$AH = OA.\sin 60^0 = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Vì ΔABH vuông tại H nên áp dụng định lí Pythagore ta có:

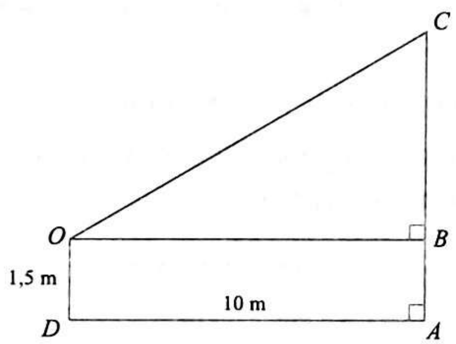
$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19} \text{ cm}.$$

Thí dụ 3. (Trích đề thi vào lớp 10 THPT tỉnh Hưng Yên năm học 2020 – 2021)

Để tính chiều cao của cột cờ trong trường, một học sinh lớp 9 dùng giác kế, đứng cách chân cột cờ 10 m rồi chỉnh mặt thước ngắm cao bằng mắt của mình để xác định góc "nâng" (góc tạo bởi tia sáng đi thẳng từ đỉnh cột cờ đến mắt tạo với phương nằm ngang). Khi đó, góc "nâng" đo được là 31^0. Biết khoảng cách từ mặt sân đến mắt học sinh đó bằng 1,5 m. Tính chiều cao của cột cờ mà học sinh này đo được? (kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân).

Lời giải. Gọi chiều cao của cột cờ, khoảng cách từ sân đến mắt học sinh lần lượt là AC, DO. Kẻ $OB \perp AC$, ta có tứ giác $ABOD$ là hình chữ nhật.

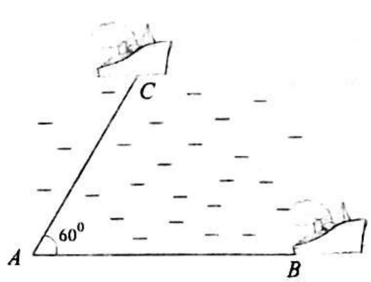
Vì ΔOBC vuông nên $BC = OB.\tan 31^0 \approx 6$ (m).



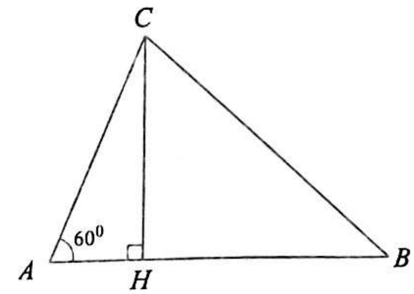
Vậy chiều cao của cột cờ là:

$$AC = AB + BC \approx 7{,}5 \text{ m}.$$

Thí dụ 4. *Hai chiếc tàu thủy xuất phát từ cùng một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60 độ. Tàu B chuyển động với vận tốc 20 hải lí một giờ, tàu C chuyển động với vận tốc 18 hải lí một giờ. Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu km? (biết rằng 1 hải lí = 1,852 km; làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 3).*



Lời giải. Sau 2 giờ, các tàu chuyển động được các đoạn AB, AC. Khoảng cách giữa hai tàu là BC.



Ta có:

$$AB = 20.2.1{,}852 = 74{,}08 \text{ km};$$

$$AC = 18.2.1{,}852 = 66{,}672 \text{ km}.$$

Kẻ đường cao CH. Vì tam giác CAH vuông tại H nên ta có: $CH = AC.\sin 60^0 = 57{,}740$ km;

$$AH = AC.\cos 60^0 = 33{,}336 \text{ km}.$$

Suy ra: $HB = AB - AH = 40{,}744$ km.

Vì tam giác BCH vuông tại H nên áp dụng định lý Pythagore ta được:

$$CB = \sqrt{HB^2 + CH^2} \approx 70{,}668 \text{ km}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai tàu là 70,668 km.

DẠNG 2. Một số bài toán thực tế liên quan đến hàm số bậc nhất $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

Thí dụ 5. *Biết quãng đường nối hai tỉnh A và B cách nhau 360 km. Lúc 6 giờ sáng bạn Toán khởi hành từ tỉnh A và sau đó 15 phút Văn cũng khởi hành từ tỉnh B đi để gặp nhau. Toán đi với vận tốc 45 km/h, Văn đi với vận tốc 60 km/h. Tính khoảng cách y (km) giữa hai bạn lúc x (giờ) trước khi hai bạn gặp nhau?*

Lời giải. Sau x (giờ) trước lúc các bạn gặp nhau ($0 < x < \frac{25}{7}$) quãng đường các bạn đi được là:

+ Toán: $45x$ (km)

+ Văn: $60\left(x - \frac{1}{4}\right) = 60x - 15$ (km).

Khoảng cách y (km) giữa hai bạn sau x (giờ) là:

$$y = 360 - (60x - 15) - 45x = 375 - 105x \text{ (km)}.$$

Thí dụ 6. *Cước phí bưu điện ngoài nước được tính như sau: Nếu trọng lượng thư không quá 9 gam thì cước phí là 10000 đồng. Nếu thư trên 9 gam thì mỗi gam tăng thêm, cước phí tính thêm 1000 đồng. Nếu gửi một bức thư nặng x gam với $x > 9$ thì cước phí y (đồng) của bức thư đó là*

A. $y = 1000x + 9000$ **B.** $y = 1000x + 1000$

C. $y = 1000x + 41000$ **D.** $y = 1000x - 1000$.

Lời giải. Gọi y (đồng) là cước phí, x là khối lượng thư, khi đó:

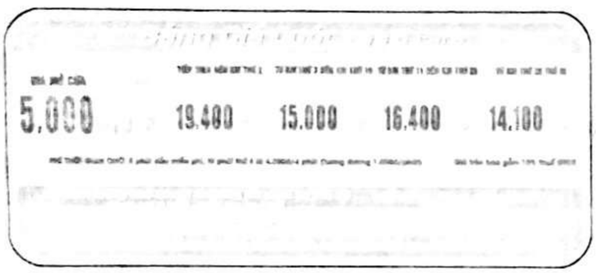
$$y = \begin{cases} 10000 & \text{khi } x \le 9 \\ 10000 + 1000(x-9) & \text{khi } x > 9 \end{cases}.$$

Vì $x > 9$ nên cước phí của bức thư đó là:

$$y = 10000 + 1000(x-9) = 1000x + 1000.$$

Vậy đáp án đúng là đáp án B.

Thí dụ 7. *Bảng giá cước loại xe 7 chỗ của công ty taxi Mai Linh được cho như bảng sau:*



Một nhóm hành khách dưới 7 người thuê taxi trên để đi quãng đường 30 km thì phải trả số tiền là bao nhiêu? (Không tính phí chờ, phí cầu đường, phà và sân bay (nếu có)).

Lời giải. Gọi y (đồng) là cước phí, x là số km phải đi, khi đó:

$y = 0$ khi $x = 0$;

$y = 5000$ khi $x \le 0,3$;

$y = 5000 + 19400(x - 0,3)$ khi $0,3 < x \le 3$;

$y = 5000 + 19400(3 - 0,3) + 15000(x - 3)$ khi $3 < x \le 10$;

$y = 5000 + 19400(3 - 0,3) + 15000(10 - 3) + 16400(x - 10)$ khi $10 < x \le 25$;

$y = 5000 + 19400(3 - 0,3) + 15000(10 - 3) + 16400(25 - 10) + 14100(x - 25)$ khi $x > 25$.

Vì nhóm hành khách đi quãng đường $x = 30 > 25$ nên số tiền cần thanh toán là:

$$y = 5000 + 19400(3 - 0,3) + 15000(10 - 3) + 16400(25 - 10) + 14100(30 - 25) = 478880 \text{ (đồng)}.$$

DẠNG 3. Một số bài toán thực tế về giải bài toán bằng cách lập phương trình và lập hệ phương trình

Thí dụ 8. *Một cây tre cao 8 m mọc vuông góc với mặt đất bị gió làm gẫy gập ngang thân, ngọn cây chạm đất cách gốc 3,5 m. Hỏi đoạn gãy cách gốc bao nhiêu? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).*

Lời giải. Gọi khoảng cách từ điểm gãy đến gốc tre là x (m) ($0 < x < 8$).

Đoạn còn lại của cây tre là $8 - x$ (m).

Vì tre mọc vuông góc với mặt đất nên áp dụng định lí Pythagore ta được:

$$(3,5)^2 + x^2 = (8-x)^2 \Leftrightarrow x \approx 3,23 \text{ m}.$$

Vậy đoạn gãy cách gốc 3,23 m.

Thí dụ 9. *Trên một vùng biển được xem như bằng phẳng và không có chướng ngại vật. Vào lúc 6 giờ sáng có một tàu cá đi thẳng qua tọa độ X theo hướng từ Nam đến Bắc với vận tốc không đổi. Đến 7 giờ sáng cùng ngày một tàu du lịch cũng đi qua tọa độ X nhưng theo hướng từ Đông sang Tây với vận tốc lớn hơn vận tốc tàu cá 12 km/h. Đến 8 giờ sáng cùng ngày, khoảng cách giữa hai tàu là 60 km. Tính tổng vận tốc của hai tàu ?*

Lời giải. Gọi vận tốc của tàu cá là x (km/h) ($x > 0$). Vận tốc của tàu du lịch là $x + 12$ (km/h).

Quãng đường tàu cá đi được từ lúc qua tọa độ X đến 8 giờ sáng là $2x$ (km).

Quãng đường tàu du lịch từ lúc qua tọa độ X đến 8 giờ sáng là $(x + 12)$ (km).

Vì 2 tàu này chuyển động qua tọa độ X theo hai hướng vuông góc với nhau nên áp dụng định lí Pythagore ta có:

$$(2x)^2 + (x+12)^2 = 60^2.$$

Giải phương trình này ta được:

$x_1 = 24$ (thỏa mãn), $x_2 = \dfrac{-144}{5}$ (không thỏa mãn).

Vậy tổng vận tốc của hai tàu là 60 km/h.

Thí dụ 10. (Trích đề thi HSG lớp 9 môn Toán tỉnh Hưng Yên năm học 2018 – 2019)

Một rôbốt chuyển động từ điểm A đến điểm B theo cách sau: đi được 5 m dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp 10 m dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp 15 m dừng lại 3 giây,... Cứ như vậy rôbốt đi từ A đến B cả nghỉ hết 551 giây. Tính quãng đường rôbốt chuyển động từ A đến B, biết rằng khi đi rôbốt chuyển động với vận tốc 2,5 m/s.

Lời giải. Gọi số lần đi của rôbốt là x $(x \in \mathbb{N}, x > 1)$. Số lần nghỉ của rôbốt là $x - 1$.

Thời gian rôbốt đi là:

$$\frac{5}{2,5} + \frac{10}{2,5} + \frac{15}{2,5} + \ldots + \frac{5x}{2,5} = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2x$$
$$= x(x+1) \text{ (giây)}.$$

Thời gian rôbốt nghỉ là:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + x - 1 = \frac{x(x-1)}{2}.$$

Theo bài ra ta có phương trình:

$$x(x+1) + \frac{x(x-1)}{2} = 551.$$

Giải phương trình này ta được:

$$x = 19 \text{ (chọn) và } x = \frac{-58}{3} \text{ (loại)}.$$

Vậy thời gian đi của rôbốt là 19.(19 + 1) = 380 giây. Quãng đường rôbốt đã đi là 380.2,5 = 950 m.

Thí dụ 11. ***(Trích đề thi vào lớp 10 THPT thành phố Hồ Chí Minh năm học 2020 – 2021)***

Sau buổi sinh hoạt ngoại khóa, nhóm của bạn Thu rủ nhau đi ăn kem ở một quán gần trường. Do quán mới khai trương nên có khuyến mãi, bắt đầu từ ly kem thứ năm mỗi ly kem sẽ được giảm 1500 đồng so với giá ban đầu. Nhóm của Thu mua 9 ly kem với số tiền là 154500 đồng. Hỏi giá của một ly kem ban đầu?

Lời giải. Gọi giá ban đầu của một ly kem là x (đồng) $(x > 1500)$. Giá của một ly kem sau khi có khuyến mại là $x - 1500$ (đồng).

Vì tổng số tiền để mua 9 ly kem là 154500 đồng nên ta có phương trình:

$$4x + 5(x - 1500) = 154500 \Leftrightarrow x = 18000.$$

Vậy giá của một ly kem ban đầu là 18000 đồng.

Thí dụ 12. *Ông Toán muốn mua cho gia đình mình một chiếc Smart Ti vi 8K, 65 Inch. Sau khi tham khảo trên Internet ông biết chiếc Ti vi mà ông muốn mua có bán tại siêu thị Điện Máy Xanh đã giảm giá hai lần. Mỗi lần giảm 10% so với giá đang bán, sau khi giảm giá 2 lần đó thì giá của nó còn lại là 48 600 000 đồng và ông quyết định mua chiếc Ti vi đó cho gia đình mình. Vậy giá ban đầu của chiếc Ti vi mà ông Toán mua là bao nhiêu?*

Lời giải. Gọi giá ban đầu của chiếc Ti vi mà ông Toán mua là x (đồng) $(x > 0)$.

Sau giảm giá lần 1, giá của chiếc Ti vi đó còn là $0,9x$ (đồng).

Sau giảm giá lần 2, giá của chiếc Ti vi đó còn là $0,81x$ (đồng).

Theo bài ra, ta có phương trình:

$$0,81x = 48600000 \Rightarrow x = 60000000 \text{ đồng}.$$

Vậy giá ban đầu của chiếc Ti vi mà ông Toán mua là 60000000 đồng.

Thí dụ 13. (Trích đề thi vào lớp 10 THPT thành phố Hồ Chí Minh năm học 2019 – 2020)

Bạn Dũng trung bình tiêu thụ 15 ca lo cho mỗi phút bơi và 10 ca lo cho mỗi phút chạy bộ. Hôm nay Dũng mất tất cả 1,5 giờ cho cả hai hoạt động trên và tiêu thụ hết 1200 ca lo. Hỏi hôm nay, bạn Dũng mất bao nhiêu thời gian cho mỗi hoạt động?

Lời giải. Gọi thời gian bạn *Dũng* dành cho hoạt động bơi là x (phút) ($x > 0$).

Gọi thời gian bạn *Dũng* dành cho hoạt động chạy là y (phút) ($y > 0$).

Hôm nay bạn *Dũng* mất 1,5 giờ = 90 phút cho cả 2 hoạt động nên ta có phương trình:

$$x + y = 90 \quad (1).$$

Lượng ca lo tiêu thụ cho x phút bơi là $15x$ (ca lo).

Lượng ca lo tiêu thụ cho y phút chạy là $10y$ (ca lo). Cả hai hoạt động trên trong 1,5 giờ tiêu thụ 12000 ca lo nên ta có phương trình:

$$15x + 10y = 12000 \quad (2).$$

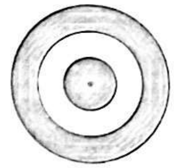
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ 15x + 10y = 12000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \text{ (thỏa mãn)} \\ y = 30 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}.$$

Vậy hôm nay bạn *Dũng* mất 60 phút bơi và 30 phút chạy.

DẠNG 4. Một số bài toán thực tế về chu vi đường tròn, diện tích hình quạt tròn và diện tích hình tròn

Thí dụ 14. *Một mục tiêu bắn súng gồm các vành có bề rộng 2 cm như hình vẽ sau. Bán kính đường tròn trong cùng là 2cm. Vậy diện tích vòng ngoài cùng bằng mấy lần diện tích vòng trong cùng?*



Lời giải. Gọi R_1, R_2, R_3 thứ tự là bán kính của đường tròn trong cùng, đường tròn giữa và đường tròn ngoai cùng. Diện tích vòng trong cùng là:

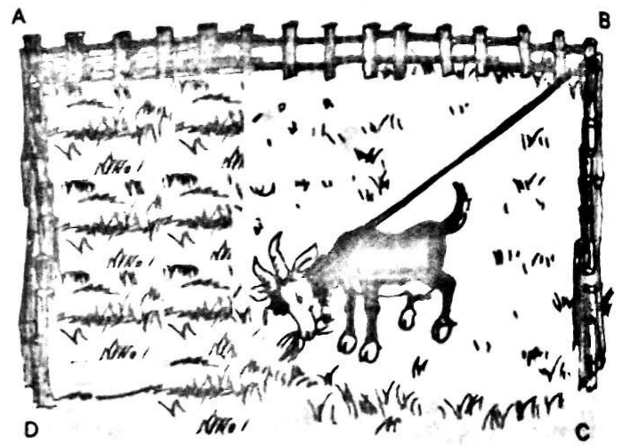
$$\pi R_1^2 = 4\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích vòng ngoài cùng là:

$$\pi(R_3^2 - R_2^2) = \pi(6^2 - 4^2) = 20\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Tỉ số diện tích vòng ngoài cùng so với vòng trong cùng là: $20\pi : 4\pi = 5$.

Thí dụ 15. *Một con dê được nhốt trong một mảnh vườn trồng cỏ hình vuông cạnh là 5 m. Con dê được buộc bằng một sợi dây dài 3,5 m vào một cái cột ở góc vườn. Nếu diện tích cỏ mà con dê ăn được là nhiều nhất thì diện tích phần cỏ còn lại là bao nhiêu?*



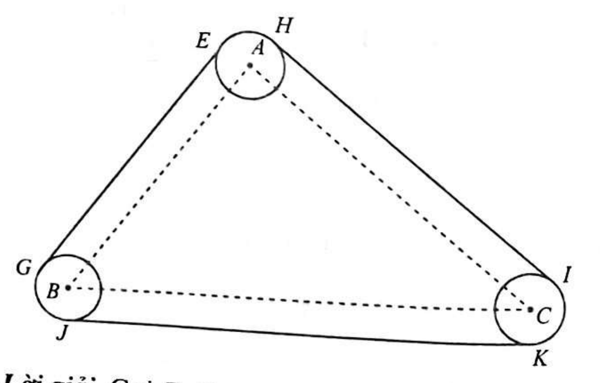
Lời giải. Diện tích cỏ của mảnh vườn là 25 (m^2).

Diện tích cỏ mà con dê ăn được nhiều nhất là:

$$S_q = \frac{\pi(3,5)^2.90}{360} \approx 3,0625\pi \approx 9,62 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Diện tích cỏ còn lại là: $25 - 9,62 = 15,38$ (m^2).

Thí dụ 16. *Ở hình vẽ dưới, ba bánh xe hình tròn tâm A, B, C có cùng bán kính* 10 cm. *Ba bánh xe đó được nối với nhau bằng một dây cu roa. Biết* $AB = 4$ m, $AC = 5$ m, $BC = 6$ m. *Tính chiều dài của dây cu roa?*



Lời giải. Gọi E, H ; G, J ; K, I lần lượt là tiếp điểm của dây cu roa với các đường tròn tâm A, B, C. Khi đó dễ thấy các tứ giác $ABGE$, $BCKJ$, $ACIH$ là các hình chữ nhật. Khi đó, ta có:

$GE = AB = 4$ m, $HI = AC = 5$ m, $JK = BC = 6$ m.

Ta có: sđ$\widehat{EAH} = 180^0 - \widehat{A}$; sđ$\widehat{GBJ} = 180^0 - \widehat{B}$;

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{ICK} = 180^0 - \widehat{C}.$$

Vì các đường tròn tâm A, B, C bằng nhau nên, ta có:

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{EAH} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{GBJ} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{ICK} = 3.180^0 - \left(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}\right)$$
$$= 2.180^0.$$

Tổng độ dài của các cung là:

$$l = \frac{\pi.10.2.180}{180} = 20\pi.$$

Vậy độ dài của dây cu roa là:

$$400 + 500 + 600 + 20\pi = 1500 + 20\pi \text{ (cm)}.$$

Thí dụ 17. *Chân một đống cát đổ trên nền phẳng nằm ngang là một hình tròn có chu vi* 16 m. *Hỏi chân đống cát đó chiếm diện tích bao nhiêu?*

Lời giải. Bán kính của hình tròn chân đống cát là:

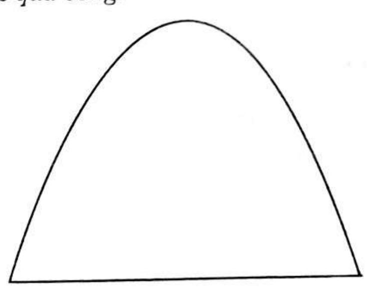
$$R = \frac{16}{2\pi} = \frac{8}{\pi} \text{ (m)}.$$

Đống cát đó chiếm diện tích là: $\pi.\left(\frac{8}{\pi}\right)^2 = \frac{64}{\pi}$ (m^2).

DẠNG 5. Một số bài toán thực tế về hàm số và đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

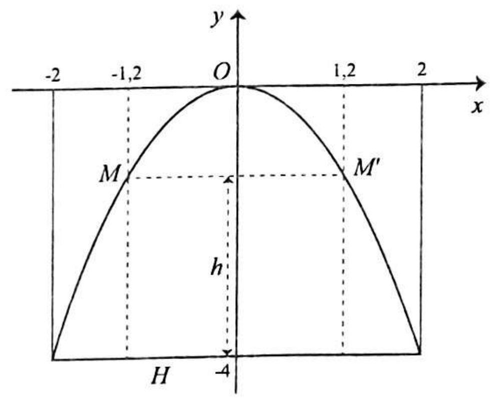
Thí dụ 18 (Trích đề thi vào lớp 10 THPT môn Toán tỉnh Hưng Yên năm học 2019 – 2020)

Cổng vào một ngôi biệt thự có hình dạng là một parabol biểu diễn bởi hàm số $y = -x^2$. *Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là* 4 m. *Một chiếc ô tô tải có thùng xe là một hình hộp chữ nhật có chiều rộng* 2,4 m. *Hỏi chiều cao lớn nhất của ô tô để có thể qua cổng?*



4 m

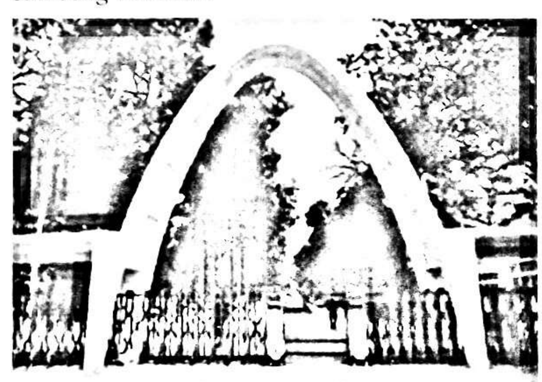
Lời giải.



Để cho ô tô có chiều cao lớn nhất có thể đi qua cổng thì ô tô phải đi sao cho trục của ô tô trùng với đường trung trực của 2 chân cổng. Khi đó điểm cao nhất của ô tô trùng với điểm M trên parabol $y = -x^2$ nên $M(x_0; -x_0^2)$. Vì thùng ô tô có bề rộng 2,4 m nên điểm $M(-1,2; -1,44)$. Do đó chiều cao lớn nhất của ô tô có thể qua cổng là

$$h = MH = |y_H| - |y_M| = 4 - 1,44 = 2,56 \text{ m}.$$

Thí dụ 19. *Cổng Parabol của trường Đại học Bách khoa Hà Nội được xây dựng cách đây khoảng* 50 *năm. Để đo chiều cao h (khoảng cách từ mặt đất đến đỉnh) của cổng Parabol, một người tiến hành đo khoảng cách giữa hai chân cổng được* L = 9 m. *Người này thấy rằng nếu đứng cách chân cổng (gần nhất)* 0,5 m *thì đầu chạm cổng, biết người này cao* 1,6 m. *Tính chiều cao của cổng Parabol.*



Lời giải. Đặt hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Gọi đồ thị hàm số đi qua các điểm A, M, O là

(*Xem tiếp trang 24*)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/549 (Lớp 6). Tìm các bộ số tự nhiên (a, b, c, d) thỏa mãn: $a > b > c > d$; $b + c + d$ chia hết cho a; $2a + c$ chia hết cho $b + d$ và ƯCLN$(b + d, c) = 1$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/549 (Lớp 7). Cho x, y, z là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức $xy + yz + zx = -7$. Chứng minh

$$A = (x^2 + 2yz + 7)(y^2 + 2zx + 7)(-z^2 - 2xy - 7)$$

là một số chính phương.

TRẦN VĂN HẠNH

(GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Bài T3/549. Cho a, b, c là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh

$$(a-b)^{3n} + (b-c)^{3n} + (c-a)^{3n} \vdots 72$$

với mọi số tự nhiên lẻ n.

PHẠM VĂN SƠN

(GV THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, Phú Thọ)

Bài T4/549. Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$ đường cao AH và trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AH, đường thẳng BI cắt AM tại P, qua P kẻ PK vuông góc với BC (K thuộc BC). Chứng minh rằng $KC = 2PM$.

NGUYỄN DŨNG

(GV THCS Lương Sơn, Bình Thuận)

Bài T5/549. Giải phương trình

$$(x^2 + 6x + 10)^2 + (x+3)(3x^2 + 20x + 36) = 0.$$

NGUYỄN VĂN TÀI

(GV THCS Thanh Thủy, Phú Thọ)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/549. Cho a, b, c với $a < b < c$ là ba nghiệm của phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = -6$.

TRỊNH XUÂN TÌNH

(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Nội)

Bài T7/549. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3y^3\left(\dfrac{x^3y^3+1}{2}\right) = \left(\dfrac{xy+1}{2}\right)^9 \\ 9^x + 4^y = 70x - 57\sqrt{xy} \end{cases}.$$

BÙI CÔNG TUẤN

(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài T8/549. Cho tam giác đều ABC với tâm G, M là điểm tùy ý nằm trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và D', E', F' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng trong ba tứ giác $MGEE'$, $MGFF'$, $MGDD'$ sẽ có một tứ giác có diện tích bằng tổng diện tích hai tứ giác còn lại.

LA ĐẠI CƯƠNG

(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Bài T9/549. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 - (ab + bc + ca).$$

ĐÀO VĂN TRUNG

(GV THPT Huỳnh Thúc Kháng, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/549. Cho dãy số thực (x_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 = 0;\ x_2 = 3 \\ x_{n+2} = \dfrac{1}{3}\left(3^{-\frac{x_n}{2}+1} + 5\right), \forall n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Tìm giới hạn $\lim x_n$.

KIỀU ĐÌNH MINH

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T11/549. Tìm các hàm liên tục $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(f(y)) + 2f(x) = f(f(x+y)), \forall x, y.$

NGUYỄN HỮU TÌNH
(SV Lớp K52A1S, Khoa Toán-Cơ-Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T12/549. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, M là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. K là điểm bất kỳ thuộc AM (K không là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC). U, V theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABK, ACK; P, Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BK, CK và (O). N là giao điểm của UQ và VP. S là giao điểm của PQ và UV. Chứng minh

1) N là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A.

2) SK song song với BC.

NGUYỄN NGỌC TÚ
(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài L1/549. Trên bề mặt chất lỏng có hai nguồn phát sóng kết hợp A, B (AB = 16 cm) dao động cùng biên độ, cùng tần số 25 Hz, cùng pha, coi biên độ sóng không đổi. Biết tốc độ truyền sóng là 80 cm/s. Xét các điểm ở mặt chất lỏng nằm trên đường thẳng vuông góc với AB tại B, dao động với biên độ cực tiểu. Điểm cách B xa nhất, gần nhất bằng bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/549. Đoạn mạch điện AB gồm đoạn mạch AM mắc nối tiếp với đoạn mạch MB. Trên đoạn AM chứa biến trở và cuộn dây thuần cảm, trên đoạn MB chứa tụ điện. Mắc vào hai đầu đoạn mạch điện áp xoay chiều có tần số góc ω (với $2w^2LC = 3$). Khi $R = R_0$ thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch đạt cực đại, và điện áp giữa hai đầu đoạn mạch AM có biểu thức là:

$$u_{AM} = 240\sqrt{2}\cos wt \quad \text{(V)}.$$

Viết biểu thức điện áp giữa hai đầu của đoạn mạch AB.

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEM IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/549 (For 6th grade). Find 4-tuples of natural numbers (a, b, c, d) satisfying $a > b > c > d$; $b + c + d$ is divisible by a; $2a + c$ is divisible by $b + d$; and $\gcd(b + d, c) = 1$.

Problem T2/549 (For 7th grade). Given integers x, y, z so that $xy + yz + zx = -7$. Prove that the number

$$A = (x^2 + 2yz + 7)(y^2 + 2zx + 7)(-z^2 - 2xy - 7)$$

is a perfect square.

Problem T3/549. Given prime numbers a, b, c which are greater than 3. Show that

$$(a-b)^{3^n} + (b-c)^{3^n} + (c-a)^{3^n} \vdots 72$$

for any arbitrary odd positive integer n.

Problem T4/549. Given a right triangle ABC with the right angle at A and $AB < AC$. Denote by AH the altitude and by AM the median from A. Let I be the midpoint of AH. The line BI intersects AM at P. Through P draw PK perpendicular to BC (K belongs to BC). Prove that $KC = 2PM$.

Problem T5/549. Solve the equation

$$(x^2 + 6x + 10)^2 + (x+3)(3x^2 + 20x + 36) = 0.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/549. Suppose that a, b, c, $a < b < c$, are the solutions of the equation $x^3 - 3x + 1 = 0$. Show that $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = -6$.

☞

Problem T7/549. Solve the system of equations $\begin{cases} x^3y^3\left(\dfrac{x^3y^3+1}{2}\right)=\left(\dfrac{xy+1}{2}\right)^9 \\ 9^x+4^y=70x-57\sqrt{xy} \end{cases}$.

Problem T8/549. Given an equilateral triangle ABC with the centroid G and M is an arbitrary point inside the triangle. Let D, E, F respectively be the midpoints of BC, CA, AB and D', E', F' respectively the perpendicular projections of M on the sides BC, CA, AB. Show that among 3 quadrilaterals $MGEE'$, $MGFF'$, $MGDD'$ there exists one quadrilateral whose area is equal to the sum of the areas of the remains.

Problem T9/549. Given real numbers a, b, c satisfying $a^2+b^2+c^2=2$. Find the minimum value of the expression

$$P=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-(ab+bc+ca).$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/549. Consider the real sequence (x_n) determined as following

$$\begin{cases} x_1=0;\ x_2=3 \\ x_{n+2}=\dfrac{1}{3}\left(3^{-\frac{x_n}{2}+1}+5\right), \forall n=1,2,... \end{cases}$$

Find the limit $\lim x_n$.

Problem T11/549. Find all continuous functions $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfying

$$f(f(y))+2f(x)=f(f(x+y)),\ \forall x,y.$$

Problem T12/549. Given a triangle ABC inscribed in the circle (O) and M is the midpoint of the arc $\overset{\frown}{BC}$ which does not contain A. Let K be an arbitrary point on AM so that K is not the incenter of ABC. Let U, V respectively be the circumcenters of ABK, ACK; P, Q repectively the second intersections between BK, CK and (O). Assume that N is the intersection between UQ and VP; and S is the intersection between PQ and UV. Show that

1) N is the midpoint of the arc $\overset{\frown}{BC}$ which contains A.

2) SK is parallel to BC.

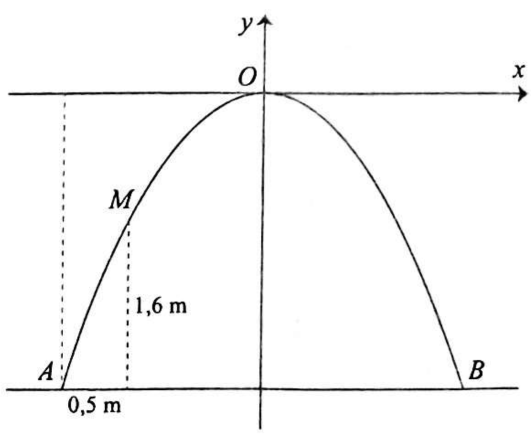
Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science - Vietnam National University, Hanoi)

****

HƯỚNG DẪN ... *(Tiếp theo trang 21)*

$$y=ax^2\ (a<0).$$



Vì $AB=9$ m nên $A(-4,5;y_0)$. Suy ra:

$$y_0=a(-4,5)^2$$

$$\Rightarrow a=\frac{y_0}{(-4,5)^2}\Rightarrow y=\frac{y_0}{(-4,5)^2}x.$$

Vì $A(-4,5;y_0)\Rightarrow M(-4;y_0+1,6)$. Ta có:

$$y_0+1,6=\frac{y_0}{(-4,5)^2}.(-4)^2$$

$$\Rightarrow y_0=7,62\ (\text{m}).$$

Vậy cổng Parabol của trường đại học Bách khoa Hà Nội cao 7,62 m.

(Kỳ sau đăng tiếp)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/545. *Tìm các số nguyên dương m, n sao cho* $\frac{m^{12}}{1023m+n}$ *và* $\frac{n^{12}}{1023n+m}$ *đều là các số nguyên tố.*

Lời giải. Giả sử $\frac{m^{12}}{1023m+n} = p$ với p là số nguyên tố thì $m^{12} = p(1023m + n)$ (*).

Từ đó số nguyên tố p phải là ước số của m^{12}, suy ra số nguyên tố p phải là ước số của m và $m \geq 2$.

Đặt $m = pr$ với số nguyên dương r, thay vào đẳng thức (*) được:

$$pr\,m^{11} = p(1023m + n),$$

hay là $r m^{11} = 1023m + n$

hay là $n = m(m^{10}r - 1023) \geq 2$ (**) (do $m \geq 2$).

Từ đó có $n \geq m$.

Lập luận tương tự khi $\frac{n^{12}}{1023n+m} = q$ với q là số nguyên tố, dẫn đến $m \geq n$. Như vậy $m = n$, thay vào đẳng thức (**) được: $1 = m^{10}r - 1023$,

hay là $2^{10} = m^{10}r \geq 2^{10}r$ (do $m \geq 2$),

suy ra $r = 1$ và $m = 2 = n = p$.

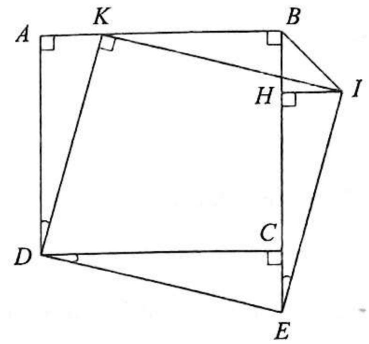
Thử lại ta thấy $m = n = 2$ thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Một số bạn có hướng giải đúng nhưng viết nhầm hoặc lập luận chưa chặt chẽ,

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/545. *Cho hình vuông ABCD, điểm K thay đổi trên cạnh AB, K không trùng với A. Dựng hình vuông DKIE, với I cùng phía với B so với bờ AD. Tính số đo góc* $\widehat{EBI}$.

Lời giải.



Ta có $\widehat{CDE} = \widehat{ADK}$ (cùng phụ với góc $\widehat{CDK}$). Kết hợp với $KD = ED$, $AD = CD$, suy ra $\Delta AKD = \Delta CED$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DCE} = 90^0$.

Từ $\widehat{DCE} = 90^0$ ta suy ra ba điểm B, C, E thẳng hàng. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên cạnh BC. Xét hai tam giác vuông IHE và ECD có $\widehat{HEI} = \widehat{CDE}$ (cùng phụ với góc $\widehat{CED}$); $EI = DE$, suy ra $\Delta IHE = \Delta ECD$ (cạnh huyền – góc nhọn), dẫn đến $HE = CD$. Mặt khác $CD = BC$ nên $HE = BC \Rightarrow CE + CH = HB + CH \Rightarrow CE = HB$. Lại có $HI = CE$ (do $\Delta IHE = \Delta ECD$ chứng minh trên) $\Rightarrow HI = HB$. Chứng tỏ rằng tam giác HBI vuông cân tại H, suy ra $\widehat{HBI} = 45^0$ hay $\widehat{EBI} = 45^0$.

Nhận xét. Có thể phát biểu bài toán trên dưới dạng: *Cho hình vuông ABCD, điểm K thay đổi trên cạnh AB, K không trùng với A. Dựng hình vuông DKIE, với I cùng phía với B so với bờ AD. Chứng minh rằng điểm I luôn thuộc một đường thẳng cố định.*

Số bài giải gửi về Toà soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải đúng:

Hưng Yên: *Lê Tuấn Hiệp*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An**: *Nguyễn Thị Băng Tâm*, *Hoàng Văn Nhân*, *Nguyễn Tất Han*, *Lương Thị Hải Yến*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **TP. Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3.

HỒ HẢI

Bài T3/545. *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho* $\sqrt{n+1}+\sqrt{2^n+1}$ *là một số nguyên dương.*

Lời giải. Ta cần một bổ đề

Bổ đề. *Nếu a và b là các số nguyên dương sao cho* $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ *là một số nguyên dương thì a và b đồng thời là các số chính phương.*

Chứng minh. Giả sử $\sqrt{a}+\sqrt{b}=n$ trong đó n là số nguyên dương. Khi đó:

$$b=(n-\sqrt{a})^2=n^2-2n\sqrt{a}+a.$$

Suy ra: $\sqrt{a}=\dfrac{n^2+a-b}{2n}.$

Vậy $\sqrt{a}$ là số hữu tỷ, tức là $\sqrt{a}=\dfrac{p}{q}$, với p, q là các số nguyên và $(p;\,q)=1$. Do đó: $a=\dfrac{p^2}{q^2}$. Suy ra $q^2 \mid p^2$. Lại do $(p;\,q)=1$ nên $q=1$. Vậy $a=p^2$ là số chính phương. Tương tự b cũng là số chính phương.

Quay trở lại bài toán.

Giả sử $\sqrt{n+1}+\sqrt{2^n+1}$ là các số nguyên dương. Khi đó theo bổ đề trên thì $n+1$ và 2^n+1 là các số chính phương. Đặt $2^n+1=m^2$ với m là số nguyên dương, ta được: $2^n=(m-1)(m+1)$. Điều này tương đương với $\begin{cases} m-1=2^x \\ m+1=2^y \end{cases}$ với $x, y\in\mathbb{N}$, $x<y$ và $x+y=n$. Từ đây suy ra: $2^y-2^x=2$.

Nếu $x\ge 2$ thì $2^y-2^x \,\vdots\, 4$ trong khi $2 \not\vdots\, 4$.

Do đó: $0\le x\le 1$.

Với $x=0$ thì $2^y=3$ (loại.)

Với $x=1$ thì $2^y=4$, do đó $y=2$ và $n=3$.

Kết luận: Vậy chỉ có giá trị $n=3$ thỏa mãn bài toán.

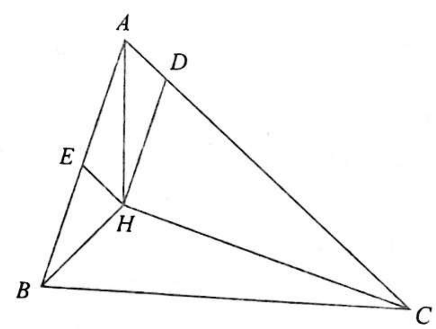
Nhận xét. Nội dung của Bổ đề là một kết quả hay dùng khi giải những bài toán về số chính phương. Hầu hết các bạn đều giải như trên, một số bạn "quên" chứng minh bổ đề. Các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Trần Lan Anh*, *Hà Phương Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Hà Nội:** *Trần Việt Anh*, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy; **Sơn La:** *Lương Hữu Bách*, 9A1, THCS Nguyễn Trãi, TP. Sơn La; **Thanh Hóa:** *Thiều Đình Minh Dũng*, 9E, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa; *Nguyễn Văn Đức Quảng*, 9K, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Hoàng Văn Nhân*, 7C, THCS Lý Nhật Quang; Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Lưu Khánh Huy*, *Trần Lê Nam Anh*, 8H, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, Q. 3.

NHƯ HOÀNG

Bài T4/545. *Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm. Chứng minh*

$$HA+HB+HC<\sqrt{\frac{2}{3}}(AB+BC+CA).$$

Lời giải.



Lời giải. Do $\dfrac{2}{3}<\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ nên ta chứng minh bài toán với hằng số tốt hơn:

$$HA+HB+HC<\frac{2}{3}(AB+BC+CA).$$

Thật vậy, lấy điểm D, E tương ứng thuộc các đoạn AC, AB sao cho $HD \parallel AB$ và $HE \parallel AC$. Khi đó $ADHE$ là hình bình hành.

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có:

$$AE + EH > HA \Rightarrow AD + AE > HA \quad (1).$$

Lại do H là trực tâm tam giác ABC nên suy ra:

$$BH \perp HE \text{ và } CH \perp HD.$$

Do đó: $BH < BE$ và $CH < CD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $HA + HB + HC < AB + AC$ (3).

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$HA + HB + HC < BC + CA \quad (4).$$

$$HA + HB + HC < AB + BC \quad (5).$$

Từ (3), (4) và (5) suy ra:

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + BC + CA).$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

TP. Hồ Chí Minh: *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3; **Nghệ An:** *Bùi Thị Thùy Linh*; *Phạm Xuân Hoàng*; *Nguyễn Công Dung*; *Đinh Ana*; *Nguyễn Văn Lâm*, 8A, *Nguyễn Văn Việt*; *Nguyễn Đăng Quang*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Thọ:** *Trần Gia Hưng*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Đức Quảng*, 9K, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; *Thiều Đình Minh Dũng*, 9E, THCS Nhữ Bá Sỹ, Ttr. Bút Sơn, Hoằng Hóa.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/545. *Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức*

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd \geq 4(a-b)^2\sqrt{abcd} \quad (*).$$

Lời giải. Cách 1. Đặt vế trái của BĐT (*) là L, ta có: $2L = 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 + 2d^4 - 8abcd$

$$= (a^2 - c^2)^2 + (c^2 - b^2)^2 + (a^2 - d^2)^2 + (d^2 - b^2)^2 + 2(ac - bd)^2 + 2(ad - bc)^2.$$

Áp dụng BĐT: *Với x, y là hai số thực thì* $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2$, *đẳng thức xảy ra khi* $x = y$

ta có: $(a^2 - c^2)^2 + (c^2 - b^2)^2 \geq \frac{1}{2}(a^2 - b^2)^2$;

$$(a^2 - d^2)^2 + (d^2 - b^2)^2 \geq \frac{1}{2}(a^2 - b^2)^2;$$

$$2(ac - bd)^2 + 2(ad - bc)^2 \geq (ac - bd + ad - bc)^2 = [(a-b)(c+d)]^2.$$

Do đó:

$$2L \geq \frac{1}{2}(a^2 - b^2)^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)^2 + [(a-b)(c+d)]^2 = (a-b)^2[(a+b)^2 + (c+d)^2].$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$(a+b)^2 + (c+d)^2 \geq 4ab + 4cd \geq 8\sqrt{abcd}.$$

Suy ra: $2L \geq (a-b)^2.8\sqrt{abcd}$

$$\Leftrightarrow L \geq 4(a-b)^2\sqrt{abcd}.$$

Vậy BĐT (*) đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = d$.

Cách 2. Sử dụng BĐT Cauchy và BĐT $|x| \geq x$, ta có:

$$L = (a-b)^4 + 2(ab - cd)^2 + 4ab(a-b)^2 + (c^2 - d^2)^2$$
$$\geq 2\sqrt{2}(a-b)^2 |ab - cd| + 4ab(a-b)^2$$
$$= (a-b)^2[2\sqrt{2}|cd - ab| + 4ab]$$
$$\geq (a-b)^2[2(cd - ab) + 4ab]$$
$$= (a-b)^2[2(ab + cd)]$$
$$\geq 4(a-b)^2\sqrt{abcd}.$$

Vậy BĐT (*) đã được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = d$.

Nhận xét. Bài này có ít bạn tham gia gửi bài. Tuyên dương các bạn sau đưa ra lời giải có lập luận chặt chẽ và ngắn gọn:

Hà Nội: *Trần Việt Anh*, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy; **Nghệ An**: *Lương Thị Hải Yến*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/545. *Giải phương trình*

$$(x^2 + 3x + 3)\sqrt{2x^2 + x + 1} - x^3 - 4x^2 - 12x = 9.$$

Lời giải. Nhận thấy $2x^2 + x + 1 > 0, \forall x$ nên $\sqrt{2x^2 + x + 1}$ luôn xác định.

Phương trình tương đương với:

$$\left[x^2 + 4x + 4 - (x+2) + 1\right]\sqrt{2x^2 + x + 1} - \left[x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (2x^2 + x + 1) + x + 2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow\left[(x+2)^2-(x+2)+1\right]\sqrt{2x^2+x+1}$$
$$-\left[(x+2)^3-\left(2x^2+x+1\right)+x+2\right]=0.$$

Đặt $a=x+2;\ b=\sqrt{2x^2+x+1}\quad (b>0)$.

Ta được: $\left(a^2-a+1\right)b-\left(a^3-b^2+a\right)=0$

$$\Leftrightarrow a^2b-ab+b-a^3+b^2-a=0$$
$$\Leftrightarrow a^2(b-a)+b(b-a)+b-a=0$$
$$\Leftrightarrow (b-a)\left(a^2+b+1\right)=0\Leftrightarrow b-a=0$$

(vì $a^2+b+1>0$).

Ta có: $b-a=0\ \Leftrightarrow\sqrt{2x^2+x+1}=x+2>0$

$\Leftrightarrow 2x^2+x+1=(x+2)^2\Leftrightarrow x^2-3x-3=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$ (thỏa mãn $x+2>0$).

Vậy phương trình có tập hợp nghiệm là

$$\left\{\frac{3-\sqrt{21}}{2};\ \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right\}.$$

Nhận xét. Có thể giải bài toán bằng cách biến đổi phương trình về dạng tích:

$$\left(x^2+4x+5+\sqrt{2x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2+x+1}-x-2\right)=0$$

hoặc $\left(x^2-x-3\right)\left(\dfrac{x^2+3x+3}{\sqrt{2x^2+x+1}+x+2}+1\right)=0.$

Dễ thấy trong mỗi phương trình trên có một thừa số luôn dương.

Các bạn sau đây có bài giải tốt :

Hà Tĩnh: *Nguyễn Xuân Minh Đức, Nguyễn Thị Thùy Dung, Trần Minh Hoàng, Phan Nhật Minh, Nguyễn Đình Nam Khánh, Bùi Thái Sơn, Phan Nguyên An, Nguyễn Tùng Minh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Hoàng Trung Hiếu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Đà Nẵng:** *Tô Đông Hải*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Việt*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Vĩnh Phúc:** *Bạch Thái Sơn*, 10A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Đức Quảng*, 9K, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Phú Thọ:** *Hà Phương Anh, Trần Lan Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Hoàng Anh Thư*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc Học Huế, TP. Huế .

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/545. *Ký hiệu* $[x]$ *là số nguyên lớn nhất không lớn hơn x. Cho* $\{x\}=x-[x]$. *Tìm tất cả các bộ ba số thực* $(x;y;z)$ *thỏa mãn hệ phương trình*

$$\begin{cases}x+[y]+\{z\}=1{,}1 & (1)\\ \{x\}+y+[z]=2{,}2 & (2).\\ [x]+\{y\}+z=3{,}3 & (3)\end{cases}$$

Lời giải. Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được:

$$x+[x]+\{x\}+y+[y]+\{y\}+z+[z]+\{z\}=6{,}6$$
$$\Leftrightarrow 2(x+y+z)=6{,}6$$
$$\Leftrightarrow x+y+z=3{,}3\quad (4).$$

Cộng (1) với (2) ta được:

$$x+\{x\}+y+[y]+[z]+\{z\}=3{,}3$$
$$\Leftrightarrow x+y+z+[y]+\{x\}=3{,}3.$$

Kết hợp với (4) ta được:

$$[y]+\{x\}=0 \text{ hay } \{x\}=-[y].$$

Vậy $\{x\}$ là một số nguyên. Nhưng $0\le\{x\}=x-[x]<1$ nên $\{x\}=0$, vậy x là số nguyên. Suy ra $[y]=0$.

Thay $[y]=0$ vào (1) ta được $x+\{z\}=1{,}1$.

Vì x là số nguyên nên $\{z\}=0{,}1$ và $x=[x]=1$.

Thay $\{x\}=0$ vào (2) ta được $y+[z]=2{,}2$.

Vì $[y]=0$ nên $0\le y<1$. Suy ra $y=0{,}2$ và $[z]=2$. Vậy $z=[z]+\{z\}=2+0{,}1=2{,}1$.

Đáp số: $x=1;\ y=0{,}2;\ z=2{,}1$.

Nhận xét 1. Đây là bài 3.6.2 trong [1], trang 217 và trong một số sách khác, thuộc dạng *Hệ phương trình phần nguyên hỗn hợp*. Xem thêm:

[1] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Nguyễn Thị Bình Minh, Tạ Duy Phượng, Nguyễn Thị Bích Thủy, *Phần nguyên và ứng dụng trong giải toán*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2020, 303 trang.

Các bạn có thể làm một số bài dạng này. Thí dụ:

Bài tập 1. (Tạp chí Crux M475, No7, Vol.37, 2011, Bài 3.6.34, [1]) Chứng minh rằng tồn tại vô số số vô tỉ mà $x\{x\}=[x]$.

Bài tập 1. (Vô địch Australia, 1999, Bài 3.6.3, [1]) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=200,0 \\ \{x\}+y+[z]=190,1 \\ [x]+\{y\}+z=178,8 \end{cases}.$$

Đáp số: $x=94,65;\ y=105,45;\ z=84,35$.

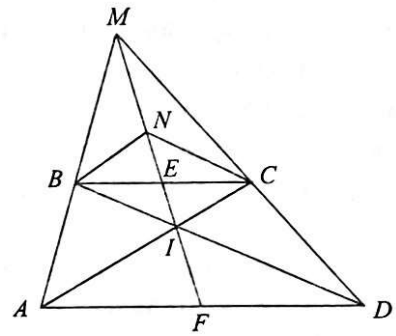
Nhận xét 2. Các bạn đều giải tương tự như trên. Dưới đây là danh sách các bạn đã giải đúng.

Đà Nẵng: *Tô Đông Hải*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Hà Nội**: *Trần Việt Anh*, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy. **Hà Tĩnh**: *Phan Nguyên An, Nguyễn Xuân Minh Đức, Trần Minh Hoàng, Nguyễn Đình Nam Khánh, Nguyễn Tùng Minh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh. **Hưng Yên**: *Chu Đức Bảo, Hoàng Trung Hiếu, Nguyễn Trọng Việt*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Lâm Đồng**: *Bùi Đức Huy Hoàng, Lê Song Phương*, 10 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc, TP. Bảo Lộc. **Phú Thọ**: *Hà Phương Anh, Trần Lan Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, huyện Tam Nông. **Quảng Bình**: *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 11 Toán 2, *Nguyễn Trần Hoàng, Nguyễn Thị Thu Phương*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Quảng Nam**: *Trần Phạm Minh Đạt*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông. **Thanh Hóa**: *Nguyễn Văn Đức Quảng*, 9K, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa. **Thừa Thiên Huế**: *Đoàn Văn Hoàng Lân, Phan Quốc Thắng* 11 Toán 1, *Hồ Trần Quốc Thắng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế. **Vĩnh Phúc**: *Bạch Thái Sơn*, 10A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T8/545. *Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại M. Kẻ Bx // AC và Cy // BD, chúng cắt nhau tại N. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, AD. Chứng minh EF song song với MN hoặc EF trùng MN.*

Lời giải. (*Theo cách giải của bạn Bạch Thái Sơn,* 10A2, *THPT chuyên Vĩnh Phúc,* ***Vĩnh Phúc***).

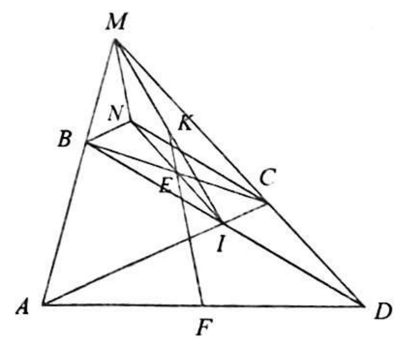


Gọi I là giao điểm của AC và BD.

• *Trường hợp* 1: $AD \parallel BC$.

Theo bổ đề hình thang thì các điểm M, E, I, F thẳng hàng. Mặt khác vì $BN \parallel IC$, $IB \parallel CN$ nên tứ giác $BNCI$ là hình bình hành, suy ra N, E, I thẳng hàng. Từ đó MN trùng với EF.

• *Trường hợp* 2: AD cắt BC.



Gọi K là trung điểm của MI. Sử dụng định lý về đường thẳng Gauss cho tứ giác toàn phần $BMCI.AD$ với BM cắt CI tại A, CM cắt BI tại D, ta thu được ba điểm K, E, F thẳng hàng.

Vì $BN \parallel CI$, $CN \parallel BI$ nên tứ giác $BNCI$ là hình bình hành, suy ra E là trung điểm của BC, đồng thời E là trung điểm của NI. Lại vì K là trung điểm của MI nên KE // MN. Từ đó EF // MN. Kết luận của bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Nhận xét. Định lý về đường thẳng Gauss có nội dung như sau: *Cho tứ giác toàn phần ABCD.EF có AB cắt CD tại E, AD cắt BC tại F. Khi đó trung điểm của các đoạn thẳng AC, BD, EF cùng nằm trên một đường thẳng (đường thẳng Gauss)*. Phép chứng minh định lý này bạn đọc có thể xem, chẳng hạn trong cuốn sách: **Tài liệu chuyên Toán Hình học 10**, NXBGD Việt Nam, Trang 317. Ngoài bạn *Sơn* các bạn sau cũng có lời giải đúng:

Hưng Yên: *Lê Tuấn Nghĩa*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên; **Thanh Hoá**: *Nguyễn Văn Đức Quảng*, 9K, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hoá; **Nghệ An**: *Lưu Trọng Phúc*, 9B, THCS Đội Cung, TP. Vinh, *Nguyễn Đăng Quang*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Tùng Minh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP. Hà Tĩnh; **Quảng Nam**: *Trần Phạm Minh Đạt*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An; **Đà Nẵng**: *Tô Đông Hải*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Vĩnh Long**: *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/545. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$\frac{3a+2b+c}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

trong đó a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn

$$3bc+4ac+5ba\le 6abc.$$

Lời giải. Đặt $P=\dfrac{3a+2b+c}{(a+b)(a+c)(b+c)}$.

Từ giả thiết và bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$6\ge\frac{3}{a}+\frac{4}{b}+\frac{5}{c}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$$
$$\ge\frac{4}{a+b}+\frac{12}{b+c}+\frac{8}{c+a}.$$
$$\Rightarrow\frac{1}{a+b}+\frac{3}{b+c}+\frac{2}{c+a}\le\frac{3}{2}\ (*).$$

Ta có: $P=\dfrac{a+c}{(a+b)(a+c)(b+c)}+\dfrac{2(a+b)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$

$$=\frac{1}{(a+b)(b+c)}+\frac{2}{(a+c)(b+c)}$$
$$=\frac{1}{b+c}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{2}{a+c}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$3P=\frac{3}{b+c}.\left(\frac{1}{a+b}+\frac{2}{a+c}\right)\le\left(\frac{\frac{3}{b+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{2}{a+c}}{2}\right)^2$$

$$\overset{\text{do }(*)}{\le}\left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2=\frac{9}{16}\Rightarrow P\le\frac{3}{16}.$$

$$P=\frac{3}{16}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c=2\\ \dfrac{3}{b+c}=\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{2}{a+c}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=2.$$

Vậy $\max P=\dfrac{3}{16}$.

Nhận xét. Khi có bất đẳng thức điều kiện (*), các bạn tham gia giải bài này đã tìm GTLN của P theo một số cách khác nhau (dùng bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Schwarz, bất đẳng thức Bunyakovsky, ...). Lời giải của các bạn đều đúng. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn:

Vĩnh Phúc: *Bạch Thái Sơn*, 10A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Trần Việt Anh*, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Đức Quảng*, 9K, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Đình Nam Khánh*, *Nguyễn Xuân Minh Đức*, *Phan Nhật Minh*, *Trần Minh Hoàng*, *Nguyễn Thị Thùy Dung*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, *Nguyễn Thị Thu Phương*, 12 Toán 2, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Trần Thị Thanh Thư*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định:** *Lê Gia Quang*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; *Nguyễn Hữu Trí*, 11A1, THPT số 2 Phù Cát; **Quảng Nam:** *Phạm Trần Minh Đạt*, 10/1, *Nguyễn Thế Hiếu*, 11/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Sóc Trăng:** *Tiết Trọng Khiêm*, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/545. *Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta viết lên bảng $3n+1$ số nguyên dương đầu tiên $1, 2, 3, \ldots, 3n+1$. Sau đó, mỗi lượt ta sẽ chọn ra 4 số chẳng hạn là a, b, c, d, ta xóa bốn số này và ghi lại số có giá trị là $64(a+b+c+d)$. Sau n lượt như vậy, trên bảng còn đúng một số. Chứng minh rằng dù ta có thực hiện theo bất cứ cách nào thì số còn lại vẫn lớn hơn $\frac{64}{625}n^5$.*

Lời giải. (Của bạn *Trần Minh Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**)

Nhận xét: Với $a, b, c, d > 0$ ta có bất đẳng thức:

$$\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}+\sqrt[4]{d} \le \sqrt[4]{64(a+b+c+d)}.$$

Thật vậy theo bất đẳng thức Holder ta có:

$$\left(\sqrt[4]{a}1.1.1+\sqrt[4]{b}1.1.1+\sqrt[4]{c}1.1.1+\sqrt[4]{d}1.1.1\right)^4$$
$$\le (a+b+c+d)\left(1^4+1^4+1^4+1^4\right)^3$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}+\sqrt[4]{d} \le \sqrt[4]{64(a+b+c+d)}.$$

Từ đó ta thấy nếu trong một dãy m số dương, ta thay 4 số a, b, c, d bằng 1 số có giá trị là $64(a+b+c+d)$ thì tổng căn bậc 4 của $m-3$ số này sẽ không giảm. Thành thử ký hiệu S là số cuối cùng thì sau n lượt xóa ta có: $\sqrt[4]{S} \ge \sum_{k=1}^{3n+1}\sqrt[4]{k}$ (1).

Xét hàm số $f(x)=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}$.

Với mỗi $0 \le k \le 3n$ theo định lý số gia giới nội tồn tại c với $k < c < k+1$ sao cho:

$$f(k+1)-f(k)=f'(c)(k+1-k)$$
$$\Rightarrow \frac{4}{5}(k+1)^{5/4}-\frac{4}{5}k^{5/4}=\sqrt[4]{c}<\sqrt[4]{k+1}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{3n}\left(\frac{4}{5}(k+1)^{5/4}-\frac{4}{5}k^{5/4}\right)<\sum_{k=0}^{3n}\sqrt[4]{k+1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}(3n+1)^{5/4}<\sum_{k=1}^{3n+1}\sqrt[4]{k} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\sqrt[4]{S}>\frac{4}{5}(3n+1)^{5/4}$

$$\Rightarrow S>\frac{4^4}{5^4}(3n+1)^5>\frac{3^5 4^4}{5^4}n^5=\frac{62208}{625}n^5>\frac{64}{625}n^5.$$

Nhận xét. Ngoài bạn *Hoàng*, chỉ có bạn *Lê Tuấn Nghĩa*, 10T, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên** có lời giải tốt trong số ít các bạn tham gia giải bài toán này

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/545. *Cho dãy số thực dương (x_n) thỏa mãn điều kiện*

$$\frac{2}{x_n+2}+\frac{1}{x_{n+1}+2}+\frac{1}{x_{n+1}}=1,\ n=0,1,2,\ldots$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. (Dựa theo đa số các bạn).

Sử dụng biến đổi: $\frac{2}{x_n+2}+\frac{1}{x_{n+1}+2}+\frac{1}{x_{n+1}}=1$

$$\Leftrightarrow \frac{2x_{n+1}(x_{n+1}+2)+x_{n+1}(x_n+2)+(x_n+2)(x_{n+1}+2)}{x_{n+1}(x_n+2)(x_{n+1}+2)}=1$$
$$\Leftrightarrow x_n x_{n+1}^2-4x_{n+1}-2x_n-4=0 \quad (1).$$

Xét (1) như phương trình bậc hai theo x_{n+1}, có nghiệm dương duy nhất

$$x_{n+1}=\frac{2+\sqrt{2x_n^2+4x_n+4}}{x_n}.$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{2+\sqrt{2x^2+4x+4}}{x}, x>1.$

Ta thấy:

$$f'(x)=\frac{-2x-4-2\sqrt{2x^2+4x+4}}{x^2\sqrt{2x^2+4x+4}}<0, \forall x\in(0,+\infty),$$

tức là $f(x)$ là hàm số nghịch biến trong $(0,+\infty)$ và $f(1+\sqrt{3})=1+\sqrt{3}$.

Nhận xét rằng $x_n>1$ với mọi $n\in\mathbb{N}$ nên $x_{n+1}<f(1), \forall n\in\mathbb{N}$. Xét các trường hợp ứng với giá trị ban đầu x_0 của dãy.

- Trường hợp 1 khi $x_0=1+\sqrt{3}$ thì $x_n=1+\sqrt{3}$ với mọi $n=1,2,3,\ldots$

• Trường hợp 2, khi $0 < x_0 < 1+\sqrt{3}$.

- Nếu $x_0 = x_2$ thì

$$0 < x_0 = x_2 = \ldots < 1+\sqrt{3} < \ldots = x_3 = x_1.$$

- Nếu $x_0 > x_2$ thì

$$0 < \ldots < x_2 < x_0 < 1+\sqrt{3} < x_1 = x_3 < \ldots < f(1).$$

- Nếu $x_0 < x_2$ thì

$$0 < x_0 < x_2 < \ldots < 1+\sqrt{3} < \ldots < x_3 = x_1.$$

• Trường hợp 3 khi $x_0 > 1+\sqrt{3}$ ta cũng có kết luận tương tự.

Kết luận. Các dãy (x_{2n}) và (x_{2n+1}) lần lượt là các dãy đơn điệu tăng bị chặn trên và đơn điệu giảm bị chặn dưới nên là các dãy hội tụ. Gọi các giới hạn tương ứng của các dãy (x_{2n}) và (x_{2n+1}) là a và b. Khi đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a = \dfrac{2+\sqrt{2b^2+2b+4}}{b} \\ b = \dfrac{2+\sqrt{2a^2+2a+4}}{a} \end{cases}.$$

Hệ này có nghiệm duy nhất $a = b = 1+\sqrt{3}$.

Vậy nên $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1+\sqrt{3}$.

Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về giới hạn của dãy số dựa trên nguyên lý kẹp. Đa số các bạn đều giải theo cách đã trình bày ở trên. Một số bạn giải trực tiếp không cần sử dụng đạo hàm cũng cho kết quả đúng.

Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Bình Định: *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, *Nguyễn Phúc Lương*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh. **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, 12T2, *Nguyễn Thị Mỹ Hạnh*, 11T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Quảng Nam:** *Trần Phạm Minh Đạt*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/545. *Cho tam giác ABC, (I) là đường tròn nội tiếp. D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB. A', B', C' theo thứ tự là điểm đối xứng của A, B, C qua EF, FD, DE. $X = EB' \cap FC'$, $Y = FC' \cap DA'$, $Z = DA' \cap EB'$. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác XYZ là tâm đường tròn Euler của tam giác DEF.*

Lời giải. Ta cần có ba bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp. BE, CF là các đường cao. M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. K là giao điểm của MN và EF. S là giao điểm của các tiếp tuyến với (O) tại A, C. T là điểm đối xứng của S qua AC. Khi đó B, T, K thẳng hàng.*

Chứng minh. Gọi $H = BC \cap EF; L = BE \cap CT$.

Dễ thấy $\Delta AEF \sim \Delta ABC$.

Do đó $\widehat{AEF} = \widehat{ABC} = \widehat{ACS}$.

Điều đó có nghĩa là $EK \equiv EF \,//\, CT$.

Vậy các điều kiện sau tương đương

1) B, T, K thẳng hàng

2) $E(BCTK) = C(BETK)$

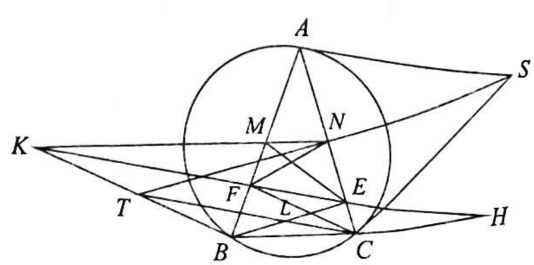
3) $E(LCTK) = C(HETK)$

4) $E(LCTK) = C(EHKT)$

5) $\dfrac{\overline{TL}}{\overline{TC}} = \dfrac{\overline{KE}}{\overline{KH}}$

6) $\dfrac{\overline{NE}}{\overline{NC}} = \dfrac{\overline{KE}}{\overline{KH}}$

7) $KN \,//\, HC$ (đúng).

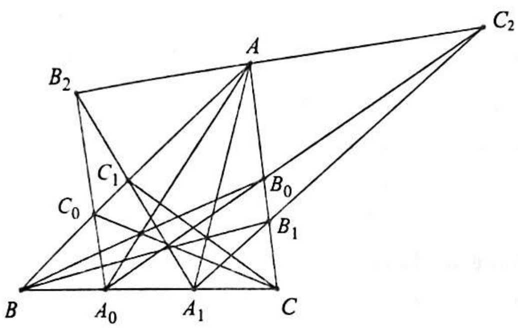


Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC. Các cặp điểm A_0, A_1; B_0, B_1; C_0, C_1 theo thứ tự thuộc BC, CA, AB sao cho AA_0, BB_0, CC_0 đồng quy và AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy. C_2 là giao điểm của A_0B_0 và A_1B_1, B_2 là giao điểm của A_0C_0 và A_1C_1. Khi đó A, C_2, B_2 thẳng hàng.*

Chứng minh. Dễ thấy

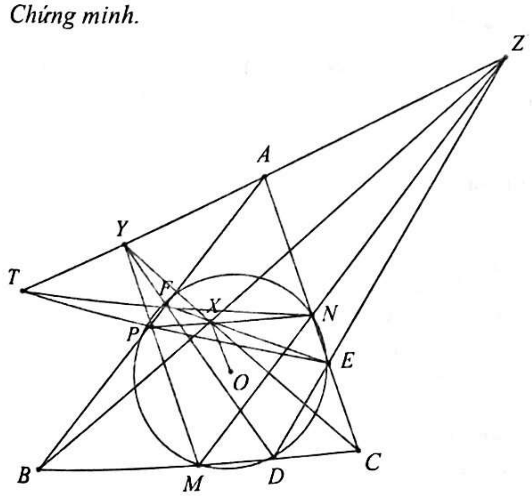
$$A_0(A_1AB_2C_2) = A_0(A_1AC_0B_0) = -1 = A_1(A_0AC_1B_1) = A_1(A_0AB_2C_2).$$

Do đó A, B_2, C_2 thẳng hàng.



Bổ đề 3. *Cho tam giác ABC; O là tâm đường tròn Euler. M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên BC, CA, AB. $X = NP \cap EF$; $Y = FD \cap PM$; $Z = MN \cap DE$. Khi đó O là trực tâm của tam giác XYZ.*

Chứng minh.



Gọi $T = NF \cap PE$.

Theo bổ đề 2, A, Y, Z thẳng hàng.

Áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix} MEF \\ DNP \end{pmatrix}$, ta có Z, T, Y thẳng hàng.

Theo định lí Brocard, $OX \perp AT$.

Vậy $OX \perp YZ$. Tương tự $OY \perp ZX$.

Tóm lại O là trực tâm của tam giác XYZ.

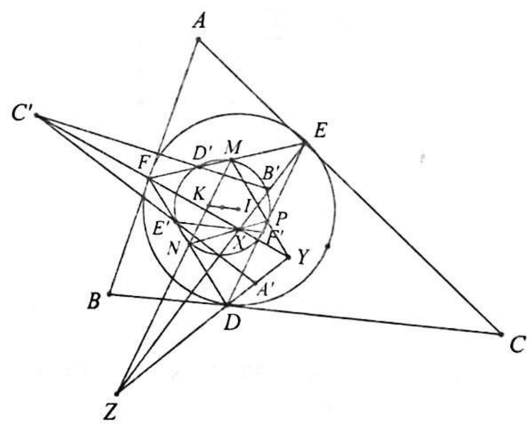
Trở lại giải bài toán trên.

Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của EF, FD, DE; D', E', F' theo thứ tự là hình chiếu của D, E, F trên EF, FD, DE.

Vì $X = EB' \cap FC'$ nên, áp dụng bổ đề 1 cho tam giác DEF, $X = NP \cap E'F'$.

Tương tự $Y = PM \cap F'D'$; $Z = MN \cap D'E'$.

Từ đó, theo bổ đề 3, trực tâm của tam giác XYZ là tâm đường tròn Euler của tam giác DEF.

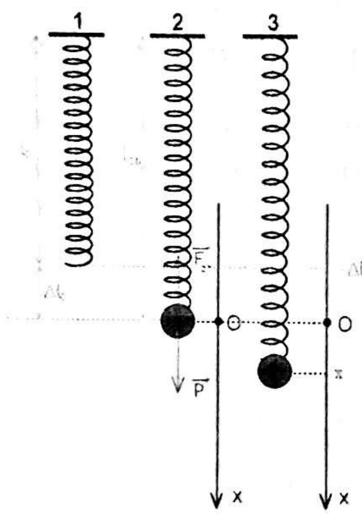


Nhận xét. Bài toán này khó, chỉ có bốn bạn tham gia giải: **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thị Thu Phương*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Nam:** *Trần Phạm Minh Đạt*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Sóc Trăng:** *Phạm Nguyên Khang*, 12A2T, THPT Nguyễn Thị Minh Khai.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/545. *Một người có khối lượng 83 kg treo mình vào sợi dây bungee đàn hồi có độ cứng $k = 270$ N/m (hình vẽ). Từ vị trí cân bằng người này được kéo đến vị trí lò xo giãn thêm 5 m so với chiều dài tự nhiên và sau đó bắt đầu dao động điều hoà với tần số góc $\omega = 1{,}8$ rad/s. Xác định vị trí và vận tốc của người này sau 2 s.*

Lời giải. Chọn trục tọa độ Ox như hình dưới:



Ta xác định được lực đàn hồi làm cho lò xo giãn thêm 5 cm là:

$$F = k(\Delta l_0 + x) - m.g = 270.5 - 83.9{,}8 = 536 \text{ N}.$$

Suy ra: $x = \dfrac{F}{k} = \dfrac{536}{270} = 1{,}98$ m.

Theo đề bài, khi vật bắt đầu dao động ($t = 0$) thì

$$A = x = 1{,}98 \text{ m};\ \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

do đó phương trình li độ và vận tốc của vật theo thời gian được viết:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) = 1{,}98\sin\left(1{,}8t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ (m)};$$

$$v = \omega.A\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = 3{,}56\sin(1{,}8t) \text{ (m/s)}.$$

Vậy khi $t = 2$ s thì $x = -1{,}8$ m và $v = 1{,}6$ m/s.

Nhận xét. Rất tiếc đã không có bạn nào có lời giải đúng cho đề ra kì này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2 /545. *Đoạn mạch điện AB được mắc nối tiếp theo thứ tự: cuộn dây có điện trở thuần $r = 20\ \Omega$, độ tự cảm $L = \dfrac{3}{5\pi}$ (H), tụ điện có điện dung thay đổi được và điện trở thuần $R = 40\ \Omega$. Gọi M là điểm nối giữa tụ điện C và điện trở thuần R. Đặt vào hai đầu đoạn mạch AB một điện áp $u = U_0\cos 100\pi t$ (V), trong đó U_0 không đổi. Điều chỉnh điện dung khi $C = C_1$ thì điện áp hiệu dụng trên đoạn AM nhỏ nhất bằng U_1. Khi $C = C_2$ thì điện áp hiệu dụng giữa hai bản tụ điện cực đại bằng U_2. Tính tỉ số giữa U_2 và U_1.*

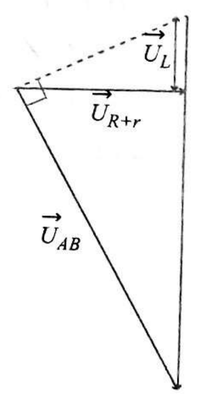
Lời giải. Ta có :

$$\frac{U_{AM}}{U_{AB}} = \frac{Z_{AM}}{Z_{AB}} = \sqrt{\frac{Z_C^2 - 2Z_LZ_C + Z_L^2 + r^2}{Z_C^2 - 2Z_LZ_C + Z_L^2 + (R + r)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1 + \dfrac{R^2 + 2Rr}{Z_C^2 - 2Z_LZ_C + Z_L^2 + r^2}}}.$$

$U_{AM\,\min}$ khi $Z_C = Z_L = 60\ \Omega$

$$\Rightarrow \frac{U_{AM\,\min}}{U_{AB}} = \frac{r}{R + r} = \frac{1}{3}.$$



$U_{C\max}$ khi

$$(R + r)^2 = Z_L(Z_C - Z_L).$$

Giải ra ta được:

$$Z_C = 2Z_L = 120\ \Omega.$$

Suy ra:

$$\frac{U_{C\max}}{U_{AB}} = \sqrt{\frac{Z_C^2}{(R + r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{U_{C\max}}{U_{AM\,\min}} = 3\sqrt{2}.$$

Nhận xét. Rất tiếc đã không có bạn nào có lời giải đúng cho đề ra kì này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

ỨNG DỤNG TÂM TỶ CỰ VÀO BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐỒNG QUY

TRẦN TRUNG DŨNG *(CT4, Booyoung, Hà Đông, Hà Nội)*
NGUYỄN KHÁNH LÂM
(Lớp B3E-D46, Khoa CSĐT Hình sự, Học viện Cảnh sát nhân dân)

Vectơ là một công cụ dùng để chứng minh các bài toán hình học rất hiệu quả. Có nhiều bài toán khi sử dụng vectơ sẽ cho những lời giải hết sức nhanh chóng và đẹp mắt trong khi các lời giải dùng hình học thuần túy lại quá dài dòng và phức tạp. Điển hình trong số đó có thể kể đến các bài toán chứng minh hai đoạn thẳng song song tỉ lệ, chứng minh hai hình có cùng trọng tâm, các bài toán dùng định lý Ceva dạng đại số (xem bài viết *Bàn về một phương pháp sử dụng định lý Ceva* trang 32, TH&TT số 509 tháng 11 năm 2019 của cùng tác giả). Ở bài viết này, tôi muốn đề cập với bạn đọc về một vấn đề khá thú vị và quan trọng của hình học vectơ, đó là về "tâm tỉ cự". Cụ thể hơn là việc ứng dụng lý thuyết tâm tỉ cự vào bài toán chứng minh đồng quy. Xin mời các bạn cùng theo dõi.

I. KHÁI QUÁT VỀ TÂM TỈ CỰ

Bài toán mở đầu. *Cho tam giác ABC và các số thực α, β, γ thỏa mãn $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một điểm M sao cho $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.*

Chứng minh.

. *Sự tồn tại của M*: do $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ nên ít nhất một trong ba tổng sau phải khác không $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$. Không mất tính tổng quát, giả sử $\beta+\gamma \neq 0$.

Trước hết, ta lấy điểm N trên đường thẳng BC sao cho $\beta\overrightarrow{NB}+\gamma\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Dễ thấy với $\beta+\gamma \neq 0$ thì điểm N như vậy là luôn tồn tại.

Sau đó lấy điểm M trên đường thẳng AN sao cho $\alpha\overrightarrow{MA}+(\beta+\gamma)\overrightarrow{MN}=\vec{0}$, do $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ nên điểm M như vậy cũng luôn tồn tại.

Ta sẽ chứng minh điểm M xác định theo cách trên là điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Thật vậy, từ $\beta\overrightarrow{NB}+\gamma\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ ta có:

$$\beta\left(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MB}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MC}\right)=\vec{0}$$

tức là $\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\beta+\gamma)\overrightarrow{MN}$.

Thay vào đẳng thức $\alpha\overrightarrow{MA}+(\beta+\gamma)\overrightarrow{MN}=\vec{0}$ ta thu được điều phải chứng minh.

. *Sự duy nhất của M*: Giả sử có điểm M' cũng thỏa mãn yêu cầu bài toán, tức là $\alpha\overrightarrow{M'A}+\beta\overrightarrow{M'B}+\gamma\overrightarrow{M'C}=\vec{0}$. Thế thì bằng cách chèn điểm M vào đẳng thức vectơ này ta suy ra

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MM'}$$

$$\Rightarrow(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MM'}=0 \Rightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{0}.$$

Tức là $M \equiv M'$. Do đó M là điểm duy nhất thỏa mãn. Vậy bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài toán trên chính là một ví dụ điển hình cho khái niệm tâm tỉ cự. Chúng ta cùng phân tích nó kỹ hơn để làm nền tảng cho việc giải bài toán tổng *quát về tâm tỉ cự mà chúng ta sẽ xem xét ở ngay phần tiếp theo của bài viết. Nếu để ý chắc hẳn các bạn sẽ đặt ra câu hỏi "Tại sao lại có giả thiết $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$? Nếu $\alpha+\beta+\gamma=0$ thì bài toán có còn đúng không hay sẽ bị thay đổi như thế nào?". Chúng ta hãy cùng làm sáng tỏ vấn đề đó.*

Với $\alpha+\beta+\gamma=0$ thì ta xét hai trường hợp sau:

- Thứ nhất, nếu không tồn tại tổng nào trong các tổng $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$ khác không thì có nghĩa là $\alpha=\beta=\gamma=0$. Do đó dễ thấy bất kỳ điểm M nào trong mặt phẳng cũng thỏa mãn, tức là có vô số điểm M thỏa mãn.
- Thứ hai, nếu tồn tại một trong các tổng nêu trên khác không mà ta giả sử là $\beta+\gamma\neq 0$. Khi đó ta lại lấy điểm N trên đường thẳng BC sao cho $\beta\overrightarrow{NB}+\gamma\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Theo chứng minh trên thì điểm M thỏa mãn phải là điểm trên đường thẳng AN sao cho $\alpha\overrightarrow{MA}+(\beta+\gamma)\overrightarrow{MN}=\vec{0}$. Tuy nhiên do $\alpha+\beta+\gamma=0$ nên suy ra $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MN}$, đây là một điều không thể xảy ra. Do vậy không tồn tại điểm M thỏa mãn.

Như vậy ta kết luận, nếu như $\alpha+\beta+\gamma=0$ thì hoặc tồn tại vô số điểm M hoặc không tồn tại điểm M. Về mặt ý nghĩa toán học thì trường hợp này không có nhiều ý nghĩa ứng dụng nên đó là lý do vì sao chúng ta chỉ làm việc với trường hợp $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

Bây giờ là một phần rất quan trọng của bài viết, phát biểu và chứng minh bài toán hay cũng có thể gọi là định lý về tâm tỉ cự.

Định lý. *Trong mặt phẳng, xét n điểm phân biệt $A_1, A_2,..., A_n$ và n số thực $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ thỏa mãn $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\neq 0$. Khi đó tồn tại duy nhất một điểm M thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\vec{0}$.*

Điểm M được gọi là "*tâm tỉ cự*" của hệ điểm $\{A_1, A_2,..., A_n\}$ với các hệ số tương ứng $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$.

Chứng minh. Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp.

Với $n=2$ kết quả bài toán là khá hiển nhiên bạn đọc tự xét. Với $n=3$ thì cách chứng minh đã được nêu trong bài toán mở đầu và đó cũng là cách quy nạp cho bài toán tổng quát này.

Giả sử định lý đã đúng tới $n=k\ (k\geq 3)$. Ta cần chứng minh định lý đúng với $n=k+1$.

Xét $k+1$ điểm phân biệt $A_1, A_2,..., A_{k+1}$ và $k+1$ số thực $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{k+1}$ thỏa mãn $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{k+1}\neq 0$. Cần chứng minh tồn tại duy nhất một điểm M thỏa mãn $\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}=\vec{0}$.

Do $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{k+1}\neq 0$ nên tồn tại ít nhất một trong các tổng sau khác không:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i-\alpha_j,\ j=\overline{1,k+1}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_{k+1}\neq 0$, khi đó theo giả thiết quy nạp suy ra tồn tại một điểm N sao cho

$$\sum_{i=2}^{k+1}\alpha_i\overrightarrow{NA_i}=\vec{0}.$$

Bây giờ ta lấy điểm M trên đường thẳng A_1N sao cho $\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\left(\sum_{i=2}^{k+1}\alpha_i\right)\overrightarrow{MN}=\vec{0}$.

Do $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{k+1}\neq 0$ nên điểm M như vậy là tồn tại. Từ điều kiện $\sum_{i=2}^{k+1}\alpha_i\overrightarrow{NA_i}=\vec{0}$ bằng cách chèn điểm M ta thu được $\left(\sum_{i=2}^{k+1}\alpha_i\right)\overrightarrow{MN}=\sum_{i=2}^{k+1}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$.

Do đó $\alpha_1\overline{MA_1}+\sum_{i=2}^{k+1}\alpha_i\overline{MA_i}=\vec{0}$ tức là $\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i\overline{MA_i}=\vec{0}$ (đpcm).

Việc chứng minh sự duy nhất của M được tiến hành tương tự như chứng minh trong bài toán mở đầu. Cũng theo đó, khi $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=0$ thì hoặc không tồn tại M hoặc tồn tại vô số điểm M.

Một số tính chất

1) Khi $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n$ thì người ta còn gọi M là trọng tâm của hệ điểm $\{A_1, A_2,..., A_n\}$.

2) Với điểm M được định nghĩa như trên thì với mọi điểm O ta có đẳng thức vectơ sau:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{OA_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overline{OM}.$$

Công thức nêu trên được gọi là "*công thức thu gọn*" và thường được sử dụng trong các bài toán về tâm tỉ cự. Việc chứng minh công thức này rất đơn giản, chỉ cần chèn điểm O vào công thức

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{MA_i}=\vec{0}.$$

II. ỨNG DỤNG TÂM TỈ CỰ VÀO BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐỒNG QUY

Trước khi đi đến với nội dung chính của phần này, tôi xin trình bày với bạn đọc một bài toán sau đây cũng là một ví dụ điển hình mà từ đó chúng ta sẽ tổng quát hóa và phát biểu nội dung chính của phương pháp. Bài toán như sau:

Bài toán. *Cho tam giác ABC có trọng tâm G và một điểm M bất kỳ. Gọi D, E, F theo thứ tự là các điểm đối xứng với M qua trung điểm của các đoạn BC, CA, AB. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy tại một điểm nằm trên MG.*

Lời giải.

Gọi T là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A,B,C,M\}$ với các hệ số tương ứng $\{1,1,1,-1\}$.

Như vậy ta có:

$$\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}-\overrightarrow{TM}=\vec{0} \quad (1).$$

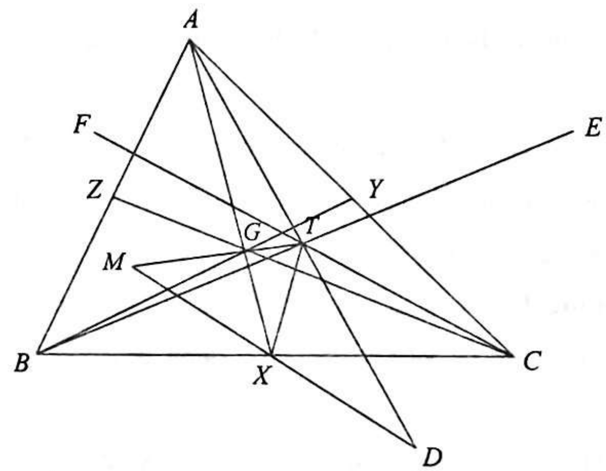
Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

Dễ thấy $\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=2\overrightarrow{TX}=\overrightarrow{TM}+\overrightarrow{TD}$ (tính chất đường trung tuyến).

Do đó, kết hợp với (1) suy ra:

$$\overrightarrow{TA}+\left(\overrightarrow{TM}+\overrightarrow{TD}\right)-\overrightarrow{TM}=\vec{0}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TD}=\vec{0}.$$



Điều này có nghĩa là T là trung điểm của AD.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta suy ra T là trung điểm của BE và CF.

Như vậy rõ ràng AD, BE, CF đồng quy. Bây giờ ta chứng minh T nằm trên MG.

Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=3\overrightarrow{TG}$.

Do vậy, kết hợp với (1) ta được: $3\overrightarrow{TG}-\overrightarrow{TM}=\vec{0}$, điều này nói lên rằng T, G, M thẳng hàng, hay có nghĩa là T nằm trên MG. Vậy bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Chắc hẳn sau khi đọc xong lời giải trên các bạn sẽ thấy việc chọn điểm T trong lời giải thật "kỳ diệu". Quả đúng như vậy, điểm T đã chọn chính là điểm đồng quy của 3 đường thẳng. Tuy nhiên, ta đã định nghĩa nó theo ngôn ngữ "tâm tỉ cự". Việc này giúp ta có một đẳng thức vectơ liên quan đến T, từ đó ta cố gắng tạo ra đẳng thức dạng $\overrightarrow{TA}=k\overrightarrow{TD}$ (với mong muốn chứng minh T thuộc AD). Như vậy ta có thể tổng quát hóa phương pháp giải các bài toán chứng minh đồng quy sử dụng tâm tỉ cự như sau:

Bước 1: Gọi T là tâm tỉ cự của một hệ điểm cố định với các hệ số cụ thể thích hợp (điểm này chính là điểm mà tại đó ba đường thẳng đồng quy).

Bước 2: Từ đẳng thức vectơ thu được ở bước 1, biến đổi để chứng minh T thuộc một trong ba đường thẳng cần chứng minh đồng quy

Bước 3: Tương tự suy ra T thuộc vào hai đường thẳng còn lại và kết luận tính đồng quy của ba đường thẳng.

Vấn đề bây giờ là, làm sao để biết "hệ điểm cố định" và "hệ số cụ thể thích hợp" ở bước 1 là gì? Việc này cần sự tư duy, phân tích và lập luận lôgic chặt chẽ. Chúng ta hãy cùng theo dõi:

Ở bài toán trên, rõ ràng đề bài cho ta 4 điểm cố định A, B, C, M. Do đó rất tự nhiên ta chọn hệ điểm cố định là hệ $\{A,B,C,M\}$. Mặc dù điểm G cũng là cố định nhưng rõ ràng vì $\overrightarrow{TG}$ có thể biểu diễn qua $\overrightarrow{TA},\overrightarrow{TB},\overrightarrow{TC}$ ($\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=3\overrightarrow{TG}$) nên rõ ràng tâm tỉ cự của hệ $\{A,B,C,G,M\}$ có thể chuyển sang tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A,B,C,M\}$. Do vậy, ta không tính điểm G vào hệ điểm.

Tiếp theo là câu chuyện các hệ số đối với hệ điểm trên. Trước hết, ta nhận xét rằng A, B, C có vai trò bình đẳng nên hệ số ứng với A, B, C phải bằng nhau. Ta có thể chuẩn hóa các hệ số này bằng 1. Như vậy các hệ số tương ứng là $\{1,1,1,x\}$. Chúng ta cần tìm x. Theo định nghĩa tâm tỉ cự ta có:

$$\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}+x\overrightarrow{TM}=\vec{0}\ (*)$$

Điều chúng ta mong muốn bây giờ là từ đẳng thức trên phải tạo ra được đẳng thức dạng $\overrightarrow{TA}=k\overrightarrow{TD}$ để suy ra được T, A, D thẳng hàng tức là T thuộc AD. Như vậy ở đẳng thức (*), $\overrightarrow{TA}$ giữ nguyên. Còn lại là các đại lượng $\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}+x\overrightarrow{TM}$ ta cần cố gắng biến đổi để tạo ra $\overrightarrow{TD}$. Dễ thấy rằng

$$\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=2\overrightarrow{TX}=\overrightarrow{TM}+\overrightarrow{TD}$$

nên $\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}+x\overrightarrow{TM}=\overrightarrow{TM}+\overrightarrow{TD}+x\overrightarrow{TM}.$

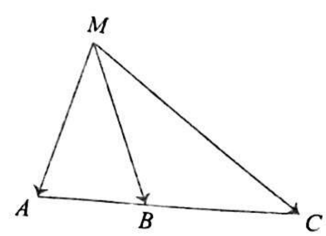
Đến đây, ai cũng thấy cần chọn $x=-1$ để $\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}+x\overrightarrow{TM}$ biến thành $\overrightarrow{TD}$.

Như vậy ta hoàn thành quá trình tư duy để chọn ra hệ điểm thích hợp với các hệ số thích hợp.

Sau đây, chúng ta hãy cùng áp dụng phương pháp này để giải các bài toán rất hay và khó sau:

Trước tiên chúng tôi xin phát biểu (không chứng minh) một bổ đề rất quen thuộc và sẽ được sử dụng nhiều trong các bài toán tiếp theo.

Bổ đề. *Cho A, B, C là ba điểm thẳng hàng. Khi đó với một điểm M bất kỳ ta luôn có đẳng thức vectơ sau:* $\overrightarrow{MB}=\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}\overrightarrow{MA}+\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\overrightarrow{MC}.$

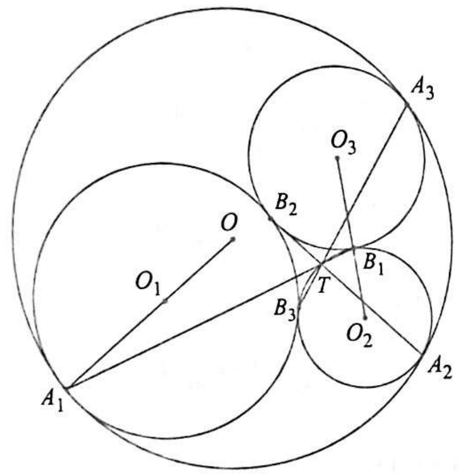


Chú ý. Kết quả trên không phụ thuộc vào thứ tự của ba điểm A, B, C trên đường thẳng đi qua chúng.

Việc chứng minh bổ đề này là đơn giản, các bạn tự chứng minh hoặc có thể tham khảo ở nhiều nguồn tài liệu.

Bài 1. *Cho đường tròn (O) và các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) cùng tiếp xúc trong với (O) và đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Các điểm A_1, A_2, A_3 theo thứ tự là tiếp điểm của (O) với (O_1), (O_2), (O_3). Các điểm B_1, B_2, B_3 theo thứ tự là tiếp điểm của các cặp đường tròn (O_2), (O_3); (O_3), (O_1); (O_1), (O_2). Chứng minh rằng A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy.*

***Phân tích*:**



Dễ thấy hệ điểm trong bài toán này là hệ $\{O, O_1, O_2, O_3\}$. Chú ý rằng các điểm $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ không cần thiết cho vào hệ điểm. Thật vậy, ta lấy ví dụ điểm A_1, rõ ràng O, O_1, A_1 thẳng hàng nên ta có $\overrightarrow{TO_1} = \frac{\overline{A_1O_1}}{\overline{A_1O}}\overrightarrow{TO} + \frac{\overline{OO_1}}{\overline{OA_1}}\overrightarrow{TA_1}$, có nghĩa là $\overrightarrow{TA_1}$ biểu diễn hoàn toàn được theo $\overrightarrow{TO_1}, \overrightarrow{TO}$. Do vậy A_1 không cần thiết cho vào hệ điểm. Như vậy ta đã tìm được hệ điểm. Vấn đề quan trọng bây giờ là tìm các hệ số tương ứng. Kỹ thuật tìm hệ số ở bài toán này khác hơn so với bài toán trước một chút do đặc điểm riêng biệt của bài toán này không như bài trước, mời các bạn theo dõi:

Gọi $\{x, y, z, t\}$ là các hệ số tương ứng. Như vậy ta có: $\quad x\overrightarrow{TO} + y\overrightarrow{TO_1} + z\overrightarrow{TO_2} + t\overrightarrow{TO_3} = \vec{0}$ (*).

Vẫn như bài toán trên, ta mong muốn T nằm trên A_1B_1. Tức là từ (*) ta cần tạo ra đẳng thức dạng $m\overrightarrow{TA_1} + n\overrightarrow{TB_1} = \vec{0}$. Để ý rằng do O, O_1, A_1 thẳng hàng và O_2, O_3, B_1 thẳng hàng nên ta sẽ tạo ra $\overrightarrow{TA_1}$ từ hai vectơ $\overrightarrow{TO}, \overrightarrow{TO_1}$ và tạo ra $\overrightarrow{TB_1}$ từ hai vectơ $\overrightarrow{TO_2}, \overrightarrow{TO_3}$. Từ $\overrightarrow{TO_1} = \frac{\overline{A_1O_1}}{\overline{A_1O}}\overrightarrow{TO} + \frac{\overline{OO_1}}{\overline{OA_1}}\overrightarrow{TA_1}$

suy ra: $\overrightarrow{TA_1} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OO_1}}\overrightarrow{TO_1} - \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OO_1}} \cdot \frac{\overline{A_1O_1}}{\overline{A_1O}}\overrightarrow{TO}$

$$= \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OO_1}}\overrightarrow{TO_1} + \frac{\overline{A_1O_1}}{\overline{OO_1}}\overrightarrow{TO}..$$

Như vậy, muốn tạo ra $\overrightarrow{TA_1}$ từ $x\overrightarrow{TO} + y\overrightarrow{TO_1}$ thì phải có $x : y = \frac{\overline{A_1O_1}}{\overline{OO_1}} : \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OO_1}} = \frac{\overline{A_1O_1}}{\overline{OA_1}}$.

Gọi R, R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính của các đường tròn (O), (O_1), (O_2), (O_3) thì ta suy ra:

$$x : y = \frac{\overline{A_1O_1}}{\overline{OA_1}} = -\frac{R_1}{R}. \qquad (1)$$

Tương tự ta có: $\overrightarrow{TB_1} = \frac{\overline{O_2B_1}}{\overline{O_2O_3}}\overrightarrow{TO_3} + \frac{\overline{O_3B_1}}{\overline{O_3O_2}}\overrightarrow{TO_2}$.

Do đó muốn tạo ra $\overrightarrow{TB_1}$ từ $z\overrightarrow{TO_2} + t\overrightarrow{TO_3}$ thì cần phải có:

$$z : t = -\frac{\overline{O_3B_1}}{\overline{O_2B_1}} = \frac{R_3}{R_2} \ (2).$$

Từ (1) và (2) rất nhiều bạn đến đây sẽ nghĩ rằng với các tỉ lệ đó thì sẽ chọn $x = -R_1$, $y = R$, $z = R_3$, $t = R_2$. Tuy nhiên như vậy khi nhìn vào đẳng thức (*), ta sẽ thấy một sự lộn xộn khi mà hệ số của $\overrightarrow{TO}$ lại là $-R_1$, của $\overrightarrow{TO_1}$ lại là R, hệ số của $\overrightarrow{TO_2}$ là R_3 còn của $\overrightarrow{TO_3}$ lại là R_2. Như thế, rõ ràng chúng ta cảm nhận được với sự lộn xộn như thế thì không thể nào chúng ta có thể làm tương tự như trên để suy ra T nằm trên A_2B_2 và A_3B_3.

Vậy bây giờ phải xử lý như thế nào? Chẳng lẽ lại không có được một bộ hệ số thỏa mãn mong muốn của chúng ta? Không hề như vậy, hãy nhìn các đẳng thức (1) và (2) dưới một góc nhìn khác như sau: $x:y=-\dfrac{R_1}{R}=-\dfrac{1}{R}:\dfrac{1}{R_1}$ và $z:t=\dfrac{R_3}{R_2}=\dfrac{1}{R_2}:\dfrac{1}{R_3}$. Lúc này ta chọn $x=-\dfrac{1}{R}$, $y=\dfrac{1}{R_1}$, $z=\dfrac{1}{R_2}$, $t=\dfrac{1}{R_3}$. Thật bất ngờ và thú vị, lúc này các hệ số của $\overrightarrow{TO}$, $\overrightarrow{TO_1}$, $\overrightarrow{TO_2}$, $\overrightarrow{TO_3}$ lần lượt là $-\dfrac{1}{R}$, $\dfrac{1}{R_1}$, $\dfrac{1}{R_2}$, $\dfrac{1}{R_3}$. Như vậy, ta thấy ở đây xuất hiện một sự tương ứng đến hoàn hảo và rõ ràng với sự đối xứng này sẽ cho ta chứng minh tương tự để suy ra T nằm trên A_2B_2 và A_3B_3 rất dễ dàng.

Như vậy, ta có lời giải rất "kỳ diệu" như sau:

Gọi R, R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính của các đường tròn (O), (O_1), (O_2), (O_3). Gọi T là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{O,O_1,O_2,O_3\}$ với các hệ số tương ứng $\left\{-\dfrac{1}{R};\dfrac{1}{R_1};\dfrac{1}{R_2};\dfrac{1}{R_3}\right\}$. Như thế ta có:

$$-\frac{1}{R}\overrightarrow{TO}+\frac{1}{R_1}\overrightarrow{TO_1}+\frac{1}{R_2}\overrightarrow{TO_2}+\frac{1}{R_3}\overrightarrow{TO_3}=\vec{0}.$$

Do O, O_1, A_1 thẳng hàng nên ta có:

$$\overrightarrow{TO_1}=\frac{\overline{A_1O_1}}{\overline{A_1O}}\overrightarrow{TO}+\frac{\overline{OO_1}}{\overline{OA_1}}\overrightarrow{TA_1}.$$

suy ra: $\overrightarrow{TA_1}=\dfrac{\overline{OA_1}}{\overline{OO_1}}\overrightarrow{TO_1}-\dfrac{\overline{OA_1}}{\overline{OO_1}}\cdot\dfrac{\overline{A_1O_1}}{\overline{A_1O}}\overrightarrow{TO}$

$$=\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OO_1}}\overrightarrow{TO_1}+\frac{\overline{A_1O_1}}{\overline{OO_1}}\overrightarrow{TO}$$

$$=\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OO_1}}\left(\overrightarrow{TO_1}+\frac{\overline{OO_1}}{\overline{OA_1}}\cdot\frac{\overline{A_1O_1}}{\overline{OO_1}}\overrightarrow{TO}\right)$$

$$=\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OO_1}}\left(\overrightarrow{TO_1}+\frac{\overline{A_1O_1}}{\overline{OA_1}}\overrightarrow{TO}\right)=\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OO_1}}\left(\overrightarrow{TO_1}-\frac{R_1}{R}\overrightarrow{TO}\right)$$

$$=\frac{\overline{OA_1}.R_1}{\overline{OO_1}}\left(\frac{1}{R_1}\overrightarrow{TO_1}-\frac{1}{R}\overrightarrow{TO}\right).$$

Do O_2, O_3, B_1 thẳng hàng nên ta cũng có:

$$\overrightarrow{TB_1}=\frac{\overline{O_2B_1}}{\overline{O_2O_3}}\overrightarrow{TO_3}+\frac{\overline{O_3B_1}}{\overline{O_3O_2}}\overrightarrow{TO_2}$$

$$=\frac{\overline{O_2B_1}}{\overline{O_2O_3}}\left(\overrightarrow{TO_3}+\frac{\overline{O_2O_3}}{\overline{O_2B_1}}\cdot\frac{\overline{O_3B_1}}{\overline{O_3O_2}}\overrightarrow{TO_2}\right)$$

$$=\frac{\overline{O_2B_1}}{\overline{O_2O_3}}\left(\overrightarrow{TO_3}-\frac{\overline{O_3B_1}}{\overline{O_2B_1}}\overrightarrow{TO_2}\right)$$

$$=\frac{\overline{O_2B_1}}{\overline{O_2O_3}}\left(\overrightarrow{TO_3}+\frac{R_3}{R_2}\overrightarrow{TO_2}\right)$$

$$=\frac{\overline{O_2B_1}.R_3}{\overline{O_2O_3}}\left(\frac{1}{R_3}\overrightarrow{TO_3}+\frac{1}{R_2}\overrightarrow{TO_2}\right).$$

Chú ý rằng

$$-\left(-\frac{1}{R}\overrightarrow{TO}+\frac{1}{R_1}\overrightarrow{TO_1}\right)=\frac{1}{R_2}\overrightarrow{TO_2}+\frac{1}{R_3}\overrightarrow{TO_3}$$

nên ta suy ra: $\dfrac{\overline{O_2O_3}}{\overline{O_2B_1}.R_3}\overrightarrow{TB_1}=-\dfrac{\overline{OO_1}}{\overline{OA_1}.R_1}\overrightarrow{TA_1}$.

Điều này chứng tỏ T nằm trên A_1B_1. Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được T cũng nằm trên A_2B_2 và A_3B_3.

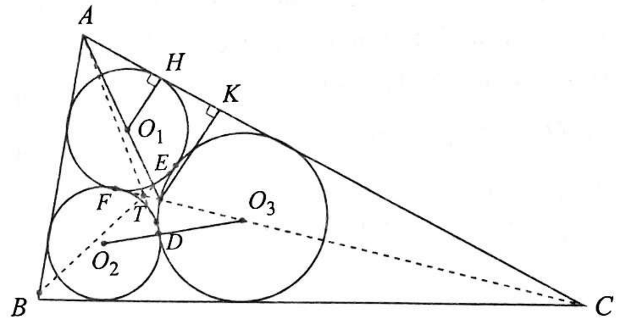
Vậy A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy.

Bài 2. *Cho tam giác ABC và các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) nằm trong tam giác, đôi một tiếp xúc ngoài với nhau và theo thứ tự tiếp xúc với hai cạnh của các góc BAC, CBA, ACB. Gọi D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của các cặp đường tròn (O_2), (O_3); (O_3), (O_1); (O_1), (O_2). Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.*

Trước khi đọc lời giải bài toán này, tác giả muốn bạn đọc nếu có thể hãy tập tư duy phân tích để tìm ra hệ điểm và các hệ số tương ứng dựa vào các kiến thức và phương pháp đã được học ở các bài toán trên. Nếu các bạn tìm được thì xin chúc mừng các bạn đã nắm khá chắc phương pháp làm bài, còn nếu không mời bạn đọc tham khảo phân tích và lời giải sau đây.

Phân tích:

Điều đầu tiên ở bài toán này khác với các bài toán trên là số các điểm cố định ban đầu quá lớn. Có tới 6 điểm là A, B, C, O_1, O_2, O_3. Điều này sẽ khiến cho bạn đọc không tránh khỏi cảm giác "bối rối" vì không biết nên lấy những điểm nào để cho vào hệ điểm. Liệu hệ điểm trong bài toán này gồm mấy điểm? Để tìm câu trả lời, các bạn hãy cùng tôi quay trở lại bài toán 1. Trong bài toán 1, để chứng minh T nằm trên A_1B_1 thì ta phải tạo ra $\overrightarrow{TA_1}$ và $\overrightarrow{TB_1}$. Các bạn hãy chú ý cách mà chúng ta đã tạo ra các vectơ này, phương pháp mà chúng ta sử dụng đó là thông qua ba điểm thẳng hàng để biểu diễn một vectơ qua hai vectơ còn lại. Ví dụ với O, O_1, A_1 thẳng hàng, ta đã biểu diễn được $\overrightarrow{TA_1}$ qua $\overrightarrow{TO}$, $\overrightarrow{TO_1}$; với O_2, O_3, B_1 thẳng hàng ta đã tạo ra được $\overrightarrow{TB_1}$ từ hai vectơ $\overrightarrow{TO_2}, \overrightarrow{TO_3}$. Do vậy, hệ điểm là $\{O, O_1, O_2, O_3\}$. Điều mà chúng ta rút ra ở đây là để tạo ra $\overrightarrow{TM}$ thì ta phải thông qua hai điểm khác thẳng hàng với M; và hai điểm đó sẽ được cho vào hệ điểm. Như thế ở bài toán này, để chứng minh T thuộc AD thì ta phải tạo ra $\overrightarrow{TA}$ và $\overrightarrow{TD}$, và do đó phải tìm ra hai điểm thẳng hàng với D và hai điểm thẳng hàng với A. Hai điểm thẳng hàng với D thì hiển nhiên là O_2, O_3, vậy còn hai điểm thẳng hàng với A thì sao? Nếu tinh ý, chúng ta sẽ thấy AO_1 là tia phân giác của góc BAC, vì thế nếu gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì ta sẽ có A, O_1, I thẳng hàng và điều này có tính áp dụng chung khi mà B, O_2, I và C, O_3, I đều thẳng hàng. Do đó ta đã tìm được hai bộ ba điểm thẳng hàng là A, O_1, I và D, O_2, O_3 để tạo ra các vectơ $\overrightarrow{TA}$ và $\overrightarrow{TD}$. Và cũng theo phân tích bên trên ta thấy ngay O_1, I và O_2, O_3 được cho



vào hệ điểm. Như vậy hệ điểm ở đây phải là $\{I, O_1, O_2, O_3\}$. Gọi $\{x, y, z, t\}$ là các hệ số tương ứng. Gọi r, r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính các đường tròn (I) nội tiếp tam giác, (O_1), (O_2), (O_3).

Đến đây các bước tiếp theo được tiến hành đúng như ở bài toán 1.

Do A, O_1, I thẳng hàng nên ta có:

$$\overrightarrow{TO_1} = \frac{\overline{IO_1}}{\overline{IA}}\overrightarrow{TA} + \frac{\overline{AO_1}}{\overline{AI}}\overrightarrow{TI}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{TA} = \frac{\overline{IA}}{\overline{IO_1}}\overrightarrow{TO_1} - \frac{\overline{IA}}{\overline{IO_1}}.\frac{\overline{AO_1}}{\overline{AI}}\overrightarrow{TI}$$

$$= \frac{\overline{IA}}{\overline{IO_1}}\overrightarrow{TO_1} + \frac{\overline{AO_1}}{\overline{IO_1}}\overrightarrow{TI}.$$

Như vậy $x : y = \dfrac{\overline{AO_1}}{\overline{IA}}$. Hạ O_1H và IK vuông góc với AC. Theo định lý Thales thì ta có:

$$\frac{\overline{AO_1}}{\overline{IA}} = -\frac{\overline{AO_1}}{\overline{AI}} = -\frac{\overline{O_1H}}{\overline{IK}} = -\frac{r_1}{r} = -\frac{1}{r} : \frac{1}{r_1}.$$

Do D, O_2, O_3 thẳng hàng nên ta có:

$$\overrightarrow{TD} = \frac{\overline{O_2D}}{\overline{O_2O_3}}\overrightarrow{TO_3} + \frac{\overline{O_3D}}{\overline{O_3O_2}}\overrightarrow{TO_2}.$$

Như vậy: $z:t=-\dfrac{\overline{O_3D}}{\overline{O_2D}}=\dfrac{r_3}{r_2}=\dfrac{1}{r_2}:\dfrac{1}{r_3}.$

Đến đây dễ thấy các hệ số tương ứng là

$$\left\{-\frac{1}{r};\frac{1}{r_1};\frac{1}{r_2};\frac{1}{r_3}\right\}.$$

Lời giải. Gọi r, r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính các đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, (O_1), (O_2), (O_3). Gọi T là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{I,O_1,O_2,O_3\}$ với các hệ số tương ứng $\left\{-\frac{1}{r};\frac{1}{r_1};\frac{1}{r_2};\frac{1}{r_3}\right\}$. Như thế ta có:

$$-\frac{1}{r}\overrightarrow{TI}+\frac{1}{r_1}\overrightarrow{TO_1}+\frac{1}{r_2}\overrightarrow{TO_2}+\frac{1}{r_3}\overrightarrow{TO_3}=\vec{0}.$$

Do A, O_1, I thẳng hàng nên ta có:

$$\overrightarrow{TO_1}=\frac{\overline{IO_1}}{\overline{IA}}\overrightarrow{TA}+\frac{\overline{AO_1}}{\overline{AI}}\overrightarrow{TI}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{TA}=\frac{\overline{IA}}{\overline{IO_1}}\overrightarrow{TO_1}-\frac{\overline{IA}}{\overline{IO_1}}.\frac{\overline{AO_1}}{\overline{AI}}\overrightarrow{TI}$$

$$=\frac{\overline{IA}}{\overline{IO_1}}\overrightarrow{TO_1}+\frac{\overline{AO_1}}{\overline{IO_1}}\overrightarrow{TI}$$

$$=\frac{\overline{IA}}{\overline{IO_1}}\left(\overrightarrow{TO_1}+\frac{\overline{IO_1}}{\overline{IA}}.\frac{\overline{AO_1}}{\overline{IO_1}}\overrightarrow{TI}\right)$$

$$=\frac{\overline{IA}}{\overline{IO_1}}\left(\overrightarrow{TO_1}+\frac{\overline{AO_1}}{\overline{IA}}\overrightarrow{TI}\right)=\frac{\overline{IA}}{\overline{IO_1}}\left(\overrightarrow{TO_1}+\frac{-r_1}{r}\overrightarrow{TI}\right)$$

$$=\frac{\overline{IA}.r_1}{\overline{IO_1}}\left(\frac{1}{r_1}\overrightarrow{TO_1}-\frac{1}{r}\overrightarrow{TI}\right).$$

Do D, O_2, O_3 thẳng hàng nên ta có:

$$\overrightarrow{TD}=\frac{\overline{O_2D}}{\overline{O_2O_3}}\overrightarrow{TO_3}+\frac{\overline{O_3D}}{\overline{O_3O_2}}\overrightarrow{TO_2}$$

$$=\frac{\overline{O_2D}}{\overline{O_2O_3}}\left(\overrightarrow{TO_3}+\frac{\overline{O_2O_3}}{\overline{O_2D}}.\frac{\overline{O_3D}}{\overline{O_3O_2}}\overrightarrow{TO_2}\right)$$

$$=\frac{\overline{O_2D}}{\overline{O_2O_3}}\left(\overrightarrow{TO_3}-\frac{\overline{O_3D}}{\overline{O_2D}}\overrightarrow{TO_2}\right)$$

$$=\frac{\overline{O_2D}}{\overline{O_2O_3}}\left(\overrightarrow{TO_3}-\frac{-r_3}{r_2}\overrightarrow{TO_2}\right)$$

$$=\frac{\overline{O_2D}.r_3}{\overline{O_2O_3}}\left(\frac{1}{r_3}\overrightarrow{TO_3}+\frac{1}{r_2}\overrightarrow{TO_2}\right).$$

Chú ý rằng: $-\left(\frac{1}{r_1}\overrightarrow{TO_1}-\frac{1}{r}\overrightarrow{TI}\right)=\frac{1}{r_3}\overrightarrow{TO_3}+\frac{1}{r_2}\overrightarrow{TO_2}$

nên ta suy ra: $\dfrac{\overline{O_2O_3}}{\overline{O_2D}.r_3}\overrightarrow{TD}=-\dfrac{\overline{IO_1}}{\overline{IA}.r_1}\overrightarrow{TA}.$

Điều này chứng tỏ T nằm trên AD. Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được T cũng nằm trên BE và CF. Vậy AD, BE, CF đồng quy.

Như vậy, bằng kiến thức về tâm tỉ cự, chúng ta đã giải được rất nhiều bài toán khó liên quan đến việc chứng minh đồng quy. Các bạn có thể tham khảo thêm bài viết của chúng tôi trên TH&TT số 509 tháng 11 năm 2019 để hoàn thiện hơn kỹ năng sử dụng vectơ trong chứng minh đồng quy của các bạn. Sau đây xin mời các bạn áp dụng kiến thức đã học để giải quyết các bài toán tự luyện.

III. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi I, J, K lần lượt là các điểm đối xứng với M qua trung điểm của EF, FD, DE. Chứng minh rằng AI, BJ, CK đồng quy.

Bài 2. Cho tam giác ABC có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho $MC=2MB$, $NC=3NA$, $PA=2PB$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của NP, PM; F là điểm trên đoạn thẳng MN sao cho $FN = 3FM$. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN
BÀI SỐ 90

PROBLEM. *Consider the set S of all right triangles where two sides making the right angle have lengths of natural numbers. Show that the product of the lengths of the hypothenuses of 2 arbitrary triangles in S is again the length of the hypothenuse of some triangle in S (notice that, we are focusing on the values, not the unit, of the lengths).*

Solution. Equivalently, we have to show that for any 4 positive integers m,n,p,q, there always exist 2 positive integers a,b so that

$$\sqrt{m^2+n^2}\times\sqrt{p^2+q^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

Or $\left(m^2+n^2\right)\left(p^2+q^2\right)=a^2+b^2$ (*).

Consider the complex numbers $z=m+ni$ and $w=p+qi$. We can prove the following two general facts

(1) $m^2+n^2=z.\overline{z}$, where $\overline{z}:=m-ni$ is the conjugate of z;

(2) the conjugate of a product is a product of two conjugates $\overline{z.w}=\overline{z}.\overline{w}$.

Now, denote by L the left-hand side of (*). By (1), we can write $L=\left(z.\overline{z}\right)\left(w.\overline{w}\right)$.

We can rearrange to get $L=\left(z.w\right)\left(\overline{z}.\overline{w}\right)$. But using (2) we get $L=\left(z.w\right)\left(\overline{z.w}\right)$.

We compute the product zw; and assume that $zw=a+bi$ where a, b are positive integers. By (1) again, $L=a^2+b^2$ (q.e.d.)

TỪ VỰNG

right triangle	: *tam giác vuông*
hypothenuse	: *cạnh huyền*
unit	: *đơn vị đo*
conjugate	: *(số phức) liên hợp*

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(*College of Science–Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 88

BÀI TOÁN. *Cho S_n là tổng của n số lẻ đầu tiên:*

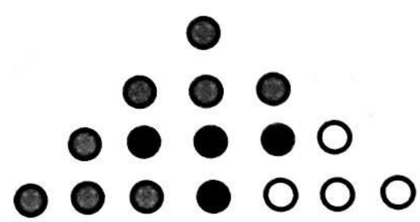
$$S_n = 1 + 3 + \ldots + (2n-1).$$

Chứng minh rằng $S_{2n} = 4S_n$.

Lời giải. Chúng ta có thể tính trực tiếp S_n và S_{2n} bằng cách sử dụng công thức tính tổng của một cấp số cộng, ta được $S_n = n^2$ và $S_{2n} = (2n)^2 = 4n^2$. Vì vậy ta có đẳng thức cần chứng minh.

Bây giờ ta trình bày một phương pháp mang tính hình ảnh để chứng minh nhận định trên.

Trong hình bên, S_4 được chia thành 4 phần bằng nhau, mỗi phần chính là S_2. Tương tự ta có thể chia S_{2n} thành 4 phần bằng nhau, mỗi phần chính là S_n.



Lưu ý: Bài toán và lời giải trên được sưu tầm trên trang: *mathschallenge.net*.

Nhận xét. Các bạn *Nguyễn Quốc Hoàng Anh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Trần Thị Thanh Thư*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, **Thừa Thiên Huế;** *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm. Xin hoan nghênh các bạn.

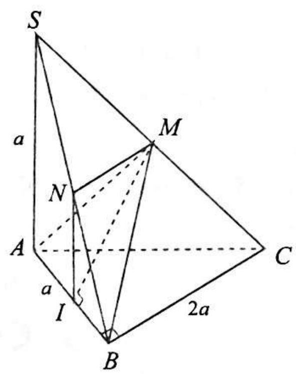
HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 69. *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính côsin góc tạo bởi hai mặt phẳng (MAB) và (SAB).*

Lời giải. Gọi $\varphi = \left(\widehat{(MAB),(SAB)}\right)$.

Cách 1. $(MAB)\cap(SAB) = AB$. Gọi I, N lần lượt là trung điểm của AB và $SB \Rightarrow IN \,//\, SA$. Mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow IN \perp (ABC) \Rightarrow NI \perp AB$ (1).



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Lại có: $MN \,//\, BC$

$\Rightarrow MN \perp (SAB)$

$\Rightarrow MN \perp AB$ (2).

Từ (1), (2) suy ra:

$\Rightarrow AB \perp (MNI)$

$\Rightarrow MI \perp AB$ (3). Từ (1), (3) suy ra:

$$\left(\widehat{(MAB),(SAB)}\right) = (MI, NI) = \widehat{MIN}.$$

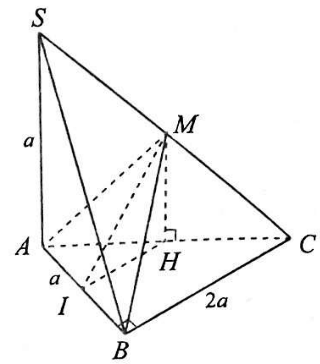
Ta có: $NI = \dfrac{1}{2}SA = \dfrac{a}{2}$ và $MN = \dfrac{1}{2}BC = a$

$\Rightarrow MI = \sqrt{NI^2 + NM^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Vậy $\cos\varphi = \cos\widehat{MIN} = \dfrac{NI}{MI} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Nhận xét. Để chứng minh $MI \perp AB$ ta có thể lập luận như sau: Các tam giác SAC và SBC lần lượt vuông tại A và B, có M là trung điểm của $SC \Rightarrow AM = BM = \dfrac{SC}{2} \Rightarrow \Delta MAB$ cân đỉnh $M \Rightarrow MI \perp AB$.

Cách 2. Ta có: $\sin\varphi = \dfrac{d(S,(MAB))}{d(S,AB)}$.



$d(S,AB) = SA = a$. Kẻ $MH \perp AC$ ($H \in AC$). Tam giác MAB cân đỉnh M suy ra:

$S_{\Delta MAB} = \dfrac{1}{2}AB.MI$

$= \dfrac{1}{2}AB.\sqrt{MH^2 + HI^2}$

$= \dfrac{a^2\sqrt{5}}{4}$

Lại có:

$$\frac{V_{SABM}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow V_{SABM} = \dfrac{1}{2}V_{SABC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.SA.\dfrac{1}{2}.AB.BC = \dfrac{a^3}{6}$

$\Rightarrow d(S,(MAB)) = \dfrac{3V_{SABM}}{S_{\Delta MAB}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Vậy $\sin\varphi = \dfrac{\frac{2a}{\sqrt{5}}}{a} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Cách 3 *(Sử dụng các kết quả ở 2 cách trên)*(hình cách 2) Ta có: $\sin\varphi = \dfrac{3V_{SABM}.AB}{2S_{SAB}.S_{ABM}}$

$V_{SABM} = \dfrac{a^3}{6}, AB = a, S_{\Delta SAB} = \dfrac{a^2}{2}$ $S_{ABM} = \dfrac{a^2\sqrt{5}}{4}$

$\Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Cách 4 (hình cách 2) Gọi $\alpha = \left(\widehat{(MAB),(ABC)}\right)$.

Theo cách 2, dễ nhận ra

$$\alpha = (IM, IH) = \widehat{MIH}.$$

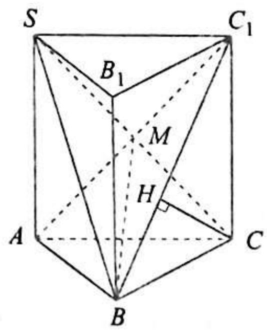
Ta có: $\left(\widehat{(SAB),(ABC)}\right) = 90° \Rightarrow \varphi = 90° - \alpha$

$\Rightarrow \cos\varphi = \sin\alpha = \dfrac{MH}{MI} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Cách 5. Dựng hình lăng trụ đứng $ABC.SB_1C_1$, ta có: $(MAB) \equiv (C_1AB)$ và $(SAB) \equiv (SABB_1)$

Vậy $\left(\widehat{(MAB),(SAB)}\right)$

$= \left(\widehat{(C_1AB),(SABB_1)}\right) = \varphi.$



Vì $\begin{cases} BC \perp AB \\ BB_1 \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp (BCC_1B_1)$

$\Rightarrow BC_1 \perp AB$

$\Rightarrow \varphi = (BB_1, BC_1) = \left(\widehat{B_1BC_1}\right).$

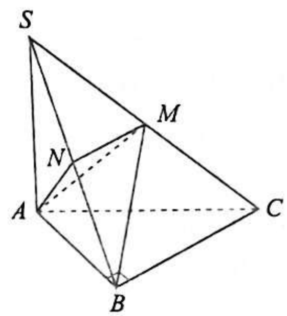
Ta có: $BB_1 = SA = a, B_1C_1 = BC = 2a \Rightarrow BC_1 = a\sqrt{5}.$

Vậy $\cos\varphi = \cos\widehat{B_1BC_1} = \dfrac{BB_1}{BC_1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

Cách 6. Gọi N là trung điểm của SB. Theo cách 1, ta có:

$MN \perp (SAB)$.

Vậy ΔABN là hình chiếu của ΔMAB trên (SAB)



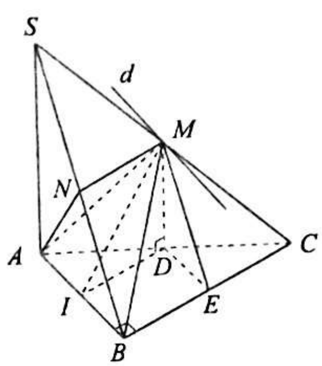
$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta ABN}}{S_{\Delta ABM}}.$

$S_{\Delta ABN} = \dfrac{1}{2}S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2}{4}, S_{\Delta ABM} = \dfrac{a^2\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

Cách 7. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AC và $BC \Rightarrow (MDE)//(SAB)$

$\Rightarrow \left(\widehat{(MAB),(SAB)}\right) = \left(\widehat{(MAB),(MDE)}\right) = \varphi.$

Vì $M \in (MAB), M \in (MDE), AB // DE$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (MAB) và (MDE) là đường thẳng d đi qua M và song song với AB, DE..



Ta có: $\begin{cases} MI \perp d \\ MD \perp d \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi = (NI, MD) = \widehat{IMD} \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{ID}{MD} = \dfrac{a}{\frac{a}{2}} = 2$

$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

Cách 8. Dựng hình chữ nhật $ABCD$. Dựng hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có:

$A(0;0;0)$,

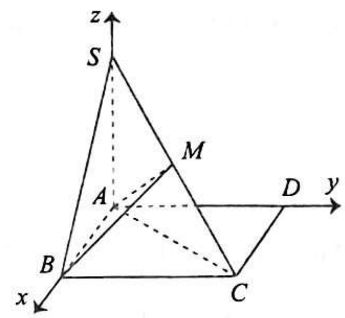
$B(a;0;0)$,

$D(0;2a;0)$,

$S(0;0;a)$

$\Rightarrow C(a;2a;0)$

$\Rightarrow M\left(\dfrac{a}{2};a;\dfrac{a}{2}\right).$



Gọi $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ lần lượt là các vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (ABM).

$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{BC} = (0;2a;0), \overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right] = \left(0;\dfrac{a^2}{2};a^2\right)$

$\Rightarrow \cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

NGUYỄN HỮU VĂN

(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)

Nhận xét. Bạn *Phan Đại Hoàng*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An** đóng góp 1 cách giải như cách 1, bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đóng góp 1 cách giải như cách 8 của bạn *Nguyễn Hữu Văn*. Xin hoan nghênh hai bạn.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 71 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.4.2023.

BÀI TOÁN 71. *Cho m số thực dương $a_1, a_2, ..., a_m$, $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ và $S = a_1 + a_2 + ... + a_m$. Chứng minh rằng* $\dfrac{a_1}{S-a_1} + \dfrac{a_2}{S-a_2} + ... + \dfrac{a_m}{S-a_m} \geq \dfrac{m}{m-1}.$

ĐÀO VĂN NAM

(GV THPT Phương Nam, Định Công, Hà Nội)

DU LỊCH THẾ GIỚI QUA CÁC BÀI TOÁN HAY

BÀI TOÁN 78 (Vô địch toán Hungary, 1997). *Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình*

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+...+(x+7)^3=y^3.$$

Lời giải.

Đặt $P(x)=x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+...+(x+7)^3$

$$=8x^3+84x^2+420x+784.$$

Nếu $x \geq 0$ thì

$$(2x+7)^3=8x^3+84x^2+294x+343<P(x)$$
$$<8x^3+120x^2+600x+1000=(2x+10)^3$$

do đó: $2x+7<y<2x+10$.

Suy ra: $y=2x+8$ hoặc $y=2x+9$.

Tuy nhiên các phương trình:

$$P(x)-(2x+8)^3=-12x^2+36x+272=0,$$

$$P(x)-(2x+9)^3=-24x^2-66x+55=0$$

không thể có bất cứ nghiệm nguyên nào. Vậy nếu $x \geq 0$ thì phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Ta xét trường hợp $x<0$.

Nhận xét. Vì $P(-x-7)=-P(x)$ nên $(x;\, y)$ là một nghiệm của phương trình $\Leftrightarrow$ $(-x-7;\, -y)$ cũng là một nghiệm của phương trình.

Do đó phương trình đã cho không có nghiệm nguyên nếu $-x-7 \geq 0$ hay $x \leq -7$.

Vậy ta chỉ cần xét $-6 \leq x \leq -1$.

Với $-3 \leq x \leq -1$ ta có:

$P(-1)=440$, không phải là một lập phương.

$P(-2)=216=6^3$;

$P(-3)=64=4^3$.

Suy ra $(-2;6)$ và $(-3;4)$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

Theo nhận xét trên thì $(-5;-6)$ và $(-4;-4)$ cũng là các nghiệm thỏa mãn $-6 \leq x \leq -1$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên $(x;\, y)$ là: $(-2;6)$, $(-3;4)$, $(-5;-6)$, $(-4;-4)$.

Nhận xét. Một số bạn không đưa ra nhận xét như lời giải trên nên phải xét nhiều trường hợp, do đó lời giải còn dài. Đặc biệt có bạn đã xét không hết các trường hợp nên dẫn đến mất nghiệm. Hoan nghênh các bạn sau có lời giải tốt: **Thanh Hóa:** *Nguyễn Minh An*, 9K, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Hải Triều*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thừa Thiên Huế:** *Trần Thị Thanh Thư*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định:** *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.4.2023.

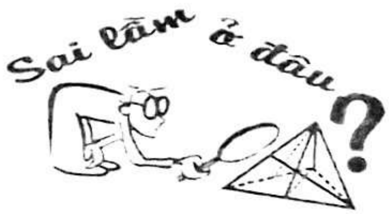
BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 80. *Có bao nhiêu số nguyên dương $n \leq 1000$ thỏa mãn*

$$\left[\frac{998}{n}\right]+\left[\frac{999}{n}\right]+\left[\frac{1000}{n}\right]$$

không chia hết cho 3?

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG?

(Đề đăng trên TH&TT số 543, tháng 9 năm 2022)

Phân tích sai lầm. Lời giải là không đúng ở bước: *Và theo cách đặt thì*

$$a=\sqrt{(x-1)^2+1} \Leftrightarrow a^2-1=(x-1)^2,$$

cho nên ta được $x-1=\sqrt{a^2-1}$.

Lẽ ra từ $a^2-1=(x-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=\sqrt{a^2-1} \\ x-1=-\sqrt{a^2-1} \end{array}\right.$.

Lời giải đúng. Ta biến đổi PT đã cho như sau

$$5x^2-10x=4(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2-2x+2)-4(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}+(x-1)^2=9.$$

Do đó ta được $\left(2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)\right)^2=9$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)=3 \\ 2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)=-3 \end{array}\right.$.

TH1: $2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)=3$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x+2}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ 4(x^2-2x+2)=(x+2)^2 \end{cases}.$$

Khi đó $4(x^2-2x+2)=(x+2)^2$

$$\Leftrightarrow 3x^2-12x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{6+2\sqrt{6}}{3} \\ x=\dfrac{6-2\sqrt{6}}{3} \end{array}\right..$$

So với điều kiện ta nhận cả hai nghiệm trên.

TH2: $2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)=-3$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x+2}=x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4 \\ 4(x^2-2x+2)=(x-4)^2 \end{cases}.$$

Ta có $4(x^2-2x+2)=(x-4)^2 \Leftrightarrow 3x^2-8=0$.

PT trên có nghiệm đều nhỏ hơn 4 nên bị loại.

Kết luận: PT có nghiệm $x=\dfrac{6\pm 2\sqrt{6}}{3}$.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm.

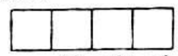
KIHIVI

ĐÁP ÁN NÀO ?

Trong một đề thi có câu hỏi sau đây: *Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho có đúng 2 chữ số lẻ và 2 chữ số lẻ đó luôn đứng cạnh nhau?*

A. 860 **B.** 408 **C.** 360 **D.** 240.

Bạn *Mai* đưa ra lập luận như sau: Ta xét một dãy gồm 4 ô như sau:



Mỗi số cần lập ứng với một cách chọn ra 4 phần tử của tập $\{0;2;4;6;a\}$ và hoán vị 4 phần tử vừa chọn vào 4 ô trên sao cho ô đầu tiên không phải chữ số 0, ô cuối cùng phải là chữ số chẵn, với

$$a\in\{13;31;15;51;35;53\}.$$

Bước 1: Chọn $a\in\{13;31;15;51;35;53\}$, có 6 cách chọn.

Bước 2: Trường hợp 1, chọn chữ số 0 để điền vào ô cuối cùng, có 1 cách. Số cách điền vào 3 ô đầu tiền bằng với số chỉnh hợp chập 3 của $\{2;4;6;a\}$ nên có A_4^3 cách.

Trường hợp 2, chọn chữ số 2 hoặc 4 hoặc 6 để điền vào ô cuối cùng, có 3 cách. Có 3 cách điền số vào ô đầu tiên, có A_3^2 cách điền số vào 2 ô ở giữa.

Số cách hoàn thành bước 2 là

$$1.A_4^3+3.3.A_3^2=24+54=68 \text{ cách.}$$

Vậy lập được tất cả $6.68=408$ số theo yêu cầu của bài toán. Chọn **B.**

Các bạn có đồng ý với lập luận của bạn Mai không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 549 (3.2023)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

TIN TỨC – SỰ KIỆN

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÊ DUYỆT SÁCH GIÁO KHOA LỚP 8

Sau thời gian dài nỗ lực, khẩn trương thực hiện công tác biên soạn, biên tập sách giáo khoa của lớp 8 theo chương trình giáo dục phổ thông 2018, các đầu sách giáo khoa của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đã được Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo Nguyễn Kim Sơn phê duyệt cụ thể như sau:

DANH MỤC
Sách giáo khoa lớp 8 sử dụng trong cơ sở giáo dục phổ thông của NXB Giáo dục Việt Nam
(Phê duyệt theo Quyết định 4606/QĐ-BGDĐT ngày 28 tháng 12 năm 2022)

TT	Tên sách	Tác giả
1.	Ngữ văn 8, tập một (Chân trời sáng tạo)	Nguyễn Thị Hồng Nam, Nguyễn Thành Thi (đồng Chủ biên), Nguyễn Thành Ngọc Bảo, Trần Lê Duy, Phan Mạnh Hùng, Tăng Thị Tuyết Mai, Nguyễn Thị Ngọc Thuý.
	Ngữ văn 8, tập hai (Chân trời sáng tạo)	Nguyễn Thị Hồng Nam, Nguyễn Thành Thi (đồng Chủ biên), Nguyễn Thành Ngọc Bảo, Dương Thị Hồng Hiếu, Tăng Thị Tuyết Mai, Nguyễn Thị Minh Ngọc, Nguyễn Thị Ngọc Thuý, Phan Thu Vân.
2.	Ngữ văn 8, tập một (Kết nối tri thức với cuộc sống)	Bùi Mạnh Hùng (Tổng Chủ biên); Nguyễn Thị Ngân Hoa, Đặng Lưu (đồng Chủ biên), Dương Tuấn Anh, Lê Trà My, Nguyễn Thị Nương, Nguyễn Thị Hải Phương.
	Ngữ văn 8, tập hai (Kết nối tri thức với cuộc sống)	Bùi Mạnh Hùng (Tổng Chủ biên), Nguyễn Thị Ngân Hoa, Đặng Lưu (đồng Chủ biên), Phan Huy Dũng, Nguyễn Thị Mai Liên, Lê Thị Minh Nguyệt, Nguyễn Thị Minh Thương.
3.	Toán 8, tập một (Kết nối tri thức với cuộc sống)	Hà Huy Khoái (Tổng Chủ biên), Cung Thế Anh, Nguyễn Huy Đoan (đồng Chủ biên), Nguyễn Cao Cường, Trần Mạnh Cường, Doãn Minh Cường, Trần Phương Dung, Sĩ Đức Quang, Lưu Bá Thắng, Đặng Hùng Thắng.
	Toán 8, tập hai (Kết nối tri thức với cuộc sống)	Hà Huy Khoái (Tổng Chủ biên), Cung Thế Anh, Nguyễn Huy Đoan (đồng Chủ biên), Nguyễn Cao Cường, Trần Mạnh Cường, Doãn Minh Cường, Trần Phương Dung, Sĩ Đức Quang, Lưu Bá Thắng, Đặng Hùng Thắng.
4.	Toán 8, tập một (Chân trời sáng tạo)	Trần Nam Dũng (Tổng Chủ biên), Trần Đức Huyên, Nguyễn Thành Anh (đồng Chủ biên), Nguyễn Cam, Nguyễn Văn Hiển, Ngô Hoàng Long, Huỳnh Ngọc Thanh.
	Toán 8, tập hai (Chân trời sáng tạo)	Trần Nam Dũng (Tổng Chủ biên), Trần Đức Huyên, Nguyễn Thành Anh (đồng Chủ biên), Nguyễn Cam, Nguyễn Văn Hiển, Ngô Hoàng Long, Huỳnh Ngọc Thanh.
5.	Tiếng Anh 8 Global Success	Hoàng Văn Vân (Tổng Chủ biên), Lương Quỳnh Trang (Chủ biên), Nguyễn Thị Chi, Lê Kim Dung, Phan Chí Nghĩa, Nguyễn Thụy Phương Lan, Trần Thị Hiếu Thủy.
6.	Tiếng Anh 8 Friends Plus	Trần Cao Bội Ngọc (Chủ biên), Trần Kim Duyên, Trần Nguyễn Thụy Thoại Lan.

7.	Khoa học tự nhiên 8 (Kết nối tri thức với cuộc sống)	Vũ Văn Hùng (Tổng Chủ biên), Mai Văn Hưng, Lê Kim Long, Vũ Trọng Rỹ (đồng Chủ biên), Nguyễn Văn Biên, Nguyễn Hữu Chung, Nguyễn Thu Hà, Lê Trọng Huyền, Nguyễn Thế Hưng, Nguyễn Xuân Thành, Bùi Gia Thịnh, Nguyễn Thị Thuần, Mai Thị Tình, Vũ Thị Minh Tuyến, Nguyễn Văn Vịnh.
8.	Lịch sử và Địa lí 8 (Chân trời sáng tạo)	Nguyễn Kim Hồng (Tổng Chủ biên phần Địa lí), Phan Văn Phú (Chủ biên phần Địa lí), Trần Ngọc Điệp, Tạ Đức Hiếu, Hoàng Thị Kiều Oanh, Huỳnh Phẩm Dũng Phát, Phạm Đỗ Văn Trung, Hà Bích Liên (Chủ biên phần Lịch sử), Lê Phụng Hoàng, Nhữ Thị Phương Lan, Trần Viết Ngạc, Trần Văn Nhân, Nguyễn Văn Phượng, Hồ Thanh Tâm.
9.	Lịch sử và Địa lí 8 (Kết nối tri thức với cuộc sống)	Vũ Minh Giang (Tổng Chủ biên xuyên suốt phần Lịch sử), Nghiêm Đình Vỳ (Tổng Chủ biên cấp THCS phần Lịch sử), Trịnh Đình Tùng (Chủ biên phần Lịch sử), Nguyễn Ngọc Cơ, Đào Tuấn Thành, Hoàng Thanh Tú, Đào Ngọc Hùng (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên phần Địa lí), Bùi Thị Thanh Dung, Phạm Thị Thu Phương, Phí Công Việt.
10.	Giáo dục công dân 8 (Kết nối tri thức với cuộc sống)	Nguyễn Thị Toan (Tổng Chủ biên), Trần Thị Mai Phương (Chủ biên), Nguyễn Hà An, Nguyễn Thị Hoàng Anh, Nguyễn Thị Thọ.
11.	Giáo dục công dân 8 (Chân trời sáng tạo)	Huỳnh Văn Sơn (Tổng Chủ biên), Bùi Hồng Quân (Chủ biên), Đào Lê Hòa An, Trần Tuấn Anh, Nguyễn Thanh Huân, Đỗ Công Nam, Cao Thành Tấn.
12.	Âm nhạc 8 (Kết nối tri thức với cuộc sống)	Hoàng Long (Tổng Chủ biên), Vũ Mai Lan (Chủ biên), Bùi Minh Hoa, Trần Bảo Lân, Đặng Khánh Nhật, Nguyễn Thị Thanh Vân.
13.	Âm nhạc 8 (Chân trời sáng tạo)	Hồ Ngọc Khải, Nguyễn Thị Tố Mai (đồng Tổng Chủ biên), Nguyễn Văn Hảo (Chủ biên), Lương Diệu Ánh, Nguyễn Thị Ái Chiêu, Trần Đức Lâm, Lương Minh Tân.
14.	Mĩ thuật 8 (Kết nối tri thức với cuộc sống)	Đinh Gia Lê (Tổng Chủ biên), Đoàn Thị Mỹ Hương (Chủ biên), Phạm Duy Anh, Trương Triều Dương.
15.	Mĩ thuật 8 (Chân trời sáng tạo bản 1)	Nguyễn Thị Nhung (Tổng Chủ biên), Nguyễn Tuấn Cường (Chủ biên), Nguyễn Dương Hải Đăng, Đỗ Thị Kiều Hạnh, Nguyễn Đức Sơn, Đàm Thị Hải Uyên, Trần Thị Vân.
16.	Mĩ thuật 8 (Chân trời sáng tạo bản 2)	Nguyễn Thị May (Tổng Chủ biên), Hoàng Minh Phúc (Chủ biên), Nguyễn Văn Bình, Đào Thị Hà, Trần Đoàn Thanh Ngọc.
17.	Tin học 8 (Kết nối tri thức với cuộc sống)	Nguyễn Chí Công (Tổng Chủ biên), Hà Đặng Cao Tùng (Chủ biên), Phan Anh, Nguyễn Hải Châu, Hoàng Thị Mai, Nguyễn Thị Hoài Nam.

18.	Tin học 8 (Chân trời sáng tạo)	Quách Tất Kiên (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên), Hồ Thị Hồng, Quách Tất Hoàn, Doãn Thị Ái Phương, Nguyễn Anh Quân, Đào Thị Thêu, Nguyễn Thanh Tùng.
19.	Công nghệ 8 (Chân trời sáng tạo)	Bùi Văn Hồng (Tổng Chủ biên), Nguyễn Thị Cẩm Vân (Chủ biên), Nguyễn Thị Lưỡng, Nguyễn Thị Thúy, Trương Minh Trí, Phạm Huy Tuấn.
20.	Công nghệ 8 (Kết nối tri thức với cuộc sống)	Lê Huy Hoàng (Tổng Chủ biên), Đặng Văn Nghĩa (Chủ biên), Đặng Thị Thu Hà, Nguyễn Hồng Sơn, Phạm Văn Sơn, Nguyễn Thanh Trịnh, Vũ Thị Ngọc Thúy.
21.	Giáo dục thể chất 8 (Kết nối tri thức với cuộc sống)	Nguyễn Duy Quyết (Tổng Chủ biên), Hồ Đắc Sơn (Chủ biên), Vũ Tuấn Anh, Nguyễn Xuân Đoàn, Nguyễn Thị Hà, Lê Trường Sơn Chấn Hải, Trần Mạnh Hùng, Nguyễn Thành Trung.
22.	Hoạt động Trải nghiệm, hướng nghiệp 8 (Chân trời sáng tạo bản 1)	Đinh Thị Kim Thoa (Tổng Chủ biên), Lại Thị Yến Ngọc (Chủ biên), Nguyễn Hồng Kiên, Nguyễn Thị Bích Liên, Trần Thị Quỳnh Trang, Phạm Đình Văn.
23.	Hoạt động Trải nghiệm, hướng nghiệp 8 (Kết nối tri thức với cuộc sống)	Lưu Thu Thủy (Tổng Chủ biên), Trần Thị Thu (Chủ biên), Nguyễn Thanh Bình, Dương Thị Thu Hà, Nguyễn Thu Hương, Nguyễn Thị Việt Nga, Lê Thị Thanh Thủy.
24.	Hoạt động Trải nghiệm, hướng nghiệp 8 (Chân trời sáng tạo bản 2)	Đinh Thị Kim Thoa, Vũ Phương Liên (đồng Chủ biên), Trần Bảo Ngọc, Mai Thị Phương, Đồng Văn Toàn, Huỳnh Mộng Tuyền.

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT3M23
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2023

Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng