TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Tạp chí Toán học & Văn học trong nhà trường

Số 550
Tháng 4 - 2023
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 60 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

Democritus giữa những người Abderitans
Tranh sơn dầu của François-André Vincent, 1790;
trong Bảo tàng Nghệ thuật Los Angeles.

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

Năm 2010
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 240.000 đồng

Năm 2022
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 260.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ỨNG DỤNG TỪ MỘT ĐẲNG THỨC QUEN THUỘC TRONG CÁC ĐỀ THI VÀO LỚP 10, THPT CHUYÊN

VƯƠNG ĐỨC THUẬN
(GV THCS Bình Minh, TP. Hải Dương)

Trong kì thi vào các trường THPT chuyên vừa qua chúng tôi nhận thấy có một đẳng thức quen thuộc đã được sử dụng rất nhiều để giải những bài toán trong các đề thi. Bài viết này xin giới thiệu một vài ứng dụng của đẳng thức đó thông qua một số thí dụ.

1. ĐẲNG THỨC CƠ BẢN VÀ CÁC HỆ QUẢ

$$a(a+b+c)+bc=a^2+ab+ac+bc$$
$$=(a+b)(a+c).$$

- **Hệ quả 1:** Nếu $a+b+c=1$ thì
$$a+bc=(a+b)(a+c).$$
- **Hệ quả 2:** Nếu $a+b+c=k$ thì
$$ka+bc=(a+b)(a+c).$$
- **Hệ quả 3:** Nếu $ab+bc+ca=1$ thì
$$a^2+1=(a+b)(a+c).$$
- **Hệ quả 4:** Nếu $ab+bc+ca=k$ thì
$$a^2+k=(a+b)(a+c).$$

Và các hệ quả khác tương tự như các hệ quả trên.

2. ỨNG DỤNG

2.1. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Bài 1 (Đề thi vào THPT chuyên tỉnh Lào Cai năm học 2022 - 2023). *Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn xy + yz + zx = 12. Chứng minh:*

$$x\sqrt{\frac{(12+y^2)(12+z^2)}{12+x^2}}+y\sqrt{\frac{(12+x^2)(12+z^2)}{12+y^2}}+z\sqrt{\frac{(12+x^2)(12+y^2)}{12+z^2}}=24.$$

Lời giải. Theo hệ quả 4 ta có:

$$12+x^2=(x+y)(z+x);$$
$$12+y^2=(x+y)(y+z);$$
$$12+z^2=(z+x)(y+z).$$

Khi đó: $x\sqrt{\frac{(12+y^2)(12+z^2)}{12+x^2}}+y\sqrt{\frac{(12+x^2)(12+z^2)}{12+y^2}}+z\sqrt{\frac{(12+x^2)(12+y^2)}{12+z^2}}$

$$=x\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)^2(z+x)}{(x+y)(z+x)}}+y\sqrt{\frac{(x+y)(z+x)^2(y+z)}{(x+y)(y+z)}}+z\sqrt{\frac{(x+y)^2(y+z)(z+x)}{(z+x)(y+z)}}$$

$$=x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)=2(xy+yz+zx)$$
$$=2.12=24.$$

Bài 2. *Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z = xyz. Chứng minh:*

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{3z}{1+z^2}=\frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Lời giải. Ta có:

$$\frac{x}{1+x^2}=\frac{xyz}{yz+x.xyz}=\frac{xyz}{yz+x(x+y+z)}$$
$$=\frac{xyz}{(x+y)(z+x)}.$$

Tương tự: $\frac{2y}{1+y^2}=\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)}$;

$$\frac{3z}{1+z^2}=\frac{3xyz}{(y+z)(z+x)}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{1+x^2}+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{3z}{1+z^2}$$
$$=\frac{xyz}{(x+y)(z+x)}+\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)}+\frac{3xyz}{(z+x)(y+z)}$$
$$=\frac{xyz(y+z+2z+2x+3x+3y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$
$$=\frac{xyz(5x+4y+3z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

2.2. TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Bài 3 (Đề thi vào THPT chuyên Hà Nội năm học 2022 - 2023). *Cho các số thực a, b, c thoả mãn:* $ab + bc + ca = 1$. *Tính giá trị biểu thức:*

$$P = \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} - \frac{2}{a+b+c-abc}.$$

Lời giải. Ta có: $1 + a^2 = (a+b)(c+a)$;

$$1 + b^2 = (a+b)(b+c);$$

$$1 + c^2 = (c+a)(b+c)$$

$$\Rightarrow P = \frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)} - \frac{2}{a+b+c-abc}$$

$$= \frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(a+c)} - \frac{2}{a+b+c-abc}$$

$$= 2\left[\frac{1}{(a+b)(b+c)(a+c)} - \frac{1}{a+b+c-abc}\right].$$

Xét $(a+b)(b+c)(c+a) - a - b - c + abc$

$$= a^2b + a^2c + ab^2 + abc + abc + ac^2 + b^2c + bc^2 - a - b - c + abc$$

$$= (a^2b + a^2c + abc) + (ab^2 + abc + b^2c) + (ac^2 + bc^2 + abc) - a - b - c$$

$$= a(ab+bc+ca) + b(ab+bc+ca) + c(ab+bc+ca) - a - b - c = 0.$$

Vậy $P = 0$.

Bài 4 (Đề thi vào THPT chuyên Hà Nội năm học 2022 - 2023). *Cho 3 số thực a, b, c dương thoả mãn:* $abc = 3$. *Tính giá trị biểu thức:*

$$P = \frac{1}{a^2(b+c)+3} + \frac{1}{b^2(c+a)+3} + \frac{1}{c^2(a+b)+3}.$$

Lời giải. Ta có:

$$a^2(b+c) + 3 = a^2(b+c) + abc = a(ab+ac+bc).$$

Tương tự:

$$b^2(a+c) + 3 = b(ab+ac+bc);$$

$$c^2(a+b) + 3 = c(ab+ac+bc).$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{a(ab+bc+ca)} + \frac{1}{b(ab+bc+ca)} + \frac{1}{c(ab+bc+ca)}$$

$$= \frac{ab+bc+ca}{abc(ab+bc+ca)} = \frac{1}{abc} = \frac{1}{3}.$$

2.3. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 5 (Đề thi vào THPT chuyên Thái Nguyên năm học 2022 - 2023). *Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn* $ab + bc + ca = abc$. *Tìm GTLN của biểu thức:* $P = \sqrt{\frac{a}{a+bc}} + \sqrt{\frac{b}{b+ac}} + \sqrt{\frac{c}{c+ab}}$.

Lời giải. Ta có:

$$\frac{a}{a+bc} = \frac{a^2}{a^2+abc} = \frac{a^2}{a^2+ab+bc+ca} = \frac{a^2}{(a+b)(a+c)}.$$

Tương tự: $\frac{b}{b+ca} = \frac{b^2}{(a+b)(b+c)}$;

$$\frac{c}{c+ab} = \frac{c^2}{(c+a)(b+c)}.$$

Khi đó:

$$P = \sqrt{\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{\frac{b^2}{(a+b)(b+c)}} + \sqrt{\frac{c^2}{(c+a)(b+c)}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số dương ta có:

$$P \le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+a} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b}\right)$$

$$\Leftrightarrow P \le \frac{1}{2}.3 \Leftrightarrow P \le \frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 3$.

Vậy $\max P = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow a = b = c = 3$.

Ở một số bài ta phải biến đổi giả thiết, đổi biến để làm xuất hiện các đẳng thức quen thuộc. Ta xét thí dụ sau

Bài 6 (Đề thi vào THPT chuyên Đăk Lăk năm học 2022 - 2023). *Cho 3 số thực a, b, c dương thoả mãn: $a + 2b + 3c = 24abc$. Chứng minh:*

$$\frac{2b}{a\sqrt{16b^2+1}} + \frac{3c}{2b\sqrt{36c^2+1}} + \frac{a}{3c\sqrt{4a^2+1}} \ge \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Đối với bài toán này, để làm xuất hiện đẳng thức quen thuộc ta biến đổi giả thiết

$$a + 2b + 3c = 24abc \Leftrightarrow \frac{1}{6bc} + \frac{1}{3ac} + \frac{1}{2ab} = 4.$$

Đặt $x = \dfrac{1}{a};\ y = \dfrac{1}{2b};\ z = \dfrac{1}{3c} \Rightarrow xy + yz + zx = 4$.

Biến đổi vế trái của BĐT để xuất hiện ẩn phụ:

$$P = \frac{2b}{a\sqrt{16b^2+1}} + \frac{3c}{2b\sqrt{36c^2+1}} + \frac{a}{3c\sqrt{4a^2+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{4+\frac{1}{4b^2}}} + \frac{\frac{1}{2b}}{\sqrt{4+\frac{1}{9c^2}}} + \frac{\frac{1}{3c}}{\sqrt{4+\frac{1}{a^2}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{y^2+4}} + \frac{y}{\sqrt{z^2+4}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Áp dụng hệ quả 4 ta được:

$$P = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(y+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(z+x)(y+z)}} + \frac{z}{\sqrt{(x+y)(z+x)}}$$

$$\overset{\text{BĐT Cauchy}}{\ge} \frac{2x}{x+2y+z} + \frac{2y}{x+y+2z} + \frac{2z}{2x+y+z}$$

$$= \frac{2x^2}{x^2+2xy+zx} + \frac{2y^2}{xy+y^2+2yz} + \frac{2z^2}{2zx+yz+z^2}$$

$$\overset{\text{BĐT Schwarz}}{\ge} \frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)}.$$

Ta lại có: $xy + yz + zx \le \dfrac{(x+y+z)^2}{3}$

$$\Rightarrow P \ge \frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2 + \frac{(x+y+z)^2}{3}} \Rightarrow P \ge \frac{3}{2}.$$

MỘT SỐ BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1 (*Đề thi vào THPT chuyên Thái Nguyên, năm học 2022 - 2023*). Cho *a*, *b*, *c* là các số thực dương thoả mãn $ab + bc + ca = 2022$. Tính giá trị biểu thức:

$$Q = \frac{(2022+a^2)(2022+b^2)(2022+c^2)}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}.$$

Bài 2 (*Đề thi HSG tỉnh Đăk Lăk, năm học 2015 - 2016*). Cho *x*, *y*, *z* là các số thực dương thoả mãn:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 2 \text{ và } x + y + z = 2.$$

Tính giá trị biểu thức:

$$P = \sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} + \frac{\sqrt{y}}{y+1} + \frac{\sqrt{z}}{z+1}\right).$$

Bài 3 (*Đề thi HSG tỉnh Phú Thọ, năm học 2015 - 2016*). Cho các số thực *a*, *b*, *c* dương thoả mãn:

$$a + b + c = 5 \text{ và } \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3.$$

Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{a}}{a+2} + \frac{\sqrt{b}}{b+2} + \frac{\sqrt{c}}{c+2} = \frac{4}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}.$$

Bài 4 (*Đề thi vào THPT chuyên Lào Cai, năm học 2022 - 2023*). Cho các số thực dương *a*, *b*, *c* thoả mãn: $ab + bc + ca = abc$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$\sqrt{\frac{a}{a+bc}} + \sqrt{\frac{b}{b+ac}} + \sqrt{\frac{c}{c+ab}}.$$

Bài 5 (*Đề thi vào THPT chuyên Hưng Yên, năm học 2022 - 2023*). Cho 3 số thực dương *x*, *y*, *z* thoả mãn: $4xy + 2yz + 3xz = 24$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+9}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+16}}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT CHUYÊN TỈNH HƯNG YÊN NĂM HỌC 2022 – 2023

Câu I. *Cho biểu thức*

$$A=\left(\frac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}+\frac{2}{x-\sqrt{x}}\right):\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của x để A = 3.

Lời giải. a) ĐK: $x>0, x\neq 1$.

$$A=\left(\frac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}+\frac{2}{x-\sqrt{x}}\right):\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}+\frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}\right):\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\left(\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}.\frac{\sqrt{x}-1}{1}\right)$$

$$=\frac{x+2}{\sqrt{x}}.$$

b) $A=3\Leftrightarrow\frac{x+2}{\sqrt{x}}=3\Leftrightarrow x+2=3\sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow x-3\sqrt{x}+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=1\\ \sqrt{x}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\ \text{(loại)}\\ x=4\ \text{(nhận)}\end{array}\right..$$

Vậy $A=3$ khi $x=4$.

Câu II. 1) *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=(m+1)x-m+5$. Tìm giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ sao cho $x_1;x_2$ là các số nguyên.*

2) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình

$$x^4-2x^3+x^2-16y^2+12x-16y+4=0.$$

Lời giải. 1) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2=(m+1)x-m+5$

$$\Leftrightarrow x^2-(m+1)x+m-5=0\quad (*).$$

Ta có $\Delta=(m+1)^2-4(m-5)=m^2-2m+21$

$$=(m-1)^2+20>0 \text{ với mọi } m$$

nên (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

Theo hệ thức Viète ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=m+1 & (1)\\ x_1.x_2=m-5 & (2)\end{cases}.$

Trừ theo vế (1) với (2) ta được:

$$x_1+x_2-x_1x_2=6\Leftrightarrow x_1-1+x_2(1-x_1)=5$$

$$\Leftrightarrow(x_1-1)(1-x_2)=5.$$

Ta có: $(x_1-1)(1-x_2)=5=1.5=(-1).(-5)=5.1$

$=(-5).(-1)$ (do x_1, x_2 nguyên).

Ta có bảng sau:

x_1-1	1	–1	5	–5
$1-x_2$	5	–5	1	–1
x_1	2	0	6	–4
x_2	–4	6	0	2
$m=x_1x_2+5$	–3	5	5	–3

Vậy $m=-3$ và $m=5$ là các giá trị cần tìm.

2) $x^4-2x^3+x^2-16y^2+12x-16y+4=0$

$$\Leftrightarrow x^4+x^3-3x^3-3x^2+4x^2+4x+8x+8$$
$$=16y^2+16y+4$$

$$\Leftrightarrow(x+1)x^3-3x^2(x+1)+4x(x+1)+8(x+1)$$
$$=16y^2+16y+4$$

$$\Leftrightarrow(x+1)(x^3-3x^2+4x+8)=(4y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow(x+1)^2(x^2-4x+8)=(4y+2)^2.$$

Vì $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow 4y+2\neq 0\Rightarrow x\neq -1$.

Vì $x, y\in\mathbb{Z}$ nên $(x+1)^2$ và $(4y+2)^2$ là các số chính phương khác 0 nên (x^2-4x+8) cũng là số chính phương.

Giả sử $x^2-4x+8=m^2$ $(m\in\mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow(x-2)^2+4=m^2\Leftrightarrow(x-2)^2-m^2=-4$$

$$\Leftrightarrow(x-2-m)(x-2+m)=-4.$$

Do x, m là các số nguyên nên ta có bảng sau:

$x-2-m$	-4	-2	-1	1	2	4
$x-2+m$	1	2	4	-4	-2	-1
x	0,5	2	3,5	0,5	2	3,5

Vì x nguyên nên $x = 2$. Thay $x = 2$ vào phương trình ban đầu ta suy ra $y = 1$ hoặc $y = -2$.

Vậy nghiệm $(x; y)$ của PT là $(2; 1)$; $(2; -2)$.

Câu III. 1) *Giải phương trình*

$$\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}}-\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}=1.$$

2) *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^3+y^3+xy=2x+4y-1 \\ xy+x+2y=1 \end{cases}.$$

Lời giải. 1) $\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}}-\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}=1 \ (*)$

ĐK: $1<x\le 3$. Khi đó ta có:

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{3x-2}-\sqrt{3-x}=\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$

$\Leftrightarrow 3x-2=x-1+3-x+2\sqrt{(x-1)(3-x)}$

$\Leftrightarrow 3x-4=2\sqrt{(x-1)(3-x)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{4}{3} \\ (3x-4)^2=4(x-1)(3-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{4}{3} \\ 13x^2-40x+28=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{4}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{14}{13} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = 2$.

2) $\begin{cases} x^3+y^3+xy=2x+4y-1 \\ xy+x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3+xy=2(1-xy)-1 \\ x+2y=1-xy \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3+3xy=1 & (1) \\ x+2y=1-xy & (2) \end{cases}.$$

$(1) \Leftrightarrow (x+y)^3-3x^2y-3xy^2+3xy-1=0$

$\Leftrightarrow (x+y)^3-1^3-3xy(x+y-1)=0$

$\Leftrightarrow (x+y-1)\left[(x+y)^2+x+y+1-3xy\right]=0$

$\Leftrightarrow (x+y-1)\left(x^2+y^2-xy+x+y+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-1=0 \\ x^2+y^2-xy+x+y+1=0 \end{array}\right.$$

• $x+y-1=0 \Leftrightarrow x=1-y$ thay vào (2) ta được: $1-y+2y=1-(1-y)y \Leftrightarrow y(y-2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=1 \\ y=2 \Rightarrow x=-1 \end{array}\right..$$

Thay $x=1; y=0$ và $x=-1; y=2$ vào hệ phương trình ban đầu ta thấy thỏa mãn.

• $x^2+y^2-xy+x+y+1=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-2xy+2x+2y+2=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2xy+y^2\right)+\left(x^2+2x+1\right)+\left(y^2+2y+1\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+1=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-1.$$

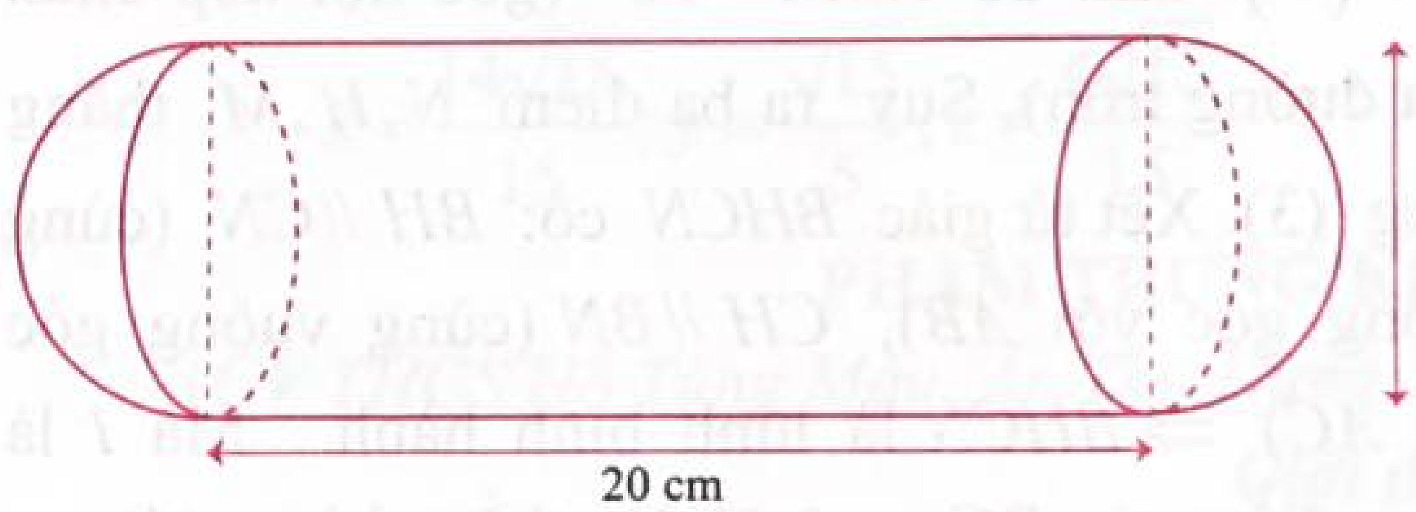
Thay $x=y=-1$ vào hệ phương trình ban đầu ta thấy không thỏa mãn. Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình là: $(1;0), (-1;2)$.

Câu IV. 1) *Cho ΔABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC.*

a) *Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp, từ đó suy ra KF.KE = KB.KC.*

b) *Đường thẳng AK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M (M khác A). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh ba điểm M, H, I thẳng hàng.*

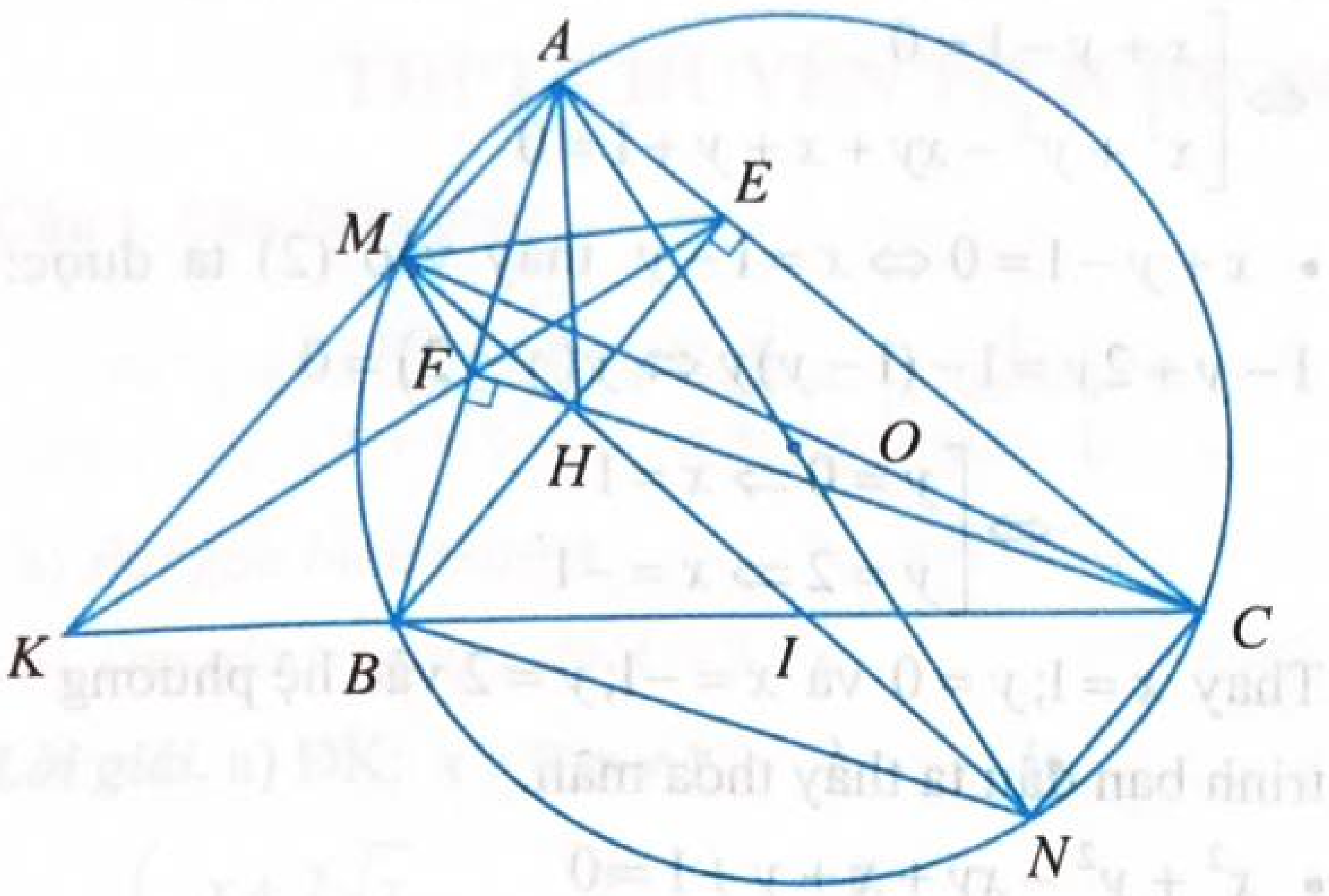
2) *Một chi tiết máy gồm hai nửa hình cầu bằng nhau và một hình trụ (hình vẽ). Hãy tính thể tích của chi tiết máy đó theo các kích thước cho trên hình vẽ.*



8 cm

20 cm

Lời giải.



1) a) Xét tứ giác $BFEC$ có: $\widehat{BEC}=\widehat{CFB}=90^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC. Xét ΔKFC và ΔKBE có: $\widehat{K}$ là góc chung ; $\widehat{KCF}=\widehat{KEB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BF}$) $\Rightarrow \Delta KFC \sim \Delta KBE \Rightarrow \dfrac{KF}{KB}=\dfrac{KC}{KE}$

$$\Leftrightarrow KF.KE=KC.KB \quad (1).$$

b) Xét ΔKBA và ΔKMC có: $\widehat{KAB}=\widehat{KCM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BM}$) và $\widehat{K}$ là góc chung, do đó $\Delta KMC \sim \Delta KBA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{KM}{KB}=\frac{KC}{KA} \Leftrightarrow KM.KA=KB.KC \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $KE.KF=KM.KA$

$$\Rightarrow \frac{KE}{KM}=\frac{KA}{KF}.$$

Mà $\widehat{K}$ là góc chung, suy ra: $\Delta KFA \sim \Delta KME$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{KAF}=\widehat{KEM}$ hay $\widehat{MAF}=\widehat{FEM}$

$\Rightarrow$ tứ giác $AMFE$ nội tiếp.

Mặt khác $AFHE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH ($\widehat{AEH}=\widehat{AFH}=90^0$) nên 5 điểm M, A, E, F, H cùng thuộc đường tròn đường kính AH $\Rightarrow \widehat{AMH}=90^0$. Kẻ đường kính AN của đường tròn (O). Khi đó $\widehat{NMA}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra ba điểm N, H, M thẳng hàng (3). Xét tứ giác $BHCN$ có: $BH \,//\, CN$ (cùng vuông góc với AB), $CH \,//\, BN$ (cùng vuông góc với AC) $\Rightarrow BHCN$ là hình bình hành. Mà I là trung điểm của $BC \Rightarrow I, H, N$ thẳng hàng (4).

Từ (3) và (4) suy ra M, H, I, N thẳng hàng.

2) Thể tích của chi tiết máy:

$$V=\frac{4}{3}R^3\pi+R^2\pi.20=\frac{4}{3}.4^3.\pi+20.4^2.\pi=\frac{1216}{3}\pi\ (\text{cm}^3).$$

Câu V. *Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $4xy+2yz+3xz=24$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $P=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}+\dfrac{y}{\sqrt{y^2+9}}+\dfrac{z}{\sqrt{z^2+16}}$.

Lời giải. Ta có: $4xy+2yz+3xz=24$

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{6}+\frac{yz}{12}+\frac{xz}{8}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}.\frac{y}{3}+\frac{y}{3}.\frac{z}{4}+\frac{x}{2}.\frac{z}{4}=1.$$

Đặt: $\dfrac{x}{2}=a>0; \dfrac{y}{3}=b>0; \dfrac{z}{4}=c>0$ thì

$ab+bc+ac=1$. Ta có:

$$P=\frac{4a}{\sqrt{4a^2+4}}+\frac{3b}{\sqrt{9b^2+9}}+\frac{4c}{\sqrt{16c^2+16}}$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+ab+bc+ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+ab+bc+ac}}$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{2a}{a+b}.\frac{2a}{a+c}}+\sqrt{\frac{2b}{a+b}.\frac{b}{2(b+c)}}+\sqrt{\frac{c}{2(b+c)}.\frac{2c}{a+c}}.$$

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{2a}{a+b}+\frac{2a}{a+c}\ge 2\sqrt{\frac{2a}{a+b}.\frac{2a}{a+c}};$$

$$\frac{2b}{a+b}+\frac{b}{2(b+c)}\ge 2\sqrt{\frac{2b}{a+b}.\frac{b}{2(b+c)}};$$

$$\frac{c}{2(b+c)}+\frac{2c}{a+c}\ge 2\sqrt{\frac{c}{2(b+c)}.\frac{2c}{a+c}}.$$

Suy ra:

$$P\le\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{a+b}+\frac{2a}{a+c}+\frac{2b}{a+b}+\frac{b}{2(b+c)}+\frac{c}{2(b+c)}+\frac{2c}{a+c}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2(a+b)}{a+b}+\frac{2(a+c)}{a+c}+\frac{b+c}{2(b+c)}\right)=\frac{9}{4}.$$

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH QUẢNG NGÃI

NĂM HỌC 2022 – 2023 - MÔN THI: TOÁN - *Thời gian làm bài: 150 phút*

Bài 1. (*4,0 điểm*) 1) Tìm số nguyên tố p sao cho $p+10$ và $p+14$ là các số nguyên tố.

2) Tìm tất cả các nghiệm nguyên x, y của phương trình $x^2+xy-2x-3y-4=0$.

3) Cho ba số $a,b,c \in \mathbb{Z}$ thoả mãn $a+b+c=2022^{2023}$. Chứng minh $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 6.

Bài 2. (*4,0 điểm*) 1) Cho biểu thức:

$$M=\left(1-\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}+x+1}\right),$$

với $x \geq 0$. Rút gọn biểu thức M và tính giá trị của biểu thức M khi $x=2023-2\sqrt{2022}$.

2) Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}.$$

Bài 3. (*4,0 điểm*) 1) Giải phương trình

$$\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}.$$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+x+\dfrac{1}{y}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=4 \\ x^3+\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{1}{y^3}=4 \end{cases}$.

Bài 4. (*7,0 điểm*) 1) Một học sinh có tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh 20 cm. Em muốn cắt tấm bìa này thành bốn hình tam giác vuông bằng nhau và phần còn lại là hình vuông $MNPQ$ thỏa mãn M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA. Hãy xác định vị trí các điểm M, N, P, Q để diện tích hình vuông $MNPQ$ là nhỏ nhất.

2) Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Điểm M di động trên đoạn OA (M khác A), vẽ đường tròn tâm K đường kính MB. Gọi I là trung điểm của đoạn MA, đường thẳng đi qua I vuông góc với AB cắt đường tròn (O) tại C và D. Đường thẳng CB cắt đường tròn (K) tại P.

a) Chứng minh rằng ba điểm P, M, D thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng PI là tiếp tuyến của đường tròn (K).

c) Tìm vị trí của M trên đoạn OA để diện tích tam giác IPK lớn nhất.

Bài 5. (*1,0 điểm*) Người ta làm một cái hộp hình vuông để đựng được 5 cái bánh hình tròn có đường kính 6 cm, sao cho không có bất kì hai cái bánh nào được chồng lên nhau. Hãy tính cạnh nhỏ nhất của cái hộp.

TRƯƠNG QUANG AN

(Xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Giới thiệu

****

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \dfrac{2a}{a+b}=\dfrac{2a}{a+c} \\ \dfrac{2b}{a+b}=\dfrac{b}{2(b+c)} \\ \dfrac{c}{2(b+c)}=\dfrac{2c}{a+c} \\ ab+bc+ca=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ a+b=8b \\ a+c=8c \\ ab+bc+ca=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ a=7b \\ a=7c \\ ab+bc+ca=1 \end{cases} \Leftrightarrow b=c=\frac{a}{7}=\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

Do đó: $\begin{cases} b=\dfrac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{15}}{5} \\ c=\dfrac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow z=\dfrac{4\sqrt{15}}{15} \\ a=\dfrac{7}{\sqrt{15}} \Rightarrow x=\dfrac{14\sqrt{15}}{15} \end{cases}$.

Vậy $\max P=\dfrac{9}{4}$ khi và chỉ khi

$$x=\frac{14\sqrt{15}}{15}; y=\frac{\sqrt{15}}{5}; z=\frac{4\sqrt{15}}{15}.$$

PHẠM TRUNG KIÊN

(GV THCS Hồ Tùng Mậu, Ân Thi, Hưng Yên)

Giới thiệu

HƯỚNG DẪN HỌC SINH LỚP 9 GIẢI MỘT SỐ DẠNG TOÁN THỰC TẾ TRONG ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT

VŨ THỊ THÚY (*GV THPT Nguyễn Trung Ngạn, Hưng Yên*)
PHẠM TRUNG KIÊN (*GV THCS Hồ Tùng Mậu, Ân Thi, Hưng Yên*)

(*Tiếp theo kỳ trước*)

DẠNG 6. Một số bài toán thực tế về đường tròn

Thí dụ 20. *Một đồng hồ chạy chậm 10 phút. Để chỉnh lại đúng giờ thì phải quay kim phút một góc ở tâm nhỏ nhất bằng*

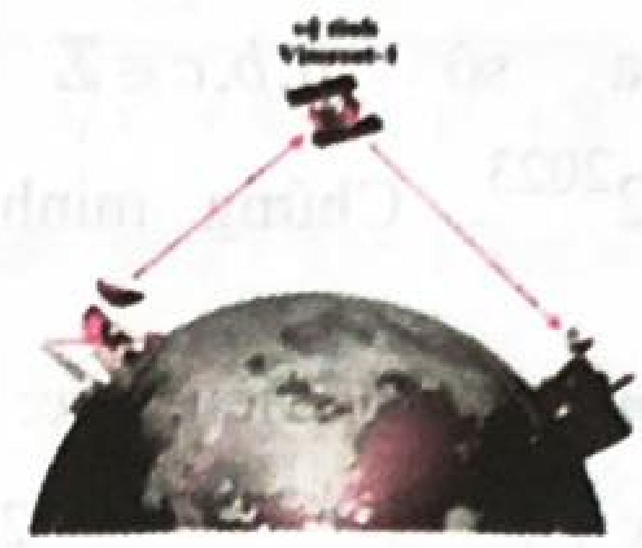
A. 60^0 B. 150^0

C. 120^0 D. 240^0.

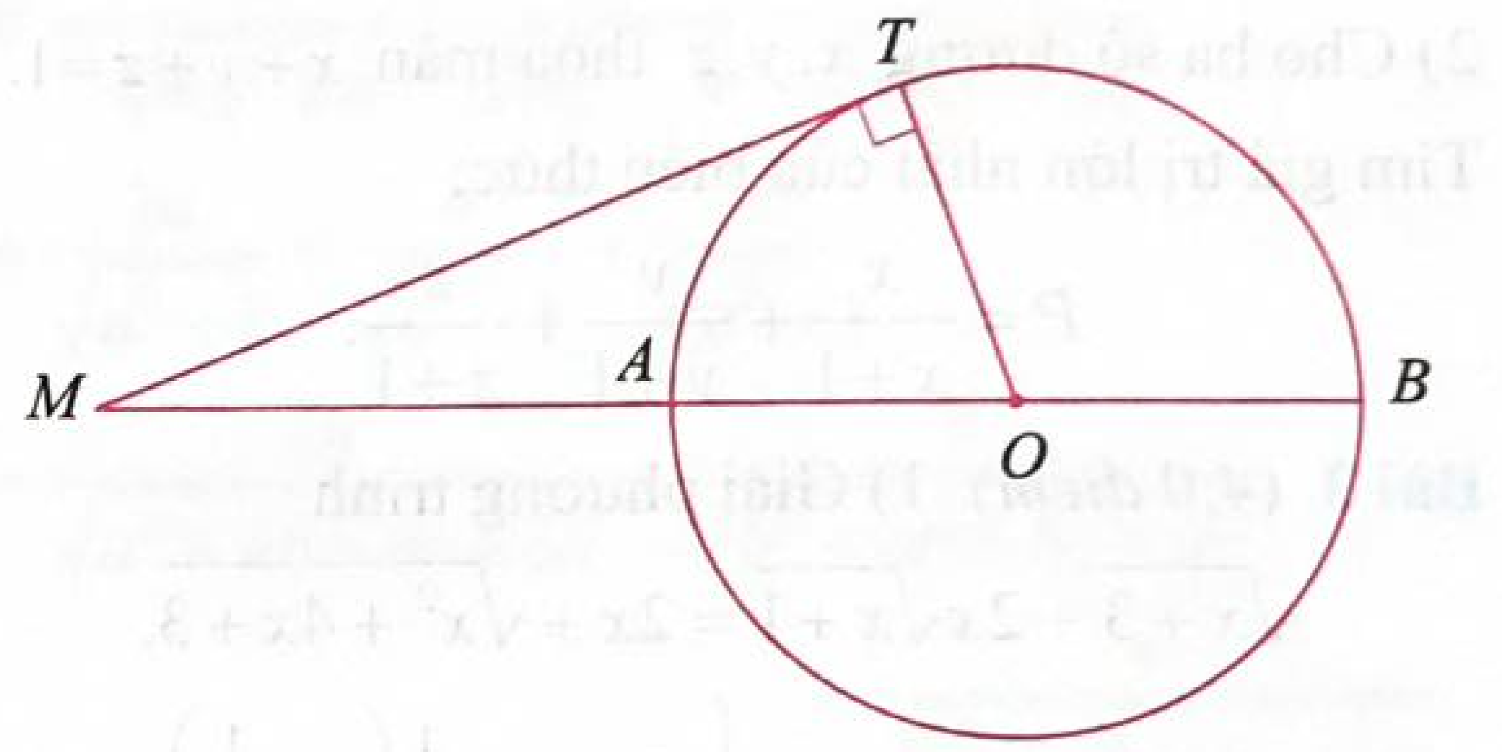
Lời giải. Kim phút quay một vòng mất 60 phút nên mỗi phút ứng với 360 : 60 = 6 độ. Do đó để chỉnh lại đồng hồ chạy chậm 10 phút thì phải quay kim phút 1 góc nhỏ nhất là 10.6 = 60 độ.

Đáp án A

Thí dụ 21. *Vinasat - 1 là vệ tinh viễn thông địa tĩnh đầu tiên của Việt Nam được phóng vào vũ trụ lúc 22 giờ 17 phút ngày 18 tháng 4 năm 2008 (giờ UTC). Dự án vệ tinh Vinasat - 1 đã khởi động từ năm 1998 với tổng mức đầu tư là khoảng hơn 300 triệu USD. Việt Nam đã tiến hành đàm phán với 27 quốc gia và vùng lãnh thổ để có được vị trí 132 độ Đông trên quỹ đạo địa tĩnh. Hãy tìm khoảng cách từ vệ tinh Vinasat - 1 đến mặt đất. Biết rằng khi vệ tinh phát tín hiệu vô tuyến đến một điểm xa nhất trên mặt đất thì từ lúc phát tín hiệu đến mặt đất cho đến lúc vệ tinh thu lại được tín hiệu phản hồi mất khoảng thời gian là 0,28 s. Trái đất được xem như một hình cầu có bán kính khoảng 6400* km. (*làm tròn đến hàng đơn vị*)*, giả sử vận tốc sóng vô tuyến là* 3.10^8 m/s.



Lời giải. Giả sử vệ tinh Vinasat - 1 ở vị trí M, khi đó ta có MT (MT là tiếp tuyến của đường tròn (O)) là xa nhất.



Theo bài ra, ta có:

$$MT = 3.10^8.0,28 : 2 = 42000 \text{ (km)}.$$

Vì MT là tiếp tuyến, MAB là cát tuyến của đường tròn (O) nên

$$MT^2 = MA.MB = MA(MA + 12800)$$

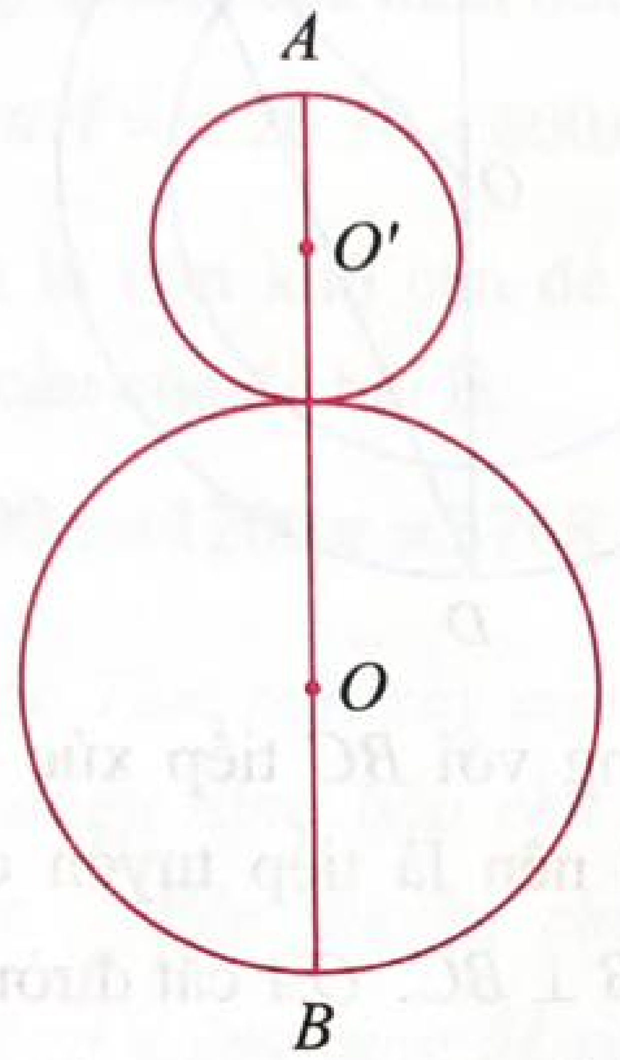
$$\Rightarrow 42000^2 = MA(MA + 12800)$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + 12800MA - 42000^2 = 0.$$

Giải ra được $MA = 36085$ (thỏa mãn). Vậy khoảng cách của vệ tinh với Trái đất là 36085 km.

Thí dụ 22. *Ở các nước xứ lạnh, về mùa đông thường có tuyết rơi dày đặc khắp các con đường; trẻ em ở đây thường rất thích đắp hình dạng của người tuyết. Có thể xem phần thân trên và thân dưới của người tuyết là hai hình cầu tiếp xúc nhau. Em hãy tính kích thước của hai viên tuyết cần đắp để được một người tuyết cao 1,8 m biết* *rằng đường kính phần thân dưới phải gấp đôi đường kính phần thân trên của người tuyết.*

Lời giải. Ta có hình vẽ minh họa:



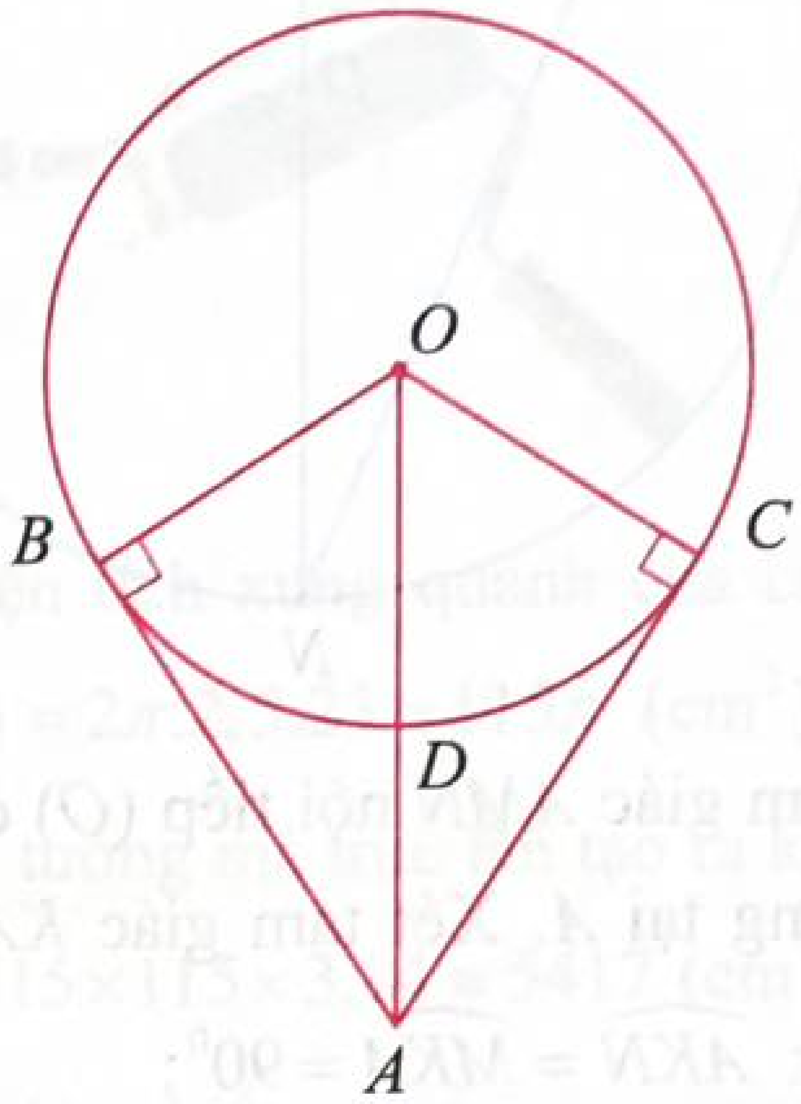
Gọi r là bán kính của đường tròn nhỏ ($r > 0$). Đường kính của đường tròn nhỏ, đường tròn lớn lần lượt là $2r$, $4r$.

Vì 2 đường tròn $(O'; r)$ và $(O; 2r)$ tiếp xúc ngoài nhau nên $2r + 4r = 180$, suy ra $r = 30$ cm.

Vậy để đắp người tuyết cao 1,8m thì cần đắp hai quả cầu tuyết có đường kính lần lượt là 60 cm và 120 cm.

Thí dụ 23. *Khí cầu là một túi đựng không khí nóng, thường có khối lượng riêng nhỏ hơn không khí xung quanh và nhờ vào lực đẩy Ác si mét nên có thể bay lên cao. Giả sử có thể xem khinh khí cầu là một khối cầu và các dây nối sẽ tiếp xúc với khối cầu này. Hãy tính chiều dài của các dây nối để khoảng cách từ buồng lái đến điểm thấp nhất của khí cầu là 8 m, biết rằng bán kính của khối cầu này là 10 m.*

Lời giải. Hình vẽ minh họa



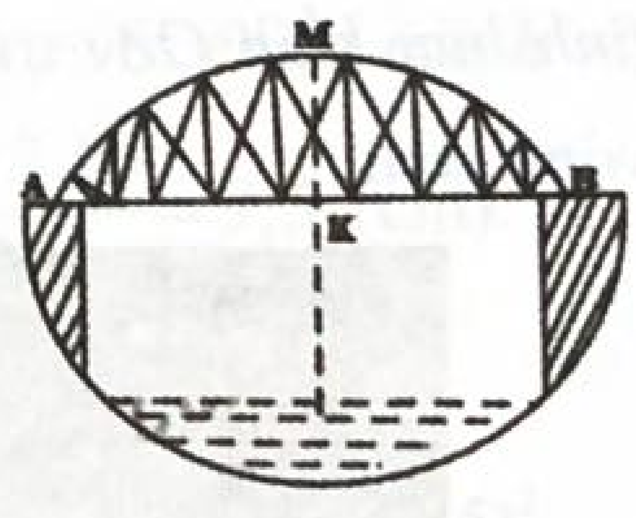
Ta có: $OB = OC = OD = 10$ m;

$OA = AD + OD = 18$m.

Vì tam giác ABO vuông tại B nên áp dụng định lí Pythagore ta được:

$$AB = \sqrt{AO^2 - OB^2} = \sqrt{224} \approx 15 \text{ (m)}.$$

Thí dụ 24. *Một chiếc cầu được thiết kế như hình bên dưới có độ dài $AB = 40$ m, chiều cao $MK = 3$ m. Hãy tính bán kính của đường tròn chứa cung $\overset{\frown}{AMB}$ (biết MK đi qua tâm của đường tròn chứa cung $\overset{\frown}{AMB}$).*

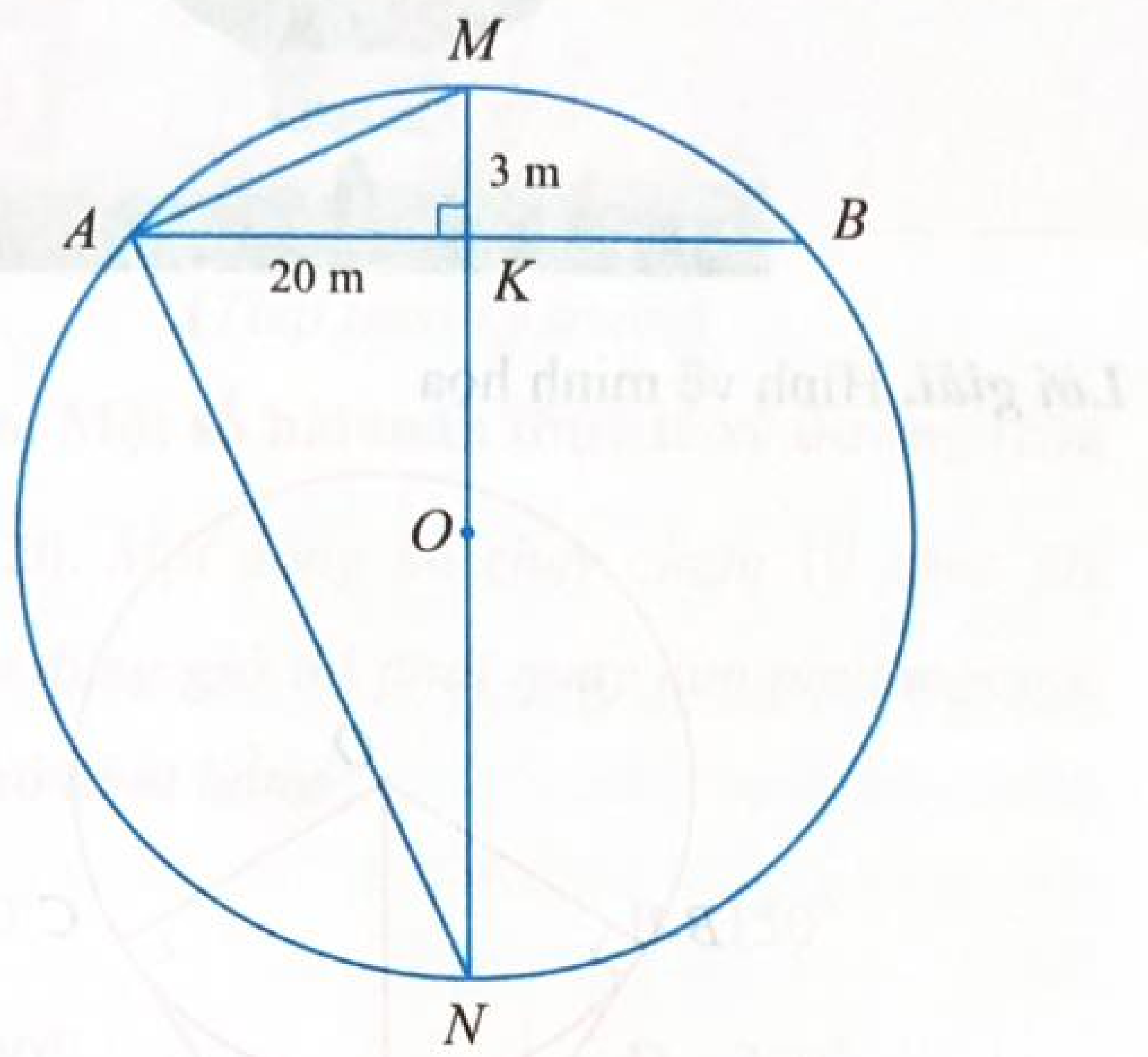


Lời giải. Hình vẽ minh họa:

Gọi đường tròn $(O; R)$ là đường tròn chứa cung $\overset{\frown}{AMB}$. Do MK là chiều cao nên $MK \perp AB$. Gọi

MN là đường kính của (O). Dễ thấy N, O, K, M thẳng hàng và K là trung điểm của AB. Suy ra:

$$KA = KB = \frac{AB}{2} = 20 \text{ m}.$$



Ta có tam giác AMN nội tiếp (O) đường kính MN nên vuông tại A. Xét tam giác KAN và tam giác KMA có: $\widehat{AKN} = \widehat{MKA} = 90^0$;

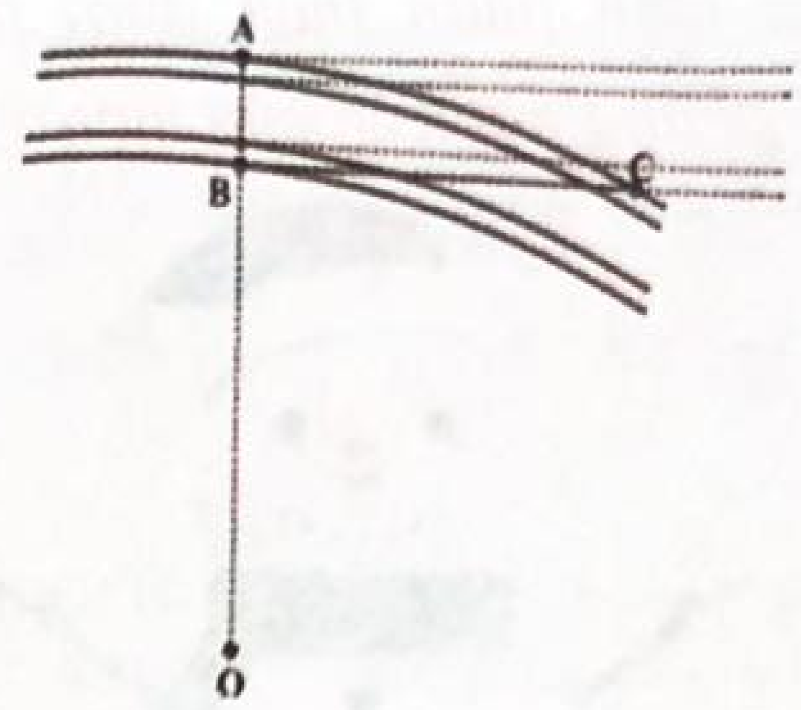
$$\widehat{KNA} = \widehat{MAK} \text{ (cùng phụ với } \widehat{AMN}\text{)}$$

$$\Rightarrow \Delta KAN \sim \Delta KMA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{KA}{KM} = \frac{KN}{KA}$$

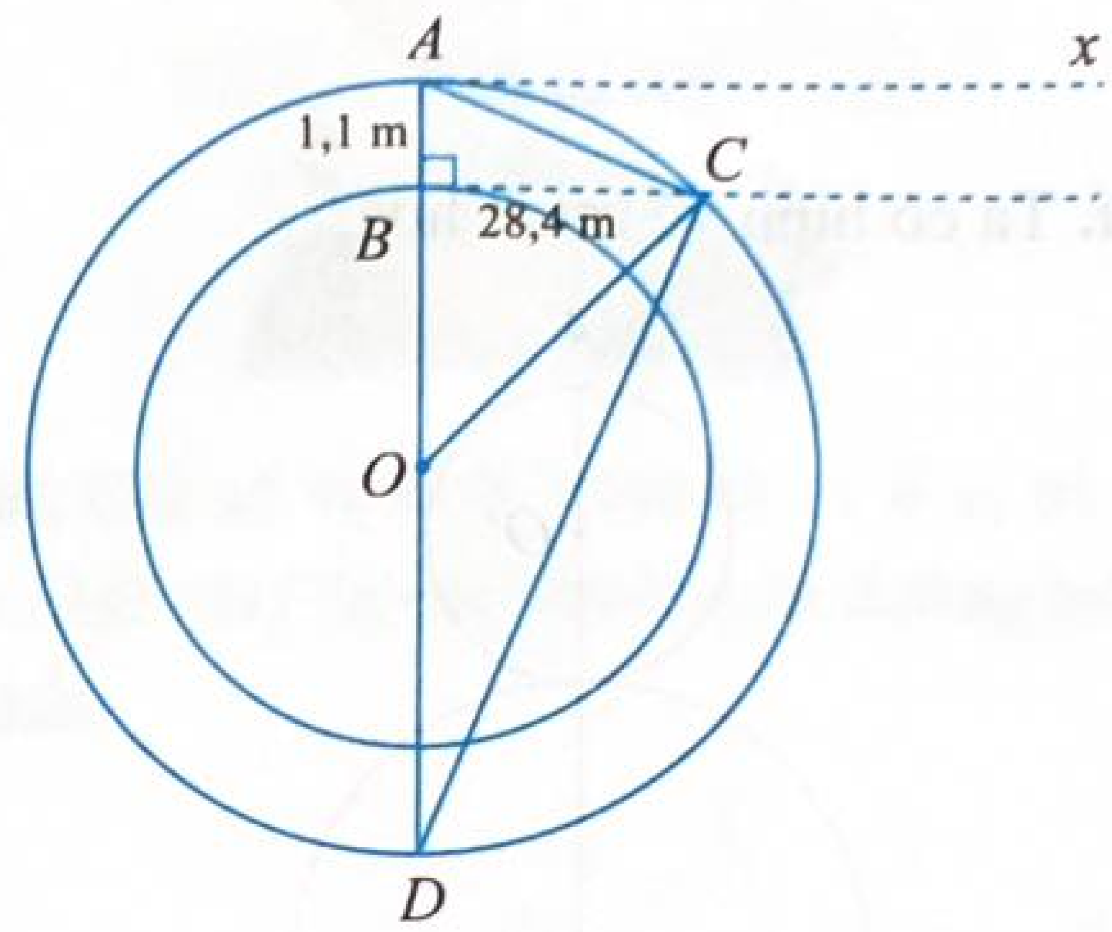
$$\Rightarrow KA^2 = KM.KN \Rightarrow KA^2 = KM(2R - KM)$$

$$\Leftrightarrow 20^2 = (2R - 3).3 \Rightarrow R \approx 68{,}17 \text{ m}.$$

Thí dụ 25. *Để giúp xe lửa chuyển từ một đường ray từ hướng này sang một đường ray theo hướng khác, người ta làm xen giữa một đoạn đường ray hình vòng cung (hình bên). Biết chiều rộng của đường ray là $AB \approx 1{,}1$ m, đoạn $BC \approx 28{,}4$ m. Hãy tính bán kính $OA = R$ của đoạn đường ray hình vòng cung.*



Lời giải. Ta có hình ảnh minh họa:



Thanh ray trùng với BC tiếp xúc với đường tròn (O, OB) tại B nên là tiếp tuyến của đường tròn $(O, OB) \Rightarrow OB \perp BC$. OA cắt đường tròn $(O; OA)$ tại điểm D $(D \neq A) \Rightarrow AD = 2R$. Vì tam giác ACD nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD nên tam giác ACD vuông tại C.

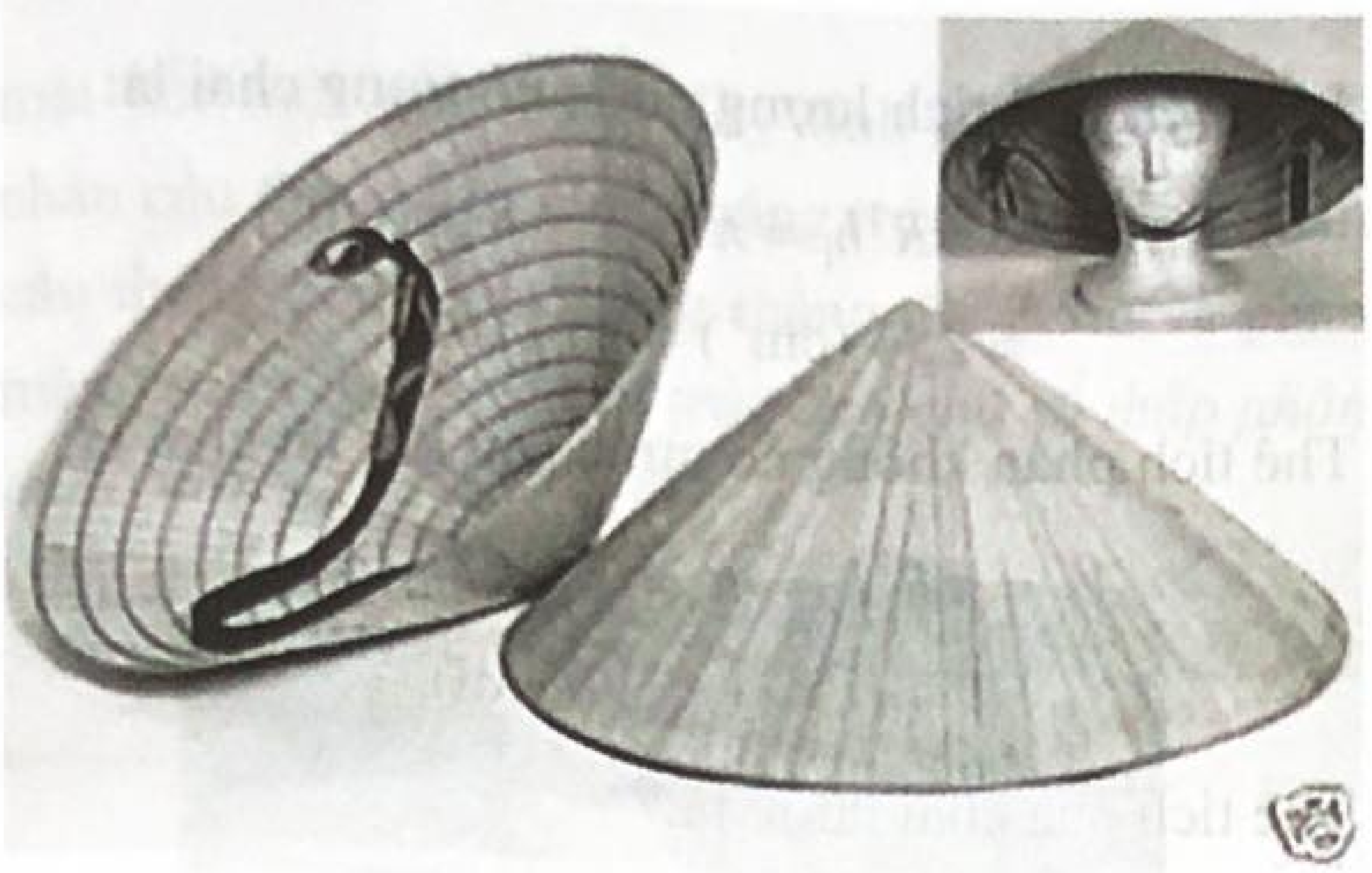
Ta có tam giác ACD vuông tại C, đường cao BC nên $CB^2 = AB.BD \Leftrightarrow CB^2 = AB.(2R - AB)$

$$\Leftrightarrow (28{,}4)^2 = 1{,}1(2R - 1{,}1) \Leftrightarrow R \approx 367{,}2 \text{ m}.$$

Vậy bán kính của đoạn đường ray vòng cung xấp xỉ 367,2 m.

DẠNG 7. Một số bài toán thực tế về hình học không gian trong chương trình lớp 9 THCS

Thí dụ 26. *Nón lá là một vật dụng để che nắng, che mưa và là một biểu tượng của phụ nữ Việt Nam. Nón lá có dạng hình nón, đường kính đáy bằng 40 cm và độ dài đường sinh là 30 cm. Người ta lát mặt xung quanh hình nón bằng 2 lớp lá nón khô. Diện tích lá nón cần dùng để tạo nên một chiếc nón lá như vậy là bao nhiêu? (làm tròn đến cm^2).*



Lời giải. Vì đường kính đáy là 40 cm nên bán kính đáy hình nón là 20 cm.

Diện tích xung quanh của hình nón là:

$$S_{xq} = \pi r l = \pi.20.30 = 600\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vậy diện tích lá nón khô cần để tạo nên 1 chiếc nón theo yêu cầu của đề bài là:

$$2.600\pi = 1200\pi \approx 3768 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Thí dụ 27. *Bác Tâm mới xây một bể chứa nước ở cạnh nhà có dạng hình hộp chữ nhật kích thước* $2\,\text{m} \times 2\,\text{m} \times 1\,\text{m}$. *Hiện tại, bể chưa có nước nên bác Tâm phải ra giếng làng để gánh nước đổ vào bể để dùng. Mỗi lần gánh, bác Tâm gánh được một đôi thùng nước hình trụ bằng nhau có đường kính đáy 0,2 m, chiều cao 0,4 m.*

a) *Tính lượng nước* (m^3) *bác Tâm đổ vào bể sau mỗi lần gánh, biết rằng trong quá trình gánh lượng nước bị hao hụt 10% (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).*

b) *Hỏi bác Tâm phải gánh tất cả bao nhiêu lần để đổ đầy bể (bỏ qua thể tích của thành bể).*

Lời giải. a) Thể tích của một thùng gánh nước của bác *Tâm* là $V = \pi r^2 h = \pi (0,1)^2.0,4 = \dfrac{\pi}{250}$ (m^3).

Mỗi lần bác *Tâm* gánh 2 thùng và lượng nước bị hao hụt 10% nên bác *Tâm* đổ vào bể một lượng nước sau mỗi lần gánh là:

$$2 \times \frac{\pi}{250} \times 90\% \approx 0,02 \text{ (m}^3\text{)}.$$

b) Thể tích của bể nước là: $2 \times 2 \times 1 = 4$ (m^3).

Số lần gánh để đổ đầy bể nước của bác *Tâm* là:

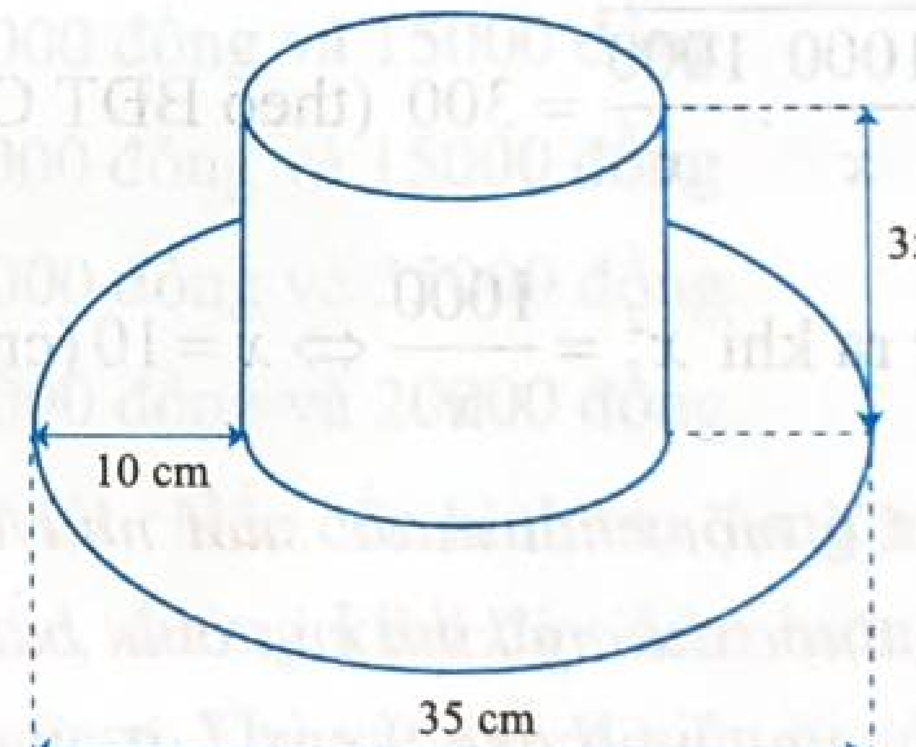
$$4 : 0,02 = 200 \text{ (lần)}.$$

Thí dụ 28. *Một cái trục lăn sơn nước có dạng hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 5 cm, chiều dài lăn là 23 cm (như hình vẽ). Sau khi lăn trọn 15 vòng thì trục lăn tạo nên bức tường phẳng có diện tích là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị).*

Lời giải. Diện tích xung quanh của cái trục lăn sơn là: $2\pi rh = 2\pi.2,5.23 = 115\pi$ (cm^2).

Diện tích bức tường mà trục lăn tạo ra khi lăn trọn 15 vòng là: $15 \times 115 \times 3,14 \approx 5417$ (cm^2).

Thí dụ 29. *Một chiếc mũ bằng vải của nhà ảo thuật với kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần để làm chiếc mũ đó biết rằng vành mũ hình tròn và ống mũ hình trụ (bỏ qua diện tích vải ghép nối).*



Lời giải. Ống mũ là hình trụ với chiều cao $h = 30$ cm, bán kính đáy $R = \dfrac{35 - 2.10}{2} = 7,5$ (cm).

Diện tích vải để làm ống mũ là:

$$S_1 = 2\pi Rh + \pi R^2 = 2\pi.7,5.30 + \pi.(7,5)^2$$
$$= 506,25\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

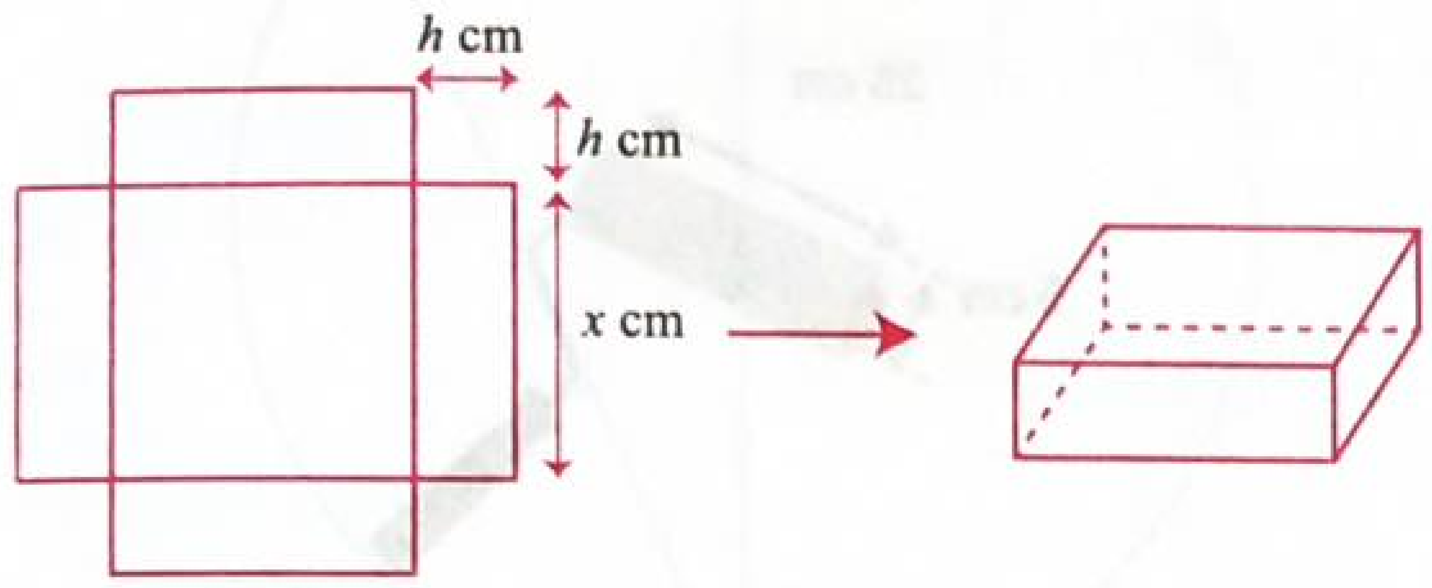
Diện tích vải để làm vành mũ là:

$$S_1 = \pi.(17,5)^2 - \pi.(7,5)^2 = 250\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Tổng diện tích vải để làm cái mũ là:

$$506,25\pi + 250\pi = 576,25\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Thí dụ 30. *Một hộp không nắp được làm từ một tấm bìa các tông. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x (cm), đường cao là h (cm) và có thể tích là 500 cm^3. Tìm x sao cho diện tích của mảnh bìa các tông là nhỏ nhất.*



Lời giải. Ta có thể tích của cái hộp là: $V = x^2.h$.

Do hộp có thể tích là $500\,cm^3$ nên $x^2.h = 500 \Rightarrow h = \dfrac{500}{x^2}$. Tổng diện tích của tấm bìa các tông là: $S = x^2 + 4xh = x^2 + \dfrac{2000}{x}$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của *S*.

Ta có: $S = x^2 + \dfrac{2000}{x} = x^2 + \dfrac{1000}{x} + \dfrac{1000}{x}$

$$\geq 3\sqrt[3]{x^2.\frac{1000}{x}.\frac{1000}{x}} = 300 \text{ (theo BĐT Cauchy)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x^2 = \dfrac{1000}{x} \Leftrightarrow x = 10 \text{ (cm)}$.

Thí dụ 31. *Có một chai nước suối như hình vẽ, bạn Nam đo được đường kính của chai bằng* 6 cm *và chiều cao của chai bằng* 9 cm. *Lật ngược chai lại , bạn Nam đo được phần hình trụ không chứa nước là* 7 cm. *Tính thể tích của chai (lấy* $\pi = 3,14$, *làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân).*

Lời giải. Thể tích lượng nước có trong chai là:

$$V_1 = \pi R^2 h_1 = \pi.3^2.9 = 81\pi(\text{cm}^3)$$
$$\approx 254\,(\text{cm}^3) = 254\,(\text{ml}).$$

Thể tích phần không có nước sau khi lật chai là:

$$V_2 = \pi R^2 h_2 = \pi.3^2.7 = 63\pi\,(\text{cm}^3)$$
$$\approx 198\,(\text{cm}^3) = 198\,(\text{ml}).$$

Thể tích của chai nước là:

$$V = 254 + 198 = 452\ (\text{ml}).$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tòa nhà Bitexco Financial Tower hay tháp tài chính Bitexco là một tòa nhà chọc trời được xây dựng ở trung tâm quận 1 thành phố Hồ Chí Minh.Tòa nhà có 68 tầng (không tính 3 tầng hầm). Biết rằng khi tòa nhà có bóng in trên mặt đất dài 47,3m thì một cọc tiêu cao 15m được cắm thẳng đứng vuông góc với mặt đất có bóng in trên mặt đất dài 2,64m.

a) Tính góc tạo bởi tia nắng mặt trời với mặt đất (*làm tròn đến độ*).

b) Tính chiều cao của tòa nhà (*làm tròn đến chữ số hàng đơn vị*).

Bài 2. Một cây tre mọc vuông góc với mặt đất bị gió làm gẫy gập ngang thân, ngọn cây chạm đất và tạo với đất một góc 30^0. Người ta đo được khoảng cách từ chỗ ngọn cây chạm đất đến góc cây là 8,5m . Hãy tính chiều cao của cây tre đó (*làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai*).

Bài 3. Một chiếc cầu trượt bao gồm phần cầu thang (để bước lên) và một phần máng trượt (để trượt xuống) nối liền với nhau. Biết rằng khi xây phần máng trượt cần để máng trượt nghiêng với mặt đất một góc 50^0. Hãy tính khoảng cách từ chân cầu thang đến chân máng trượt nếu xem phần cầu thang như một đường thẳng dài 2,5m và phần máng trượt dài 3m (*làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất*).

Bài 4. Một công ty viễn thông A cung cấp dịch vụ truyền hình cáp với mức phí ban đầu là 300000 đồng và mỗi tháng phải đóng 150000 đồng. Công ty viễn thông B cũng cung cấp dịch vụ truyền hình cáp nhưng không tính phí ban đầu và mỗi tháng khách hàng phải đóng 200000 đồng.

vinaphone mobifone viettel Hãy nói theo cách của bạn Vietnamobile Gmobile Nghĩ mới, làm mới

a) Gọi T (đồng) là số tiền khách hàng phải trả cho mỗi công ty trong t (tháng) sử dụng dịch vụ truyền hình cáp. Khi đó hãy lập hàm số T theo t đối với mỗi công ty.

b) Tính số tiền khách hàng phải trả sau khi sử dụng dịch vụ truyền hình cáp trong 5 tháng đối với mỗi công ty.

c) Khách hàng cần sử dụng dịch vụ truyền hình cáp trên mấy tháng thì đăng kí bên công ty A sẽ tiết kiệm chi phí hơn?

Bài 5. Bảng giá cước của công ty taxi Mai Linh (*không tính phí cầu đường, phà, bến bãi*) được cho như bảng sau:

Bảng Giá Cước - Taxi Fare

Giá mở cửa	Giá km tiếp theo	Từ km thứ 26
Từ 0km đến 0,6km	Từ 0,6km đến 25km	Từ 26km trở lên
10.000 đ/0.6km	13.000 đ/km	11.000 đ/km

Một hành khách thuê taxi đi quãng đường 30km phải trả số tiền là bao nhiêu?

A. 382200 đ **B.** 310000 đ

C. 333200 đ **D.** 390000 đ.

Bài 6. Theo kế hoạch, hai tổ phải sản xuất 720 sản phẩm. Nhưng do ảnh hưởng của dịch Covid-19 nên tổ một bị giảm mức 18%, tổ hai giảm mức 20% so với kế hoạch do đó cả hai tổ chỉ sản xuất được 582 sản phẩm. Số sản phẩm tổ hai phải sản xuất theo kế hoạch là

A. 300 **B.** 420 **C.** 282 **D.** 360

Bài 7. Một người đứng trên đài quan sát ở ngọn hải đăng cao 100m so với mặt nước biển, nhìn một chiếc tàu ở xa với góc $\alpha = 15^0$ (so với phương nằm ngang). Hỏi khoảng cách từ tàu đến chân hải đăng là bao nhiêu? (*làm tròn đến hàng đơn vị*)

A. 373 m **B.**370 m **C.**289 m **D.** 285 m.

Bài 8. Sau giờ tan học, hai nhóm bạn cùng nhau đi ăn trưa và uống trà sữa tại cùng một quán ăn. Nhóm 1 ăn 4 bát phở, uống 3 cốc trà sữa và trả hết 185000 đồng. Nhóm 2 ăn 5 bát phở, uống 2 cốc trà sữa và trả hết 205000 đồng. Giá tiền của mỗi bát phở và mỗi cốc trà sữa lần lượt là

A. 35000 đồng và 15000 đồng

B. 45000 đồng và 15000 đồng

C. 15000 đồng và 35000 đồng

D. 40000 đồng và 20000 đồng.

Bài 9. Một chiếc cốc hình trụ đựng nước có chiều cao 12cm, đường kính đáy 4cm lượng nước trong cốc cao 9cm. Thả vào cốc 4 viên bi có cùng đường kính 2cm. Hỏi nước dâng cao cách mép cốc bao nhiêu?

A. $1\frac{2}{3}$ (cm) **B.** $1\frac{1}{3}$ (cm)

C. $1\frac{3}{4}$ (cm) **D.** $1\frac{1}{4}$ (cm).

Bài 10. Hầm Hải Vân là hầm đường bộ trên quốc lộ 1A ở ranh giới tỉnh Thừa Thiên Huế và thành phố Đà Nẵng, miền Trung Việt Nam. Hầm Hải Vân xuyên qua núi, thay thế cho đường đèo Hải

Vân vốn có nhiều đoạn nguy hiểm cho giao thông. Với chiều dài 6,28 km là *hầm đường bộ dài nhất Đông Nam Á*. Hầm được khởi công xây dựng ngày 27 tháng 8 năm 2000, và khánh thành ngày 5 tháng 6 năm 2005. Tổng chi phí cho toàn bộ Dự án Hầm đường bộ Hải Vân là 127.357.000 USD. Cửa hầm có hình dạng parabol $y = ax^2 (a \neq 0)$. Để đo chiều cao h (*khoảng cách từ mặt đất đến đỉnh*) của cửa hầm Hải Vân, một người tiến hành đo khoảng cách giữa hai chân cổng được $L = 10$ m. Người này thấy rằng nếu đứng cách chân cửa hầm (gần nhất) 0,5 m thì đầu chạm cổng, biết người này cao 1,7 m. Tính chiều cao của cửa hầm Hải Vân (*làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai*).

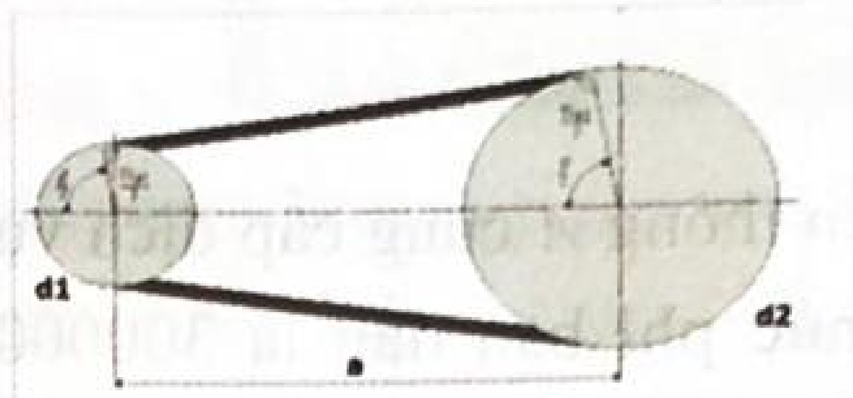
Bài 11. Một quả cầu gỗ có bán kính $R = 5$ cm được đặt trên một cái đế bằng gỗ có dạng là một nửa mặt cầu có bán kính bằng $\dfrac{R}{2}$. Hãy tính khoảng cách từ mặt đất đến điểm cao nhất của mặt cầu gỗ (*làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai*).

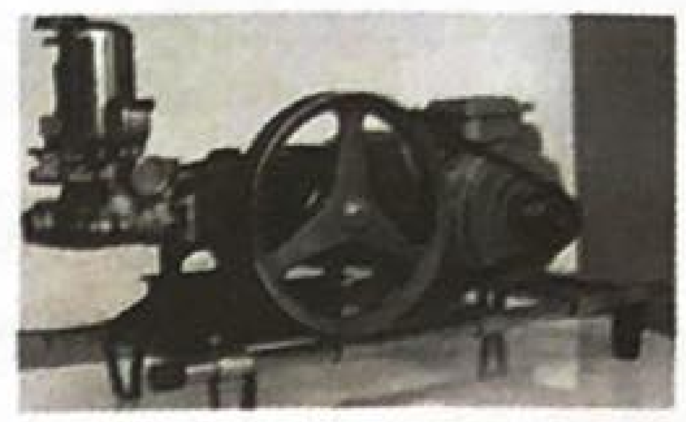
Bài 12. Bác *Toàn* muốn xây một bồn chứa nước dạng khối hộp chữ nhật trong một nhà tắm. Biết chiều dài, chiều rộng và chiều cao của khối hộp đó lần lượt là 5 m, 1 m, 2 m. Biết mỗi viên gạch có chiều dài 20 cm, chiều rộng 10 cm, chiều cao 5 cm. Hỏi bác *Toàn* phải sử dụng ít nhất bao nhiêu viên gạch để xây bồn đó và thể tích thực của bồn là bao nhiêu ? (*Giả sử lượng xi măng và cát là không đáng kể*).

Bài 13. Dây cu roa là một trong những bộ truyền được sử dụng rộng rãi trong công nghiệp. Chiều dài dây cu roa được xác định theo công thức:

$$L = 2a + \frac{\pi(d_1 + d_2)}{2} + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4a}$$

trong đó: L : chiều dài dây cu roa; A: khoảng cách tâm của 2 pu ly; d_1 : đường kính của pu ly 1 (đường tròn nhỏ màu vàng) ; d_2 : đường kính của pu ly 2 (đường tròn lớn màu vàng).





Cho biết $d_1 = 10$cm; $d_2 = 20$ cm; $a = 60$ cm.

a) Tính chiều dài dây cu roa.

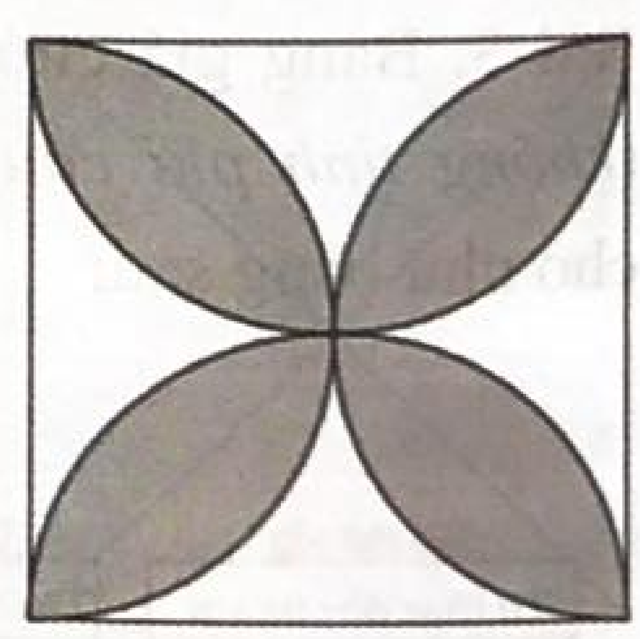
b) Gọi AB là chiều dài một dây cu roa, trong đó A, B lần lượt là tiếp điểm của dây cu roa với các đường tròn tạo bởi mặt cắt của 2 pu ly. Tính AB.

Bài 14. Bạn *Nam* đi xe đạp từ nhà (điểm A) đến trường điểm B) gồm đoạn lên dốc và đoạn xuống dốc. Biết $\widehat{A} = 5^0$; $\widehat{B} = 4^0$ và đoạn lên dốc dài 325m.

a) Tính chiều cao của dốc và chiều dài quãng đường từ nhà bạn *Nam* đến trường

b) Biết vận tốc trung bình lên dốc và vận tốc trung bình xuống dốc của bạn *Nam* lần lượt là 8 km/h và 15 km/h. Tính thời gian từ nhà đến trường của bạn *Nam* (*theo phút, kết quả phép tính làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất*).

Bài 15. Một người thợ cơ khí vẽ 4 nửa đường tròn trên một tấm nhôm hình vuông có cạnh 1m, sau đó cắt thành hình bông hoa (phần tô đậm như trên hình vẽ). Diện tích của bông hoa được cắt là (lấy $\pi = 3,14$)



A. 0,57 m^2 **B.** 0,44 m^2

C. 0,43 m^2 **D.** 0,56 m^2.

DEMOCRITUS VÀ "NGUYÊN TỬ" HÌNH HỌC

NGUYỄN THỦY THANH
(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Đã từ lâu các nhà Lịch sử Khoa học đã cố làm rõ một hiện tượng là vì sao mà vào thế kỷ VII-VI trước Công Nguyên nền văn minh Cổ Hy Lạp lại phát triển một cách nhảy vọt và diệu kỳ đến vậy.

Tại đây, các trường phái khoa học đã được hình thành từ rất sớm (thế kỷ VI trước Công Nguyên), trong đó có trường phái Triết học tự nhiên (thế kỷ V trước Công Nguyên) đứng đầu bởi *Democritus* (460 - 370 trước Công Nguyên), nhà Triết học và nhà Toán học vĩ đại của Cổ Hy Lạp. Đối với hậu thế, ông còn là nhà Thiên văn học, nhà Động vật học, nhà Thực vật học, nhà Ngôn ngữ học và là nhà Luân lý học. Đối với Toán học, ông ở một vị trí hết sức độc đáo …

*

* *

DEMOCRITUS - BỘ ÓC BÁCH KHOA ĐẦU TIÊN CỦA CỔ HY LẠP

Theo lịch sử truyền lại thì *Democritus* sinh ở thành phố Abdera, một địa danh trên bờ biển xứ Thrace của Hy Lạp cổ đại. Bố ông là một thương gia giàu có, cho phép ông có nhiều điều kiện thuận lợi để du học ở nhiều nước trên thế giới. Cha ông đã để lại cho ba anh em ông phần lớn tài sản. *Democritus* chỉ lấy một phần tiền mặt để đi du lịch. Ông đến các những Phương Đông như Ai Cập cổ đại để học Hình học hay đến Babylon huy hoàng để tìm hiểu Thiên văn học.

Ông tự hào tuyên bố rằng ông đã qua nhiều vùng đất rộng lớn và đã luận bàn với nhiều nhà bác học được rất nhiều, tiếp thu được nhiều kiến thức triết học cũng như tri thức của các nhà khoa học khác.

Democritus
(460 - 370 BC)

Khi trở về quê hương, ông trở nên người nghèo khổ. Theo Bộ luật của xứ Abdera thời bấy giờ. Ông bị tước quyền cư trú ở thành phố vì đã tiêu phí tiền thừa kế của cha. Song cư dân thành phố khâm phục ông vì tri thức uyên bác; vẫn cứ công nhận ông là công dân thành phố. Khác với *Heraclitus* (535 - 475 trước Công Nguyên) là "*nhà Triết học cô đơn*", *Democritus* là "*nhà Triết học luôn cười*", vì khi ra phố ông luôn luôn mỉm cười và cắt nghĩa giảng giải cho mọi người nhiều vấn đề luận lý. Người ta kể rằng khi nghe được chuyện xưa đó, nhà Triết học Hy Lạp *Timon* xứ Phlius (320 - 230 trước Công Nguyên) phải thốt lên:

"Cái ông Democritus thật là một người hiền".

Căn cứ vào những đòi hỏi về mặt thực hành tiên tiến nhất của thời đại mình, nhà bác học vĩ đại nhất thời cổ đại là *Archimedes* đã đánh giá phương pháp của *Democritus* có giá trị rất cao. Ông đã áp dụng để giải nhiều bài toán phức tạp về hình học. Ngược lại với sự trân trọng đó, nhà duy tâm vĩ đại nhất của thời kỳ cổ đại - *Platon* (427 - 347 trước Công Nguyên) - lại là đối thủ không khoan nhượng với học thuyết *"nguyên tử"* của *Democritus*. *Platon* không chỉ phê phán học thuyết của *Democritus* mà còn *muốn mua và đốt hết* các công trình của *Democritus*. Rồi, những gì mà *Platon* chưa kịp làm thì những người cùng chính kiến với *Platon* đã làm trong một thời gian ngắn. Đến thời *Archimedes* việc tìm các tác phẩm của *Democritus* là rất khó. Rõ ràng, điều đó đã kìm hãm sự phổ cập các tư tưởng tiên tiến của *Democritus*, đặc biệt các ý niệm về toán học.

Chính vì thế mà theo tương truyền lại, ông có khoảng 70 *tác phẩm* về nhiều lĩnh vực: đạo đức, tự nhiên học, toán học, kỹ thuật, âm nhạc … Nhưng phần lớn đã bị thất lạc, không còn lưu lại. Cho đến nay, người ta chỉ sưu tầm được khoảng 300 *trích đoạn*.

K. Marx viết rằng: *"Democritus là nhà tự nhiên học và bộ óc bách khoa Cổ Hy Lạp đầu tiên"* - còn *Aristoteles* thì cho rằng: *"Democritus hầu như đã suy nghĩ đến tất cả mọi điều … và ngoài Democritus ra, hầu như chưa có ai nghiên cứu một cách cặn kẽ về một vấn đề gì"*.

Tư tưởng táo bạo của *Democritus* về bản chất của thế giới tự nhiên được thể hiện trong thuyết *nguyên tử* của ông (xuất hiện khoảng năm 450 trước Công Nguyên). Đó cũng là viễn cảnh của sự phát triển khoa học cho nhiều thế kỷ sau này, nhất là trong Vật lý và Hóa học. Vậy nội dung chủ yếu của thuyết nguyên tử về thế giới mà *Democritus* xây dựng là gì?

Theo *Democritus*, khởi nguyên của thế giới không phải là một sự vật cụ thể nào như nước, lửa, không khí, con số, … mà là các *nguyên tử* và *chân không*. Ở đây, theo tiếng Hy Lạp cổ, nguyên tử là *atomos* có nghĩa là *phân tử nhỏ nhất bất khả phân*. Theo ông vật chất được cấu thành từ các nguyên tử tồn tại vĩnh viễn và trong lòng chúng không có vận động. Các nguyên tử thì rất đa dạng, chỉ khác nhau ở hình thức, kích thước, vị trí và thứ tự. Chân không là thuần nhất. Chính sự đa dạng về hình thức của nguyên tử là yếu tố tạo nên sự đa dạng của các vật mà chúng cấu thành. Các nguyên tử không thể biến thành nhau và vận động là bản chất của chúng. Cũng theo ông, nguyên tử vận động vĩnh viễn trong chân không vô tận, có khi va chạm nhau tạo thành những cơn lốc nguyên tử. Các nguyên tử có vai trò như những viên gạch xây nên vũ trụ và ta nhận thức được sự vật là nhờ các vật thể phóng ra những chất rất tinh tế tác động đến giác quan …

Democritus là nhà bác học đa tài. Ông có nhiều công trình trong lĩnh vực tự nhiên học. Chẳng hạn, người ta cho rằng công trình giải phẫu sinh lý loài tắc kè hoa là của ông. Trong chuyên luận *"Bản chất con người"*. Ông trình bày những kiến thức về giải phẫu sinh lý rất quý báu. Về động vật và thực vật học ông cũng có những công trình nghiên cứu rất quảng bác. Ông đã từng đưa ra tiên đoán thiên tài về sự *tồn tại các vi sinh vật* mà khi xâm nhập vào cơ thể người sẽ gây ra trọng bệnh…

*

* *

DEMOCRITUS - NHÀ TOÁN HỌC LỖI LẠC

Democritus đã mong muốn áp dụng thuyết nguyên tử của mình vào trong các lĩnh vực khoa học khác mà một trong các lĩnh vực đó là ***toán học.*** Ông là nhà toán học lỗi lạc và độc đáo của Hy Lạp cổ đại.

Quan niệm nguyên tử của *Democritus* trong toán học được thể hiện ở chỗ Ông xem các vật thể hình học được cấu thành từ các lớp mỏng song song với độ dày bằng một nguyên tử. Cùng với đó, ông cũng xem mọi đại lượng hình học đều được cấu tạo từ những đại lượng gốc là *"các nguyên tử hình học"*.

Democritus là nhà bác học đầu tiên sử dụng ý niệm phân hoạch vật thể thành các lớp mỏng làm cơ sở cho việc tính thể tích. Và, do đó ông đã tạo nên tiền đề cho phép tính tích phân và lý thuyết giới hạn sau này. Chính *Democritus* đã dự đoán trước phương pháp bất khả phân và "*Nguyên lý Cavalieri*", được phát biểu năm 1635.

Cavalieri

(1598-1647)

"Nếu khi cắt hai hình phẳng bằng một đường thẳng tùy ý song song với một đường thẳng khác ta luôn luôn thu được ở thiết tuyến hai dây cung bằng nhau thì diện tích của hai hình phẳng đó bằng nhau".

Một mệnh đề tương tự cũng đúng cho các hình không gian. Các nhà toán học Cổ Hy Lạp đã biết mệnh đề này nhưng họ công nhận không chứng minh.

Thuyết nguyên tử trong toán học đã giải thoát Toán học khỏi những mâu thuẫn được phát hiện ra trong đó bởi sự phê phán của *Zenon* (490 - 430 trước Công Nguyên). Thật vậy, lý thuyết của các nhà nguyên tử học khẳng định rằng phép chia vật thể không thể tiếp tục mãi mãi và rằng đối với các hạt vật chất tồn tại một giới hạn tuyệt đối của phép chia: và nguyên tử bất khả phân chính là giới hạn đó. Do đó các nhà nguyên tử học lý giải*: vật thể cấu thành không phải từ một số vô hạn phần mà là từ một số rất lớn nhưng luôn luôn là một số hữu hạn nguyên tử.*

Giả thuyết của các nhà nguyên tử học rằng các đoạn thẳng được cấu thành từ các bất khả phân cũng dẫn đến mâu thuẫn! Chẳng hạn, từ đó không tránh khỏi nảy ra kết luận rằng mọi đường tròn đồng tâm đều được cấu thành từ một số phân tử, đường chéo hình vuông cũng cấu thành từ chính số "nguyên tử" như cạnh của nó, và như vậy các đại lượng vô ước không tồn tại!.

Mặc dù vậy, sự phát triển của toán học cũng chứng tỏ rằng tư tưởng chủ đạo của các nhà nguyên tử học đã hàm chứa một *nguyên lý gợi mở vô cùng quý báu*. Và, đặc biệt thuyết nguyên tử của *Democritus* còn hàm chứa một tư tưởng cực kỳ sâu xa mà chỉ có *Archimedes* - nhà toán học vĩ đại nhất của thế giới cổ đại - nhận ra và áp dụng. Đó là *nguyên lý về khả năng xấp xỉ một hình cho trước bất kỳ bởi một hình gần đúng với độ chính xác tùy ý*.

Từ đó xuất hiện cách xấp xỉ hình (vật thể) bởi hình hay vật thể bậc thang nội và ngoại tiếp do *Archimedes* đề ra để tính các đại lượng hình học, chẳng hạn tính diện tích hình thang cong. Người ta xem phương pháp này như là *tiền thân của phương pháp vét kiệt.*

Chẳng hạn, *Democritus* đã cho rằng hình tròn là một đa giác mà mỗi cạnh gồm từ hai nguyên tử. Các hình trụ và hình nón cũng được ông xem là các lăng trụ và các hình chóp tương ứng với một số rất lớn cạnh đáy. Trên quan điểm xấp xỉ, *Democritus* cũng đã xem hình nón như được cấu thành từ một số rất lớn các lớp mỏng tròn sắp xếp song song với đáy của nó theo thứ tự bán kính giảm dần từ dưới lên đến đỉnh nón. Độ mỏng của mỗi lớp phải ở mức sao cho các lớp không thể được cảm nhận bởi các giác quan của chúng ta.

Một trong những nét tinh hoa của quan điểm nguyên tử về toán học được phát triển bởi *Democritus* là ở chỗ ông cho rằng diện tích, thể tích cũng được cấu thành từ một số lớn nhưng hữu hạn các "*nguyên tử*" bất khả phân. Do vậy, việc tính thể tích của vật thể được các nhà bác học quy về phép tính tổng thể tích mọi "*nguyên tử*" tạo nên vật thể, trong đó thể tích của nguyên tử xem như đã biết.

Archimedes
(287 - 212 BC)

Theo sự khảo cứu của *Archimedes* thì *Democritus* đã xác lập được rằng hình chóp đẳng tích với $\frac{1}{3}$ hình lăng trụ có cùng đáy và chiều cao như nhau và hình nón đẳng tích với $\frac{1}{3}$ hình trụ tương ứng. Dựa trên một số trích đoạn của *Democritus*, *Archimedes* cũng cho rằng các kết quả trên chưa được các nhà nguyên tử học chứng minh. Thật vậy, ngày nay *người ta đã chứng minh rằng không thể thành lập một hình chóp từ một số hữu hạn lăng trụ và càng không thể được đối với hình nón*. Do đó, để có các kết quả mà *Archimedes* nói đến trên đây cần phải qua giới hạn mà đó là điều mà *Democritus* chưa có được.

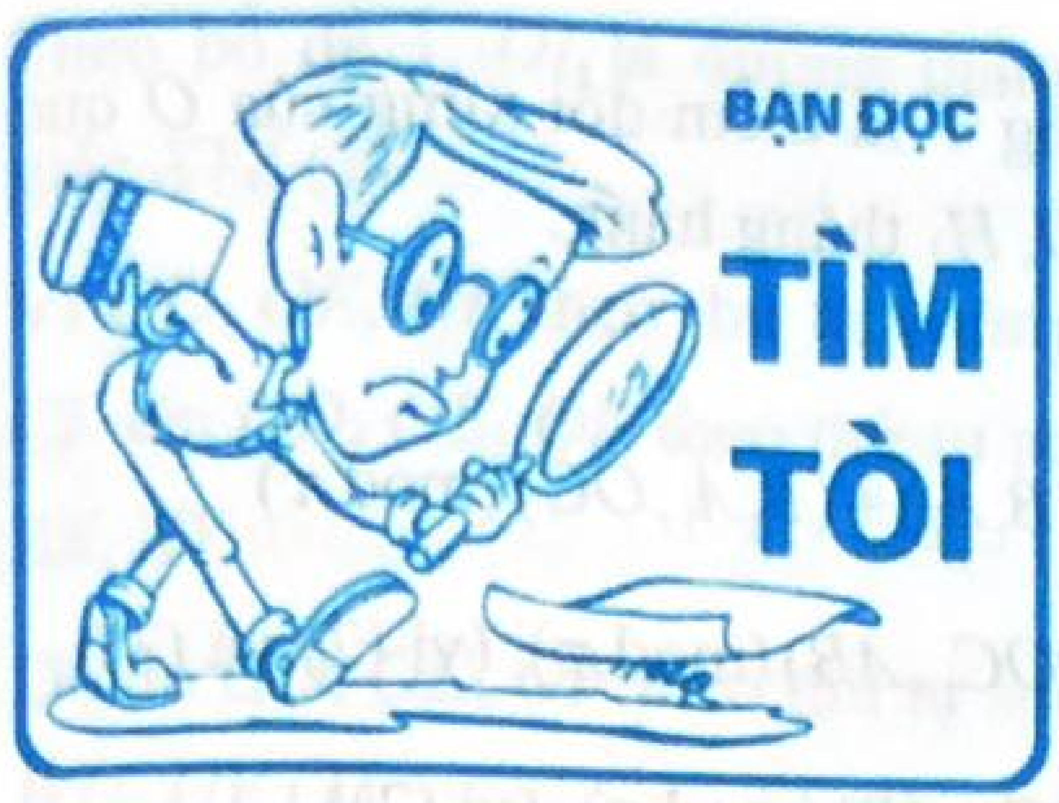
Công lao của *Democritus* trong Lịch sử toán học còn ở chỗ ông là một trong những người đầu tiên nghiên cứu và phát triển các vấn đề về Hình học không gian. Chính ở đây ông đã đưa ra những phương pháp khảo sát toán học mà sự phát triển về sau đã dẫn đến sự ra đời của lý thuyết các đại lượng vô cùng bé - một thành tựu tuyệt vời của thuần túy trí tuệ con người.

Các tư tưởng nguyên tử đã được phục hưng lại vào thế kỷ XVII trong các công trình của *J. Kepler* (1571 - 1630). *B. Cavalieri* (1598 - 1647) và *R. Descartes* (1596 - 1650).

*
* *

Tuy thuyết nguyên tử của *Democritus* ít nhiều mang vẻ thô sơ mộc mạc rằng *bản chất của thế giới là nguyên tử và chân không* nhưng nó đã chinh phục các nhà khoa học hơn hai nghìn năm qua kể từ *Antifont* (nửa cuối thế kỷ V trước Công Nguyên), *Eudoxus* (408 - 355 trước Công Nguyên) và *Archimedes* với việc đúc kết nên *Phương pháp vét kiệt*.

Đặc biệt, ngày nay khi thực tế khoa học và công nghệ phát triển như vũ bão thì người ta càng trân trọng cái "thô sơ và mộc mạc" của cái thuở xa xưa đó … Đối với nền văn minh Cổ Hy Lạp, có lẽ đây là thành tựu độc nhất vô nhị của trí tuệ Hy Lạp mà sự phát triển nhảy vọt của nó đã đi trước thời đại hơn hai nghìn năm.



MỘT KẾT QUẢ ĐẸP VỀ TÂM ĐƯỜNG TRÒN EULER TRONG TAM GIÁC

NGUYỄN ĐÌNH HÀ DƯƠNG *(Đắk Nông)*
VŨ HOÀNG THIÊN AN *(Hà Nội)*

LTS. Kết quả sau về tâm đường tròn Euler là một kết quả đẹp, được em *Nguyễn Đình Hà Dương*, học sinh Trường THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh, **Đắk Nông** phát hiện và được em *Vũ Hoàng Thiên An*, học sinh Trường THPT chuyên Amsterdam, **Hà Nội** chứng minh với sự giúp đỡ của TS. *Nguyễn Minh Hà*, **Hà Nội**. Tạp chí **Toán học và Tuổi trẻ** xin giới thiệu với bạn đọc kết quả này.

Định lí và phép chứng minh

Định lí. *Cho tam giác không đều ABC, O, I theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp. D, E, F theo thứ tự là điểm đối xứng của O qua AI, BI, CI. Khi đó các tam giác ABC, DEF có cùng tâm đường tròn Euler.*

Chứng minh.

Ta cần có bốn bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp, (I) là đường tròn nội tiếp. X, Y, Z theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB. Khi đó OI là đường thẳng Euler của tam giác XYZ.*

Phép chứng minh bổ đề 1 rất quen thuộc, không trình bày ở đây.

Bổ đề 2. *Cho tam giác không đều ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. P là điểm anti-Steiner của OH đối với tam giác ABC. S là một trong hai giao điểm của OH và (O). Các điểm A_1, B_1, C_1 thuộc (O) sao cho SA_1, SB_1, SC_1 theo thứ tự song song với BC, CA, AB. d là trung trực của SP. T là điểm đối xứng của O qua A_1B_1. Khi đó:*

1) $AA_1 \,//\, BB_1 \,//\, CC_1 \,//\, SP$.

2) *Các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$ bằng nhau ngược hướng.*

3) *ST song song với OC.*

Chứng minh.

1) Gọi P là điểm anti-Steiner của OH đối với tam giác ABC (điểm đồng quy của 3 đường thẳng đối xứng với OH qua BC, CA, AB; điểm này thuộc đường tròn (O) (Định lý Collings)); d là trung trực của SP; X là điểm đối xứng của P qua BC; W là giao điểm thứ hai của OH và (O).

Vì X là điểm đối xứng của P qua BC và $AC \perp HB; AB \perp HC$ nên

$$(XB, XC) \equiv (PC, PB) \equiv (AC, AB) \equiv (HB, HC) (\bmod \pi).$$

Do đó B, C, H, X cùng thuộc một đường tròn (1).

Vậy

$$(SC_1, SP) \equiv (AB, SB) + (SB, SP) (\bmod \pi) \text{ (vì } SC_1 \,//\, AB)$$

$$\equiv (AW, SW) + (CB, CP) (\bmod \pi)$$
$$\text{(vì } W \in (ABS); C \in (SBP))$$

$$\equiv (AW, AS) + (SA, SW) + (CB, CP) (\bmod \pi)$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} + (CA, CW) + (CB, CP) (\bmod \pi)$$
$$\text{(vì } AW \perp AS; C \in (SAW))$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} + (CA, WA) + (AW, CW) + (CB, CP) (\bmod \pi)$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} + (CS, WS) + (AB, CB) + (CB, CP) (\bmod \pi)$$
$$\text{(vì } S \in (CAW); B \in (AWC))$$

$\equiv (HA,BC)+(CS,WS)+(HC,HA)+(CB,CP) \pmod{\pi}$

(vì $HA\perp BC; AB\perp HC; CB\perp HA$)

$\equiv (HC,BC)+(CS,WS)+(CB,CP) \pmod{\pi}$

$\equiv (HX,BX)+(CS,WS)+(CB,CP) \pmod{\pi}$ (vì (1))

$\equiv (CS,BX)+(CB,CP) \pmod{\pi}$ (vì $HX\equiv WS$)

$\equiv (CS,CB)+(BC,BX)+(CB,CP) \pmod{\pi}$

$\equiv (PS,PB)+(BP,BC)+(CB,CP) \pmod{\pi}$

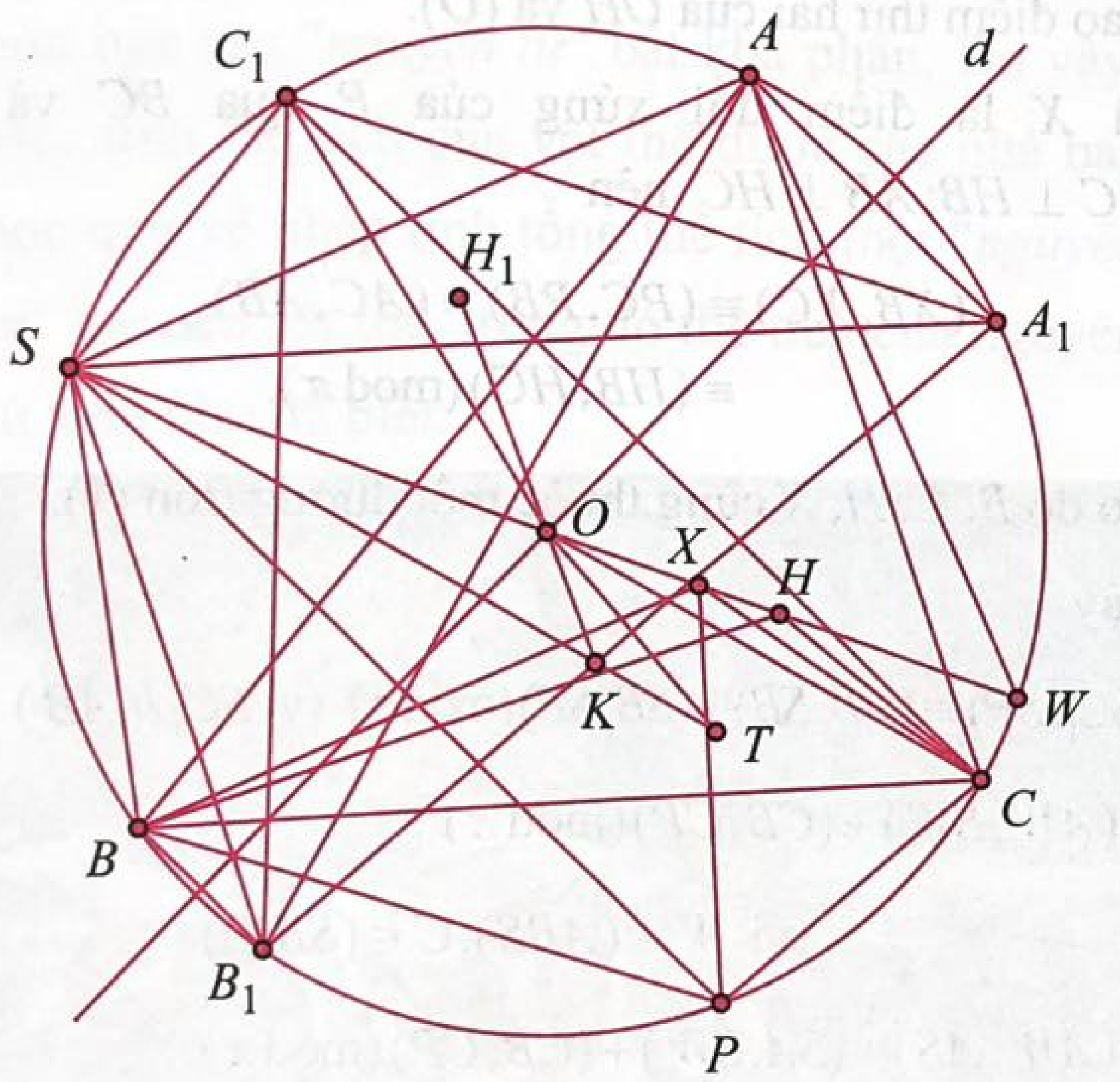
(vì $P\in(SCB)$ và X, P đối xứng với nhau qua BC)

$\equiv (SP,CP) \pmod{\pi}$

$\equiv (SC_1,CC_1) \pmod{\pi}$ (vì $C_1\in(SPC)$).

Do đó $CC_1 // SP$. Tương tự:

$$AA_1 // SP;\ BB_1 // SP.$$



2) Theo phần 1, A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là điểm đối xứng với A, B, C qua d. Do đó các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$ bằng nhau ngược hướng.

3) Gọi H_1 là trực tâm của tam giác $A_1B_1C_1$. K là giao điểm của ST và A_1B_1.

Theo phần 1, (O); O, S, A_1, B_1, C_1, H_1 theo thứ tự là ảnh của (O), O, P, A, B, C, H qua phép đối xứng trục d (2).

Do đó S là điểm anti-Steiner của OH_1 đối với tam giác $A_1B_1C_1$ (3).

Từ đó, chú ý rằng T là điểm đối xứng của O qua A_1B_1, suy ra K, O, H_1 thẳng hàng.

Vậy

$(ST,OC)\equiv(ST,B_1A_1)+(B_1A_1,OC) \pmod{\pi}$

$\equiv(B_1A_1,OH_1)+(OC_1,AB) \pmod{\pi}$ (vì (2) và (3))

$\equiv(OH,BA)+(OC_1,AB) \pmod{\pi}$ (vì (2))

$\equiv(OS,SC_1)+(OC_1,SC_1) \pmod{\pi}$

(vì $OH\equiv OS; AB // SC_1$)

$\equiv(OS,SC_1)+(SC_1,OS) \pmod{\pi}$

(vì tam giác OSC_1 cân tại O)

$\equiv 0 \pmod{\pi}$. Do đó $ST // OC$.

Bổ đề 3. *Cho tam giác ABC, O, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm. Khi đó O, H là hai điểm đẳng giác của tam giác ABC.*

Bổ đề 4. *Cho tam giác ABC với O, H, N theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm và tâm đường tròn Euler. M là trung điểm của BC. O' là điểm đối xứng của O qua BC. Khi đó*

1) $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}$.

2) *N là trung điểm của AO'.*

Phép chứng minh các bổ đề 3, 4 rất đơn giản, không trình bày ở đây.

Trở lại chứng minh định lí trên.

Vì tam giác ABC không đều nên nó phải không cân tại một đỉnh nào đó. Không mất tính tổng quát giả sử tam giác ABC không cân tại đỉnh B.

Gọi X, Y, Z theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB; r là bán kính của (I); U, V, W theo thứ tự là ảnh của X, Y, Z qua phép vị tự $V_I^{\frac{OI}{r}}$; T là điểm đối xứng của I qua FD; M là trung điểm của AC; H là trực tâm của tam giác ABC; N giao điểm thứ hai của BI và (O).

Vì D, E, F theo thứ tự là điểm đối xứng của O qua AI, BI, CI nên $IO=ID=IE=IF$. Do đó O, D, E, F cùng thuộc đường tròn (I, IO) (1).

Theo bổ đề 1, OI là đường thẳng Euler của tam giác XYZ (2).

Vì OD, OE, OF theo thứ tự vuông góc với AI, BI, CI nên OD, OE, OF theo thứ tự song song với YZ, ZX, XY.

Do đó OD, OE, OF theo thứ tự song song với VW, WU, UV (3).

Từ (1), (2) và (3), áp dụng phần 3 của bổ đề 2 cho tam giác UVW, suy ra $TO // IV$.

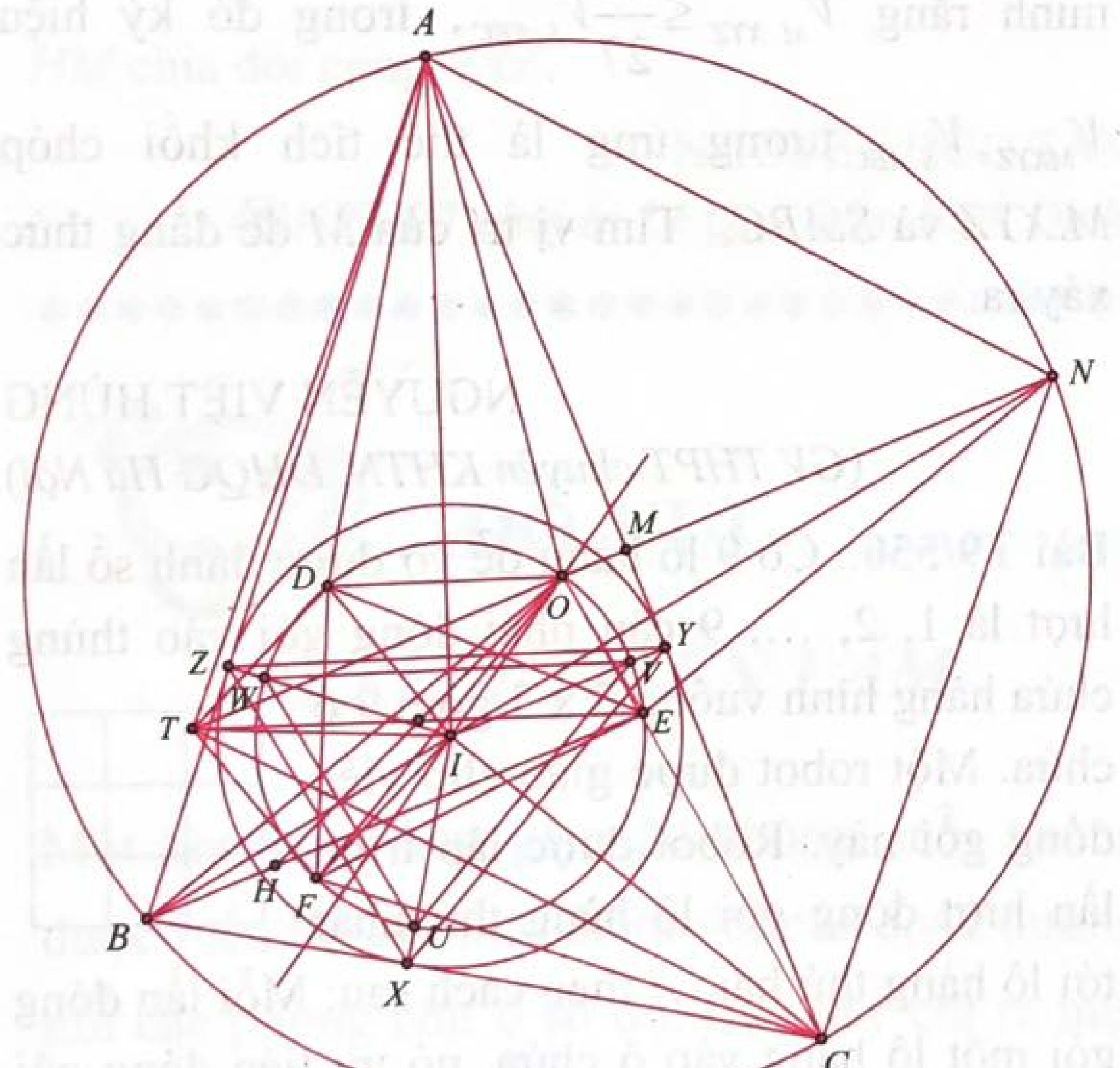
Từ đó, chú ý rằng $IV \equiv IY \perp AC$, suy ra $TO \perp AC$.

Kết hợp với $OA = OC$, suy ra $TA = TC$.

Dễ thấy IT là trung trực của DF, do đó $TD = TF$.

Dễ thấy $AD = AO = CO = CF$.

Vậy các tam giác TAD, TCF bằng nhau.



Nếu các tam giác TAD, TCF bằng nhau ngược hướng thì AC và DF có chung đường trung trực. Từ đó, chú ý rằng IT là trung trực của DF, suy ra IT là trung trực của AC. Kết hợp với $IA = IC$, , suy ra $\widehat{IAC} = \widehat{ICA}$. Do đó $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$. Điều đó có nghĩa là tam giác ABC cân tại B, mâu thuẫn.

Vậy các tam giác TAD, TCF bằng nhau cùng hướng (4).

Từ (3), áp dụng phần 2 của bổ đề 2 cho tam giác UVW, suy ra các tam giác DEF, UVW bằng nhau ngược hướng (5). Vậy

$(TA, TC) \equiv (TD, TF) \pmod{\pi}$ (vì (4))

$\equiv (IF, ID) \pmod{\pi}$

(vì T, I đối xứng với nhau qua DF)

$\equiv (IU, IW) \pmod{\pi}$ (vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác DEF, UVW và (5))

$\equiv (IX, IZ) \pmod{\pi}$ (vì $IU \equiv IX; IW \equiv IZ$)

$\equiv (BX, BZ) \pmod{\pi}$ (vì $IX \perp BX; IZ \perp BZ$)

$\equiv (BC, BA) \pmod{\pi}$ (vì $BX \equiv BC; BZ \equiv BA$)

$\equiv (NC, NA) \pmod{\pi}$ (vì $N \in (BCA)$)

$\equiv -(NA, NC) \pmod{\pi}$.

Từ đó, chú ý rằng $TA = TC$; $NA = NC$ và T, N thuộc hai mặt phẳng bờ AC khác nhau, suy ra tứ giác $ATCN$ là hình thoi.

Do đó M là trung điểm của TN và $TN \perp AC$.

Chú ý rằng E, O đối xứng với nhau qua BI, theo bổ đề 3, ta có:

$$(BE, BI) \equiv (BI, BO) \equiv (BH, BI) \pmod{\pi}.$$

Do đó B, H, E thẳng hàng.

Dễ thấy tứ giác $BONE$ là hình thoi.

Vậy, theo phần 1 của bổ đề 4, ta có

$$\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{MO} + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}\right)$$

$$= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{TM} = \overrightarrow{TO}.$$

Do đó tứ giác $OTHE$ là hình bình hành.

Điều đó có nghĩa là OH và TE có cùng trung điểm.

Vậy theo phần 2 của bổ đề 4, các tam giác DEF và ABC có cùng tâm đường tròn Euler.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/550 (Lớp 6). Tìm các số nguyên dương *a*, *b* sao cho: $a^b + b^a = 2020.$

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Phong, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T2/550 (Lớp 7). Cho *a*, *b*, *c*, *d* là bốn số dương thỏa mãn $a + b + c + d = 16$. Chứng minh rằng: $6\sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{a+b+c} + \sqrt[3]{b+c+d} + \sqrt[3]{c+d+a}$

$$+\sqrt[3]{d+a+b} < 8\sqrt[3]{2}.$$

NGUYỄN THỊ NGA
(SV K27C, Toán Tin, ĐHSP Hà Nội 2, Vĩnh Phúc)

Bài T3/550. Biết số tự nhiên $\overline{abcdefghi}$ (có chín chữ số) có ước nguyên tố lớn hơn 199998. Hỏi phương trình bậc hai $ax^2 + \overline{bcde}.x + \overline{fghi} = 0$ (ẩn *x*) có thể có nghiệm hữu tỷ không?

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS P. Bình Định, An Nhơn, Bình Định)

Bài T4/550. Cho hình chữ nhật *ABCD* (*AB* < *BC*). Qua *B* kẻ đường thẳng vuông góc với *AC* và lấy trên đó điểm *E* sao cho *BE* = *AC*. Tính số đo góc $\widehat{EDC}$.

BÙI VĂN CHI
(Số nhà 21/2 đường Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T5/550. Cho *a*, *b* là hai số thực dương thỏa mãn $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4a + b$.

NGUYỄN THẾ ANH
(GV THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang, Hà Tĩnh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/550. Giải phương trình

$$x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0.$$

TRIỆU VĂN HƯNG
(GV THPT Dương Quảng Hàm, Hưng Yên)

Bài T7/550. Cho hàm số $f(x) = x^2 + m$. Tìm *m* để phương trình $f(f(x)) = x$ có bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho biểu thức

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2x_3x_4$$

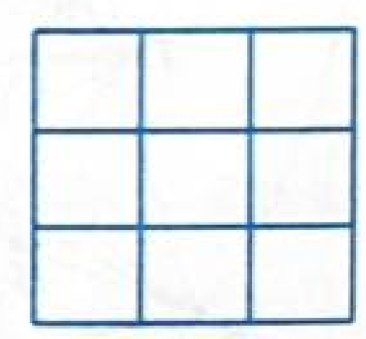
đạt giá trị lớn nhất.

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

Bài T8/550. Cho hình chóp tam giác *S.ABC*. *M* là điểm bất kỳ trên mặt đáy (*ABC*) và thuộc miền trong tam giác *ABC*. Qua *M* kẻ các đường thẳng song song với các mặt (*SBC*), (*SCA*), (*SAB*) theo thứ tự cắt *SA*, *SB*, *SC* lần lượt tại *X*, *Y*, *Z*. Chứng minh rằng $V_{M.XYZ} \le \frac{2}{27} V_{S.ABC}$, trong đó ký hiệu $V_{MXYZ}, V_{S.ABC}$ tương ứng là thể tích khối chóp *M.XYZ* và *S.ABC*. Tìm vị trí của *M* để đẳng thức xảy ra.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/550. Có 9 lô hàng dễ vỡ được đánh số lần lượt là 1, 2, …, 9 cần phải đóng gói vào thùng chứa hàng hình vuông 3 x 3 gồm 9 ô chứa. Một robot được giao cho việc đóng gói này. Robot được lập trình lần lượt đóng gói lô hàng thứ nhất tới lô hàng thứ hai … theo cách sau: Mỗi lần đóng gói một lô hàng vào ô chứa, nó ưu tiên đóng gói mỗi lô hàng vào ô trống (tùy ý) không có cạnh chung với các ô chứa đã có hàng bên trong. Trong trường hợp không còn ô trống nào như vậy, nó mới đưa hàng vào một trong các ô trống tùy ý còn lại. Hãy xác định xem, bằng cách đó, có thể có bao nhiêu cách đóng gói lô hàng (hai cách đóng gói lô hàng được coi là khác nhau nếu có một lô hàng trong lần đóng gói này được đóng vào ô chứa khác với ô chứa nó trong lần đóng gói kia)?



VŨ ĐÌNH HÒA *(Hà Nội)*

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/550. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 13 \\ u_{n+1} = u_n + 6(n+1), \forall n = 1,2,... \end{cases}$$

Chứng minh rằng không có số hạng nào của dãy số là lập phương của một số nguyên.

TRỊNH XUÂN TÌNH

(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Nội)

Bài T11/550. Tìm các hàm $f: [0;1] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[0; 1]$ và thỏa mãn: $f(x) \geq 2xf(x^2)$.

ĐỖ LÊ HẢI THỤY

(GV THPT chuyên Bảo Lộc, Lâm Đồng)

Bài T12/550. Cho tam giác nhọn ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O), các tiếp tuyến với (O) tại B, C cắt nhau ở X, các đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H, EF cắt XB, XC lần lượt tại Z, Y. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh HM chia đôi cung $\overset{\frown}{YXZ}$.

NGUYỄN HỮU TÂM

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

Bài L1/550. Một con lắc lò xo đặt trên mặt bàn nằm ngang. Kéo quả cầu dọc theo trục lò xo đến vị trí B rồi thả nhẹ cho con lắc dao động. Nếu không có ma sát thì tốc độ của quả cầu khi về tới vị trí O (vị trí lò xo không biến dạng) là 2,5 m/s. Trong thực tế, do có ma sát nên tốc độ của quả cầu khi về tới O lần đầu tiên là 2,4 m/s. Lấy g = 10 m/s^2 ; BO = 10 cm. Hệ số ma sát giữa quả cầu và mặt bàn là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/550. Đoạn mạch điện AB gồm hai đoạn mạch AM và MB nối tiếp nhau. Trên đoạn AM chứa biến trở và cuộn cảm thuần, trên đoạn MB chỉ chứa tụ điện. Đặt vào hai đầu A, B một điện áp xoay chiều $u_{AB} = U\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$(V) và điều chỉnh biến trở sao cho công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB đạt cực đại $P_{\max} = 45$ W. Biết rằng khi đó điện áp trên đoạn mạch AM có biểu thức là $u_{AM} = 120\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$(V). Điện dung của tụ có giá trị là bao nhiêu?

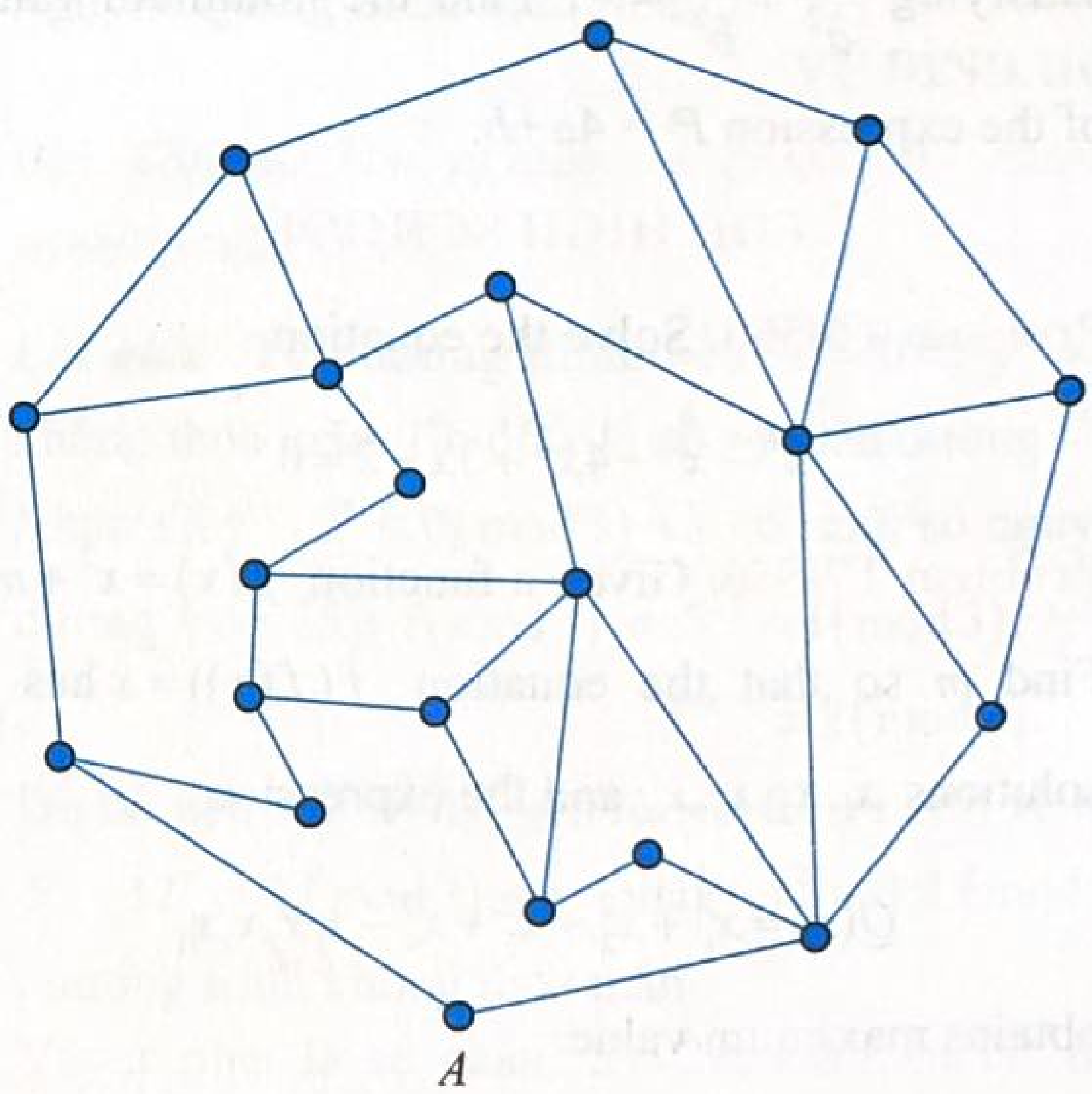
THANH LÂM *(Hà Nội)*

****

ĐỐ VUI

ĐI XEM TRIỂN LÃM

Một khu triển lãm gồm 20 phòng, mỗi phòng được biểu thị bởi một điểm với các đoạn đường nối các phòng như ở sơ đồ. Bạn hãy chỉ ra một đường đi xem triển lãm, bắt đầu đi từ phòng A, sao cho chỉ đến mỗi phòng một lần, cuối cùng trở về phòng A, mà không đi qua đoạn đường nào đó quá một lần. Bạn có thể chứng tỏ rằng đường đi đó là duy nhất không (không kể đi theo chiều ngược lại) ? Trong bài giải bạn ghi các tên phòng đi liên tiếp theo thứ tự A - B - C - ... trên sơ đồ.



Sơ đồ khu triển lãm

NGUYỄN VIỆT HẢI *(Hà Nội)*

PROBLEM IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/550 (For 6th grade). Find positive integers a, b satisfying $a^b + b^a = 2020$.

Problem T2/550 (For 7th grade). Given positive numbers a, b, c, d satisfying $a + b + c + d = 16$. Show that $6\sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{a+b+c} + \sqrt[3]{b+c+d} + \sqrt[3]{c+d+a}$

$$+\sqrt[3]{d+a+b} < 8\sqrt[3]{2}.$$

Problem T3/550. Given the 9-digit number $\overline{abcdefghi}$ has a prime factor which is greater than 199998. Does the equation $ax^2 + \overline{bcde}.x + \overline{fghi} = 0$ (variable x) have rational solutions?

Problem T4/550. Given a rectangle $ABCD$ ($AB < BC$). Through B draw the line perpendicular to AC and choose a point E so that $BE = AC$. Find the measurement of the angle $\widehat{EDC}$.

Problem T5/550. Given positive numbers a, b satisfying $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{5}{4}$. Find the minimum value of the expression $P = 4a+b$.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/550. Solve the equation

$$x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0.$$

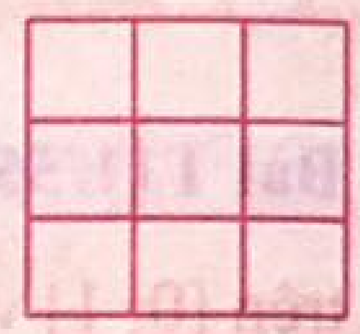
Problem T7/550. Given a function $f(x) = x^2 + m$. Find m so that the equation $f(f(x)) = x$ has 4 solutions x_1, x_2, x_3, x_4 and the expression

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2x_3x_4$$

obtains maximum value.

Problem T8/550. Given a pyramid $S.ABC$ and M is an arbitrary point inside the triangle inside the triangle ABC. Through M draw the lines parallel to the planes (SBC), (SCA), (SAB) and intersect SA, SB, SC respectively at X, Y, Z. Show that $V_{M.XYZ} \le \frac{2}{27}V_{S.ABC}$. Find the position for M so that the equality happens.

Problem T9/550. There are 9 fragile packages. A robot is going to place them in a square container of size 3 x 3 with 9 rooms in the following procedure:



First a robot tries to find an arbitrary empty slot which is not adjacent to an occupied one to put a package in. If cannot, it puts a package in any of the remain slots. Determine how many different ways the robot can arrange the packages in the container with this method. Two ways are considered different if in these two arrangements, there is a place containing different packages.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/550. Given the sequence (u_n) determined as follows

$$\begin{cases} u_1 = 13 \\ u_{n+1} = u_n + 6(n+1), \forall n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Show that the terms of this sequence cannot be cube numbers.

Problem T11/550. Find all functions $f: [0;1] \to \mathbb{R}$ which are continuous on $[0; 1]$ and satisfy $f(x) \ge 2xf(x^2)$.

Problem T12/550. Given an acute triangle ABC which is not isosceles triangle, inscribed in a circle (O). The tangents at (O) at B, C intersect at X. The altitudes BE, CF of the triangle ABC intersect at H. EF intersects XB, XC respectively at Z, Y. Let M be the midpoint of BC. Show that HM bisects the arc $\overparen{YXZ}$.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science - Vietnam National University, Hanoi)

Bài T1/546. *Tìm số tự nhiên gồm bốn chữ số liên tiếp sao cho tích của hai chữ số cuối bằng một số được viết từ hai chữ số đầu tiên (theo thứ tự từ trái qua phải).*

Lời giải. Gọi số cần tìm là $n = \overline{abcd}$, trong đó a, b, c, d là bốn chữ số liên tiếp (không nhất thiết sắp xếp theo thứ tự tăng dần hoặc giảm dần). Do a, b, c, d là bốn chữ số liên tiếp thì có hai chữ số lẻ và hai chữ số chẵn (*). Theo giả thiết có $\overline{ab} = c.d$ (1). Nếu b là số lẻ thì c, d đều là số lẻ, trái với (*), do đó: b phải là số chẵn, trong hai số c, d có một số chẵn và một số lẻ, còn a là số lẻ. Xét các trường hợp:

• Nếu $a = 9$ thì $90 \le c.d \le 98$. Không có chữ số c, d nào khác 9 nào mà $c.d \ge 90$, loại trường hợp này.

• Nếu $a = 7$ thì $70 \le c.d \le 78$. Ta có $9.8 = 72$, nhưng 7, 2, 8, 9 không là bốn chữ số liên tiếp nên loại trường hợp này.

• Nếu $a = 5$ thì $50 \le c.d \le 58$. Ta có: $c.d = 7.8 = 56$ nên có hai số n là 5678 và 5687 thỏa mãn.

• Nếu $a = 3$ thì $30 \le c.d \le 38$. Ta có: $c.d = 5.6 = 30$, trường hợp này bị loại.

• Nếu $a = 1$ thì $10 \le c.d \le 18$. Ta có: $c.d = 3.4 = 12$ nên có hai số n là 1234 và 1243 thỏa mãn.

Bài toán có bốn nghiệm n là 1234 ; 1243; 5678 và 5687.

Nhận xét. Một số bạn chỉ xét a, b, c, d là bốn chữ số liên tiếp sắp xếp theo thứ tự tăng dần nên chỉ tìm ra hai nghiệm. Bạn *Nguyễn Trịnh Phương Minh*, lớp 6/14, THCS Lê Quý Đôn, Q. 3, **TP. Hồ Chí Minh** đã cho lời giải đúng.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/546. *Tìm x biết* $\dfrac{x-1}{2021}+\dfrac{x-2}{505}=\dfrac{x}{674}+\dfrac{x-4}{1009}$.

Lời giải. Ta biến đổi tương đương :

$$\frac{x-1}{2021}-1+\frac{x-2}{505}-4=\frac{x}{674}-3+\frac{x-4}{1009}-2$$

$$\Leftrightarrow (x-2022)\left(\frac{1}{2021}+\frac{1}{505}\right)=(x-2022)\left(\frac{1}{674}+\frac{1}{1009}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-2022)\left(\frac{2526}{1020605}-\frac{1683}{680066}\right)=0.$$

Có thể kiểm tra thấy $\dfrac{2526}{1020605}-\dfrac{1683}{680066}\neq 0$ do đó nghiệm duy nhất của bài toán là $x = 2022$.

Nhận xét . Các bạn sau đây (chỉ dành cho các bạn lớp 7 và lớp 6) có đáp số đúng: **Nghệ An:** *Hoàng Văn Nhân, Nguyễn Tất Nam, Bùi Thị Thùy Anh, Lương Thị Hải Yến, Nguyễn Thị Băng Tâm, Đậu Nhật Hiếu*, 7C, *Bùi Hoàng Bách*, 7B, *Đỗ Xuân Hùng*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Đậu Công Nhất Nam, 7C*, THCS Cao Xuân Huy. Diễn Châu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Trịnh Phương Minh*, lớp 6/14 THCS Lê Quý Đôn, Q.3. **Hà Tĩnh:** *Lưu Khánh Huy*, 8H THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh. **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Hiệp*, 7C THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Phú Thọ:** *Lưu Thế Vinh, Nguyễn Bảo An, Nguyễn Tiến Mạnh, Lương Chí Sơn, Dương Minh Quân*, 7A, *Kiều Đức Mạnh, 6A* THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/546. *Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình* $5^x + 12^x = y^2$.

Lời giải. Từ phương trình, nếu $x = 0 \Rightarrow y^2 = 2$, không thỏa mãn. Do đó x là số nguyên dương.

Nhận thấy: $12^x \equiv 0 \pmod 3$ và với mỗi số nguyên dương k có $25 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 5^{2k} \equiv 1 \pmod 3$,

$$5^{2k+1} \equiv 2 \pmod 3.$$

Do đó nếu x là số nguyên lẻ $x = 2k+1$ thì vế trái $5^x + 12^x \equiv 2 \pmod 3$; vế phải $y^2 \equiv 0;1 \pmod 3$ phương trình không thỏa mãn.

Vậy x phải là số chẵn, $x = 2k$, $k \ge 1, k \in \mathbb{N}$. Khi đó phương trình trở thành:

$$5^{2k} + 12^{2k} = y^2 \Leftrightarrow 5^{2k} = \left(y - 12^k\right)\left(y + 12^k\right) > 0.$$

Vì 5 là số nguyên tố và $0 < y - 12^k < y + 12^k$;

$\left(y+12^k\right)-\left(y-12^k\right)=2.12^k$ không chia hết cho 5

nên $\begin{cases} y-12^k=1 \\ y+12^k=5^{2k} \end{cases}$, suy ra: $2.12^k=25^k-1$ (*).

Nếu $k=1$: thỏa mãn (*), ta được $x=2;\ y=13$ thỏa mãn đầu bài. Nếu $k\geq 2$: ta có $25^k-1>24^k>2.12^k$ không thỏa mãn (*).

Vậy phương trình có nghiệm tự nhiên duy nhất là $(x;y)=(2;13)$.

Nhận xét. 1) Điều then chốt của lời giải là chứng minh x là số tự nhiên chẵn để có:

$5^{2k}=\left(y-12^k\right)\left(y+12^k\right)$, suy ra: $\begin{cases} y-12^k=1 \\ y+12^k=5^{2k} \end{cases}$ và $2.12^k=25^k-1$.

2) Có thể chứng minh x là số chẵn như sau:

Xét $x=0;\ x=1$ không thỏa mãn phương trình.

Xét $x\geq 2$: có $12^x\equiv 0\pmod 8$ và từ PT suy ra y là số lẻ nên vế phải $y^2\equiv 1\pmod 8$.

Nếu x là số lẻ thì $5^x\equiv 5\pmod 8$ nên vế trái $5^x+12^x\equiv 5\pmod 8$ phương trình không thỏa mãn. Vậy x phải là số chẵn.

Các bạn sau đây có bài giải tốt :

TP. Hồ Chí Minh: *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, Q3; **Phú Thọ:** *Hà Phương Anh, Trần Lan Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Việt, Nguyễn Thái Hoàng Anh*, 9B, *Nguyễn Văn Lâm*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Sơn La:** *Lương Hữu Bách*, 9A1, THCS Nguyễn Trãi, TP. Sơn La.

NGUYỄN ANH DŨNG

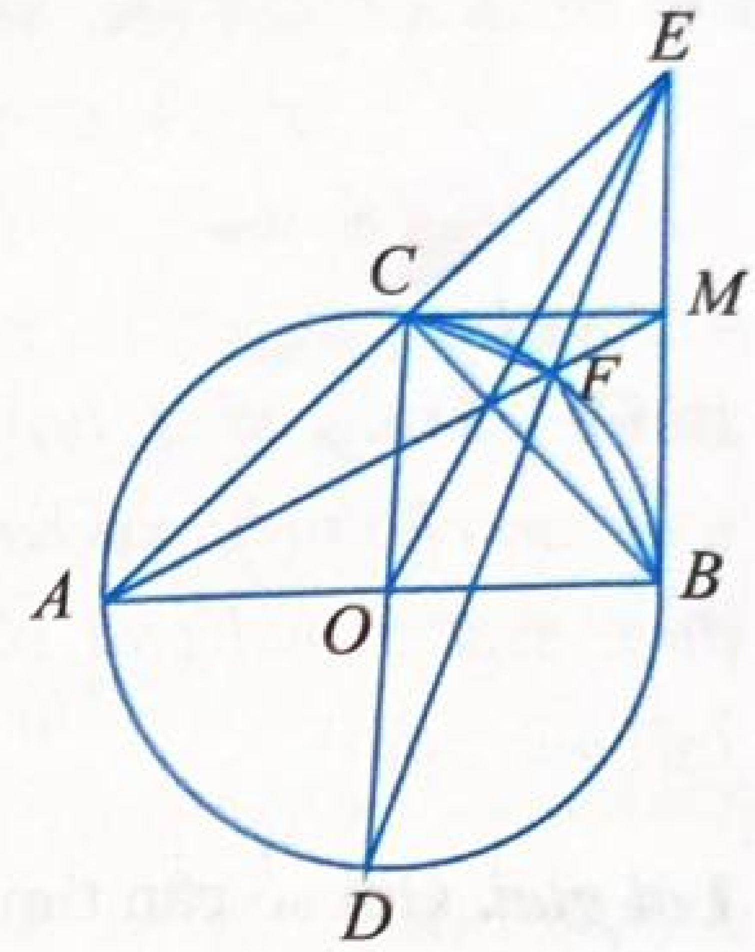
Bài T4/546. *Cho đường tròn (O), AB và CD là các đường kính. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B cắt AC ở E. DE cắt đường tròn (O) ở F (F khác D). Chứng minh rằng các đường thẳng BC, AF, OE đồng quy.*

Lời giải.

Gọi M là giao điểm của AF và BE. Ta có AB là đường kính nên $BF\perp AF$. Vì BE là tiếp tuyến của (O) tại B nên $BE\perp AB$. Vậy $\widehat{FMB}=\widehat{FBA}$. Vì tứ giác $ABFC$ nội tiếp nên $\widehat{FBA}=\widehat{FCE}$. Suy ra $\widehat{FMB}=\widehat{FCE}$.

Từ đó tứ giác $CEMF$ nội tiếp. Suy ra:

$$\widehat{CME}=\widehat{CFE}=90^\circ.$$



Vì $CM\perp BE,\ AB\perp BE$ nên $CM\,//\,AB$. Từ đó, do O là trung điểm của AB, áp dụng bổ đề hình thang ta có AM, BC, EO đồng quy.

Nhận xét. Có thể sử dụng định lí Ceva cho ba đường EO, AM, BC trong tam giác EAB để chứng minh ba đường đó đồng quy. Các bạn dưới đây có lời giải tốt.

Sơn La: *Lương Hữu Bách*, 9A1, THCS Nguyễn Trãi; **Phú Thọ:** *Trần Lan Anh, Đỗ Tuấn Minh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Thanh Hóa:** *Đinh Nhật Ý Anh*, 9K, THCS Trần Mai Ninh; **Nghệ An:** *Lưu Trọng Phúc*, 9B, THCS Đội Cung, TP. Vinh; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Đỗ Tiến Dũng*, 9A, THCS Huỳnh Tịnh Của.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/546. *Cho trước các số thực x, y phân biệt. Biết a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn các điều kiện* $x^2=a^2+c^2,\ y^2=b^2+d^2,\ a+b=c+d$.

Tính giá trị của $E=b^2+c^2$ *khi* $F=ac+cb+bd+da$ *đạt giá trị lớn nhất.*

Lời giải. Từ các điều kiện đã cho, ta có:

$$F=ac+cb+bd+da$$
$$=(a+b)(c+d)=(a+b)^2=(c+d)^2.$$

Do đó: $2F=(a+b)^2+(c+d)^2$

$$=(a^2+c^2)+(b^2+d^2)+2(ab+cd)$$
$$=x^2+y^2+2(ab+cd).$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$(ab+cd)^2\leq(a^2+c^2)(b^2+d^2)=x^2y^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$.

Suy ra: $ab+cd\leq|ab+cd|\leq|x|.|y|$.

Do đó: $2F\leq x^2+y^2+2|x|.|y|=(|x|+|y|)^2$

suy ra: $F \le \frac{(|x|+|y|)^2}{2}$; F đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{(|x|+|y|)^2}{2}$ khi $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}=1$ và $ab+cd \ge 0$. Suy ra: $a=c=\frac{|x|}{\sqrt{2}}$; $b=d=\frac{|y|}{\sqrt{2}}$.

Do đó giá trị $E=b^2+c^2=\frac{x^2+y^2}{2}$.

Nhận xét. Bài này có ít bạn tham gia gửi bài. Một số bạn đã suy luận từ $(ab+cd)^2 \le x^2y^2$ suy ra $ab+cd \le xy$ là chưa đúng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải có lập luận chặt chẽ và ngắn gọn: **TP Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Khánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn; **Phú Thọ:** *Trần Lan Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Sơn La:** *Lương Hữu Bách*, 9A1, THCS Nguyễn Trãi, TP Sơn La.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/546. *Giải hệ phương trình sau*

$$\begin{cases} \frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1 \\ \sqrt{2x-1}+\sqrt{2y-1}+\sqrt{2z-1}=3\sqrt{3}. \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x \ge \frac{1}{2}, y \ge \frac{1}{2}, z \ge \frac{1}{2}$.

Đặt $a=\sqrt{2x-1}, b=\sqrt{2y-1}, c=\sqrt{2z-1}$ thì $a,b,c \ge 0$ và $x=\frac{a^2+1}{2}, y=\frac{b^2+1}{2}, z=\frac{c^2+1}{2}$.

Theo giả thiết: $a+b+c=3\sqrt{3}$ (1), đồng thời

$$\frac{2}{a^2+3}+\frac{2}{b^2+3}+\frac{2}{c^2+3}=1 \quad (2).$$

Ta sẽ chứng minh với mọi $a \ge 0$ thì

$$\frac{2}{a^2+3} \ge \frac{12-2\sqrt{3}a}{18} \quad (3).$$

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức đúng sau đây $a\left(a-\sqrt{3}\right)^2 \ge 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=0$ hoặc $a=\sqrt{3}$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{2}{b^2+3} \ge \frac{12-2\sqrt{3}b}{18} \ (4); \quad \frac{2}{c^2+3} \ge \frac{12-2\sqrt{3}c}{18} \ (5).$$

Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều (3),(4),(5) và sử dụng (1) ta được: $\frac{2}{a^2+3}+\frac{2}{b^2+3}+\frac{2}{c^2+3} \ge 1$.

Kết hợp với (2) thì dấu bằng ở các bất đẳng thức (3),(4),(5) phải xảy ra. Lưu ý là dấu bằng ở (3),(4),(5) xảy ra khi ba số a,b,c bằng 0 hoặc bằng $\sqrt{3}$ nhưng theo (1) thì ta phải có $a=b=c=\sqrt{3}$, tức là $x=y=z=2$.

Vậy, hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x,y,z)=(2,2,2)$.

Nhận xét. Bài toán này không khó, chỉ đơn giản là bài toán chứng minh bất đẳng thức phát biểu dưới dạng bài toán giải hệ phương trình. Có nhiều bạn gửi lời giải cho bài này, đa số đều phát hiện là bản chất bài toán là chứng minh bất đẳng thức, tuy nhiên các bạn mắc các lỗi sai sau đây

1) Viết $\sqrt{a}=\frac{a}{\sqrt{a}}$ mà quên mất xét trường hợp $a=0$. Các bạn chỉ viết được $\sqrt{a}=\frac{a}{\sqrt{a}}$ với $a>0$.

2) Cũng tương tự như trên, khi sử dụng kỹ thuật Cauchy ngược dấu, các bạn đều mắc lỗi là "quên trường hợp" $a=0$. Cụ thể, chứng minh dưới đây chỉ đúng nếu $a>0$ (vì có rút gọn a).

$$\frac{a^2}{a^2+3} \ge \frac{a^2}{2\sqrt{a^2.3}}=\frac{a^2}{2\sqrt{3}.a}=\frac{a}{2\sqrt{3}}$$

Có thể khắc phục bằng cách xét riêng trường hợp $a=0$ hoặc chứng minh bất đẳng thức $\frac{a^2}{a^2+3} \ge \frac{a}{2\sqrt{3}}$ bằng phương pháp biến đổi tương đương. Nếu quên xét $a=0$ rất có thể các bạn xét bị thiếu trường hợp khi dấu bằng xảy ra. Trong các lời giải gửi về toà soạn, các bạn sau có lời giải đúng:

Nghệ An: *Phan Đại Hoàng*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Thừa Thiên Huế:** *Đoàn Văn Hoàng Lân, Phan Quốc Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Bình Định:** *Nguyễn Hữu Trí*, 11A1, THPT số 2 Phù Cát.

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T7/546. *Giải phương trình*

$$x^4-x^2-16x+2=2\sqrt{x^2+4x} \quad (1).$$

Lời giải 1 (Của *Lê Gia Quang*) Tập xác định của (1) là tất cả những x thỏa mãn bất đẳng thức

$$x^2+4x\ge 0 \Leftrightarrow x\le -4 \text{ hoặc } x\ge 0 \quad (*).$$

Với điều kiện (*) thì

$$(1)\Leftrightarrow\left(x^4+2x^2+1\right)+\left(x^2+1\right)=4\left(x^2+4x\right)+2\sqrt{x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)^2+\left(x^2+1\right)=4\left(x^2+4x\right)+2\sqrt{x^2+4x} \quad (2).$$

Hàm số $f(t):=t+\sqrt{t}$ xác định và liên tục trên tập $[0;+\infty)$ có $f'(t)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}>0$ với mọi $t>0$ nên $f(t)$ tăng trên $[0;+\infty)$. Suy ra:

$$(2)\Leftrightarrow f(t_1)=f(t_2)\Leftrightarrow t_1=t_2$$

$$\Rightarrow\left(x^2+1\right)^2=4\left(x^2+4x\right)\Leftrightarrow x^4-2x^2-16x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x^4+6x^2+9=8x^2+16x+8$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+3\right)^2=8(x+1)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+3=2\sqrt{2}(x+1)\\ x^2+3=-2\sqrt{2}(x+1)\end{array}\right..$$

TH1: $x^2+3=-2\sqrt{2}(x+1)\Leftrightarrow x^2+2\sqrt{2}x+3+2\sqrt{2}=0$

$\Delta'=-1-2\sqrt{2}<0$: PT vô nghiệm.

TH2: $x^2+3=2\sqrt{2}(x+1)\Leftrightarrow x^2-2\sqrt{2}x+3-2\sqrt{2}=0$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}$$

thỏa mãn điều kiện (*).

Đáp số: $x=\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}$.

Lời giải 2 (Của *Trần Việt Anh, Nguyễn Trung Dũng, Phan Quốc Thắng*) Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow x^4-2x^2-16x+1=2\sqrt{x^2+4x}-\left(x^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow x^4-2x^2-16x+1=\frac{x^4-2x^2-16x+1}{2\sqrt{x^2+4x}+\left(x^2+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^4-2x^2-16x+1\right)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+4x}+\left(x^2+1\right)}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x^4-2x^2-16x+1=0$. Đến đây giải như cách 1.

Lời giải 3 (Của *Trần Lan Anh, Phạm Thị Mỹ Hạnh*) Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow 4x^4-4x^2-64x+8=8\sqrt{x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow 4x^4+12x^2+9=16x^2+64x+8\sqrt{x^2+4x}+1$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2+3\right)^2=\left(4\sqrt{x^2+4x}+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+3=4\sqrt{x^2+4x}+1\Leftrightarrow x^2+1=2\sqrt{x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+4x+2=x^2+4x+2\sqrt{x^2+4x}+1$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2=\left(\sqrt{x^2+4x}+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2}(x+1)=\pm\left(\sqrt{x^2+4x}+1\right).$$

Đến đây giải tiếp như cách 1.

Lời giải 4 (Của *Nguyễn Trần Hoàng, Nguyễn Hữu Trí, Lê Tuấn Nghĩa*) Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow x^4+3x^2+2=4x^2+16x+2\sqrt{x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)^2+\left(x^2+1\right)=\left(4x^2+16x\right)+2\sqrt{x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+1-2\sqrt{x^2+4x}\right)\left(x^2+1+2\sqrt{x^2+4x}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+1-2\sqrt{4x^2+16x}=0\Leftrightarrow 2(x+1)^2=\left(\sqrt{x^2+4x}+1\right)^2.$$

Đến đây giải tiếp như cách 3.

Nhận xét. Đây là bài dễ, nhiều bạn THCS cũng làm được. Cả 4 cách giải trên thực chất là khéo léo biến đổi tương đương tương tự nhau. Dưới đây là danh sách các bạn đã giải đúng: **Bình Định**: *Lê Gia Quang*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; *Nguyễn Hữu Trí*, THPT số 2 Phù Cát. **Hà Nội**: *Trần Việt Anh*, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy. **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Đăng Dũng*, 11 Toán 1, *Nguyễn Đình Nam Khánh*, 10 T1, THPT chuyên Hà Tĩnh. **Hưng Yên**: *Lê Tuấn Nghĩa*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Phú Thọ**: *Trần Lan Anh*, *Nguyễn Trung Dũng*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông. **Quảng Bình**: *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 11 Toán 2, *Nguyễn Trần Hoàng*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Thừa Thiên-Huế**: *Phan Quốc Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế.

TẠ DUY PHƯỢNG

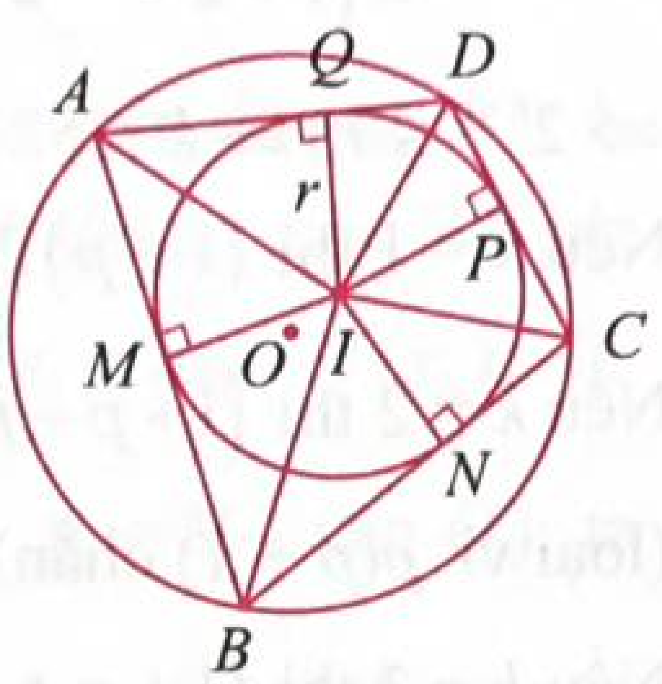
Bài T8/546. *Cho tứ giác ABCD có chu vi không đổi 2p, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Chứng minh rằng*

$\sqrt{(IA+IB)^2+(IC+ID)^2}$

$$+\sqrt{(IA+ID)^2+(IB+IC)^2}\le 2p.$$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

Lời giải. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm tiếp xúc của của đường tròn (I) với các cạnh AB, BC, CD, DA; r là bán kính đường tròn (I). Ta có:



$$IA^2+IC^2=\frac{r^2}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{r^2}{\sin^2\frac{C}{2}}=r^2\left(\cot^2\frac{A}{2}+\cot^2\frac{C}{2}+2\right)$$

$$=r^2\left(\tan^2\frac{A}{2}+\cot^2\frac{A}{2}+2\right)\ \ (\text{do } \frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}=90^0)$$

$$=r^2\left(\tan\frac{A}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)^2.$$

Suy ra: $\sqrt{IA^2+IC^2}=r\left(\tan\frac{A}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)$

$$=r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=AM+CP.$$

Tương tự ta cũng có: $\sqrt{IB^2+ID^2}=BN+DQ.$

Từ đó, chú ý rằng tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I) ta thấy:

$$\sqrt{IA^2+IC^2}+\sqrt{IB^2+ID^2}=(AM+BN)+(CP+DQ)$$

$$=(AM+BM)+(CP+DP)=AB+CD=AD+BC=p.$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkovsky ta được:

$$\sqrt{(IA+IB)^2+(IC+ID)^2}\le\sqrt{IA^2+IC^2}+\sqrt{IB^2+ID^2}=p$$

Do đó:

$$\sqrt{(IA+IB)^2+(IC+ID)^2}+\sqrt{(IA+ID)^2+(IB+IC)^2}\le 2p.$$

Dấu "=" xảy ra khi $IA=IB=IC=ID$, lúc đó tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán là việc chỉ ra được hệ thức $\sqrt{IA^2+IC^2}+\sqrt{IB^2+ID^2}=p$. Các bạn sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Trần Việt Anh*, 9A7, TH, THCS & THPT Archimedes Đông Anh; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Đăng Dũng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP. Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 11 Toán 2, *Nguyễn Trần Hoàng*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên giáp, TP. Đồng Hới; **Gia Lai:** *Phan Trịnh Nguyên*, 10A1, THPT Chi Lăng, TP. Pleiku; **Bình Định:** *Lê Gia Quang*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/546. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}2^x-2=3y-3^x & (1)\\ 3^y-2=3x-2^y & (2)\end{cases}.$$

Lời giải. Lấy (1) trừ (2) ta có:

$$2^x-3^y=3(y-x)-3^x+2^y$$

$$\Leftrightarrow(2^x-2^y)+(3^x-3^y)+3(x-y)=0\ \ (3).$$

Nếu $x>y$ thì VT(3) > 0; Nếu $x<y$ thì VT(3) < 0 ; Nếu $x=y$ thì (3) thỏa mãn. Thay $x=y$ vào (1) ta có: $3^x+2^x-3x-2=0$. Đặt $f(x)=3^x+2^x-3x-2$.

$$\Rightarrow f'(x)=3^x\ln 3+2^x\ln 2-3$$

$$\Rightarrow f''(x)=3^x\ln^2 3+2^x\ln^2 2>0,\forall x.$$

Do đó $f'(x)$ là hàm số đồng biến (và liên tục) trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x)$ có tối đa là một nghiệm, do đó $f(x)$ có tối đa là hai nghiệm.

Mặt khác ta thấy $f(0)=f(1)=0$ nên $f(x)$ có đúng hai nghiệm là $x=0$ và $x=1$. Vậy hệ đã cho có đúng hai nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0)$ và $(1; 1)$.

Nhận xét. 1) Để khẳng định $f(x)$ có tối đa hai nghiệm ta có thể lập luận như sau: Do $f''(x)>0,\forall x$ nên $f'(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-3$ nên $f'(x)=0$ có đúng một nghiệm x_0 (cũng có thể lập luận: Do

$$f'(0).f'(1)=(\ln 2+\ln 3-3)(3\ln 3+2\ln 2-3)<0$$

nên $f'(x)=0$ có đúng một nghiệm $x_0\in(0;1)$).

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất là hai nghiệm.

2) Các bạn sau có lời giải tốt: **Quảng Bình:** *Phạm Thị Mỹ Hạnh, Nguyễn Trần Hoàng*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Văn Hoàng Long*, 10 Toán 1, *Trần Thị Thanh Thư*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Định:** *Lê Gia Quang*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, Q.3; **Đồng Tháp:** *Lư Gia Hưng*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Gia Lai:** *Nguyễn Nhật Luân*, 12A2, THPT Chi Lăng; **Sóc Trăng:** *Tiết Trọng Khiêm*, 11A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Hà Nội:** *Trần Việt Anh*, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/546. *Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn $\sigma(n).\tau(n)=144$, trong đó $\tau(n)$ là số các ước nguyên dương của n và $\sigma(n)$ là tổng tất cả các ước nguyên dương của n.*

Lời giải (Dựa trên lời giải của bạn *Nguyễn Trần Hoàng*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình** và bạn *Trần Việt Anh*, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, **Hà Nội**).

Ta đã biết nếu n có phân tích tiêu chuẩn ra thừa số nguyên tố $n = p_1^{a_1}...p_k^{a_k}$ thì

$$\tau(n) = (1+a_1)...(1+a_k)$$

và $\sigma(n) = (1+p_1+\cdots+p_1^{a_1})...(1+p_k+\cdots+p_k^{a_k})$.

Nếu n có ít nhất 3 ước nguyên tố phân biệt $p_1 > p_2 > p_3 \geq 2$ thì

$$\sigma(n) \geq (1+2)(1+3)(1+5) = 72$$

và $\qquad \tau(n) \geq (1+1)(1+1)(1+1) = 8$.

Do đó $\sigma(n)\tau(n) \geq 576$. Vậy n chỉ có nhiều nhất 2 ước nguyên tố phân biệt.

1) Nếu $n = p^k$ thì:

$$144 = \sigma(n)\tau(n) = (1+p+\cdots+p^k)(1+k)$$
$$\geq (1+2+\cdots 2^k)(1+k) \geq (2^{k+1}-1)2$$

$\Rightarrow 2^{k+1} \leq 73 \Rightarrow k \leq 5.$

Nếu $k = 1$ thì $(1+p)2 = 144 \Rightarrow p = 71$.

Nếu $k = 2$ thì $(1+p+p^2)3 = 144 \Rightarrow p(p+1) = 47$ (loại vì $p(p+1)$ chẵn).

Nếu $k = 3$ thì $(1+p+p^2+p^3)4 = 144$

$\Rightarrow p(1+p+p^2) = 35 \Rightarrow p \in \{5; 7\}$. Thử lại không thỏa mãn.

Nếu $k = 4$ thì $(1+k) = 5 | 144$ (loại).

Nếu $k = 5$ thì $(1+p+p^2+p^3+p^4+p^5)6 = 144$

$\Rightarrow p(1+p+p^2+p^3+p^4) = 23 \Rightarrow p = 23$ (loại).

2) Xét $n = p^a q^b$ $(p < q)$. Nếu $b \geq 2$ thì

$$144 = (1+p+\cdots+p^a)(1+q+\cdots+q^b)(1+a)(1+b)$$
$$\geq (1+2+\cdots+2^a)(1+3+\cdots+3^b)4$$
$$= (2^{a+1}-1)(3^{b+1}-1)2 \geq 3.(26)2 = 156: \text{Vô lý.}$$

Vậy $b = 1$. Do đó $n = p^a q$.

Nếu $a \geq 2$ thì

$$144 = (1+p+\cdots+p^a)(1+q)(1+a)(1+1)$$
$$\geq (1+2+\cdots+2^a)(1+q)(1+a)2$$
$$\geq (2^{a+1}-1)(1+3)(1+2)2 \geq 7.4.3.2 = 168, \text{ vô lý.}$$

Vậy $a = 1$. Thành thử $n = pq$. Khi đó

$$144 = (1+p)(1+q)4 \Rightarrow 36 = (1+p)(1+q)$$
$$> (1+p)^2 \Rightarrow 5 > p.$$

Với $p = 3 \Rightarrow q = 8$ (loại). Với $p = 2 \Rightarrow q = 11$ $\Rightarrow n = 22$. Vậy $n = 22$ hoặc $n = 71$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Sóc Trăng:** *Tiết Trọng Khiêm*, 11A2 THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Gia Lai:** *Phan Trịnh Nguyên*, 12A1, THPT Chi Lăng; **Quảng Bình:** *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/546. *Cho số nguyên $n>1$. Tìm tất cả các hàm số $f_n:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(f(x)+ny)=f(nx+y)+(n^2-n)y \quad (1),$$

với mọi $x>0, y>0$.

Lời giải. Giả sử ứng với số nguyên dương $n>1$, hàm f thỏa mãn (1) và giả sử tồn tại $x_0\in\mathbb{R}^+$ sao cho $f(x_0)<nx_0$. Suy ra: $y_0=nx_0-f(x_0)>0$. Thay $x=x_0$, $y=\dfrac{y_0}{n-1}$ với $y_0\in\mathbb{R}^+$ vào (1), ta thu được $ny_0=0$, vô lý. Vậy nên $f(x)\ge nx,\forall x\in\mathbb{R}^+$ (2). Áp dụng (2) ta có:

$$f(nx+y)+(n^2-n)y=f(f(x)+ny)$$
$$\ge nf(x)+n^2y,\forall x,y\in\mathbb{R}^+$$

hay $f(nx+y)\ge nf(x)+ny,\forall x,y\in\mathbb{R}^+$ (3).

Trong (3) thay y bởi $f(y)$, ta được:

$$f(nx+f(y))\ge nf(x)+nf(y)$$
$$=f(x)+nf(y)+(n-1)f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}^+ (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$f(ny+x)+(n^2-n)x$$
$$\ge f(x)+nf(y)+(n^2-n)x,\forall x,y\in\mathbb{R}^+$$

hay $f(ny+x)\ge f(x)+nf(y),\forall x,y\in\mathbb{R}^+$ (5).

Suy ra: $f(ny+x)>f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}^+$ tức f là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}^+$. Áp dụng (5) và (2) ta có:

$$f(nx+y)+(n^2-n)y=f(f(x)+ny)$$
$$\ge f(f(x))+nf(y)$$
$$=f(f(x))+f(y)+(n-1)f(y)$$
$$\ge f(f(x))+f(y)+(n^2-n)y,\forall x,y\in\mathbb{R}^+$$

hay $f(nx+y)\ge f(f(x))+f(y)+(n^2-n)y$

$$\ge f(nx)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+.$$

Suy ra: $f(x+y)\ge f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}^+$(6).

Từ (6) suy ra:

$$f(nx+y)+(n^2-n)y\ge f(f(x)+ny)$$
$$=f(f(x)+y+(n-1)y)$$
$$\ge f(f(x)+y)+f((n-1)y)$$
$$\ge f(f(x)+y)+n(n-1)y,\forall x,y\in\mathbb{R}^+$$

hay $f(nx+y)\ge f(f(x)+y),\forall x,y\in\mathbb{R}^+$.

Do f đồng biến nên suy ra:

$$nx+y\ge f(x)+y,\forall x,y\in\mathbb{R}^+\Leftrightarrow f(x)\le nx,\forall x\in\mathbb{R}^+.$$

Kết hợp với (2) suy ra: $f(x)=nx,\forall x\in\mathbb{R}^+$.

Hàm số này thỏa mãn phương trình hàm đã cho.

Kết luận: Tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện (1) là $f(x)=nx$.

Nhận xét. Ta cũng có thể chứng minh tính đơn ánh của hàm f thỏa mãn đẳng thức (1) mà không cần chứng minh tính chất đồng biến của hàm f và cũng có cách giải tương tự. Bạn *Nguyễn Trần Hoàng*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình** có lời giải đúng.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/546. *Cho tam giác ABC và điểm I cách đều AB, AC. E, F theo thứ tự là giao điểm của BI, CI và AC, AB. X, Y theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BI, CI và đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. S là giao điểm của XY và BC. Chứng minh rằng $SA=SI$.*

Lời giải. Bỏ qua trường hợp đơn giản $AB=AC$. $SA=SI$. Gọi K,N theo thứ tự là giao điểm của BC,AI và EF; S' là giao điểm của BC và đường thẳng qua I song song với EF; R là giao điểm của $S'I$ và AK; T là giao điểm của $S'A$ và KN. Vì $KN\equiv EF\,//\,RS'$ nên

$$(RIS')=K(RIS'N)=K(AIBN)=-1.$$

Do đó $S'I=S'R$ (1). Vì $A(KIBC)=-1$ và $(AI,AB)\equiv-(AI,AC)(\bmod\pi)$ nên

$$AR\equiv AK\perp AI \ (2).$$

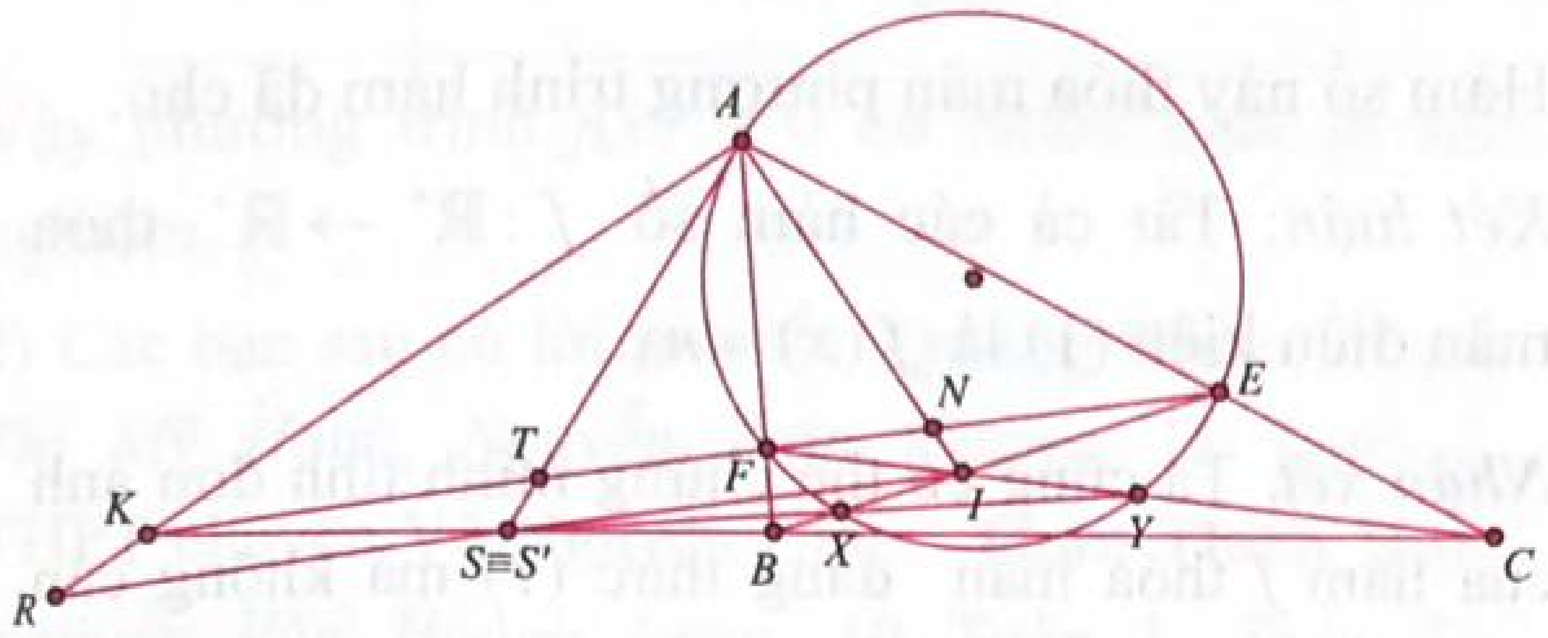
Từ (1) và (2) suy ra $S'A=S'I$ (3). Kết hợp với $TN//S'I$, suy ra $TA=TN$. Do đó:

$$TA^2=TN^2=\overline{TF}.\overline{TE} \text{ (hệ thức Newton).}$$

Vậy nên $S'A\equiv TA$ tiếp xúc với (AEF) tại A (4).

Áp dụng định lý Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix}AXF\\YAE\end{pmatrix}$, chú ý rằng $XE\cap AF=B; YF\cap AE=C$, suy ra

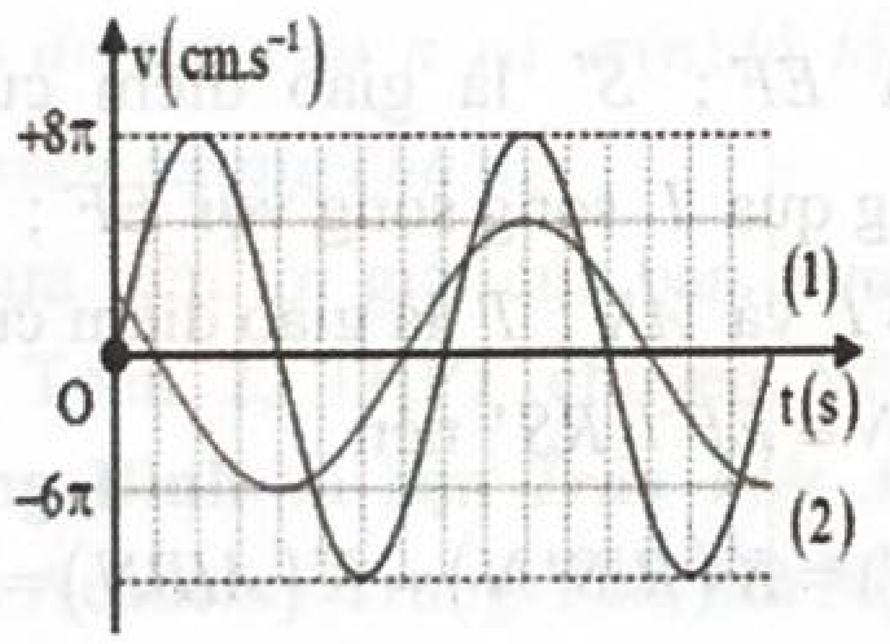
$AA \cap XY \in BC$. Kết hợp với $S = XY \cap BC$, suy ra $S \in AA$. Điều đó có nghĩa là SA tiếp xúc với (AEF) tại A (5). Từ (4) và (5) suy ra $S' \equiv S$ (6). Từ (1) và (6) suy ra $SA = SI$.



Nhận xét. Bài toán này không khó và có nhiều cách giải nhưng chỉ có hai bạn tham gia giải: **Quảng Bình:** *Nguyễn Trần Hoàng*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** *Phạm Nguyên Khang*, 11A2T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/546. *Đồ thị vận tốc - thời gian của hai con lắc (1) và (2) được mô tả như hình dưới. Biết biên độ của con lắc (2) là 9 cm. Tính tốc độ trung bình của con lắc (1) kể từ thời điểm ban đầu đến thời điểm động năng bằng ba lần thế năng lần đầu tiên.*



Lời giải. Từ đồ thị ta xác định được:

$$\begin{cases} v_{1\max} = 8\pi = \omega_1 A_1 \\ v_{2\max} = 6\pi = \omega_2 A_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_2 v_{1\max}}{\omega_1 v_{2\max}};$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{8}{9} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 8 \text{ cm} \\ \omega_1 = \pi \text{ (rad/s)} \end{cases}.$$

Ta viết được phương trình vận tốc của dao động (1): $v_1 = 8\pi\cos\left(\pi t - \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_1 = 8\cos(\pi t - \pi)$(cm).

Vị trí động năng bằng 3 lần thế năng ứng với $x = \pm\dfrac{A}{2}$. Do đó vị trí động năng bằng thế năng lần đầu tiên là $x = -\dfrac{A}{2}$, chuyển động theo chiều dương. Quãng đường đi được và thời gian kể từ thời điểm ban đầu là:

$$s = \frac{A}{2} = 4 \text{ cm và } \Delta t = \frac{T}{6} = \frac{1}{3} \text{ s}.$$

$$\Rightarrow v_{tb} = \frac{s}{\Delta t} = 12 \text{ cm/s}.$$

Nhận xét. Rất tiếc đã không có bạn nào có lời giải đúng cho đề ra kì này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/546. *Từ một trạm điện, người ta dùng một máy tăng áp để truyền một công suất điện không đổi đến nơi tiêu thụ bằng đường dây tải điện một pha. Biết điện áp và cường độ dòng điện luôn cùng pha, điện áp hiệu dụng ở hai cực của máy phát không đổi. Ban đầu hiệu suất truyền tải là 92%. Giữ nguyên số vòng dây của cuộn sơ cấp, nếu bớt số vòng dây cuộn thứ cấp n (vòng) thì hiệu suất quá trình truyền tải là 80%. Sau đó quấn thêm vào cuộn thứ cấp 2n (vòng) thì hiệu suất quá trình truyền tải là bao nhiêu?*

Lời giải. Hiệu suất của quá trình truyền tải điện năng đi xa: $H = 1 - \dfrac{\Delta\mathscr{P}}{\mathscr{P}} = 1 - \dfrac{\mathscr{P}R}{U^2} \Rightarrow \dfrac{\mathscr{P}R}{U^2} = 1 - H$.

Với $\mathscr{P}$ và R không đổi, ta luôn có: $U = \dfrac{1}{\sqrt{1-H}}$.

Gọi U_2 và U_1 lần lượt là điện áp trước khi truyền tải (điện áp ở cuộn thứ cấp của máy biến áp) cho hiệu suất $H_2 = 82\%$ và $H_1 = 0{,}92\%$.

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2 - n}{n_2} = \frac{\sqrt{1-H_1}}{\sqrt{1-H_2}} = \frac{\sqrt{1-0{,}92}}{\sqrt{1-0{,}82}} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow n = \dfrac{n_2}{3}$, với n_2 là số vòng dây của cuộn thứ cấp ban đầu. Khi quấn thêm vào cuộn thứ cấp $2n$ (vòng) thì số vòng dây của cuộn thứ cấp lúc này là $n_2 + n$. do đó ta có:

$$\frac{\sqrt{1-H_1}}{\sqrt{1-H_3}} = \frac{n_3}{n_1} = \frac{n_2+n}{n_2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-0{,}92}}{\sqrt{1-H_3}} = \frac{n_2 + \frac{n_2}{3}}{n_2} = \frac{4}{3}$$

Suy ra $H_3 = 0{,}955 = 95{,}5\%$.

NGUYỄN XUÂN QUANG

BỔ ĐỀ CHẶN TÍCH CHO NHIỀU BIẾN SỐ

NGUYỄN TUẤN ANH
(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

Năm 2007 trên Tạp chí *Mathematical Reflections*, tác giả *Võ Quốc Bá Cẩn* có đưa ra một kết quả như sau: *Với* $a_1, a_2, ..., a_n$ *là các số thực không âm có tổng là* n. *Khi đó tồn tại* $t \in [0;1]$ *sao cho* $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = n + 2C_n^2 t^2$ *và*

$$1-(n-1)t \le a_i \le 1+(n-1)t,\ \forall i = 1,2,...,n.$$

Đây là kết quả hay và hữu dụng. Đặc biệt, với $n=3$ kết quả trên còn được đi kèm với kết quả $(1+t)^2(1-2t) \le a_1a_2a_3 \le (1-t)^2(1+2t)$ (thường được gọi là bổ đề chặn tích). Khi đó rất nhiều bài toán BĐT 3 biến có thể được giải quyết triệt để dù đó là các BĐT khó và chặt. Bài viết này sẽ đề cập đến ba vấn đề. Thứ nhất xây dựng bổ đề chặn tích cho trường hợp nhiều biến (lớn hơn 3 biến). Tiếp theo, là ứng dụng bổ đề chặn tích trong chứng minh BĐT. Bổ đề còn là công cụ hiệu quả trong khâu làm chặt, tìm hằng số tốt cũng như sáng tạo BĐT, đây sẽ là nội dung của phần cuối bài viết. Rất mong nhận được góp ý từ bạn đọc.

1. BỔ ĐỀ CHẶN TÍCH CHO NHIỀU BIẾN

Bổ đề. *Với* $a_1, a_2, ..., a_n$ *là các số thực không âm có tổng là n. Khi đó tồn tại* $t \in [0;1]$ *sao cho* $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = n + 2C_n^2 t^2$ *và*

(i) $1-(n-1)t \le a_i \le 1+(n-1)t,\ \forall i = 1,2,...,n$

(ii) $(1+t)^{n-1}[1-(n-1)t] \le a_1a_2\cdots a_n \le (1-t)^{n-1}[1+(n-1)t]$.

Chứng minh. Theo BĐT Cauchy, ta có:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)(1+1+\cdots+1) \ge \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = n^2.$$

Hay nói cách khác $\sum_{i=1}^n a_i^2 \ge n$. Khi đó tồn tại $t \ge 0$ sao cho: $\sum_{i=1}^n a_i^2 = n + 2C_n^2 t^2$

Hơn nữa: $\sum_{i=1}^n a_i^2 \le (\sum_{i=1}^n a_i)^2 = n^2$, nên t bên trên không vượt quá 1.

(i) Áp dụng BĐT Schwarz ta được:

$$n + 2C_n^2 t^2 = a_1^2 + \sum_{i=2}^n a_i^2 \ge a_1^2 + \frac{\left(\sum_{i=2}^n a_i\right)^2}{n-1} = a_1^2 + \frac{(n-a_1)^2}{n-1}.$$

Suy ra $1-(n-1)t \le a_1 \le 1+(n-1)t$. Tương tự cho các a_i khác, tính chất đầu tiên của bổ đề được chứng minh.

(ii) Nếu tồn tại a_i nào đó bằng 0, giả sử $a_1 = 0$.. Khi đó:

$$n + 2C_n^2 t^2 = a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2 \ge \frac{1}{n-1}(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 = \frac{n^2}{n-1}.$$

Suy ra $t \ge \frac{1}{n-1}$. Do đó khẳng định của bổ đề là hiển nhiên. Ngược lại, ta xét với $a_i > 0$ với mọi i.

Xét hàm đa thức: $H(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)$

$$= x^n - nx^{n-1} + \frac{n(n-1)(1-t^2)}{2}x^{n-2} + \sum_{i=3}^{n-1}(-i)^i b_i x^{n-i} + (-1)^n P$$

trong đó $b_i > 0$ và $P = a_1 a_2 \ldots a_n$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{H(x)}{x}$, lấy đạo hàm hàm f cấp $n-3$, ta có: $f^{(n-3)}(x) = \dfrac{(n-3)!Q(x)}{x^{n-2}}$, với

$$Q(x) = (n-2)(n-1)x^n - 2n(n-2)x^{n-1} + n(n-1)(1-t^2)x^{n-2} - 2P.$$

Để ý rằng:

$$\lim_{x\to 0^+} Q(x) = -2P < 0 \text{ và } \lim_{x\to +\infty} Q(x) = +\infty.$$

Từ đó ta có bảng biến thiên cho hàm Q như sau:

x	0		$1-t$		$1+t$		$+\infty$
Q'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Q	$-2P$	$\nearrow$	$Q(1-t)$	$\searrow$	$Q(1+t)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vì $H(x) = 0$ có n nghiệm dương nên $f^{(n-3)}$ phải có ít nhất 3 nghiệm (có thể có trùng). Điều này xảy ra khi và chỉ khi:

$$Q(1-t) \geq 0 \geq Q(1+t).$$

Hay nói cách khác:

$$(1+t)^{n-1}[1-(n-1)t] \leq P \leq (1-t)^{n-1}[1+(n-1)t].$$

Bổ đề được chứng minh.

Nhận xét. Với $n = 3$ bổ đề có một chứng minh đơn giản khác là khai thác từ một đẳng thức.

Hệ quả 1. *Với $a,b,c \geq 0, a+b+c = 3$ thì tồn tại $t \in [0;1]$ sao cho $a^2+b^2+c^2 = 3+6t^2$. Khi đó:*

$$1-2t \leq a,b,c \leq 1+2t \text{ và}$$
$$(1+t)^2(1-2t) \leq abc \leq (1-t)^2(1+2t).$$

Hơn nữa, trong cách chứng minh trên với $n = 3$ ta không cần xây dựng hàm f nên kết quả trên vẫn đúng với a,b,c là các số thực có tổng bằng 3 (và điều kiện t khi đó sẽ là $t \geq 0$).

Hệ quả 2. *Với $a,b,c,d \geq 0, a+b+c+d = 4$ thì tồn tại $t \in [0;1]$ sao cho $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4+12t^2$ và $1-3t \leq a,b,c,d \leq 1+3t$ và*

$$(1+t)^3(1-3t) \leq abcd \leq (1-t)^3(1+3t).$$

2. ỨNG DỤNG

Một lưu ý nhỏ khi vận dụng là với các biến là các số dương thì $t \in [0;1)$.

Thí dụ 1. *Với a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9 + \frac{16(a^3+b^3+c^3-3abc)}{(a+b+c)^3}.$$

Lời giải. Ta chuẩn hóa $a+b+c = 3$. Khi đó tồn tại $t \in [0;1)$ sao cho $a^2+b^2+c^2 = 3+6t^2$. BĐT được viết lại là:

$$3\left(\frac{3-3t^2}{abc}\right) \geq 9 + \frac{16(27t^2)}{27} = 9 + 16t^2.$$

Theo hệ quả 1, ta chỉ cần chứng minh:

$$3\left[\frac{3-3t^2}{(1-t)^2(1+2t)}\right] \geq 9 + 16t^2.$$

Quy đồng và thu gọn biểu thức, BĐT trên tương đương với: $\dfrac{2t^2(4t-1)^2}{(1-t)(2t+1)} \geq 0.$

BĐT được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $t = 0$ hoặc $t = \dfrac{1}{4}$ tức đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hoặc $a = 2b = 2c$ và các hoán vị của nó.

Thí dụ 2. *Với a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 2.$$

Lời giải. Ta chuẩn hóa $a+b+c = 3$. Khi đó tồn tại $t \in [0;1)$ sao cho $a^2+b^2+c^2 = 3+6t^2$.

Áp dụng hệ quả 1, BĐT được viết lại là:

$$\sqrt[3]{\frac{9t^2}{abc}+1}+\frac{1-t^2}{1+2t^2}\ge 2.$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\sqrt[3]{\frac{9t^2}{(1-t)^2(1+2t)}+1}+\frac{1-t^2}{1+2t^2}\ge 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{9t^2}{(1-t)^2(1+2t)}+1}\ge\frac{5t^2+1}{2t^2+1}.$$

Lũy thừa 3 hai vế, BĐT tương đương với:

$$\left[9t^2+(1-t)^2(1+2t)\right](2t^2+1)^3\ge(1-t)^2(1+2t)(5t^2+1)^3.$$

Thu gọn ta được:

$$9t^4\left(-26t^5+47t^4-14t^3+20t^2-2t+2\right)\ge 0.$$

BĐT cuối đúng vì với $\forall t\in[0;1)$ thì:

$$-26t^5+47t^4-14t^3+20t^2-2t+2\ge 21t^4+6t^2\ge 0.$$

Bài toán hoàn tất.

Nếu bạn đọc để ý có thể thấy, hai thí dụ bên trên abc xuất hiện rất thuận lợi để ta áp dụng hệ quả 1. Ngược lại, abc xuất hiện ở nhiều vị trí khác nhau trong BĐT, ta sẽ gặp khó khăn khi sử dụng. Lúc này, một kỹ thuật nhỏ được sử dụng là khảo sát hàm số.

Thí dụ 3. *Với a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{75}{9+16abc}$.

Lời giải. BĐT được viết lại là:

$$(9+16abc)(ab+bc+ca)-75abc\ge 0.$$

Khi đó tồn tại $t\in[0;1)$ sao cho $a^2+b^2+c^2=3+6t^2$. Áp dụng hệ quả 1, BĐT được viết lại là: $(9+16abc)(3-3t^2)-75abc\ge 0$.

Ta xét hàm số $f(x)=(9+16x)(3-3t^2)-75x$ (với t là tham số). Ta có:

$$f'(x)=16(3-3t^2)-75<0 \text{ (vì } t\in[0;1)\text{)}$$

Do đó $f(abc)\ge f\left((1-t)^2(1+2t)\right)$. Vậy nên ta chỉ cần chứng minh:

$$\left[9+16(1-t)^2(1+2t)\right](3-3t^2)-75(1-t)^2(1+2t)\ge 0.$$

BĐT trên tương đương với: $6t^2(1-t)(4t-1)^2\ge 0$.

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra không chỉ với $a=b=c=1$ mà còn xảy ra với $a=b=\frac{3}{4},c=\frac{3}{2}$ và các hoán vị của nó.

Thí dụ 4. *Với a,b,c là các số thực không âm sao cho không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{16(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge 8.$$

Lời giải. Ta chuẩn hóa $a+b+c=3$. Khi đó tồn tại $t\in[0;1]$ sao cho $a^2+b^2+c^2=3+6t^2$.

Áp dụng hệ quả 1, BĐT được viết lại là:

$$\frac{3abc+9+18t^2}{-abc+9-9t^2}+\frac{16(3-3t^2)}{3+6t^2}\ge 8.$$

Ta thấy rằng hàm số

$$f(x)=\frac{3x+9+18t^2}{-x+9-9t^2}\text{ (với } t \text{ là tham số)}$$

là hàm số tăng trên khoảng $(-\infty;9-9t^2)$ và $x=abc, x=0$ cùng thuộc khoảng đó. Tất nhiên rằng $abc\ge 0$ nên BĐT sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được rằng:

$$\frac{9+18t^2}{9-9t^2}+\frac{16(3-3t^2)}{3+6t^2}\ge 8 \text{ hay } \frac{9(2t^2-1)^2}{(1-t^2)(2t^2+1)}\ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0,b=kb',c=kc'$ với $k>0$ và b',c' là hai nghiệm của phương trình $X^2-3X+\frac{3}{2}=0$.

Bài toán hoàn tất.

Nhận xét. Trong hai bài giải bên trên, ta đã sử dụng hai đánh giá $abc\ge 0$ và $abc\ge(1+t)^2(1-2t)$. Có một dấu hiệu để chọn đánh giá hợp lý đó là dựa vào điều kiện để đẳng thức xảy ra. Tuy nhiên trong một số bài toán khác hai đánh giá này cần phải kết hợp với nhau (vì với $t \ge \frac{1}{2}$ đánh giá thứ 2 bên trên khá lỏng lẻo và có thể không thể hoàn tất bài toán).

Thí dụ 5. *Với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng*

$$a^3+b^3+c^3+7abc \ge 10.$$

Lời giải. Ta viết lại BĐT dưới dạng thuần nhất như sau:

$$27\left(a^3+b^3+c^3+7abc\right)^2 \ge 100\left(ab+bc+ca\right)^3.$$

Đến đây ta có thể chuẩn hóa lại $a+b+c=3$. Khi đó tồn tại $t\in[0;1]$ sao cho $a^2+b^2+c^2=3+6t^2$. Theo hệ quả 1, BĐT được viết lại là:

$$27\left(27t^2+10abc\right)^2 \ge 100\left(3-3t^2\right)^3.$$

Ta có hai trường hợp sau:

TH1: Với $t \ge \frac{1}{2}$, BĐT đúng vì:

$$27\left(27t^2+10abc\right)^2 \ge \frac{27^3}{16} > \frac{18225}{16}$$

$$=100\left(3-\frac{3}{4}\right)^3 \ge 100\left(3-3t^2\right)^3.$$

TH2: Với $t<\frac{1}{2}$, ta cần chứng minh:

$$27\left[27t^2+10(1+t)^2(1-2t)\right]^2 \ge 100\left(3-3t^2\right)^3$$

hay $27t^2(4-5t)\left(60-100t^3-104t^2-25t\right)\ge 0.$

BĐT cuối đúng vì:

$$100t^3+104t^2+25t < \frac{100}{8}+\frac{104}{4}+\frac{25}{2}=51.$$

Bài toán hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Phạm vi áp dụng của bổ đề sẽ rộng hơn khi kết hợp với kỹ thuật thuần nhất hóa và chuẩn hóa.

Thí dụ 6. (Chọn đội dự thi VMO 2022 – Kiên Giang) *Với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:*

$$3-5(ab+bc+ca)+6abc(a+b+c)\ge 0.$$

Lời giải. Trước tiên ta thuần nhất hóa BĐT như sau:

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-5\left(ab+bc+ca\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
$$+6abc(a+b+c)\ge 0.$$

Ta chuẩn hóa $a+b+c=3$. Khi đó tồn tại $t\in[0;1]$ sao cho $a^2+b^2+c^2=3+6t^2$. Áp dụng hệ quả 1, BĐT trên được viết lại là:

$$3\left(3+6t^2\right)^2-5\left(3-3t^2\right)\left(3+6t^2\right)+18abc\ge 0,$$

hay $18abc \ge 18-198t^4-63t^2$.

Cũng theo hệ quả 1, BĐT trên sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được rằng:

$$18(1+t)^2(1-2t)\ge 18-198t^4-63t^2$$

$$\Leftrightarrow 9t^2\left(22t^2-4t+1\right)\ge 0.$$

BĐT cuối là đúng, bài toán hoàn tất.

Nhận xét. Dựa trên bổ đề ta có thể làm chặt BĐT trên. Mời bạn đọc xem trong mục tìm hằng số tốt. Hoàn toàn tương tự có ta lời giải cho bài toán sau:

(Việt Nam TST -2021) *Với các thực không âm a,b,c thỏa mãn:*

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3\left(ab+bc+ca\right)=5\left(a+b+c\right).$$

Chứng minh rằng:

$$4\left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(ab+bc+ca\right)+7abc\le 25.$$

Tiếp theo ta đến với các BĐT nhiều biến hơn

Thí dụ 7. *Với a,b,c,d là các số thực không âm. Chứng minh rằng:*

$$\frac{(ab+bc+cd+da+ac+bd)(a+b+c+d)}{4}$$
$$\ge 3\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)abcd}.$$

Lời giải. Nếu ít nhất một trong bốn số a, b, c, d bằng 0 thì BĐT là hiển nhiên. Ngược lại ta chuẩn hóa $a+b+c+d=4$. Áp dụng hệ quả 2, BĐT được viết lại là:

$$6-6t^2 \ge 3\sqrt{\left(4+12t^2\right)abcd}.$$

Khi đó ta chỉ cần chứng minh:

$$6-6t^2 \ge 3\sqrt{(4+12t^2)(1-t)^3(1+3t)}.$$

Bình phương hai vế và thu gọn, BĐT trên tương đương với:

$$4t^2(3t-1)^2(t-1)^2 \ge 0.$$

BĐT được chứng minh.

Thí dụ 8. *Với $a_1, a_2, \cdots, a_n$ là các số không âm có tổng bằng n. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{(n-1)\left(\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}\right)}$$

$$+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)a_1a_2...a_n \ge \sqrt{n}.$$

Lời giải. Theo bổ đề, tồn tại $t \in [0;1]$ sao cho:

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 = n+2C_n^2t^2 \text{ và}$$

$$(1+t)^{n-1}[1-(n-1)t] \le a_1a_2...a_n \le (1-t)^{n-1}[1+(n-1)t].$$

TH1: Với $t \ge \dfrac{1}{n-1}$, ta chỉ cần chứng minh:

$$\sqrt{(n-1)\left[1+(n-1)t^2\right]} \ge \sqrt{n} \text{ hay } t \ge \frac{1}{n-1}$$

Vậy BĐT là đúng.

TH2: Với $0 \le t < \dfrac{1}{n-1}$, ta chỉ cần chứng minh:

$$\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)(1+t)^{n-1}[1-(n-1)t]$$

$$\ge \sqrt{n}-\sqrt{(n-1)\left[1+(n-1)t^2\right]},$$

hay $\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)(1+t)^{n-1} \ge \dfrac{1+(n-1)t}{\sqrt{(n-1)[1+(n-1)t^2]}+\sqrt{n}}.$

Xét hàm số:

$$f(t) = \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)(1+t)^{n-1} \times$$

$$\times\left(\sqrt{(n-1)\left[1+(n-1)t^2\right]}+\sqrt{n}\right)-1-(n-1)t.$$

Ta có:

$$f''(t) = \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)(n-2)(n-1)\times$$

$$\times\left(\sqrt{(n-1)\left[(n-1)t^2+1\right]}+\sqrt{n}\right)(t+1)^{n-3}$$

$$+\frac{2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)(n-1)^3 t(t+1)^{n-2}}{\sqrt{(n-1)\left[(n-1)t^2+1\right]}}$$

$$+\frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)(n-1)^2(t+1)^{n-1}}{\left((n-1)t^2+1\right)\sqrt{(n-1)\left[(n-1)t^2+1\right]}} \ge 0$$

tức là $f''(t) \ge 0$ với mọi $t \in \left[0; \dfrac{1}{n-1}\right)$.

Suy ra $f'(t) \ge f'(0) = 0$. Điều này dẫn đến:

$$f(t) \ge f(0) = 0.$$

Phép chứng minh hoàn tất.

Để kết lại mục này ta sẽ đến với lời giải bài toán sau, một cách sử dụng chặn của biến liên quan đến t.

Thí dụ 9. *Với a, b, c, d là bốn số thực dương có tổng bằng 4. Chứng minh rằng:*

$$4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \ge 4+3\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right).$$

Lời giải. Theo bổ đề thì tồn tại $t \in [0;1)$ sao cho:

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = 4+12t^2$$

và $$1-3t \le a,b,c,d \le 1+3t.$$

Với $t=0$ tức là $a=b=c=d=1$, BĐT cần chứng minh là đúng. Với $0<t<1$,

BĐT được viết lại như sau:

$$4\sum_{cyc}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{1+3t}\right) \ge 4+3\left(4+12t^2\right)-\frac{16}{1+3t}$$

hay $$\frac{4}{1+3t}\sum_{cyc}\left(\frac{1+3t-a}{a}\right) \ge \frac{12t\left(9t^2+3t+4\right)}{3t+1}.$$

Theo BĐT Schwarz, ta có:

$$\sum_{cyc}\left(\frac{1+3t-a}{a}\right) = \sum_{cyc}\frac{(1+3t-a)^2}{a(1+3t-a)}$$

$$\ge \frac{144t^2}{4(1+3t)-4-12t^2}$$

$$= \frac{144t^2}{12t-12t^2} = \frac{12t}{1-t}.$$

Do đó, ta cần chứng minh:

$$\frac{12t}{1-t}+\frac{4}{1+3t}\ge\frac{12t\left(9t^2+3t+4\right)}{3t+1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{12t^2(3t-1)^2}{(1-t)(3t+1)}\ge 0.$$

Bài toán hoàn tất.

Một số bài toán tương tự để bạn đọc tự luyện:

1) (Iran MO năm 1996) Với a,b,c là các số thực không âm sao cho không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\ge\frac{9}{4}.$$

2) (Chọn đội tuyển trường AMS – 2021) Với $a,b,c>0, a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{3+ab+bc+ca}+\frac{\sqrt{abc}}{6}+\sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}\le 1.$$

3). (Vasile Cirtoaje) Với a,b,c là các số thực. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^3\ge(a+b+c)(ab+bc+ca)\left(a^3+b^3+c^3\right).$$

4) (PTNK - 2021) Với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$a^{4n}+b^{4n}+c^{4n}+a^nb^n+b^nc^n+c^na^n\ge 6, \forall n\in\mathbb{N}.$$

5) Với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$a^{4n}+b^{4n}+c^{4n}+\left(\sqrt[3]{a^nb^nc^n}\right)^2\left(a^nb^n+b^nc^n+c^na^n\right)\ge 6,$$

$\forall n\in\mathbb{R}, n\ge 2.$

6) Với a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[6]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\ge 2.$$

7) (AoPs) Với a,b,c là các số thực không âm sao cho không có hai số nào đồng thời bằng 0 và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}+\frac{12}{9-abc}\ge 3.$$

8) Với $a_1,a_2,...,a_n$ là các số không âm có tổng bằng n. Chứng minh rằng:

$$(n-1)(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)+na_1a_2...a_n\ge n^2.$$

9) Với $a_1,a_2,...,a_n$ (với $n\in\mathbb{N}, n\ge 4$) là các số thực thỏa mãn:

$$\sum_{i=1}^n a_i=\frac{n(n-1)}{n-2} \quad\text{và}\quad \sum_{i=1}^n a_i^2=\frac{n^2(n-1)}{(n-2)^2}$$

Chứng minh rằng $a_1a_2...a_n\le\dfrac{2(n-1)}{n-2}$.

10) Với $k>-1$ và a,b,c là các số thực không âm và có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{(3+ka)(3+kb)(3+kc)}{(3-a)(3-b)(3-c)}\ge\min\left\{\frac{1}{8}(k+3)^3,(k+2)^2\right\}.$$

3. MỘT SỐ HƯỚNG KHAI THÁC BỔ ĐỀ

a) Sử dụng bổ đề làm chặt BĐT

Với $a,b,c\ge 0$ có tổng bằng 3 thì theo hệ quả 1, $\exists t\in[0;1]$ sao cho $ab+bc+ca=3-3t^2$

và $(1+t)^2(1-2t)\le abc\le(1-t)^2(1+2t)$.

Khi đó $a^3+b^3+c^3-3abc=27t^2$. Ta sẽ chọn một BĐT cơ bản, chẳng hạn:

Với a,b,c là các số thực không âm sao cho $ab+bc+ca>0$ thì:

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)^2}{(ab+bc+ca)^2}\ge 3.$$

BĐT trên được viết lại là: $\dfrac{3+6t^2}{\left(1-t^2\right)^2}\ge 3.$

Bây giờ ta tiến hành làm chặt, đơn cử ta thêm cho vế phải một lượng như sau:

$$\frac{3+6t^2}{\left(1-t^2\right)^2}\ge 3+\frac{k(a^3+b^3+c^3-3abc)}{(a+b+c)^3}$$
$$=3+kt^2.$$

Tất nhiên là ta tìm k lớn nhất để BĐT trên vẫn đúng. Với $t=0$ BĐT là hiển nhiên. Với $t\in(0;1)$, ta cần: $\frac{3(4-t^2)}{(t^2-1)^2}=\frac{\frac{3+6t^2}{(1-t^2)^2}-3}{t^2}\ge k, \forall t\in(0;1)$.

Cho $t\to 0^+$ (đôi khi ta tìm GTNN của biểu thức vế trái), ta được $k\le 12$. Kiểm tra lại BĐT trên là đúng xin dành cho bạn đọc. Vậy ta có bài toán sau:

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^2}{(ab+bc+ca)^2}\ge 3+\frac{12(a^3+b^3+c^3-3abc)}{(a+b+c)^3}.$$

Như vậy, bạn đọc chỉ cần một BĐT đơn giản có thể làm chặt nó và thu được một BĐT khó hơn. Chẳng hạn như:

Với a,b,c là các số thực không âm sao cho không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

a) $\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\ge 3+\frac{3(a^3+b^3+c^3-3abc)}{(a+b+c)^3}$.

b) Với $a,b,c>0$, chứng minh rằng:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9+\frac{16(a^3+b^3+c^3-3abc)}{(a+b+c)^3}.$$

c) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}+\frac{2(a^3+b^3+c^3-3abc)}{(a+b+c)^3}$

d) $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}$

$$\ge\frac{9}{a+b+c}+\frac{2(\sqrt{3}-1)(a^3+b^3+c^3-3abc)}{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^2}.$$

e) $\frac{24(a^3+b^3+c^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\frac{168(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}$

$$\ge 65+\frac{(18\sqrt{3}-29)(a^3+b^3+c^3-3abc)}{(a+b+c)^3}.$$

Và còn rất nhiều BĐT cũng như những kiểu làm chặt khác, bạn đọc có thể khám phá. Lưu ý rằng các BĐT như trên chỉ mang ý nghĩa thực sự khi bạn đọc đã nắm được cách làm chặt, một cách học BĐT thay vì giải từng bài toán.

b) Tìm hằng số tốt

Song song với ý tưởng làm chặt là ý tưởng tìm hằng số tốt. Ta đến với hai thí dụ sau.

Thí dụ 10. *Với a,b,c là các số thực không âm. Tìm số thực dương k nhỏ nhất sao cho BĐT sau đây là đúng:*

$$(1+k)\cdot\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}+k\cdot\sqrt[3]{abc}.$$

Lời giải. Với $a=b=c=0$ BĐT luôn đúng với mọi k. Ta chỉ cần xét với $a+b+c>0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=3$. Theo hệ quả 1, $\exists t\in[0;1]$ sao cho $ab+bc+ca=3-3t^2$

và $(1+t)^2(1-2t)\le abc\le(1-t)^2(1+2t)$.

BĐT được viết lại là:

$$k+1\ge\sqrt{1+2t^2}+k\sqrt[3]{abc}.$$

Theo bổ đề, điều kiện đủ của k để BĐT trên đúng đó là k thỏa mãn:

$$k+1\ge\sqrt{1+2t^2}+k\sqrt[3]{(1-t)^2(1+2t)}.$$

Với $t=0$ BĐT trên luôn đúng với mọi k. Như vậy, để tìm k ta chỉ cần xét với $t\in(0;1]$ Khi đó ta

cần: $k\ge\frac{\sqrt{1+2t^2}-1}{1-\sqrt[3]{(1-t)^2(1+2t)}}$.

Bằng khảo sát hàm số, ta thu được:

$$\max_{0<t\le1}\frac{\sqrt{1+2t^2}-1}{1-\sqrt[3]{(1-t)^2(1+2t)}}=\frac{1}{11}(7+3\sqrt{3}).$$

Do đó, điều kiện đủ của k là: $k\ge\frac{1}{11}(7+3\sqrt{3})$.

Tất nhiên, với $k=\frac{1}{11}\left(7+3\sqrt{3}\right)$ BĐT bài toán sẽ đúng (vì ta đang có điều kiện đủ) nhưng như vậy chưa cho phép ta tìm được k thỏa mãn bài toán vì có thể có giá trị k nhỏ hơn BĐT trên vẫn còn đúng (với một cách tiếp cận khác nào đó). Với tính chặt của bổ đề, ta hoàn toàn có thể hy vọng đây cũng là điều kiện cần. Để thấy được điều đó ta hãy để ý đẳng thức xảy ra trong điều kiện đủ. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $t=\frac{18\sqrt{3}-7}{71}$.

Từ đó ta giải tìm được a,b,c xảy ra đẳng thức là:

$$a=\frac{1}{4}\left(5+3\sqrt{3}\right)b=\frac{1}{4}\left(5+3\sqrt{3}\right)c.$$

Dựa vào đây ta có cách kiểm tra điều kiện cần như sau (đây cũng là bước thường thấy trong bài toán tìm hằng số tốt nhưng ít được trình bày chi tiết vì sao thay thế bởi những giá trị đặc biệt như vậy).

Thay $a=\frac{1}{4}\left(5+3\sqrt{3}\right),b=c=1$, vào BĐT đề bài, ta thu được:

$$k\geq\frac{3\sqrt{28+10\sqrt{3}}-3\sqrt{3}-13}{13+3\sqrt{3}-6\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\frac{1}{11}\left(7+3\sqrt{3}\right).$$

Như vậy, điều kiện k bên trên cũng là điều kiện cần. Từ đó ta rút ra được kết luận $k=\frac{1}{11}\left(7+3\sqrt{3}\right)$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm.

Nhận xét. Ta có thể rút ngắn trình bày bên trên bằng cách trình bày ngược các bước suy luận. Có nghĩa là thay $a=\frac{1}{4}\left(5+3\sqrt{3}\right),b=c=1$, để có điều kiện cần là $k\geq\frac{1}{11}\left(7+3\sqrt{3}\right)$. Sau đó sử dụng bổ đề để kiểm tra với $k=\frac{1}{11}\left(7+3\sqrt{3}\right)$ BĐT vẫn đúng. Làm như vậy chỉ làm ngắn gọn về mặt trình bày nhưng không thể hiện hết ý tưởng cũng như cách tìm ra vị trí thế a,b,c hợp lý.

Tiếp theo ta quay lại BĐT trong đề chọn đội của tỉnh Kiên Giang.

Vì $a^2+b^2+c^2=1$ nên

$$3abc(a+b+c)\leq 1.$$

Câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: Số thực k nhỏ nhất để BĐT sau luôn đúng là bao nhiêu?

$$k-5(ab+bc+ca)+3(5-k)abc(a+b+c)\geq 0.$$

Thí dụ 11 (Làm chặt đề Kiên Giang) *Với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm số thực k nhỏ nhất để BĐT sau luôn đúng:*

$$k-5(ab+bc+ca)+3(5-k)abc(a+b+c)\geq 0.$$

Lời giải. Thuần nhất hóa BĐT như sau:

$$k\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-5(ab+bc+ca)\left(a^2+b^2+c^2\right)+3(a+b+c)(5-k)abc\geq 0\ (*).$$

Chuẩn hóa $a+b+c=3$ như ví dụ bên trên. Áp dụng hệ quả 1, BĐT được viết lại là:

$$k\left(3+6t^2\right)^2-5\left(3-3t^2\right)\left(3+6t^2\right)+9(5-k)abc\geq 0\ (**).$$

Với $t=0$ ta được $a=b=c=1$, BĐT (**) đúng với mọi k. Do đó ta chỉ cần tìm k để BĐT (**) đúng với $t\in(0;1]$.

BĐT (**) được viết lại là

$$k\geq\frac{-45abc+5\left(3-3t^2\right)\left(3+6t^2\right)}{-9abc+\left(3+6t^2\right)^2}.$$

Vì hàm số $f(x)=\frac{-45x+5\left(3-3t^2\right)\left(3+6t^2\right)}{-9x+\left(3+6t^2\right)^2}$ là hàm giảm trên khoảng $(-\infty;1)$ và

$$\left\{abc,(1+t)^2(1-2t),0\right\}\subset(-\infty;1)$$

ta có hai trường hợp sau:

• Với $t \geq \frac{1}{2}$ thì $\frac{-45abc + 5(3-3t^2)(3+6t^2)}{-9abc + (3+6t^2)^2}$

$$\leq \frac{5(3-3t^2)(3+6t^2)}{(3+6t^2)^2} = \frac{5(3-3t^2)}{3+6t^2}.$$

Tìm GTLN biểu thức vế phải ta được:

$$\frac{-45abc + 5(3-3t^2)(3+6t^2)}{-9abc + (3+6t^2)^2} \leq \frac{5(3-3t^2)}{3+6t^2} \leq \frac{5}{2}.$$

• Với $0 < t < \frac{1}{2}$ thì $\frac{-45abc + 5(3-3t^2)(3+6t^2)}{-9abc + (3+6t^2)^2}$

$$\leq \frac{-45(1+t)^2(1-2t) + 5(3-3t^2)(3+6t^2)}{-9(1+t)^2(1-2t) + (3+6t^2)^2}$$

$$= \frac{10(-t^2+t+2)}{4t^2+2t+7}.$$

Tìm GTLN biểu thức vế phải ta được:

$$\frac{-45abc + 5(3-3t^2)(3+6t^2)}{-9abc + (3+6t^2)^2}$$

$$\leq \frac{10(-t^2+t+2)}{4t^2+2t+7} \leq \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

(đẳng thức của đánh giá cuối đạt được khi và chỉ khi $t = \frac{3\sqrt{3}-5}{2}$). Từ đó suy ra $k \geq \frac{5\sqrt{3}}{3}$ thì BĐT sẽ luôn đúng: $\frac{5\sqrt{3}}{3} - 5(ab+bc+ca) +$

$$+3\left(5 - \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)abc(a+b+c) \geq 0.$$

Tương tự như ví dụ trước đó, ta sẽ chứng minh $k \geq \frac{5\sqrt{3}}{3}$ cũng là điều kiện cần để BĐT đề bài luôn đúng (và như vậy $k = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm). Ta xét $a = \sqrt{3}-1, b = c = 1$ thay vào (*), ta được:

$$-6(4\sqrt{3}-7)k - 70\sqrt{3} + 120 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $k \geq \frac{5\sqrt{3}}{3}$ là điều kiện cần và đủ để BĐT đề bài luôn đúng. Hay nói cách khác $k = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm.

Một số bài toán tương tự:

Với a,b,c là các số thực không âm sao cho không có hai số nào đồng thời bằng 0.

1) *Tìm số thực dương k lớn nhất sao cho BĐT sau đây là đúng:*

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} + k\sqrt[3]{abc} \geq (k+1)\frac{a+b+c}{3}.$$

Gợi ý: $k_{\max} = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1.$

2) *Tìm số thực dương k lớn nhất sao cho BĐT sau đây là đúng:*

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)} + \frac{k(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geq \frac{3}{8} + \frac{k}{3}.$$

Gợi ý: $k_{\max} = \frac{9(3+2\sqrt{3})}{8}.$

3) *Tìm số thực dương k nhỏ nhất sao cho BĐT sau đây là đúng:*

$$\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} + \frac{k(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} \geq 1 + \frac{k}{3}.$$

Gợi ý: $k_{\min} = \frac{27}{8}.$

4) *Tìm số thực dương k lớn nhất sao cho BĐT sau đây là đúng:*

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + k \geq \frac{2}{3}(1+k)\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right).$$

Gợi ý: $k_{\max} = \frac{1}{2}.$

5) *Tìm số thực k lớn nhất sao cho BĐT sau đây là đúng:*

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}}+\frac{8kabc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge k+1.$$

Gợi ý: $k_{\max}=\sqrt{2}-1.$

c) Sáng tạo bất đẳng thức

Sáng tác một BĐT sẽ có rất nhiều con đường khác nhau. Trong mục này ta sẽ sáng tác BĐT (chặt nhất có thể) từ một BĐT có trước và công cụ hỗ trợ chính là bổ đề ta đang có. Ta xét đơn cử bài toán sau.

Thí dụ 12 (Chọn đội dự thi VMO tỉnh Bình Dương năm 2021). *Với $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm số thực k lớn nhất sao cho BĐT sau đây luôn đúng:*

$$a+b+c+k(1-abc)\le 3.$$

Sử dụng bổ đề, ta tìm được $k_{\max}=\frac{8(3-\sqrt{6})}{9}$.

Bài toán có cách phát biểu đơn giản nhưng giải nó sẽ mất một ít thời gian (chủ yếu dành cho tính toán – một đặc trưng cho bài toán). Từ giả thiết bài toán ta suy ra: $3abc\le 3\sqrt[3]{abc}\le a+b+c\le 3$. Đây là cơ sở để ta sáng tác các BĐT bên dưới.

- Trước tiên là hoán đổi $a+b+c\leftrightarrow abc$ trong đề toán. Ta có bài toán sau:

Với $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm số thực k lớn nhất sao cho BĐT sau đây luôn đúng:

$$abc+k(3-a-b-c)\le 1.$$

Gợi ý: $k_{\max}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}.$

- Hoán đổi $abc\leftrightarrow\sqrt[k]{abc};(k=2,3)$ trong đề toán. Ta có bài toán sau:

Với $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm số thực k lớn nhất sao cho BĐT sau đây luôn đúng:

$$a+b+c+k\left(1-\sqrt{abc}\right)\le 3.$$

Gợi ý: $k_{\max}=3-\sqrt{6}.$

$$a+b+c+k\left(1-\sqrt[3]{abc}\right)\le 3.$$

Gợi ý: $k_{\max}=3-\sqrt{6}.$

- Đảo đại lượng lớn-nhỏ lại với nhau, ta được bài toán sau:

Với $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho BĐT sau đây luôn đúng:

$$3\le a+b+c+k(1-abc)$$

Gợi ý: $k_{\min}=2.$

- So sánh hai đại lượng lớn-nhỏ cũng là một ý thường khai thác:

Với $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm số thực k lớn nhất sao cho BĐT sau đây luôn đúng:

$$k\left[3-(a+b+c)\right]\le 1-abc.$$

Gợi ý: $k_{\max}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$

$$k\left[3-(a+b+c)\right]\le 1-\sqrt[3]{abc}.$$

Gợi ý: $k_{\max}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

- Cuối cùng, ghép một cách "cơ học". Đây cũng là cách mà một số BĐT được sáng tác. Ta có bài toán sau:

Với $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm số thực k lớn nhất sao cho BĐT sau đây luôn đúng:

$$k\left[3-(a+b+c)\right]$$
$$\le(1-abc)+\left(1-\sqrt{abc}\right)+\left(1-\sqrt[3]{abc}\right).$$

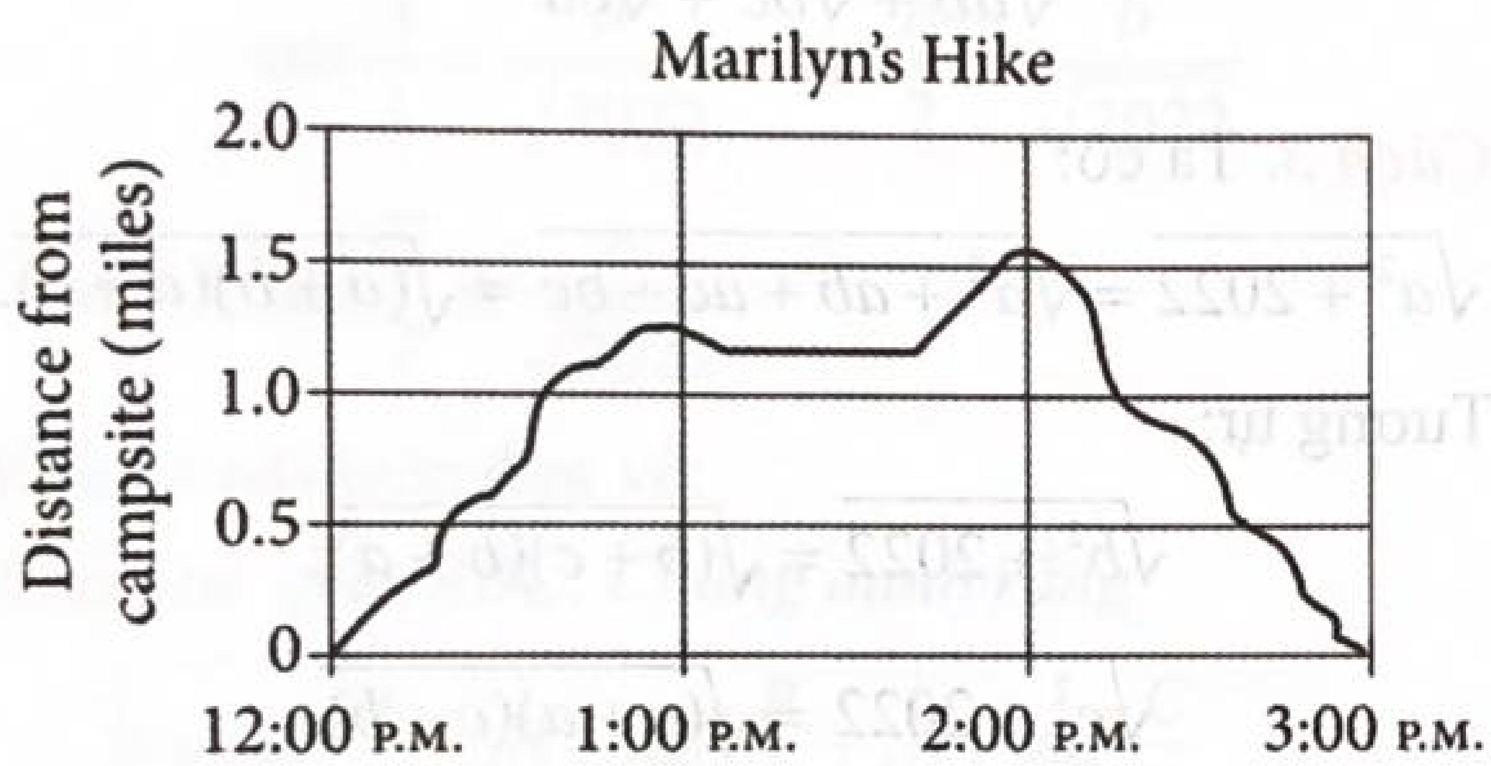
Lời kết. Trên là những ứng dụng cho bổ đề chặn tích. Với trường hợp nhiều hơn 3 biến đánh giá của bổ đề cho tích các chưa hẳn là chặt và tốt nhất. Rất mong nhận được những đánh giá chặt và tốt hơn từ bạn đọc.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN
BÀI SỐ 91

PROBLEM. *The graph below shows Marilyn's distance from her campsite during a 3 - hour hike. She stopped for 30 minutes during her hike to have lunch. Based on the graph, which of the following is closest to the time she finished lunch and continued her hike*

A. 12 :40 pm B. 1 :10 pm

C. 1 :40 pm D. 2 :00 pm



Remark: This problem is collected from a SAT practice test.

Solution: Part of the graph is of the form a horizontal line-segment. This part shows that the distance from the campsite does not change and this corresponds to the period when Marily had lunch. We can see that she finished her lunch and continued her hike at about 1:40 pm.

TỪ VỰNG

distance : *khoảng cách*

horizontal : *nằm ngang*

line-segment : *đoạn thẳng*

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(*College of Science–Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 89

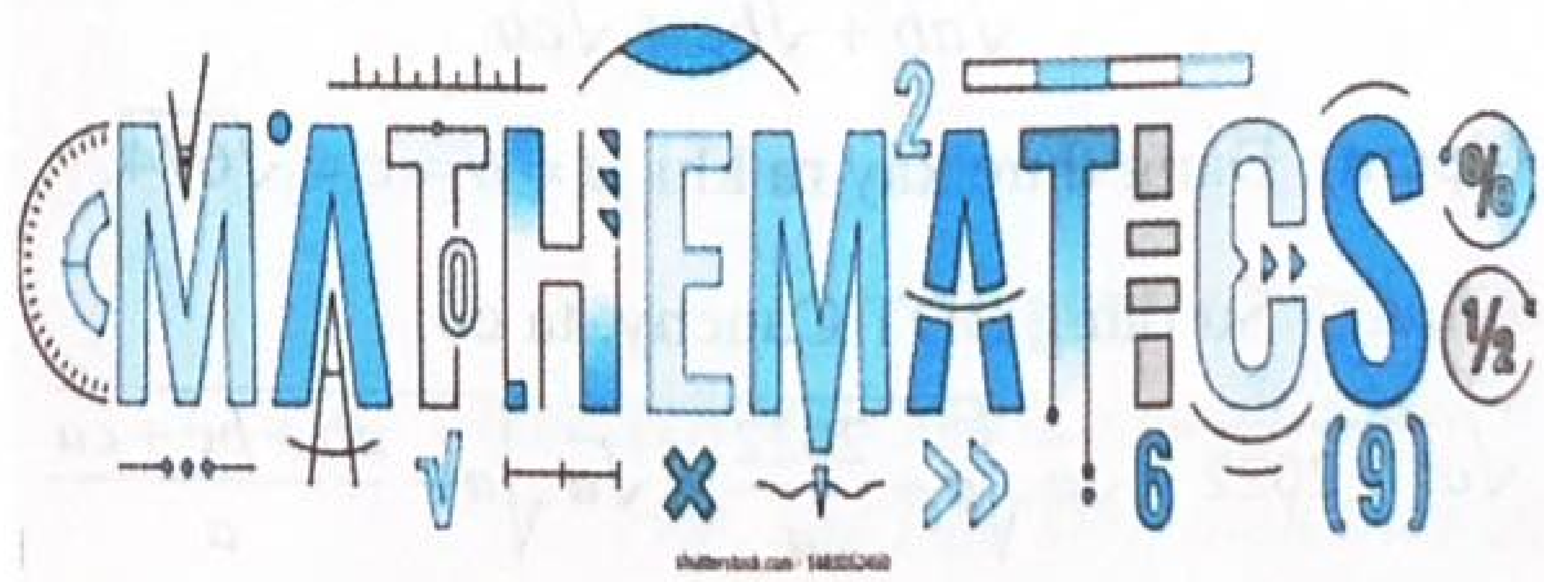
BÀI TOÁN. *Chứng minh rằng* $(2^n)!$ *chia hết cho* 2^{2n-1} *với mọi số nguyên dương n.*

Lời giải. Ta có $2^{2n-1} = 2^n \times 2^{n-1}$ và $(2^n)! = 1 \times 2 \times \ldots \times (2^n - 1) \times 2^n$. Do đó ta chỉ cần chứng minh $1 \times 2 \times \ldots \times (2^n - 1)$ chia hết cho 2^{n-1} (1).

Nhưng với mọi số nguyên dương *n*, ta có $2^{n-1} \leq 2^n - 1$. Nói cách khác 2^{n-1} phải xuất hiện ở vị trí nào đó trong tích của các số liên tiếp $1 \times 2 \times \ldots \times (2^n - 1)$. Như vậy (1) được chứng minh.

Nhận xét. Các bạn *Nguyễn Quốc Hoàng Anh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Trần Thị Thanh Thư*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, **Thừa Thiên Huế;** *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm. Xin hoan nghênh tất cả các bạn.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)



NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÀN

BÀI TOÁN 70. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=2022$. Chứng minh rằng*

$$\frac{\sqrt{a^2+2022}+\sqrt{b^2+2022}+\sqrt{c^2+2022}}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}} \geq 2.$$

Lời giải. *Cách 1.* Sử dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$b+c \geq 2\sqrt{bc} \Leftrightarrow a+b+c \geq a+2\sqrt{bc}$$

$$\Leftrightarrow a(a+b+c) \geq a^2+2a\sqrt{bc}$$

$$\Leftrightarrow a^2+ab+ac+bc \geq a^2+2a\sqrt{bc}+bc$$

$$\Leftrightarrow a^2+2022 \geq (a+\sqrt{bc})^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+2022} \geq a+\sqrt{bc}.$$

Tương tự ta có:

$$\sqrt{b^2+2022} \geq b+\sqrt{ca};$$

$$\sqrt{c^2+2022} \geq c+\sqrt{ab}.$$

Cộng các BĐT theo vế ta được:

$$\sqrt{a^2+2022}+\sqrt{b^2+2022}+\sqrt{c^2+2022} \geq a+b+c+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}.$$

Mặt khác ta luôn có :

$$a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$

suy ra:

$$\sqrt{a^2+2022}+\sqrt{b^2+2022}+\sqrt{c^2+2022} \geq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$$

hay $$\frac{\sqrt{a^2+2022}+\sqrt{b^2+2022}+\sqrt{c^2+2022}}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}} \geq 2$$

(đpcm). Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{674}$.

Cách 2. Sử dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\sqrt{a^2+2022}=\sqrt{a}.\sqrt{a+\frac{2022}{a}}=\sqrt{a}.\sqrt{a+\frac{ab+bc+ca}{a}}$$

$$=\sqrt{a}.\sqrt{a+b+c+\frac{bc}{a}} \geq \sqrt{a}.\sqrt{b+c+2\sqrt{bc}}.$$

Suy ra: $\sqrt{a^2+2022} \geq \sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c})$.

Tương tự ta có:

$$\sqrt{b^2+2022} \geq \sqrt{b}(\sqrt{c}+\sqrt{a});$$

$$\sqrt{c^2+2022} \geq \sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{b}).$$

Cộng các BĐT theo vế ta được:

$$\sqrt{a^2+2022}+\sqrt{b^2+2022}+\sqrt{c^2+2022} \geq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2+2022}+\sqrt{b^2+2022}+\sqrt{c^2+2022}}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}} \geq 2.$$

Cách 3. Ta có:

$$\sqrt{a^2+2022}=\sqrt{a^2+ab+ac+bc}=\sqrt{(a+b)(a+c)}.$$

Tương tự:

$$\sqrt{b^2+2022}=\sqrt{(b+c)(b+a)};$$

$$\sqrt{c^2+2022}=\sqrt{(c+a)(c+b)}.$$

Theo BĐT Bunyakovsky ta có:

$$(a+\sqrt{bc})^2=(\sqrt{a}.\sqrt{a}+\sqrt{b}.\sqrt{c})^2 \leq (a+b)(a+c)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a+b)(a+c)} \geq a+\sqrt{bc}.$$

Tương tự:

$$\sqrt{(b+c)(b+a)} \geq b+\sqrt{ca};$$

$$\sqrt{(c+a)(c+b)} \geq c+\sqrt{ab}.$$

Cộng các BĐT trên theo vế và sử dụng BĐT $a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$ ta được:

$$\frac{\sqrt{a^2+2022}+\sqrt{b^2+2022}+\sqrt{c^2+2022}}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}} \geq 2.$$

Cách 4. Áp dụng BĐT Minkovsky ta có:

$$\sqrt{a^2+2022}+\sqrt{b^2+2022}+\sqrt{c^2+2022}$$

$$\geq \sqrt{(a+b+c)^2+(\sqrt{2022}+\sqrt{2022}+\sqrt{2022})^2}.$$

Ta luôn có:

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)=3.2022;$$

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \leq \sqrt{3(ab+bc+ca)}=\sqrt{3.2022}.$$

Do đó:

$$\frac{\sqrt{a^2+2022}+\sqrt{b^2+2022}+\sqrt{c^2+2022}}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}$$

$$\geq \frac{\sqrt{3.2022+9.2022}}{\sqrt{3.2022}}$$

hay $\dfrac{\sqrt{a^2+2022}+\sqrt{b^2+2022}+\sqrt{c^2+2022}}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}} \geq 2.$

Cách 5. Phương pháp lượng giác.

Từ giả thiết $ab+bc+ca=2022$ suy ra:

$$\frac{a}{\sqrt{2022}}.\frac{b}{\sqrt{2022}}+\frac{b}{\sqrt{2022}}.\frac{c}{\sqrt{2022}}+\frac{c}{\sqrt{2022}}.\frac{a}{\sqrt{2022}}=1.$$

Do đó tồn tại tam giác ABC có các góc thỏa mãn

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{a}{\sqrt{2022}};\ \tan\frac{B}{2}=\frac{b}{\sqrt{2022}}$$

và $\quad \tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{c}{\sqrt{2022}}.$

Khi đó bài toán đưa về:

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{1+\tan^2\frac{A}{2}}+\sqrt{1+\tan^2\frac{B}{2}}+\sqrt{1+\tan^2\frac{C}{2}}}{\sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}+\sqrt{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}+\sqrt{\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}}}\geq 2\ (*).$$

Thật vậy, ta có:

$$(*)\Leftrightarrow \frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\geq 2\left(\sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}+\sqrt{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}+\sqrt{\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}}\right)$$

Sử dụng kết quả quen thuộc:

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ta có: $\mathrm{VT}=\dfrac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\cos\frac{C}{2}}$

$$\geq \frac{9}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}$$

$$\geq \frac{9}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$$

$$\mathrm{VP}=2\left(\sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}+\sqrt{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}+\sqrt{\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}}\right)$$

$$\leq 2.\sqrt{3\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right)}$$

$$\leq 2\sqrt{3}.$$

Vậy $\dfrac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\cos\frac{C}{2}}$

$$\geq 2\left(\sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}+\sqrt{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}+\sqrt{\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}}\right).$$

MAI VĂN NĂM

(GV THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Binhn)

Nhận xét. Bạn *Dương Gia Huân*, 10B2, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, **TP. Hồ Chí Minh** đóng góp 1 cách giải tương tự như cách 3; bạn *Hà Phương Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Phú Thọ** đóng góp 3 cách giải tương tự cách 1, cách 2, cách 3; bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đóng góp 3 cách giải tương tự cách 1, cách 2, cách 3; bạn *Nguyễn Văn Cảnh*, GV THCS Long Hậu, Cần Giuộc, **Long An** đóng góp 2 cách giải: cách 1 như cách 4 của bạn *Mai Văn Năm* trong bài viết trên, cách 2 sử dụng BĐT Jensen cho hàm lồi $f(x)=\sqrt{x^2+2022}$ trên $(0;+\infty)$ kết hợp với BĐT Bunyakovsky. Xin hoan nghênh tất cả các bạn.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 72 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.5.2023.

BÀI TOÁN 72. *Cho tam giác ABC. Gọi D là trung điểm của AB, E là điểm thuộc cạnh AC sao cho EA = 2EC. Gọi F là giao điểm của DE và BC. Chứng minh rằng CF = CB.*

TRỊNH VĂN CẢNH

(GV THCS và THPT Nguyễn Khuyến, TP. Thủ Dầu Một, Bình Dương)

DU LỊCH THẾ GIỚI QUA CÁC BÀI TOÁN HAY

BÀI TOÁN 79 (WMSETS, 2000-2001). *Chứng minh rằng với mọi số thực w, x, y, z ta có*

$$\sqrt[3]{w^3+x^3+y^3+z^3} \le \sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2}.$$

Lời giải. Đặt $t=\sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2}$.

Nếu $t=0$ thì $w^2+x^2+y^2+z^2=0$, suy ra:

$w=x=y=z=0$ và bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Xét $t>0$. Ta có:

$$\left(\frac{w}{t}\right)^2+\left(\frac{x}{t}\right)^2+\left(\frac{y}{t}\right)^2+\left(\frac{z}{t}\right)^2=1.$$

Suy ra:

$$\left(\frac{w}{t}\right)^2\le 1, \left(\frac{x}{t}\right)^2\le 1, \left(\frac{y}{t}\right)^2\le 1, \left(\frac{z}{t}\right)^2\le 1 \quad (1).$$

Nhận xét: Nếu a là số thực thỏa mãn $a^2\le 1$ thì ta luôn có: $a^3\le a^2$ (2). Thật vậy:

$$(2)\Leftrightarrow a^2(a-1)\le 0 \ (3).$$

Do $a^2\ge 0$, $a-1\le 0$ nên (3) đúng. Vậy (2) đúng.

Do (1) nên $\frac{w}{t}\le 1, \frac{x}{t}\le 1, \frac{y}{t}\le 1, \frac{z}{t}\le 1$. Áp dụng (2) ta có:

$$\left(\frac{w}{t}\right)^3+\left(\frac{x}{t}\right)^3+\left(\frac{y}{t}\right)^3+\left(\frac{z}{t}\right)^3$$

$$\le\left(\frac{w}{t}\right)^2+\left(\frac{x}{t}\right)^2+\left(\frac{y}{t}\right)^2+\left(\frac{z}{t}\right)^2=1.$$

Vì $t>0$ nên $w^3+x^3+y^3+z^3\le t^3$, suy ra:

$$\sqrt[3]{w^3+x^3+y^3+z^3}\le t=\sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2}.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Bạn *Đào Văn Nam*, GV THPT Phương Nam, Định Công, **Hà Nội** cũng có lời giải tương tự lời giải trên. Bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** và bạn *Nguyễn Văn Cảnh*, GV THCS Long Hậu, Cần Giuộc, **Long An** có nhận xét:

Do $\sqrt[3]{w^3+x^3+y^3+z^3}\le\sqrt[3]{|w|^3+|x|^3+|y|^3+|z|^3}$

và $\sqrt{w^2+x^2+y^2+z^2}\le\sqrt{|w|^2+|x|^2+|y|^2+|z|^2}$

nên chỉ cần chứng minh bài toán cho trường hợp các số w, x, y, z không âm. Khi đó hai vế bất đẳng thức không âm nên lũy thừa 6 hai vế, ta cần chứng minh bất đẳng thức tương đương:

$$(w^3+x^3+y^3+z^3)^2\le(w^2+x^2+y^2+z^2)^3 \quad (3).$$

Đến đây khai triển hai vế của (3) và sử dụng bất đẳng thức $a^2+b^2\ge 2ab$ cũng dẫn đến bất đẳng thức (3) đúng, suy ra bất đẳng thức cần chứng minh đúng.

Xin hoan nghênh các bạn.

NHƯ HOÀNG

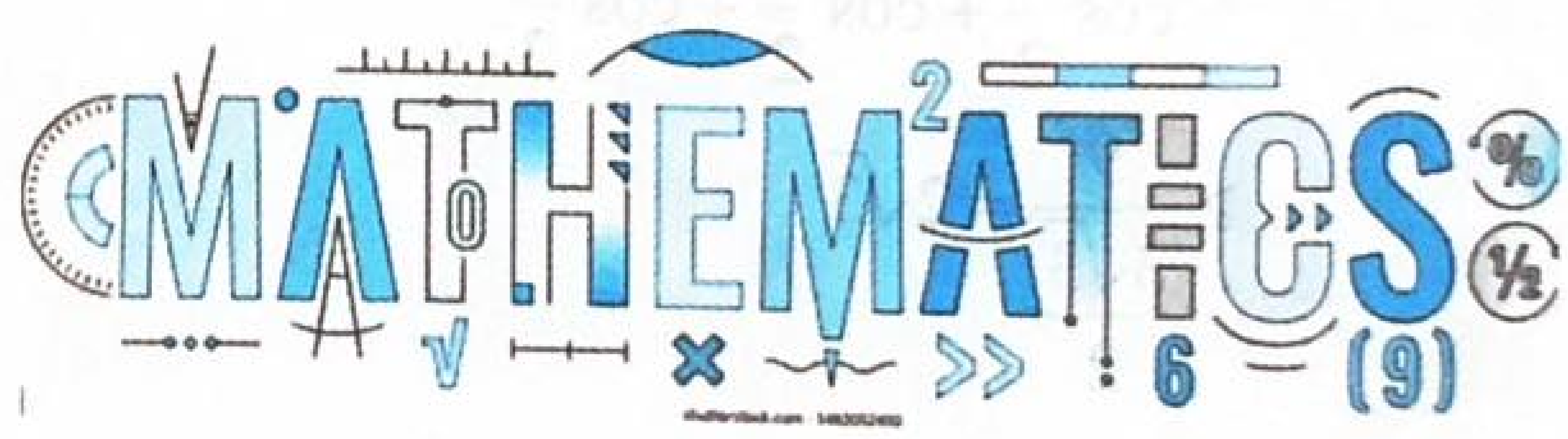
Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.5.2023.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 81. *Gọi I là điểm đẳng giác trong tam giác ABC (tức là I nằm trong tam giác ABC thỏa mãn* $\widehat{AIB}=\widehat{BIC}=\widehat{CIA}=120^0$*).*

Chứng minh rằng các đường thẳng Euler của các tam giác ABI, BCI, CIA đồng quy.

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG?

(Đề đăng trên TH&TT số 546, tháng 12 năm 2022)

Phân tích sai lầm. Lời giải trên là không đúng ở bước:

Và theo cách đặt thì

$$a=\sqrt{(x-1)^2+1}\Leftrightarrow a^2-1=(x-1)^2,$$

cho nên ta được $x-1=\sqrt{a^2-1}$.

Lẽ ra từ $a^2-1=(x-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=\sqrt{a^2-1} \\ x-1=-\sqrt{a^2-1}\end{array}\right.$

Lời giải đúng. Ta biến đổi PT đã cho như sau:

$$5x^2-10x=4(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2-2x+2)-4(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}+(x-1)^2=9.$$

Do đó ta được: $\left(2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)\right)^2=9$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)=3 \\ 2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)=-3\end{array}\right.$.

TH1: $2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)=3$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x+2}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ 4(x^2-2x+2)=(x+2)^2\end{cases}.$$

Khi đó: $4(x^2-2x+2)=(x+2)^2$

$$\Leftrightarrow 3x^2-12x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{6\pm 2\sqrt{6}}{3}.$$

So với điều kiện ta nhận cả hai nghiệm trên.

TH2: $2\sqrt{x^2-2x+2}-(x-1)=-3$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x+2}=x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 4 \\ 4(x^2-2x+2)=(x-4)^2\end{cases}.$$

Ta có: $4(x^2-2x+2)=(x-4)^2 \Leftrightarrow 3x^2-8=0$.

Phương trình trên có các nghiệm đều nhỏ hơn 4 nên ta không nhận các nghiệm này.

Kết luận: Phương trình có nghiệm $x=\dfrac{6\pm 2\sqrt{6}}{3}$.

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Xin hoan nghênh bạn.

KIHIVI

KẾT QUẢ ĐÚNG HAY SAI?

Bài toán. *Đội thanh niên tình nguyện của một trường THPT gồm 15 học sinh, trong đó có 2 học sinh khối 12, 7 học sinh khối 11 và 6 học sinh khối 10. Chọn ngẫu nhiên 6 học sinh tham gia một hoạt động tình nguyện. Tính xác suất để chọn được 6 học sinh có đủ học sinh cả ba khối.*

Một học sinh có lời giải như sau:

Số cách chọn 6 học sinh từ 15 học sinh là:

$$C_{15}^6=5005.$$

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega)=5005$.

Gọi A là biến cố " Chọn được 6 học sinh có đủ cả ba khối". Khi đó $\overline{A}$ là biến cố " Chọn được 6 học sinh không đủ ba khối".

Xét số cách chọn của biến cố $\overline{A}$:

TH1: 6 học sinh thuộc cùng một khối.

6 học sinh cùng thuộc khối 10: Có $C_6^6=1$ (cách chọn); 6 học sinh cùng thuộc khối 11: Có $C_7^6=7$ (cách chọn). Trường hợp này có 8 cách chọn.

TH2: 6 học sinh thuộc hai khối.

Số cách chọn được 6 học sinh thuộc khối 12 và khối 11 là C_9^6; Số cách chọn được 6 học sinh thuộc khối 12 và khối 10 là C_8^6; Số cách chọn được 6 học sinh thuộc khối 11 và khối 10 là C_{13}^6.

Khi đó số phần tử của $\overline{A}$ là:

$$n(A)=8+C_9^6+C_8^6+C_{13}^6=1836.$$

Do đó $P(\overline{A})=\dfrac{1836}{5005}$. Vậy xác suất cần tìm là:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1836}{5005}=\frac{3169}{5005}.$$

Theo bạn kết quả trên đúng hay sai?

NGUYỄN THANH GIANG

(GV THPT chuyên Hưng Yên)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 550 (4.2023)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

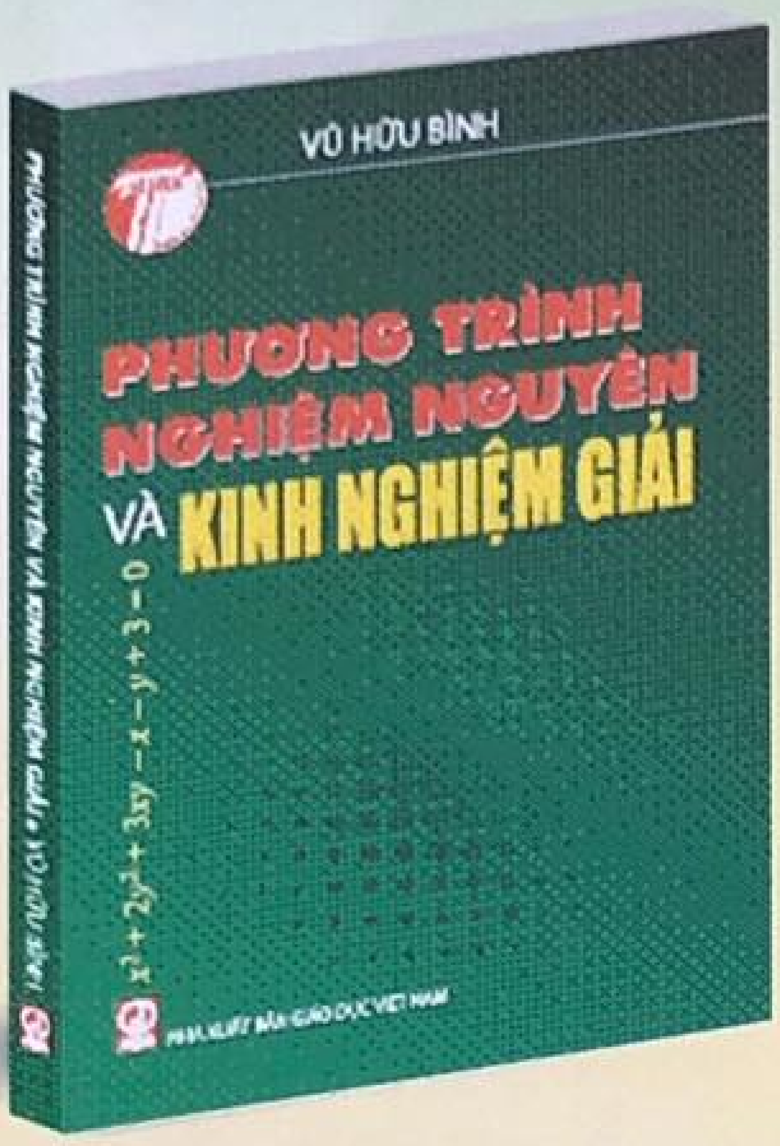
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ hai) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42.000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lí lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell*, *Pythagore*, *Fermat*, *Diophante*, …

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ dễ giải quyết hơn, cách "*đưa khó về dễ, đưa lạ về quen*", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra …tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

BẠN ĐỌC CÓ THỂ MUA ẤN PHẨM TRÊN TẠI:

TÒA SOẠN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

ĐỊA CHỈ: 187B, GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

ĐIỆN THOẠI PHÁT HÀNH: 024.35142649 - 024.35682701

CHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN HÌNH "CHÀO TIẾNG VIỆT" LAN TỎA TIẾNG VIỆT KHẮP NĂM CHÂU

TS. Phạm Vĩnh Thái, TBT NXBGDVN phát biểu tại buổi lễ

Tối ngày 31/3, Lễ ra mắt chương trình truyền hình "Chào Tiếng Việt" và phát động cuộc thi "Tìm kiếm Sứ giả tiếng Việt ở nước ngoài năm 2023" đã được tổ chức tại Hà Nội.

Lễ ra mắt chương trình truyền hình "Chào Tiếng Việt" và phát động cuộc thi "Tìm kiếm Sứ giả tiếng Việt ở nước ngoài năm 2023" là sự kiện do Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) phối hợp với Ủy ban Nhà nước về người Việt Nam ở nước ngoài (NVNONN) – Bộ Ngoại giao và Ban Truyền hình Đối ngoại – Đài Truyền hình Việt Nam tổ chức.

Tham dự chương trình có ông *Mai Phan Dũng*, Phó Chủ nhiệm Ủy ban Nhà nước về NVNONN; bà *Tào Thị Thanh Xuân*, Trưởng Ban Truyền hình Đối ngoại – Đài Truyền hình Việt Nam; ông *Đinh Hoàng Linh*, Vụ trưởng Vụ Thông tin – Văn hóa, Ủy ban Nhà nước về NVNONN. Về phía NXBGDVN có ông *Hoàng Lê Bách* – Tổng Giám đốc; ông *Phạm Vĩnh Thái* – Tổng Biên tập cùng đại diện các cơ quan, đơn vị thuộc Bộ Giáo dục và Đào tạo, Bộ Ngoại giao và các tổ chức liên quan như Hội Liên lạc với NVNONN, Liên hiệp các tổ chức hữu nghị Việt Nam, một số hội hữu nghị... Chương trình cũng được kết nối trực tuyến với điểm cầu tại hơn 90 cơ quan đại diện Việt Nam ở nước ngoài.

Lễ ra mắt Chương trình truyền hình "Chào Tiếng Việt"

Chương trình nhằm triển khai thực hiện Đề án "Ngày Tôn vinh tiếng Việt trong cộng đồng NVNONN giai đoạn 2023-2030" và Kế hoạch Ngày Tôn vinh tiếng Việt năm 2023 được Thủ tướng Chính phủ phê duyệt, với những nội dung hứa hẹn sẽ đóng góp tích cực trong việc giữ gìn và lan tỏa tiếng Việt trong cộng đồng NVNONN, đồng thời hỗ trợ nâng cao hiệu quả dạy và học tiếng Việt cho NVNONN.

Đặc biệt, năm 2023, NXBGDVN đã phối hợp với Ban truyền hình đối ngoại VTV4 – Đài Truyền hình Việt Nam triển khai chương trình dạy tiếng Việt cho trẻ em Việt Nam ở nước ngoài trên cơ sở bộ sách "Chào Tiếng Việt" do NXBGDVN biên soạn và phát hành. Tác giả bộ sách là TS. *Nguyễn Thụy Anh* cũng sẽ là người trực tiếp tham gia trong chương trình giảng dạy tiếng Việt này.

Điểm nhấn ở phiên bản truyền hình của bộ sách "Chào tiếng Việt" trên kênh sóng đối ngoại VTV4 (Đài Truyền hình Việt Nam) là hướng đến đối tượng trẻ em và thanh thiếu niên người Việt Nam ở nước ngoài tại thời điểm mới học và làm quen với tiếng Việt, năng lực không đồng đều, đang trong quá trình xây dựng khái niệm và cảm xúc về tiếng mẹ đẻ, văn hóa dân tộc, hình thành động lực như một nhu cầu học tập tự thân.

Dạy và học Tiếng Việt cho các thế hệ người Việt Nam ở nước ngoài là một vấn đề được Đảng và Nhà nước đặc biệt quan tâm. Với vai trò là đơn vị tổ chức biên soạn, biên tập, in, phát hành sách giáo khoa và các ấn phẩm giáo dục phục vụ nghiên cứu, giảng dạy, học tập của các ngành học, bậc học, NXBGDVN đã tổ chức biên soạn và xuất bản bộ sách "Chào Tiếng Việt" với mong muốn củng cố và phát triển ngôn ngữ, bản sắc văn hoá dân tộc Việt Nam; khơi dậy và phát huy tinh thần hướng về quê hương, đất nước; góp phần quảng bá tiếng Việt và văn hoá Việt Nam ở nước ngoài. Với tuyến nhân vật và cốt truyện được xây dựng theo phong cách hiện đại, "Chào Tiếng Việt" hi vọng có thể tạo sự thích thú cho trẻ em học tiếng Việt trên toàn thế giới.

Cuộc thi "Tìm kiếm Sứ giả tiếng Việt ở nước ngoài năm 2023"

Cuộc thi "Tìm kiếm sứ giả tiếng Việt ở nước ngoài năm 2023" là hoạt động ý nghĩa, khởi động cho các hoạt động triển khai "Kế hoạch Ngày tôn vinh tiếng Việt trong cộng đồng NVNONN năm 2023" do Uỷ ban Nhà nước về người Việt Nam ở nước ngoài tổ chức. Cuộc thi hướng đến đối tượng là người Việt Nam đang sinh sống, lao động, học tập ở nước ngoài và người nước ngoài đang sinh sống ở nước ngoài, yêu mến văn hoá, ngôn ngữ Việt Nam và sử dụng thành thạo tiếng Việt. Cuộc thi "Tìm kiếm sứ giả tiếng Việt ở nước ngoài năm 2023" sẽ được tổ chức thành 3 giai đoạn, trong gần 05 tháng, từ ngày 01/4 đến 10/8/2023, 05 thí sinh xuất sắc nhất được lựa chọn ở vòng chung kết, sẽ được trao danh hiệu "Sứ giả tiếng Việt ở nước ngoài năm 2023" tại Lễ tổng kết Ngày tôn vinh tiếng Việt năm 2023 (dự kiến vào ngày 8/9/2023).

NXBGD VIỆT NAM

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT4M23
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2023

Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng