TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 551
Tháng 5 - 2023
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 60 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

Giải thưởng Abel năm 2023
Luis Caffarelli

Nhà nghiên cứu người Mỹ gốc Argentina ***Luis Caffarelli***

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ hai) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42.000 đồng

Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lí lớn Fermat.*

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell*, *Pythagore*, *Fermat*, *Diophante*, ...

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands.*

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ dễ giải quyết hơn, cách "*đưa khó về dễ, đưa lạ về quen*", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ...tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

BẠN ĐỌC CÓ THỂ MUA ẤN PHẨM TRÊN TẠI:

TÒA SOẠN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

ĐỊA CHỈ: 187B, GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

ĐIỆN THOẠI PHÁT HÀNH: 024.35142649 - 024.35682701

TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG CỦA SỐ TỰ NHIÊN VÀ VẬN DỤNG GIẢI TOÁN

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, TP. Hai Phòng)

Bài viết này giới thiệu với bạn đọc một số bài toán về tìm các chữ số cuối cùng của một số tự nhiên và vận dụng để giải một số bài toán khác. Để bắt đầu, trước tiên chúng ta nhắc lại một số tính chất về đồng dư.

1. Với $a,b,c,d,m \in \mathbb{N}^*$, nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và $c \equiv d \pmod{m}$ thì: $a+c \equiv b+d \pmod{m}$;

$$a-c \equiv b-d \pmod{m};\ ac \equiv bd \pmod{m}.$$

2. Với $a,b,m,n \in \mathbb{N}^*$, nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì

$$a^n \equiv b^n \pmod{m}.$$

3. Với $k,n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

+ $1^k \equiv 1 \pmod{10}$; $5^k \equiv 5 \pmod{10}$; $6^k \equiv 6 \pmod{10}$;

+ $3^{4k} = 9^{2k} \equiv 1 \pmod{10}$; $7^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$;

$2^{4k} = 4^{2k} \equiv 6 \pmod{10}$;

+ $n^{4k+1} \equiv n \pmod{10}$.

4. Tích của 2 số tự nhiên liên tiếp chỉ có tận cùng là: 0; 2; 6.

5. Số chính phương có tận cùng là: 0; 1; 4; 5; 6; 9.

DẠNG 1. TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG CỦA SỐ TỰ NHIÊN

Bài 1.1. a) *Tìm chữ số cuối cùng của số*

$$A = 13^{13} + 16^{16} + 2009^{2009}.$$

b) *Tìm chữ số cuối cùng của số*

$$B = 1^{2022} + 2^{2022} + 3^{2022} + \ldots + 2021^{2022} + 2022^{2022}.$$

Lời giải. a) Ta có $13^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$. Do đó

$$13^{13} = 13^{4.3+1} = 13^{4.3}.13 \equiv 1.13 \pmod{10}$$

$\Rightarrow 13^{13} \equiv 3 \pmod{10}$. Ta có $16^{16} \equiv 6 \pmod{10}$;

$9^{2k} \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 2009^{2009} = 2009^{2.1004+1}$

$= 2009^{2.1004}.2009 \equiv 1.2009 \pmod{10} \equiv 9 \pmod{10}$.

Vậy $A \equiv 3+6+9 \pmod{10} \Rightarrow A \equiv 8 \pmod{10}$.

Do đó chữ số tận cùng của số $A = 13^{13} + 6^{16} + 2009^{2009}$ là 8.

b) Chia tổng B thành 203 tổng, trong đó 202 tổng đầu mỗi có 10 số hạng, tổng thứ 203 có 2 số hạng:

$$B = \left(1^{2022} + 2^{2022} + 3^{2022} \ldots + 10^{2022}\right) + \left(11^{2022} + 12^{2022} + \ldots + 20^{2022}\right) + \ldots + \left(2011^{2022} + 2012^{2022} + \ldots + 2020^{2022}\right) + \left(2021^{2022} + 2022^{2022}\right).$$

Ta có: $n^{4k+1} \equiv n \pmod{10} \Rightarrow n^{4k+2} \equiv n^2 \pmod{10}$;

$2022 = 4.505 + 2$. Suy ra:

$$B \equiv \left(1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2\right) + \left(11^2 + 12^2 + \ldots + 20^2\right) + \ldots + \left(2011^2 + \ldots + 2020^2\right) + \left(2021^2 + 2022^2\right) \pmod{10}.$$

Xét 202 tổng đầu, mỗi tổng đều có các chữ số tận cùng của các số hạng là: 1; 4; 9; 6; 5; 6; 9; 4; 1; 0, (xếp theo thứ tự). Chữ số tận cùng của mỗi tổng này là 5. Do đó $B \equiv 202.5 + 1 + 4 \equiv 5 \pmod{10}$.

Vậy chữ số tận cùng của số B là 5.

Nhận xét. Đối với phần b) ta có thể giải bài toán tổng quát "*Tìm chữ số cuối cùng của số* $B = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + 2021^n + 2022^n$. Để giải bài toán này ta xét $n = 4k + r, r \in \{0;1;2;3\}, k \in \mathbb{N}$.

Bài 1.2. a) *Tìm chữ số tận cùng của số*

$$S = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 2022^{2022}.$$

b) *Tìm chữ số tận cùng của số*

$$S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \ldots + n^{4n-7} + \ldots + 503^{2005}.$$

Lời giải. a) Chia tổng S thành 203 tổng, trong đó 202 mỗi tổng đầu có 10 số hạng, tổng thứ 203 có 2 số hạng:

$$S = \left(1^1 + 2^2 + \ldots + 10^{10}\right) + \left(11^{11} + 12^{12} + \ldots + 20^{20}\right) + \ldots + \left(2011^{2011} + \ldots + 2020^{2020}\right) + \left(2021^{2021} + 2022^{2022}\right).$$

Xét 202 tổng đầu, mỗi tổng đều có các chữ số tận cùng của các số hạng là: 1; 4; 7; 6; 5; 6; 3; 6; 9; 0, (không kể thứ tự). Chữ số tận cùng của mỗi tổng này là 7. Ta có: $2021^{2021} \equiv 1 (\bmod 10)$;

$2022^{2022} = 2022^{4.505+2} \equiv 2^{4.505}.2^2 \equiv 6.4 \equiv 4 (\bmod 10)$.

Suy ra: $S \equiv 202.7 + 1 + 4 (\bmod 10)$

$\Rightarrow S \equiv 9 (\bmod 10)$. Vậy S có chữ số tận cùng là 9.

b) Với $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$, ta có $n^{4k+1} \equiv n (\bmod 10)$.

Ta có số mũ của các số hạng của tổng S có dạng $4n - 7 = 4(n-2) + 1 = 4k + 1$, với $k = n - 2$, còn cơ số của các số hạng là các số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ số 2 đến 503.

Suy ra $S \equiv 2 + 3 + 4 + ... + 502 + 503 (\bmod 10)$.

Cách 1. Suy ra $S \equiv \dfrac{(2+503).502}{2} (\bmod 10)$

$\equiv 505.251 (\bmod 10) \equiv 5 (\bmod 10)$.

Vậy S có tận cùng là 5.

Cách 2. Chia tổng S thành 51 tổng, trong đó 50 tổng đầu mỗi tổng có 10 số hạng, tổng thứ 51 có 2 số hạng:

$S \equiv (2 + 3 + ... + 11) + (12 + 13 + ... + 21) + ...$

$+ (492 + 493 + ... + 501) + (502 + 503) (\bmod 10)$.

Xét 50 tổng đầu, mỗi tổng đều có các chữ số tận cùng của các số hạng là: 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 0; 1, (xếp theo thứ tự). Ta có: $0 + 1 + 2 + ... + 9 = 45$;

Suy ra: $S \equiv 45.50 + 2 + 3 (\bmod 10) \equiv 5 (\bmod 10)$.

Vậy S có tận cùng là 5.

Nhận xét. Trong phần a) xét 202 tổng đầu, mỗi tổng đều có các chữ số tận cùng của các số hạng là: 1; 4; 7; 6; 5; 6; 3; 6; 9; 0, (không kể thứ tự). Từ phần b) ta có thể giải các bài toán tương tự: *Tìm chữ số tận cùng của tổng*

$$S = 2^2 + 3^6 + 4^{10} + ... + n^{4n-6} + ... + 507^{2022}.$$

Bài 1.3. *Tìm hai chữ số tận cùng của số*

$$2003^{2004^{2013}}.$$

Lời giải. Đặt $A = 2003^{2004^{2013}}$, $B = 2004^{2005^{2013}}$.

Cách 1. Do $2004 \vdots 4$, nên $B \vdots 4$. Lại có $2004 \equiv -1 (\bmod 5)$ nên $B \equiv -1 (\bmod 5)$. Suy ra $B = 5k + 4, (k \in \mathbb{N}^*)$.

Do $B \vdots 4$ nên $5k \vdots 4 \Rightarrow k \vdots 4 \Rightarrow k = 4t, (t \in \mathbb{N}^*)$.

Vậy $B = 20t + 4, (t \in \mathbb{N}^*)$ (1). Lại có:

$2003 \equiv 3 (\bmod 100)$. Suy ra:

$A = 2003^B \equiv 3^{20t+4} \equiv (3^{20})^t.3^4 \equiv 1.81 \equiv 81 (\bmod 100)$.

Vậy hai chữ số tận cùng của số A là 81.

Cách 2. Ta có $2004 \equiv 4 (\bmod 20)$, nên $B \equiv 4^{2005^{2013}} (\bmod 20)$. Với $k \in \mathbb{N}^*$ thì

$$4^{2k+1} - 4 = 4(4^{2k} - 1) = 4(16^k - 1) \vdots 20,$$

(vì $16^k - 1$ có tận cùng là 5). Do đó $B \equiv 4^{2k+1} \equiv 4 (\bmod 20)$. Vậy $B = 20t + 4, (t \in \mathbb{N}^*)$ (1).

Lại có $2003 \equiv 3 (\bmod 100)$, suy ra:

$A = 2003^B \equiv 3^{20t+4} \equiv (3^{20})^t.3^4 \equiv 1.81 \equiv 81 (\bmod 100)$.

Vậy hai chữ số tận cùng của số A là 81.

Bài 1.4. a) *Tìm hai chữ số cuối cùng của số*

$$A = 41^{106} + 57^{2022}.$$

b) *Tìm hai chữ số cuối cùng của số* 9^{9^9}.

Lời giải. a) Có $41^2 \equiv 81 (\bmod 100)$

$\Rightarrow 41^4 \equiv 81^2 (\bmod 100) \equiv 61 (\bmod 100)$

$\Rightarrow 41^5 \equiv 61.41 (\bmod 100) \equiv 1 (\bmod 100)$

$\Rightarrow (41^5)^{21} = 41^{105} \equiv 1 (\bmod 100) \Rightarrow 41^{106} \equiv 41 (\bmod 100)$.

Ta có: $57^4 \equiv 1 (\bmod 100)$

$\Rightarrow 57^{2022} = (57^4)^{505}.57^2 \equiv 1.49 \equiv 49 (\bmod 100)$.

Suy ra $A = 41^{106} + 57^{2022} \equiv 41 + 49 (\bmod 100)$.

Vậy hai chữ số cuối cùng của A là 90.

b) Ta có: $9^{10} \equiv 1 (\bmod 100)$

$\Rightarrow 9^{9^9} = 9^{387420489} = 9^{38742048.10+9}$. Suy ra:

$9^{9^9} = (9^{10})^{38742048}.9^9 \equiv 1.9^9 \equiv 387420489 \equiv 89 (\bmod 100)$

Vậy hai chữ số cuối cùng của số 9^{9^9} là 89.

Bài 1.5. a) *Tìm hai chữ số cuối cùng của số* $N = 2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001}$.

b) *Tìm hai chữ số cuối cùng của các số:* 2^{999}, 3^{999}.

Lời giải. a) Ta có: $N = 2^{1999}(1 + 2 + 2^2)$

$= 7.2^9.2^{10}.2^{1980} = 7.2^9.2^{10}.(2^{20})^{99}$.

Ta có: $2^9 \equiv 12 \pmod{100}$; $2^{10} \equiv 24 \pmod{100}$

$\Rightarrow 2^{20} = \left(2^{10}\right)^2 \equiv 24^2 \pmod{100} \equiv 76 \pmod{100}$.

Ta có: $76^n \equiv 76 \pmod{100}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do đó: $N = 7.2^9.2^{10}.\left(2^{20}\right)^{99} \equiv 7.12.24.76 \pmod{100}$

$\Rightarrow N \equiv 16 \pmod{100}$. Vậy số $N = 2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001}$ có hai chữ số tận cùng là 16.

b) • Ta có: $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}$

$\Rightarrow 2^{1000} = \left(2^{10}\right)^{100} \equiv (-1)^{100} \equiv 1 \pmod{25}$

Do đó 2 chữ số cuối cùng của 2^{1000} có thể là: 01; 26; 51; 76. Do 2^{1000} chia hết cho 4, nên hai chữ số cuối cùng 2^{1000} là 76. Chia số này cho 2 thì hai chữ số cuối cùng là 38 ($76:2=38$) hoặc 88 ($176:2=88$). Lại có $2^{1000}:2 = 2^{999}$ chia hết cho 4, nên hai chữ số cuối cùng của 2^{999} là 88.

• Ta có: $3^4 = 81 \equiv -19 \pmod{100}$

$\Rightarrow 3^8 \equiv (-19)^2 \equiv 61 \pmod{100}$. Suy ra:

$3^{10} \equiv 61.9 \equiv 49 \pmod{100} \Rightarrow 3^{100} \equiv 49^{10} \pmod{100}$.

Ta có: $49^2 \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow 3^{100} \equiv 49^{10} \equiv 1 \pmod{100}$

Do đó $3^{1000} \equiv 1^{10} \equiv 1 \pmod{100}$.

Vậy hai chữ số tận cùng của 3^{1000} là 01. Số 3^{1000} là bội của 3, nên chữ số hàng trăm của nó khi chia cho 3 phải cho số dư là 2 (chia tiếp thì số 201 chia hết cho 3, nếu số dư là 0 hay 1 thì số 001, 101 không chia hết cho 3).

Vậy số $3^{999} = 3^{1000}:3$ có 2 chữ số tận cùng là 67 (vì $201:3 \equiv 501:3 \equiv 801:3 \equiv 67 \pmod{100}$).

Nhận xét. Trong phần b) tìm được $2^{1000} \equiv 01 \pmod{25}$, từ đó tìm hai chữ số cuối cùng của số 2^{1000}, 2^{999}. Tương tự tìm được $3^{100} \equiv 01 \pmod{100}$, từ đó tìm được hai chữ số tận cùng của 3^{999}.

Bài 1.6. a) *Tìm 3 chữ số cuối cùng của số* $A = 11^{2011^{2014}}$.

b) *Tìm 3 chữ số cuối cùng của số* $B = 2^{9^{2020}}$.

Lời giải. a) Ta có: $11^1 \equiv 11 \pmod{1000}$,

$11^2 \equiv 121 \pmod{1000}$, $11^3 = 331 \pmod{1000}$,

$11^4 = 641 \pmod{1000}$, $11^5 \equiv 51 \pmod{1000}$,

$11^6 \equiv 561 \pmod{1000}$, $11^7 \equiv 171 \pmod{1000}$

$11^8 \equiv 881 \pmod{1000}$, $11^9 \equiv 691 \pmod{1000}$,

$11^{10} \equiv 601 \pmod{1000}$, $11^{20} \equiv 201 \pmod{1000}$

$\Rightarrow 11^{50} \equiv \left(11^{20}\right)^2.11^{10} \equiv 1 \pmod{1000}$ (1).

Xét $2011^1 \equiv 11 \pmod{50}$, $2011^2 \equiv 21 \pmod{50}$,

$2011^3 \equiv 31 \pmod{50}$, $2011^4 \equiv 41 \pmod{50}$,

$2011^5 \equiv 1 \pmod{50}$, $2011^{2014} \equiv \left(2011^5\right)^{402}.2011^4$

$\equiv 1.41 \pmod{50} \Rightarrow 2011^{2014} = 50k + 41 (k \in \mathbb{N})$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$A = 11^{2011^{2014}} = 11^{50k+41} = \left(11^{50}\right)^k.11^{40}.11.$$

$$\equiv 1.201^2.11 \pmod{1000} \equiv 411 \pmod{1000}.$$

Vậy ba chữ số cuối của $A = 11^{2011^{2014}}$ là 411.

b) Ta có: $2^9 = 2^{9^1} \equiv 512 \pmod{1000}$;

$2^{9^2} = 2^{9.9} = \left(2^9\right)^9 \equiv 512^9 \equiv \left(512^3\right)^3 \equiv 352 \pmod{1000}$;

$2^{9^3} = 2^{9^2.9} = \left(2^{9^2}\right)^9 \equiv 352^9 \equiv \left(352^3\right)^3 \equiv 912 \pmod{1000}$;

$2^{9^4} = 2^{9^3.9} = \left(2^{9^3}\right)^9 \equiv 912^9 \equiv 952 \pmod{1000}$;

$2^{9^5} = \left(2^{9^4}\right)^9 \equiv 952^9 \equiv 312 \pmod{1000}$;

$2^{9^6} = \left(2^{9^5}\right)^9 \equiv 312^9 \equiv 552 \pmod{1000}$;

$2^{9^7} = \left(2^{9^6}\right)^9 \equiv 552^9 \equiv 712 \pmod{1000}$;

$2^{9^8} = \left(2^{9^7}\right)^9 \equiv 712^9 \equiv 152 \pmod{1000}$;

$2^{9^9} = \left(2^{9^8}\right)^9 \equiv 152^9 \equiv 112 \pmod{1000}$;

$2^{9^{10}} = \left(2^{9^9}\right)^9 \equiv 112^9 \equiv 752 \pmod{1000}$;

$2^{9^{11}} = \left(2^{9^{10}}\right)^9 \equiv 752^9 \equiv 512 \pmod{1000}$.

Do đó chu kỳ lặp lại là 10. Vậy $B = 2^{9^{2020}}$ có ba chữ số cuối cùng là: 752.

Nhận xét. Trong phần a) ta tính được $11^{50} \equiv 1 \pmod{1000}$ và $2011^{2014} = 50k + 41 (k \in \mathbb{N})$. Từ đó tìm được ba chữ số cuối cùng. Trong phần b) ta tính đồng dư của 2^{9^n} theo mod 1000, với n lần lượt các giá trị 1; 2; 3; ...; 11. Khi đó chu kì

giá trị dư lặp lại là 10. Từ đó tìm được ba chữ số cuối cùng của số đã cho.

Bài 1.7. *Tìm chữ số hàng trăm của số* $A = 29^{2016}$.

Lời giải. Ta có: $29^2 \equiv 841 \pmod{1000}$,

$29^3 \equiv 389 \pmod{1000}$, $29^4 \equiv 281 \pmod{1000}$,

$29^5 \equiv 149 \pmod{1000}$, $29^6 \equiv 321 \pmod{1000}$,

$29^7 \equiv 309 \pmod{1000}$, $29^8 \equiv 961 \pmod{1000}$,

$29^9 \equiv 869 \pmod{1000}$, $29^{10} \equiv 201 \pmod{1000}$,

$29^{20} \equiv 401 \pmod{1000}$, $29^{30} \equiv 601 \pmod{1000}$,

$29^{40} \equiv 801 \pmod{1000}$, $29^{40}.29^{10} \equiv 801.201 \pmod{1000}$

$\Rightarrow 29^{50} \equiv 1 \pmod{1000}$. Do $2016 = 40.50 + 16$

nên $A = 29^{2016} = 29^{40.50+16} = \left(29^{50}\right)^{40}.29^{16}$

$\equiv 1.29^{10+6} \equiv 29^{10}.29^6 \equiv 201.301 \equiv 521 \pmod{1000}$.

Vậy chữ số hàng trăm của A là 5.

Bài 1.8. *Tìm 5 chữ số cuối cùng của số*

$$F_{24} = 2^{2^{24}} + 1.$$

Lời giải. Ta tìm số dư của $F_{24} = 2^{2^{24}} + 1$ cho 100000. Vì $2^{2^{n+1}} = 2^{2^n.2} = 2^{2^n}.2^{2^n}$ nên nếu $2^{2^n} \equiv a \pmod{c}$ thì $2^{2^{n+1}} \equiv a^2 \pmod{c}$.

Tính đồng dư của 2^{2^n} theo mod 100000 như sau:

$2^{2^1} \equiv 4$; $2^{2^2} \equiv 16$; $2^{2^3} \equiv 256$; $2^{2^4} \equiv 65536$;

$2^{2^5} \equiv 67296$; $2^{2^6} \equiv 51616$; $2^{2^7} \equiv 11456$;

$2^{2^8} \equiv 39936$; $2^{2^9} \equiv 84096$; $2^{2^{10}} \equiv 37216$;

$2^{2^{11}} \equiv 30656$; $2^{2^{12}} \equiv 90336$; $2^{2^{13}} \equiv 92896$;

$2^{2^{14}} \equiv 66816$; $2^{2^{15}} \equiv 77856$; $2^{2^{16}} \equiv 56736$;

$2^{2^{17}} \equiv 73696$; $2^{2^{18}} \equiv 416$; $2^{2^{19}} \equiv 73056$;

$2^{2^{20}} \equiv 79136$; $2^{2^{21}} \equiv 6496$; $2^{2^{22}} \equiv 98016$;

$2^{2^{23}} \equiv 36256$; $2^{2^{24}} \equiv 97536$.

Vậy $F_{24} = 2^{2^{24}} + 1 \equiv 97536 + 1 \pmod{100000}$.

Vậy năm chữ số cuối cùng của số $F_{24} = 2^{2^{24}} + 1$ là 97537.

Bài 1.9. *Tìm 12 chữ số tận cùng của số tự nhiên* 5^{1040}.

Lời giải. Ta có: $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.

Ta có số 1024 là số tự nhiên lớn nhất không vượt quá 1040 mà viết được dưới dạng lũy thừa 2, (vì $1024 = 2^{10}$). Xét

$$A = 5^{1040} - 5^{16} = 5^{16}.\left(5^{1024} - 1\right) = 5^{16}.\left[\left(5^{512}\right)^2 - 1\right],$$

nên $A \vdots 5^{12}$ (1).

$$A = 5^{16}.\left(5^{512}+1\right)\left(5^{256}+1\right)\left(5^{128}+1\right)\ldots$$
$$\left(5^{16}+1\right)\left(5^{8}+1\right)\left(5^{4}+1\right)\left(5^{2}+1\right)\left(5^{2}-1\right).$$

Với $n \in \mathbb{N}$ thì 5^n là số tự nhiên lẻ. Do đó $\left(5^n+1\right) \vdots 2$. Suy ra: $\left(5^{512}+1\right)\left(5^{256}+1\right)\left(5^{128}+1\right)\ldots$ $\left(5^{16}+1\right)\left(5^{8}+1\right)\left(5^{4}+1\right)\left(5^{2}+1\right)$ chia hết cho 2^9.

Lại có $\left(5^2-1\right) \vdots 2^3$. Do đó $A \vdots 2^{12}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\left(5^{1040} - 5^{16}\right) \vdots 10^{12}$. Vậy 5^{1040} và 5^{16} có 12 chữ số tận cùng giống nhau. Ta tính được $5^{14} = 6103515625$, $5^{16} = 152587890625$.

Vậy 5^{1040} có 12 chữ số tận cùng là 152587890625.

Nhận xét. Từ $1024 = 2^{10}$, số mũ $1040 - 1024 = 16$ nên ta xét hiệu $A = 5^{1040} - 5^{16}$. Từ đó chứng minh được 5^{1040} và 5^{16} có 12 chữ số tận cùng giống nhau. Tương tự tìm được 12 chữ số tận cùng của số tự nhiên 5^{1038}; 5^{1039}; 5^{1041}; 5^{1042}; 5^{1043};...

Bài 1.10. *Số* $A = 2^{100}$ *có bao nhiêu chữ số? Tìm chữ số đầu tiên bên trái của số đó.*

Lời giải. Ta có $2^{10} = 1024 > 10^3 \Rightarrow 2^{100} > 10^{30}$ (1).

Lại có: $2^{10} = 1024 < 1025$. Suy ra:

$$\frac{2^{100}}{10^{30}} = \left(\frac{2^{10}}{10^3}\right)^{10} < \left(\frac{1025}{1000}\right)^{10} = \left(\frac{41}{40}\right)^{10}.$$

Ta có: *Nếu* $0 < b < a$ *thì* $ab + b < ab + a$

$$\Leftrightarrow b(a+1) < a(b+1) \Leftrightarrow \frac{a+1}{b+1} < \frac{a}{b}.$$

Sử dụng bất đẳng thức trên, ta có:

$$\frac{41}{40} < \frac{40}{39} < \frac{39}{38} < \ldots < \frac{32}{31} < \frac{31}{30}.$$

Do đó: $\frac{2^{100}}{10^{30}} < \left(\frac{41}{40}\right)^{10} < \frac{40}{39}.\frac{39}{38}.\frac{38}{37}....\frac{32}{31}.\frac{31}{30} = \frac{4}{3} < 2.$

Suy ra: $2^{100} < 2.10^{30}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra: $10^{30} < 2^{100} < 2.10^{30}$. Vậy $A = 2^{100}$ có 31 chữ số và chữ số đầu tiên bên trái là số 1.

Nhận xét. Ta giải bài toán dựa vào tính chất:

$$\textit{Nếu } 0 < b < a \textit{ thì } \frac{a+1}{b+1} < \frac{a}{b}.$$

Từ đó suy ra: $10^{30} < 2^{100} < 2.10^{30}$.

Bài 1.11. *Tìm bốn chữ số đầu tiên bên trái của số*

$$A = 1 + 2^2 + 3^3 + ... + 1000^{1000}.$$

Lời giải. Ta có: $1000^{999} > 1000^{999} - 1$ (1).

$1000^{999} - 1 = (1000-1)(1000^{998} + ... + 1000 + 1)$

$= 999.(1000^{998} + ... + 1000 + 1)$. Suy ra:

$1000^{999} - 1 > 999^{999} + 998^{998} + ... + 2^2 + 1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$1000^{999} > 999^{999} + 998^{998} + ... + 2^2 + 1.$$

Do đó: $1000^{1000} + 1000^{999} >$

$> 1000^{1000} + 999^{999} + 998^{998} + ... + 2^2 + 1 = A$ (3).

Lại có $A > 1000^{1000}$ (4). Từ (3) và (4) suy ra:

$$1000^{1000} < A < 1000^{1000} + 1000^{999}$$

$\Rightarrow 1000.1000^{999} < A < 1001.1000^{999}$.

Ta có khi viết trong hệ thập phân, số 1000.1000^{999} bắt đầu bằng 1000 và tiếp theo là 2997 chữ số 0. Lại có số 1001.1000^{999} bắt đầu bằng số 1001 và theo là 2997 chữ số 0. Do đó bốn chữ số đầu tiên bên trái của số A lần lượt là 1, 0, 0, 0.

DẠNG 2. VẬN DỤNG CHỮ SỐ TẬN CÙNG ĐỂ TÌM CÁC SỐ TỰ NHIÊN

Bài 2.1. a) *Tìm số $\overline{abcd}$ biết rằng*

$$\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 4574.$$

b) *Tìm số $\overline{abcd}$ biết rằng $\overline{abc}.c = \overline{dac}$ (a, b, d khác nhau đôi một).*

Lời giải. a) Từ giả thiết ta có:

$$1000a + 200b + 30c + 4d = 4574 \quad (1).$$

Xét hàng đơn vị thấy tích $4d$ có tận cùng là 4. Suy ra $d \in \{1;6\}$.

+ Nếu $d = 1$ thay vào (1) ta có:

$$100a + 20b + 3c = 457 \quad (2).$$

Xét hàng đơn vị ta có $3c$ có tận cùng là 7. Do đó $c = 9$, thay vào (2) ta được $10a + 2b = 43$ (loại).

+ Nếu $d = 6$, thay vào (1) ta có:

$$100a + 20b + 3c = 455 \quad (3).$$

Xét hàng đơn vị ta có $3c$ có tận cùng là 5. Do đó $c = 5$, thay vào (3) ta được $10a + 2b = 44$ (4).

Tích $2b$ có tận cùng là 4, suy ra $b \in \{2;7\}$.

Với $b = 2$, suy ra $10a + 2.2 = 44 \Rightarrow a = 4$.

Với $b = 7$, suy ra $10.a + 2.7 = 44 \Rightarrow a = 3$.

Vậy $\overline{abcd} \in \{4256;3756\}$.

b) Từ giả thiết ta có:

$$100ac + 10bc + c^2 = 100d + 10a + c \quad (1).$$

Suy ra c^2 có tận cùng là c ($c \neq 0$) nên $c \in \{1;5;6\}$.

+ Nếu $c = 1$ thì $\overline{abc} = \overline{dac}$, không xảy ra vì a, b, d đôi một khác nhau.

+ Nếu $c = 5$, thay vào (1) ta có:

$$50a + 5b + 2 = 10d + a \quad (2).$$

Suy ra $50a + 5b + 2 = 10d + a < 100 \Rightarrow a = 1$.

Thay vào (2), ta có $50 + 5b + 1 = 10d$ (loại).

+ Nếu $c = 6$ thay vào (1) ta có:

$$60a + 6b + 3 = 10d + a \quad (3).$$

Suy ra $60a + 6b + 3 = 10d + a < 100 \Rightarrow a = 1$.

Thay vào (3), ta có:

$$60.1 + 6b + 3 = 10d + 1 \Rightarrow 6b + 62 = 10d \leq 90.$$

Do đó $6b < 30$ và $6b$ có tận cùng là 8. Suy ra $b = 3, d = 8$. Vậy số $\overline{abcd} = 1368$.

Bài 2.2. *Tìm số tự nhiên $N = \overline{abcd}$ thỏa mãn:*

+ $\overline{bc}.4$ có hai chữ số tận cùng bằng $\overline{cd}$.

+ $\overline{abcd} - \overline{bc}.4$ là số chính phương.

Lời giải. Từ giả thiết có:

$$\overline{abcd} - \overline{bc}.4 = n^2.100, (n \in \mathbb{N}^*) \quad (*).$$

$\Leftrightarrow a.1000+\overline{bc}.10+d-\overline{bc}.4=n^2.100$

$\Leftrightarrow 100.\left(n^2-10a\right)=6.\overline{bc}+d$ (1).

Do $0\le b,c,d\le 9$ nên $0<6.\overline{bc}+d<640$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $0<n^2-10a\le 6$.

Mà $0<a\le 9, a\in\mathbb{N}$ do đó chỉ có các cặp (a,n) là: $(1;4),(2;5),(3;6),(6;8),(8;9)$.

+ Với $a=1,n=4$ thay vào (1) suy ra: $100.6=6.\overline{bc}+d \Rightarrow d=6,\overline{bc}=99\Rightarrow N=1996$.

+ Với $a=2,n=5$ thay vào (1) suy ra: $100.5=6.\overline{bc}+d \Rightarrow 491\le 6.\overline{bc}\le 500\Rightarrow b=8$.

$\Rightarrow 500=480+6c+d\Rightarrow 6c+d=20$, d là số chẵn

$\Rightarrow (c,d)\in\{(2;8),(3;2)\}\Rightarrow N=2828;\ N=2832$.

+ Với $a=3,n=6$ thay vào (1) suy ra: $100.6=6.\overline{bc}+d \Rightarrow d=6,\overline{bc}=99\Rightarrow N=3996$.

+ Với $a=6,n=8$ thay vào (1) suy ra: $100.4=6.\overline{bc}+d \Rightarrow 391\le 6.\overline{bc}\le 400\Rightarrow b=6$.

$\Rightarrow c=6,d=4\Rightarrow N=6664$.

+ Với $a=8,n=9$ thay vào (1) suy ra: $100.1=6.\overline{bc}+d \Rightarrow 91\le 6.\overline{bc}\le 100\Rightarrow b=1$

$\Rightarrow c=6,d=4\Rightarrow N=8164$.

Vậy các số $N=\overline{abcd}$ là:

1996; 2828; 2832; 3996; 6664; 8164.

Thử lại thấy rằng cả 6 số trên đều là số cần tìm.

Bài 2.3. *Tìm số tự nhiên có 4 chữ số $N=\overline{abcd}$ sao cho:*

+ $\overline{ab},\overline{ad}$ là hai số nguyên tố.

+ $\overline{db}+c=b^2+d$.

Lời giải. Do $\overline{ab},\overline{ad}$ là số nguyên tố, nên b,d là các số lẻ khác 5 (1). Từ đề bài ta có:

$$10d+b+c=b^2+d\Leftrightarrow 9d+c=b(b-1).$$

Ta có: $9d+c\ge 9\Rightarrow b(b-1)\ge 9\Rightarrow b>3$, mà b lẻ khác 5, nên $b\in\{7;9\}$.

+ Với $b=7$ thì $9d+c=42\Rightarrow 3<d<5$, trái với (1).

+ Với $b=9$ thì $9d+c=72\Rightarrow 7\le d\le 8$, mà d lẻ, nên $d=7$. Suy ra $9.7+c=72\Rightarrow c=9$.

Do đó $\overline{a9}$ là số nguyên tố, nên $a\in\{1;2;5;7;8\}$.

Có $\overline{a7}$ là số nguyên tố, nên $a\in\{1;3;4;6;9\}$.

Suy ra $a=1$ và số $N=\overline{abcd}=1997$. Thử lại, ta có đó là số cần tìm.

Bài 2.4. *Tìm các số nguyên tố có 3 chữ số sao cho nếu ta thay đổi vị trí của các chữ số theo thứ tự bất kỳ ta vẫn có các số là những số nguyên tố.*

Lời giải. Gọi số cần tìm là

$$\overline{abc},\ 1\le a,b,c\le 9, a,b,c\in\mathbb{N}.$$

Theo đề bài các số $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$ đều là số nguyên tố. Suy ra a,b,c đều là số lẻ khác 5. Suy ra $a,b,c\in\{1;3;7;9\}$. Do đó có các bộ (a,b,c) là: $(1;1;3),(1;1;7),(1;1;9),(3;3;1)$, $(3;3;7),(3;3;9),(7;7;1),(7;7;3),(7;7;9),(9;9;1)$, $(9;9;3),(9;9;7),(1;3;7),(1;3;9),(1;7;9),(3;7;9)$.

Bằng phép thử (sử dụng các dấu hiệu chia hết cho 3; 7; 11; 13) ta có: $117\vdots 3$, $119\vdots 7$, $133\vdots 7$, $339\vdots 3$, $177\vdots 3$, $377\vdots 13$, $779\vdots 19$, $993\vdots 3$, $799\vdots 17$, $371\vdots 7$, $319\vdots 11$, $791\vdots 7$, $793\vdots 13$.

Các bộ $(1;1;3),(3;3;7),(9;9;1)$ thoả mãn, ta có các số cần tìm là:

113; 131; 311; 337; 373; 733; 991; 919; 199.

Nhận xét. Dựa vào tính chất số nguyên tố (lớn hơn 10) chỉ có tận cùng là 1; 3; 7; 9, từ đó ta tìm được các số đã cho bằng cách thử lại.

Bài 2.5. *Tìm số tự nhiên có 4 chữ số thoả mãn các tính chất sau:*

+ Tổng các chữ số của số đó bằng 26.

+ Ba chữ số cuối có dạng $\overline{aba}$ và là số nguyên tố.

Lời giải. Gọi số cần tìm là: $N=\overline{xaba}$, $0\le x,a,b\le 9;\ x,a\ne 0$. Ta có: $x+2a+b=26$ $\Rightarrow 9+2a+9\ge x+2a+b=26$.

Suy ra: $2a \geq 8 \Rightarrow a \geq 4 \Rightarrow a \in \{7;9\}$ (vì $\overline{aba}$ là số nguyên tố).

* Nếu $a=7$ thì $14+x+b=26 \Rightarrow x+b=12$.

Suy ra:

$(b,x) \in \{(3;9),(4;8),(5;7),(6;6),(7;5),(8;4),(9;3)\}$.

Các số $\overline{aba} \in \{737;747;757;767;777;787;797\}$.

Để $\overline{aba}$ là số nguyên tố thì $\overline{aba} \in \{757;787;797\}$

Các số cần tìm là: $7757;4787;3797$.

* Nếu $a=9$ thì $18+x+b=26 \Rightarrow x+b=8$. Suy ra:

$(b;x) \in \{(0;8),(1;7),(2;6),(3;5),(4;4),(5;3),(6;2),(7;1)\}$

Các số $\overline{aba} \in \{909;919;929;949;959;969;979\}$.

Để $\overline{aba}$ là số nguyên tố thì $\overline{aba} \in \{919;929\}$.

Các số cần tìm là: $7919;6929$. Vậy các số cần tìm là: $7757;4787;3797;7919;6929$.

Bài 2.6. *Tìm các chữ số a,b,c,d khác 0 và từng đôi một khác nhau sao cho số tự nhiên $\overline{abcda1}$ (chữ số tận cùng là 1) thỏa mãn $\overline{abcda1}-4n=n^2$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.*

Lời giải. Ta có: $\overline{abcda1}-4n=n^2$

$\Leftrightarrow \overline{abcda1}+4=n^2+4n+4 \Leftrightarrow \overline{abcda5}=(n+2)^2$.

Suy ra $\overline{abcda5}$ là số chính phương có chữ số tận cùng là 5, nên $\overline{abcda5}$ là số chính phương có hai chữ số tận cùng là 25 và $n+2$ có chữ số tận cùng là 5. Do đó $a=2$, suy ra $\overline{2bcd25}=(n+2)^2$.

Suy ra: $213425 \leq (n+2)^2 \leq 298725$

$\Rightarrow 465 \leq n+2 \leq 545 \Rightarrow n+2 \in \{465;475;485;...;545\}$.

Thử lại ta thấy $n+2=525$ (thỏa mãn a,b,c,d khác 0 và từng đôi một khác nhau).

Khi đó $\overline{abcda5}=525^2=275625$.

Vậy $a=2,b=7,c=5,d=6$.

Nhận xét. Dựa vào số chính phương có chữ số tận cùng là 5 thì số đó có hai chữ số tận cùng là 25.

Bài 2.7. a) *Tìm số chẵn lớn nhất có 5 chữ số mà 3 chữ số đầu (giữ nguyên thứ tự từ trái sang phải) tạo thành số chính phương và 3 chữ số cuối tạo thành lập phương đúng.*

b) *Tìm số tự nhiên nhỏ nhất mà lập phương số đó có 4 chữ số cuối cùng bên phải đều là chữ số 3.*

Lời giải. a) Gọi số cần tìm là $A=\overline{abcde}$, với $\overline{abc}=x^2$, $\overline{cde}=y^3$; $x,y \in \mathbb{N}^*$. Do A là số chẵn $\Rightarrow e$ là số chẵn $\Rightarrow y$ là số chẵn.

Ta có: $100 \leq \overline{cde}=y^3 \leq 999 \Rightarrow 5 \leq y \leq 9$. Do y là số chẵn $\Rightarrow y \in \{6;8\}$.

* Nếu $y=6 \Rightarrow y^3=6^3=216 \Rightarrow \overline{cde}=216 \Rightarrow c=2$.

Từ $\overline{abc}=x^2 \Rightarrow c$ chỉ có tận cùng là $\{0;1;4;5;6;9\}$. Do đó $c=2$ (loại).

* Nếu $y=8 \Rightarrow y^3=8^3=512 \Rightarrow \overline{cde}=512 \Rightarrow c=5$.

Suy ra $\overline{ab5}=x^2$. Suy ra $\overline{ab5}=15^2=225$ hoặc $\overline{ab5}=25^2=625$, (còn $\overline{ab5} \geq 35^2>1000$).

* Vì A là số lớn nhất $\Rightarrow A=62512$.

b) Gọi số cần tìm là x. Ta có: $x^3=\overline{....3333}$ nên x có tận cùng là 7. Xét các số: $07^3,17^3,27^3,....97^3$. Trong các số này số có 2 chữ số tận cùng 33, ta chọn được số 77^3. Xét các số $077^3,177^3,277^3,....977^3$. Trong các số này số có 3 chữ số tận cùng 333, ta chọn được số 477^3.

Xét các số $0477^3,1477^3,2477^3,....9477^3$.

Trong các số trên số có 4 chữ số tận cùng 3333. Chọn được số 6477^3.

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất cần tìm 6477.

DẠNG 3. VẬN DỤNG TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN.

Bài 3.1. *Cho n điểm $(n>2)$ trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Cứ qua hai điểm ta vẽ được một đường thẳng. Số đường thẳng vẽ được có thể là 2022 được không? Vì sao?*

Lời giải. Với n điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng ta có mỗi điểm nối được với

$(n-1)$ điểm còn lại tạo thành $(n-1)$ đường thẳng. Để ý rằng mỗi đường thẳng được liệt kê 2 lần nên số đường thẳng vẽ được là $\frac{n(n-1)}{2}$. Giả sử số đường thẳng vẽ được là 2022, suy ra $\frac{n(n-1)}{2}=2022 \Rightarrow n(n-1)=4044$. Do tích của hai số tự nhiên liên tiếp là số có chữ số tận cùng là: 0; 2; 6, nên 4044 không là tích của hai số tự nhiên liên tiếp. Vậy số đường thẳng vẽ được không thể là 2022.

Bài 3.2. *Có thể tìm được số tự nhiên n thỏa mãn đẳng thức sau không?*

$$1+2+3+....+n=2^{66}.$$

Lời giải. Giả sử tìm được số tự nhiên n thỏa mãn:

$$1+2+3+....+n=2^{66}$$

$\Rightarrow \frac{(n+1).n}{2}=2^{66} \Leftrightarrow n(n+1)=2^{67}$ (*). Ta có tích của 2 số tự nhiên liên tiếp chỉ có tận cùng là: 0; 2; 6. Do đó tích $n(n+1)$ có tận cùng là: 0; 2; 6.

Suy ra: $2^{67}=(2^4)^{16}.2^3 \equiv 6^{16}.8 \equiv 6.8 \equiv 8 \pmod{10}$

hay 2^{67} có tận cùng là 8.

Vậy điều (*) không xảy ra. Do đó không thể tìm được số tự nhiên n thỏa mãn đề bài.

Bài 3.3. *Cho số A có 1997 chữ số trong đó có 1996 số 5 và một chữ số khác 5. Hỏi A có thể là số chính phương không? Tại sao?*

Lời giải. Gọi a là chữ số khác 5 của A, ta có tổng các chữ số của A là:

$$1996.5+a=9980+a \equiv 8+a \pmod 9.$$

Suy ra $A \equiv 8+a \pmod 9$ (1).

Nếu A là số chính phương thì $A \equiv 0;1;4;7 \pmod 9$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $a \in \{1;2;5;8\}$, mà $a \neq 5 \Rightarrow a \in \{1;2;8\}$.

+ Xét A có chữ số tận cùng là a.

Do A là số chính phương, nên a không thể có tận cùng là 2; 8. Suy ra a có tận cùng là 1.

Do đó A có dạng: $(10m+1)^2=100m^2+20m+1$.

Suy ra chữ số hàng chục của A là số chẵn khác 5, nên trường hợp này không xảy ra.

+ Xét A có chữ số tận cùng khác a ($a \neq 5$), nên A có chữ số tận cùng là 5. Do đó A có dạng: $(10m+5)^2=100m^2+100m+25=100m(m+1)+25$.

Suy ra $a=2$ và chữ số hàng trăm của A là số chẵn (vì $m(m+1)$ là số chẵn). Chữ số hàng trăm khác 5, (mâu thuẫn với giả thiết).

Vậy trong mọi trường hợp A không là số chính phương.

Nhận xét. Lời giải trên dựa vào các tính chất: *Tổng các chữ số của một số tự nhiên và số đó chia cho 9 cùng số dư, một số chính phương chia cho 9 nhận giá trị dư là* $0;1;4;7$. Từ đó ta tìm được giá trị của số a.

Bài 3.4. *Tìm giá trị nhỏ nhất của $n \in \mathbb{N}$ sao cho số n^2+n+1 phân tích thành tích 4 số nguyên tố.*

Lời giải. Giả sử $n^2+n+1=p_1p_2p_3p_4$, với $p_1; p_2; p_3; p_4$ là các số nguyên tố và $p_1 \le p_2 \le p_3 \le p_4$. Để tìm n nhỏ nhất ta tìm $p_1; p_2; p_3; p_4$ là các số nhỏ nhất.

Ta có $n^2+n+1=n(n+1)+1$ là số lẻ, nên $p_1; p_2; p_3; p_4$ là các số nguyên tố lẻ. Suy ra $p_1 \ge 3$. Lại có $n(n+1)$ có tận cùng là: 0; 2: 6. Suy ra $n^2+n+1=n(n+1)+1$ có tận cùng là: 1; 3; 7. Suy ra n^2+n+1 không chia hết cho 5.

Do đó $p_1; p_2; p_3; p_4$ khác 5.

+ Với $p_1=3$, ta có: $n^2+n+1=3p_2p_3p_4$

$\Rightarrow (n^2+n+1) \vdots 3$. Suy ra $n=3k+1, (k \in \mathbb{N})$.

Do đó: $(3k+1)^2+3k+1+1=3p_2p_3p_4$

$\Rightarrow 3k^2+3k+1=p_2p_3p_4$. Ta có $3k^2+3k+1$ không chia hết cho 3. Suy ra $p_2 \ge 7$.

Với $p_2=7$, ta có $3k^2+3k+1=7p_3p_4$.

Suy ra $(3k^2+3k+1) \vdots 7$. Do đó $k=7t+1$ hoặc $k=7t+5, t \in \mathbb{N}$. Vì n bé nhất, nên chọn $k=7t+1$.

Với $k=7t+1$ thì: $3(7t+1)^2+3(7t+1)+1=7p_3p_4$

$\Leftrightarrow 21t^2+9t+1=p_3p_4$. Ta chọn $p_3=p_2=7$. Khi đó: $21t^2+9t+1=7p_4 \Rightarrow (21t^2+9t+1)\vdots 7$

$\Rightarrow (9t+1)\vdots 7$. Suy ra $t=7m+3, m\in\mathbb{N}$. Vậy

$$n=3k+1=3(7t+1)+1=3.[7(7m+3)+1]+1$$
$$=147m+67.$$

Do tìm n bé nhất, nên chọn $n=67$. Với $n=67$, ta có: $n^2+n+1=67^2+67+1=3.7.7.31$.

Vậy $n=67$ thỏa mãn điều kiện của đề bài.

Bài 3.5. *Cho x, y là các số tự nhiên khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|36^x-5^y|$.*

Lời giải. Ta có 36^x luôn có tận cùng là 6, còn 5^y luôn có chữ số tận cùng bằng 5. Do đó nếu $36^x>5^y$ thì 36^x-5^y có chữ số tận cùng là 1, nếu $36^x<5^y$ thì 5^y-36^x có chữ số tận cùng là 9.

Với $x=1, y=2$ thì $A=|36-5^2|=11$. Do tìm giá trị nhỏ nhất của A ta chỉ còn xét A có thể lấy giá trị bằng 1 hoặc 9 hay không!

+ Xét $36^x-5^y=1$, suy ra $36^x-1=5^y$ (1).

Ta có: $36^x-1\vdots(36-1)\Rightarrow 36^x-1\vdots 35$. Suy ra 36^x-1 chia hết cho 7, mà 5^y không chia hết cho 7. Do đó (1) không xảy ra, nên không tồn tại x, y.

+ Xét $5^y-36^x=9$, suy ra $36^x+9=5^y$ (2).

Ta có $36^x+9\vdots 3$, mà 5^y không chia hết cho 3. Do đó (2) không xảy ra, nên không tồn tại x, y.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 11, khi $x=1, y=2$.

Nhận xét. Dựa vào chữ số tận cùng của 36^x và 5^y, khi đó tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thứ A.

Bài 3.6. *Tìm độ dài cạnh hình vuông là số nguyên. Biết rằng diện tích của hình vuông là số nguyên có 4 chữ số, trong đó các chữ số hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm giống nhau.*

Lời giải. Gọi cạnh hình vuông là $x, (x\in\mathbb{N}^*)$.

Theo đề bài có

$$x^2=\overline{accc}, (a\neq 0, 0\le a,c\le 9, a,c\in\mathbb{N}).$$

Số chính phương có tận cùng là c, nên

$$c\in\{0;1;4;6;9\} \text{ (1).}$$

+ Nếu c là số lẻ thì x là số lẻ, nên

$$\overline{accc}=x^2=(2k+1)^2=4k(k+1)+1,\ k\in\mathbb{N}^*.$$

Từ $x^2=\overline{accc}=100.\overline{ac}+\overline{cc}=100.\overline{ac}+11c$

$$=100.\overline{ac}+8c+3c$$

suy ra số này chia cho 4 dư 1, do đó $3c$ chia cho 4 dư 1. Suy ra c chia cho 4 dư 3, nên $c\in\{3;7\}$, không thỏa mãn (1).

+ Nếu c là số chẵn thì x là số chẵn, nên $\overline{accc}=x^2=(2k)^2=4k^2$.

Do đó $x^2=100.\overline{ac}+8c+3c$ chia hết cho 4, do đó $3c$ chia hết cho 4. Suy ra $c\in\{0;4\}$, c không thể là 8 do (1). Với $c=0$ thì $x^2=\overline{a000}=10^2.2.5.a$, không có chữ số a nào thỏa mãn.

Với $c=4$ thì $x^2=\overline{a444}$. Nếu x chia hết cho 3 thì x^2 chia hết cho 9. Suy ra:

$$(a+4+4+4)\vdots 9 \Leftrightarrow (a+12)\vdots 9.$$

Suy ra $a=6$, nhưng số $6444=6^2.179$ không là số chính phương.

Nếu x không chia hết cho 3 thì x^2 chia cho 3 dư 1, $a+12$ chia cho 3 dư 1. Suy ra $a\in\{1;4;7\}$. Các số 4444; 7444 không là số chính phương.

Còn số $1444=38^2$ là số chính phương. Vậy cạnh hình vuông là 38 (đơn vị dài).

Nhận xét. Dựa vào số chính phương có tận cùng là $0;1;4;6;9$. Kết hợp với dấu hiệu chia hết để tìm số đã cho.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ

1. a) Cho $A=1+2^2+3^3+...+2021^{2021}$. Tìm chữ số tận cùng của A.

b) Cho $B=1^{2015}+2^{2015}+3^{2015}+....+2014^{2015}+2015^{2015}$. Tìm chữ số tận cùng của B.

(Xem tiếp trang 20)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH QUẢNG NGÃI

NĂM HỌC 2022-2023

Bài 1. 1) *Tìm số nguyên tố p sao cho* $p+10$ *và* $p+14$ *là các số nguyên tố.*

2) *Tìm tất cả các nghiệm nguyên* x, y *của phương trình* $x^2+xy-2x-3y-4=0$.

3) *Cho ba số* $a,b,c \in \mathbb{Z}$ *thoả mãn* $a+b+c=2022^{2023}$. *Chứng minh* $a^3+b^3+c^3$ *chia hết cho 6.*

Lời giải. 1) • Với $p = 2$ thì $p + 10 = 12$ là hợp số.

• Với $p = 3$ thì $p + 10 = 13$ và $p + 14 = 17$ là các số nguyên tố.

• Với $p > 3$ mà p là số nguyên tố nên p có dạng:

$p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

- Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 14 = 3(k + 5) \vdots 3$ là hợp số.

- Nếu $p = 3k + 2$ thì $p + 10 = 3(k + 4) \vdots 3$ là hợp số.

Vậy $p = 3$ thì $p + 10$ và $p + 14$ là các số nguyên tố.

2) Ta có : $x^2+xy-2x-3y-4=0$.

$$\Leftrightarrow x^2-3x+xy-3y+x-3=1$$

$$\Leftrightarrow x(x-3)+y(x-3)+x-3=1$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+y+1)=1.$$

Ta có các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} x-3=1 \\ x+y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-4 \end{cases}$.

TH2: $\begin{cases} x-3=-1 \\ x+y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$.

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là

$$(x;y) \in \{(4;-4),(2;-4)\}.$$

3) Ta có:

$$a^3+b^3+c^3=(a^3-a)+(b^3-b)+(c^3-c)+(a+b+c);$$

$$a^3-a=(a-1)a(a+1) \vdots 6$$

(tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6).

Tương tự: $b^3-b \vdots 6$, $c^3-c \vdots 6$

và có: $2022 \vdots 6 \Rightarrow a+b+c=2022^{2023} \vdots 6$.

Vậy $a^3+b^3+c^3 \vdots 6$.

Bài 2. 1) *Cho biểu thức:*

$$M=\left(1-\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}+x+1}\right),$$

với $x \geq 0$.

Rút gọn biểu thức M và tính giá trị của biểu thức M khi $x=2023-2\sqrt{2022}$..

2) *Cho ba số dương* x, y, z *thoả mãn*

$$x+y+z=1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}.$$

Lời giải. 1) Với điều kiện $x \geq 0$, ta có:

$$M=\left(1-\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}+x+1}\right)$$

$$=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+1}:\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}}{(x+1)(1+\sqrt{x})}\right)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x+1}:\frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x+1)(1+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2(x+1)(1+\sqrt{x})}{(x+1)(\sqrt{x}-1)^2}=1+\sqrt{x}.$$

Khi $x=2023-2\sqrt{2022}=(\sqrt{2022}-1)^2$ thì

$$M=1+\sqrt{(\sqrt{2022}-1)^2}=\sqrt{2022}.$$

2) Ta có: $\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$;

$$\frac{y}{y+1}=1-\frac{1}{y+1};\ \frac{z}{z+1}=1-\frac{1}{z+1};$$

$$P=\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}$$
$$=3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)\ (*).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với 3 số dương $a,b,c;\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ ta có:

$$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc};$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}.$$

Nhân từng vế hai BĐT trên ta được:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Áp dụng BĐT trên vào (*) ta được:

$$P\le 3-\frac{9}{x+1+y+1+z+1}=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases}x+y+z=1\\x+1=y+1=z+1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}.$$

Vậy $\max P=\frac{3}{4}$ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài 3. 1) *Giải phương trình*

$$\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}.$$

2) *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}x^2+x+\frac{1}{y}\left(1+\frac{1}{y}\right)=4\\x^3+\frac{x}{y^2}+\frac{x^2}{y}+\frac{1}{y^3}=4\end{cases}.$$

Lời giải. 1) ĐK: $\begin{cases}x+3\ge 0\\x+1\ge 0\\x^2+4x+3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -1.$

Ta có:

$$\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{(x+3)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+3}-2x\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x+3}=2x & (1)\\ \sqrt{x+1}=1 & (2)\end{array}\right..$$

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}2x\ge 0\\4x^2-x-3=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\(x-1)(4x+3)=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn).

(2) $\Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;1\}$.

2) ĐK: $y\ne 0$.

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}x^2+\frac{1}{y^2}+x+\frac{1}{y}=4\\x^3+\frac{1}{y^3}+\frac{x}{y}\left(x+\frac{1}{y}\right)=4\end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} u = x + \dfrac{1}{y} \\ v = \dfrac{x}{y} \end{cases}$, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^2 + u - 2v = 4 \\ u^3 - 2uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 2v = 4 - u \\ u(u^2 - 2v) = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 2v = 4 - u \\ u^2 - 4u + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}.$$

Với $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$ ta được: $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 2 \\ \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình là $(1;1)$.

Bài 4. 1) *Một học sinh có tấm bìa hình vuông ABCD cạnh 20 cm. Em muốn cắt tấm bìa này thành bốn hình tam giác vuông bằng nhau và phần còn lại là hình vuông MNPQ thoa mãn M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA. Hãy xác định vị trí các điểm M, N, P, Q để diện tích hình vuông MNPQ là nhỏ nhất.*

2) *Cho đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Điểm M di động trên đoạn OA (M khác A), vẽ đường tròn tâm K đường kính MB. Gọi I là trung điểm của đoạn MA, đường thẳng đi qua I vuông góc với AB cắt đường tròn (O) tại C và D. Đường thẳng CB cắt đường tròn (K) tại P.*

a) *Chứng minh rằng ba điểm P, M, D thẳng hàng.*

b) *Chứng minh rằng PI là tiếp tuyến của đường tròn (K).*

c) *Tìm vị trí của M trên đoạn OA để diện tích tam giác IPK lớn nhất.*

Lời giải. 1) Lấy các điểm $M \in AB; N \in BC; P \in CD; Q \in DA$ sao cho $AM = BN = CP = DQ$

$\Rightarrow BM = CN = DP = AQ$

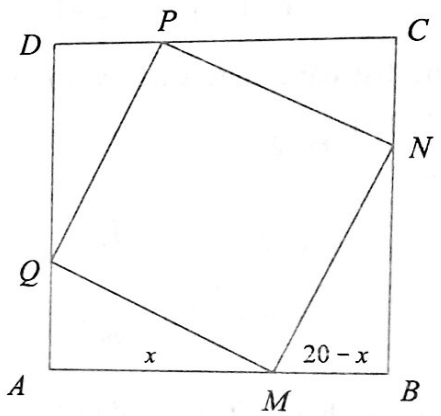
$\Rightarrow \Delta BMN = \Delta CNP = \Delta DPQ = \Delta AQM$ (c.g.c)

$\Rightarrow MN = NP = PQ = QM$ và

$$\widehat{NMB} = \widehat{MQA} \Rightarrow \widehat{NMB} + \widehat{QMA} = 90^0$$

$\Rightarrow \widehat{NMQ} = 90^0$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.



Diện tích $MNPQ$ nhỏ nhất khi diện tích các tam giác vuông là lớn nhất.

Đặt $AM = x$ thì $MB = AQ = 20 - x$.

Ta có: $S_{AMQ} = \dfrac{1}{2} AQ.AM$.

S_{AMQ} lớn nhất $\Leftrightarrow$ $AQ.AM$ lớn nhất.

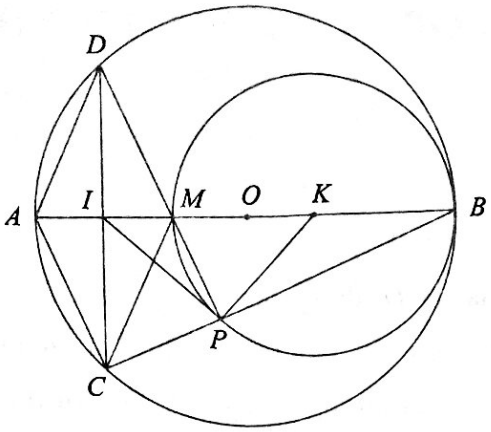
Mà $AQ + AM = 20$ (cm) không đổi nên

$AQ.AM$ lớn nhất $\Leftrightarrow AQ = AM \Leftrightarrow x = 20 - x$

$\Leftrightarrow x = 10$.

Vậy chọn M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA ta được diện tích hình vuông $MNPQ$ nhỏ nhất.

2)



a) Ta có: $\widehat{MPB} = \widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Từ đó $PM // AC$ (1).

Đường kính $AB \perp CD$ nên I là trung điểm của CD. Mà I là trung điểm của AM nên tứ giác $ADMC$ là hình thoi. Vậy $DM // AC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra P, M, D thẳng hàng.

b) Ta có $\widehat{CBA} = \widehat{CDP}$ (cùng phụ với $\widehat{DCB}$).

Do tam giác PKB cân tại K nên $\widehat{CBA} = \widehat{KPB}$.

Ta lại có $\widehat{CDP} = \widehat{IPD}$ (do tam giác IPD cân tại I).

Suy ra $\widehat{IPD} = \widehat{KPB}$ mà $\widehat{DPB} = 90^0$, suy ra $\widehat{IPK} = 90^0$ nên $IP \perp KP$ hay PI là tiếp tuyến của (K).

c) Vì $KM = \frac{1}{2}MB$ và $IM = \frac{1}{2}AM$ nên

$$IK = \frac{1}{2}AB = R.$$

Áp dụng định lý Pythagore ta có:

$$PI^2 + PK^2 = IK^2 = R^2 \text{ (không đổi).}$$

Mặt khác $4S^2 = PI^2.PK^2$ (S là diện tích của tam giác IKP).

Do đó diện tích tam giác IPK lớn nhất khi

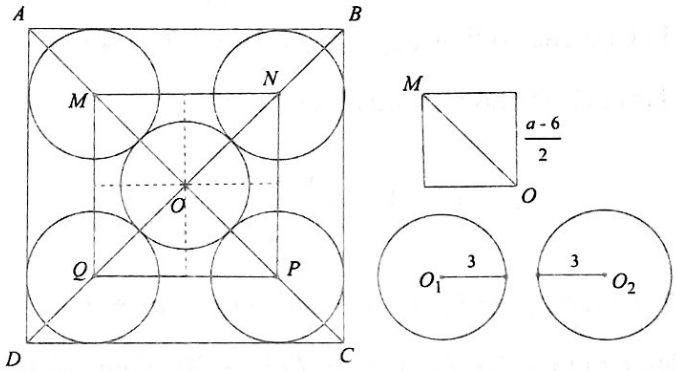
$$PI = PK = R\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Mà $BM = 2PK \Rightarrow BM = \sqrt{2}R$.

Vậy M cách B một khoảng bằng $\sqrt{2}R$ thì diện tích tam giác IPK lớn nhất.

Bài 5. *Người ta làm một cái hộp có đáy là hình vuông để đựng được 5 cái bánh hình tròn có đường kính 6 cm, sao cho không có bất kì hai cái bánh nào được chồng lên nhau. Hãy tính cạnh nhỏ nhất của cái hộp.*

Lời giải. Giả sử đáy của hộp bánh là hình vuông $ABCD$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ cạnh là $a > 6$ chứa 5 cái bánh hình tròn bán kính bằng 3cm sao cho không có bất kì hai cái bánh nào trong chúng có điểm trong chung.



Suy ra tâm của năm hình tròn này nằm trong hoặc trên cạnh hình vuông $MNPQ$ tâm O có cạnh là $(a-6)$ ($M \in OA; N \in OB$; $MN // AB$ và MN cách AB một khoảng 3cm). Các đường trung bình của hình vuông $MNPQ$ chia hình vuông này thành 4 hình vuông nhỏ bằng nhau.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một hình vuông nhỏ chứa ít nhất hai trong năm tâm của 5 cái bánh hình tròn nói trên, chẳng hạn đó là O_1 và O_2.

Do 5 cái bánh hình tròn này không có hai cái bánh nào có điểm trong chung nên $O_1O_2 \geq 6$ (1).

☞

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH BÌNH ĐỊNH

NĂM HỌC 2022 - 2023

MÔN THI: TOÁN

(*Thời gian làm bài*: 150 *phút*)

Bài 1. (*2,0 điểm*)

1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - 5x = y^3 - 5y \\ x^4 + y^2 = 2 \end{cases}.$$

2) Giải phương trình:

$$\sqrt{3}\left(x^2 - 3x + 1\right) = -\sqrt{x^4 + x^2 + 1}.$$

Bài 2. (*5,0 điểm*)

1) Cho các số thực x, y thoả mãn $x - 2y + 4 < 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = y^2 - 4x + \frac{4\left(y^2 - 4x\right)}{\left(x - 2y + 4\right)^2}.$$

2) Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Biết $P(1) = 10$, $P(2) = 20$, $P(3) = 30$. Tính giá trị biểu thức $H = \dfrac{P(12) + P(-8)}{2023}$.

Bài 3. (*5,0 điểm*)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và một điểm P bất kỳ nằm trong tam giác (P khác O). Đường thẳng AP cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D, dựng các đường kính DE, AF của đường tròn (O). Gọi G, I lần lượt là các giao điểm thứ hai của đường thẳng EP, FP với đường tròn (O), K là giao điểm của AI và DG. Gọi H là hình chiếu vuông góc của K trên OP, đường thẳng OP cắt EF tại M.

1) Chứng minh HO là phân giác của góc $\widehat{IHD}$.

2) Chứng minh $KD \perp DM$.

Bài 4. (*3,0 điểm*)

Cho tam giác ABC có các đường phân giác trong AD, BE, CF cắt nhau tại I. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{ID}{IA}} + \sqrt{\frac{IE}{IB}} + \sqrt{\frac{IF}{IC}} > 2.$$

Bài 5. (*2,0 điểm*)

Cho đa giác đều có $2n$ đỉnh ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$). Có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác và có một góc lớn hơn 100^0?

BÙI VĂN CHI

(*21/2 Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định*)

Giới thiệu

****

☞ Mặt khác O_1O_2 cũng nằm trong hoặc trên cạnh hình vuông nhỏ có cạnh là $\dfrac{a-6}{2}$ nên $O_1O_2 \leq OM = \dfrac{a-6}{2}.\sqrt{2}$ (2) (trong đó $\dfrac{a-6}{2}.\sqrt{2}$ là đường chéo hình vuông nhỏ).

Từ (1), (2) suy ra:

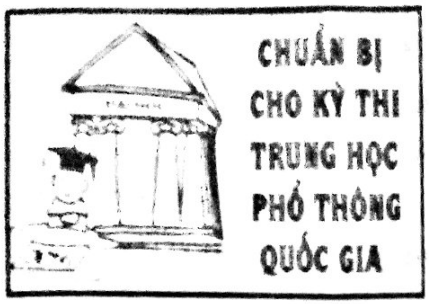
$$\frac{a-6}{2}.\sqrt{2} \geq 6 \Leftrightarrow a \geq 6\sqrt{2} + 6.$$

Vậy cạnh nhỏ nhất của hộp bánh hình vuông $ABCD$ là $6\sqrt{2} + 6$ (cm).

TRƯƠNG QUANG AN

(*Xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, Quảng Ngãi*)

Giới thiệu



BÀI TOÁN TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN (NGHỊCH BIẾN) TRÊN MỘT MIỀN

NGUYỄN CÔNG CHUẨN
(GV THPT chuyên Đại học Vinh, Nghệ An)

Trong đề minh họa thi tốt nghiệp THPT Quốc gia môn Toán, năm 2023 của Bộ Giáo dục và Đào tạo có câu phân loại (câu 50) đề cập đến dạng toán tìm điều kiện của m để hàm số đồng biến (nghịch biến) trên một miền. Thực tiễn giảng dạy trên lớp tôi thấy các em còn lúng túng và gặp rất nhiều khó khăn khi giải dạng toán này. Để giúp các em ôn tập và chuẩn bị tốt cho kì thi sắp tới, bài viết này xin giới thiệu đến các em phương pháp để giải dạng toán này.

Trước hết, ta nhớ lại nội dung định lí sau: "*Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên K. Nếu $f'(x)\ge 0\left(f'(x)\le 0\right),\forall x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên K, ở đây K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng*".

Khi gặp dạng toán tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y=f(x,m)$ đồng biến (nghịch biến) trên K ta thường làm như sau:

- Tính $y'=f'(x,m)$
- Hàm số đã cho đồng biến (nghịch biến) trên K khi $f'(x,m)\ge 0\left(f'(x,m)\le 0\right),\forall x\in K$ (1)
- Biến đổi (1) về dạng toán tìm m để bất phương trình nghiệm đúng trên K. Giải bài toán này ta thu được điều kiện m cần tìm.

Sau đây là một số dạng hàm thường gặp.

1. Hàm đa thức

Câu 1 (Đề minh họa năm 2019). *Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là*

A. $(-\infty;0]$ **B.** $\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$

C. $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]$ **D.** $[0;+\infty)$.

Lời giải. Ta có $y'=-3x^2-12x+4m-9$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ khi $y'=-3x^2-12x+4m-9\le 0,\forall x\in(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow 4m\le 3x^2+12x+9,\forall x\in(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow 4m\le \min\limits_{(-\infty;-1)}\left(3x^2+12x+9\right)\Leftrightarrow 4m\le -3$

$\Leftrightarrow m\le -\frac{3}{4}$. Chọn **C**.

Câu 2. *Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+9x-m^2$ nghịch biến trên khoảng $(-4;-1)$?*

A. 6 **B.** 8 **C.** 7 **D.** 5.

Lời giải. Ta có $y'=x^2+2(m-1)x+9$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-4;-1)$ khi $y'=x^2+2(m-1)x+9\le 0,\forall x\in(-4;-1)$

$\Leftrightarrow 2(m-1)x\le -x^2-9,\forall x\in(-4;-1)$

$\Leftrightarrow 2(m-1)\ge -x-\frac{9}{x},\forall x\in(-4;-1)$

Xét hàm $f(x)=-x-\frac{9}{x}$ trên $(-4;-1)$. Ta có:

$$f'(x)=-1+\frac{9}{x^2}=\frac{-x^2+9}{x^2}.$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-3$ (vì $x\in(-4;-1)$).

Ta có bảng biến thiên:

x	-4		-3		-1
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{25}{4}$	$\searrow$	6	$\nearrow$	10

Từ bảng biến thiên ta được điều kiện là $2(m-1)\geq 10 \Leftrightarrow m\geq 6$. Kết hợp với giả thiết ta được $m\in\{6;7;8;9;10\}$. Chọn **D**.

2. Hàm phân thức

Đối với hàm $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, ta có $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. Để hàm số này đồng biến (nghịch biến) trên K thì $y'>0\,(y'<0), \forall x\in K$ và y' phải xác định trên K.

Câu 3 (Thi tốt nghiệp THPT năm 2020, mã đề 103). *Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5)$ là*

A. $(2;5]$ **B.** $[2;5)$ **C.** $(2;+\infty)$ **D.** $(2;5)$.

Lời giải. Ta có $y'=\dfrac{m-2}{(x+m)^2}$. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;-5)$ khi

$$y'=\frac{m-2}{(x+m)^2}>0, \forall x\in(-\infty;-5)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2>0 \\ -m\geq -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2<m\leq 5.$$ Chọn **A**.

Câu 4. *Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-2023;2023]$ để hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;4)$?*

A. 2023 **B.** 2025 **C.** 2026 **D.** 2022.

Lời giải. Ta có $y'=\dfrac{m-5}{(x+m)^2}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;4)$ khi

$$y'=\frac{m-5}{(x+m)^2}<0, \forall x\in(1;4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-5<0 \\ \left[\begin{array}{l} -m\leq 1 \\ -m\geq 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\leq m<5 \\ m\leq -4 \end{array}\right..$$

Kết hợp với m nguyên thuộc $[-2023;2023]$, ta được $m\in\{-2023;-2022;...,-4\}\cup\{-1;0;...;4\}$.

Chọn **C**.

3. Hàm hợp

Câu 5. *Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x^2+mx+9)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?*

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8.

Lời giải. Ta có: $g'(x)=-f'(3-x)$

$$=-(3-x)(3-x-1)^2\left[(3-x)^2+m(3-x)+9\right]$$

hay hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi

$$g'(x)=(x-3)(x-2)^2\left[(x-3)^2-m(x-3)+9\right]\geq 0,$$
$$\forall x\in(3;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2-m(x-3)+9\geq 0, \forall x\in(3;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)m\leq (x-3)^2+9, \forall x\in(3;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow m\leq x-3+\frac{9}{x-3}, \forall x\in(3;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow m\leq \min_{(3;+\infty)}\left(x-3+\frac{9}{x-3}\right) \Leftrightarrow m\leq 6$$

Kết hợp với giả thiết ta được $m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Chọn **B**.

Câu 6. *Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:*

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên $m\leq 2023$ để hàm số $g(x)=f(x^2-2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 2023 **B.** 2021 **C.** 2022 **D.** 2024.

Lời giải. Ta có $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x+m)$.

Hàm số $g(x)=f(x^2-2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi

$g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x+m)\geq 0,\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(x^2-2x+m)\geq 0,\forall x\in(1;+\infty)$.

Từ bảng biến thiên ta có 2 trường hợp:

TH1: $x^2-2x+m\geq 2,\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\geq -x^2+2x+2,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow m\geq 3$

(vì $-x^2+2x+2=3-(x-1)^2<3,\forall x\in(1;+\infty)$)

Kết hợp với giả thiết m ta được:

$$m\in\{3;4;5;...;2023\}.$$

TH2: $x^2-2x+m\leq 0,\forall x\in(1;+\infty)$. Trường hợp này không xảy ra vì $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2x+m)=+\infty$.

Kết hợp cả 2 trường hợp ta chọn đáp án **B**.

4. Hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối

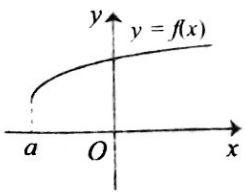
Khi ta biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ để vẽ đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ ta làm như sau:

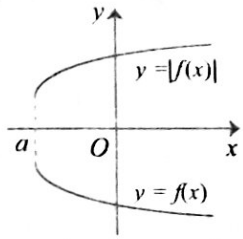
- Giữ nguyên đồ thị hàm số $y=f(x)$ với phần nằm trên trục hoành.
- Lấy đối xứng qua trục hoành đồ thị hàm số $y=f(x)$ với phần nằm phía dưới trục hoành ta được phần đồ thị còn lại.

Từ đó ta suy ra:

a) Để hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $(a;+\infty)$ thì

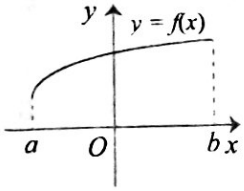
TH1: $\begin{cases}f'(x)\geq 0,\forall x\in(a;+\infty)\\ f(a)\geq 0\end{cases}$ TH2: $\begin{cases}f'(x)\leq 0,\forall x\in(a;+\infty)\\ f(a)\leq 0\end{cases}$

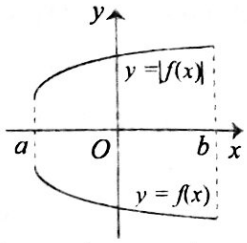




b) Để hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $(a;b)$ thì

TH1: $\begin{cases}f'(x)\geq 0,\forall x\in(a;b)\\ f(a)\geq 0\end{cases}$ TH2: $\begin{cases}f'(x)\leq 0,\forall x\in(a;b)\\ f(a)\leq 0\end{cases}$





c) Để hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $(-\infty;a)$ thì

$$\begin{cases}f'(x)\geq 0,\forall x\in(-\infty;a)\\ f(x)>0,\forall x\in(-\infty;a)\end{cases}$$

hoặc $\begin{cases}f'(x)\leq 0,\forall x\in(-\infty;a)\\ f(x)<0,\forall x\in(-\infty;a)\end{cases}$.

d) Điều kiện để hàm $y=|f(x)|$ đồng biến trên đoạn hoặc nửa khoảng tương tự như trên.

e) Bằng lập luận như trên các bạn hãy rút ra điều kiện để hàm $y=|f(x)|$ nghịch biến trên khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

Sau đây là một số ví dụ minh họa:

Câu 7 (Đề minh họa năm 2023). *Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a\in(-10;+\infty)$ để hàm số $y=|x^3+(a+2)x+9-a^2|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?*

A. 12 **B.** 11 **C.** 6 **D.** 5.

Lời giải. Đặt $f(x)=x^3+(a+2)x+9-a^2$

$\Rightarrow f'(x)=3x^2+a+2$. Hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi

TH1: $\begin{cases}f'(x)\geq 0,\forall x\in(0;1)\\ f(0)\geq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a\geq -3x^2-2,\forall x\in(0;1)\\ 9-a^2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\leq a\leq 3$.

(Để ý rằng $-5<-3x^2-2<-2,\forall x\in(0;1)$).

TH2: $\begin{cases}f'(x)\leq 0,\forall x\in(0;1)\\ f(0)\leq 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \le -3x^2 - 2, \forall x \in (0;1) \\ 9 - a^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \le -5.$$

Kết hợp cả 2 TH và giả thiết a nguyên thuộc $(-10;+\infty)$, suy ra:

$a \in \{-9;-8;-7;-6;-5;-2;-1;0;1;2;3\}$. Chọn **B**.

Câu 8 (Thi thử lần 2 Trường THPT chuyên ĐH Vinh, năm học 2019 - 2020). *Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $y = \left|-x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. Tổng tất cả các phần tử của S là*

A. -1 **B.** 0 **C.** -2 **D.** 2.

Lời giải. Xét hàm

$$f(x) = -x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1 \text{ có}$$

$$f'(x) = -4x^3 + 3mx^2 + 4m^2x.$$

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi

TH1: $\begin{cases} f'(x) \ge 0, \forall x \in (1;+\infty) \\ f(1) \ge 0 \end{cases}$. Trường hợp này không xảy ra vì $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = -\infty$.

TH2: $\begin{cases} f'(x) \le 0, \forall x \in (1;+\infty) \\ f(1) \le 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 + 3mx + 4m^2 \le 0, \forall x \in (1;+\infty) & (2) \\ m^2 + m - 1 \le 0 & (3) \end{cases}.$$

Giải (3) ta được $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \le m \le \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$, ta được $m \in \{-1;0\}$.

Thay $m = -1$ và $m = 0$ vào (2) ta thấy thỏa mãn. Vậy $m \in \{-1;0\}$. Chọn **A**.

Câu 9. *Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-5;5)$ để hàm số $y = \left|\sqrt{x^2-3} - 2x - 3m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$?*

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 9.

Lời giải. Xét hàm $f(x) = \sqrt{x^2-3} - 2x - 3m$ trên khoảng $(2;3)$. Ta có:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} - 2 = \frac{x - 2\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x^2-3}}$$

$$= \frac{-3(x^2-4)}{\sqrt{x^2-3}\left(x + 2\sqrt{x^2-3}\right)} < 0, \forall x \in (2;3).$$

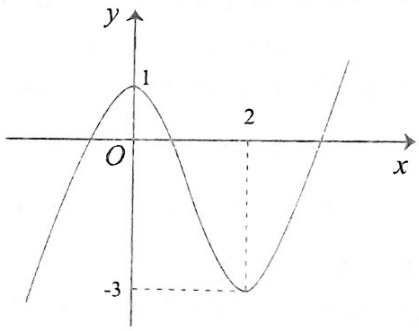
Suy ra hàm số $f(x) = \sqrt{x^2-3} - 2x - 3m$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$. Để hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $(2;3)$, ta chỉ cần điều kiện

$$g(3) \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{6} - 6 - 3m \ge 0 \Leftrightarrow m \le \frac{\sqrt{6}-6}{3}.$$

Kết hợp với m nguyên thuộc khoảng $(-5;5)$ ta được $m \in \{-4;-3;-2\}$. Chọn **B**.

5. Hàm số cho bởi đồ thị

Câu 10. *Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.*



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|f(\ln x) + 3\ln x + m^2 - 2m\right|$ nghịch biến trên khoảng $(1;e^2)$, biết $f(2) = -9$.. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6.

Lời giải. Xét hàm

$$g(x) = f(\ln x) + 3\ln x + m^2 - 2m.$$

Ta có $g'(x) = \dfrac{1}{x}f'(\ln x) + \dfrac{3}{x} = \dfrac{1}{x}\left(f'(\ln x) + 3\right)$

Với $x \in (1;e^2)$ ta có $\ln x \in (0;2)$. Từ đồ thị suy ra: $f'(\ln x) > -3, \forall x \in (1;e^2)$.

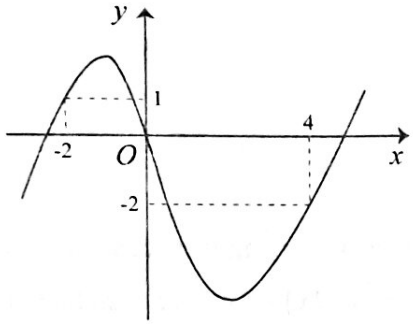
Do đó $g'(x) = \dfrac{1}{x}\left(f'(\ln x) + 3\right) > 0, \forall x \in (1;e^2)$.

Suy ra hàm số $g(x)=f(\ln x)+3\ln x+m^2-2m$ đồng biến trên khoảng $(1;e^2)$. Để hàm số $y=|g(x)|$ nghịch biến trên $(1;e^2)$, ta chỉ cần $g(e^2)\le 0 \Leftrightarrow m^2-2m-3\le 0 \Leftrightarrow -1\le m\le 3$.

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$ ta được $m\in\{-1;0;1;2;3\}$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng 5. Chọn **C**.

Câu 11. *Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.*



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|f(2x-1)+x^2-x+m^2\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$, biết $f(0)=-4$?

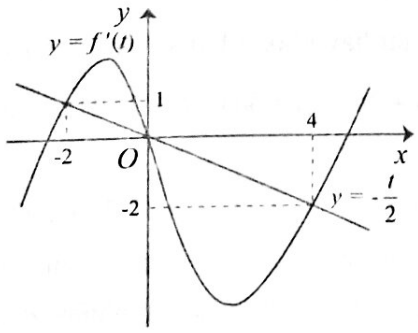
A. 5 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 6.

Lời giải. Xét hàm số

$$g(x)=f(2x-1)+x^2-x+m^2$$

có $g'(x)=2f'(2x-1)+2x-1$.

Đặt $t=2x-1$, ta có $x\in\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)\Leftrightarrow t\in(0;4)$.



Từ đồ thị ta thấy $f'(t)<\frac{-t}{2},\forall t\in(0;4)$

$\Leftrightarrow 2f'(t)+t<0,\forall t\in(0;4)$

hay $2f'(2x-1)+2x-1<0,\forall x\in\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Suy ra hàm số $g(x)=f(2x-1)+x^2-x+m^2$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Do đó để hàm số $y=|g(x)|$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ ta chỉ cần

$$g\left(\frac{1}{2}\right)\le 0\Leftrightarrow f(0)+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+m^2\le 0$$

$\Leftrightarrow m^2-\frac{17}{4}\le 0\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{17}}{2}\le m\le\frac{\sqrt{17}}{2}$. Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$ ta được $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$. Chọn **A**.

SAU ĐÂY LÀ MỘT SỐ BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI TƯƠNG TỰ

Câu 1 (TNTHPT, năm 2018, mã đề 101). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$.

A. 2 **B.** Vô số **C.** 1. **D.** 3.

Câu 2 (Đề minh họa năm 2018). Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=x^3+mx-\frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 5 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 4.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(3x^4+mx^3+1)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6.

Câu 4 (Đề minh họa năm 2017). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m\le 0$ hoặc $1\le m<2$ **B.** $m\le 0$

C. $1\le m<2$ **D.** $m\ge 2$.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^5-5x^2+5(m-1)x-8\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

A. 2 **B.** 0 **C.** 4 **D.** 1.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\left|\dfrac{x-m}{x+m+1}\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2023;2023]$ để hàm số $y=\left|\sqrt{x^2+1}-mx-1\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

A. 4045 **B.** 4048 **C.** 4046 **D.** 4047.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

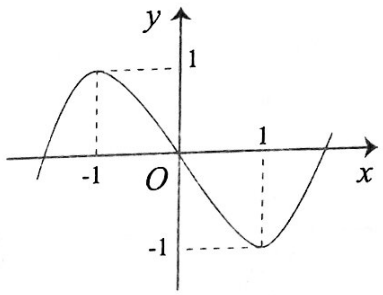
x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-10;20]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2+3x-m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18 **B.** 17

C. 16 **D.** 20.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|f(2x)-2x^2+m^2\right|$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$, biết $f(0)=-1$.

A. 1 **B.** 3

C. 4 **D.** 2.

****

TÌM CHỮ SỐ . . . *(tiếp theo trang 9)*

2. a) Tìm hai chữ số tận cùng của hiệu $2^{9^{2016}}-2^{9^{1945}}$.

b) Tìm hai chữ số tận cùng của phần nguyên số $\left(\sqrt{29}+\sqrt{21}\right)^{150}$.

c) Tìm hai chữ số tận cùng của tổng $2008^{2009}+2009^{2008}$.

3. Tích $A=1.2.3.4....800$ có tận cùng là bao nhiêu chữ số 0 ?

4. Tìm bốn số nguyên a,b,c,d phân biệt trong tập hợp $\{10;21;37;51\}$ sao cho:

$$ab+bc-ad=637.$$

5. Tìm số tự nhiên A biết rằng 3 mệnh đề sau có 2 mệnh đề đúng, 1 mệnh đề sai.

1) $A+51$ là số chính phương.

2) Chữ số tận cùng về bên phải số A là chữ số 1.

3) $A-38$ là số chính phương.

6. a) Tìm số tự nhiên có dạng $\overline{****3}$ và là lập phương của một số tự nhiên.

b) Tìm các số tự nhiên có dạng $\overline{abba}$ thỏa mãn $\overline{abba}=\left(\overline{ab}\right)^2+\left(\overline{ba}\right)^2+a-b$.

7. Có tồn tại hay không hai số tự nhiên a,b thỏa mãn $(3a+2b)(7a+3b)-4=\overline{22*12*2011}$ hay không

8. Chứng minh rằng số $a=27.7^n+2021$ không thể là tích của m số tự nhiên liên tiếp $(m\in\mathbb{N},m\geq 2)$ với mọi số tự nhiên n chia hết cho 4.

9. Chứng minh rằng số các chữ số viết trong hệ thập phân của hai số 2002^{2001} và $2002^{2001}+2^{2001}$ là bằng nhau.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/551 (Lớp 6). Tìm số nguyên n lớn nhất sao cho số $Q=4^{27}+4^{1017}+4^{n}$ là số chính phương.

NGUYỄN THỊ MINH

(GV THCS Cao Viên, Thanh Oai, Hà Nội)

Bài T2/551 (Lớp 7). Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn:

$$x^2+2021x+2022y^2+y=xy+2022xy^2+2023.$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/551. Cho a, b, c là các số hữu tỷ dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$. Chứng minh $A=\sqrt{\frac{abc}{(a+2bc)(b+2ca)+(c+2ab)}}$ là một số hữu tỷ.

TRẦN VĂN HẠNH

(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Bài T4/551. Cho tam giác nhọn ABC không cân có hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H; M là trung điểm của BC. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên AM, hai đường thẳng AH và BK cắt nhau tại I. Chứng minh rằng tia IH là phân giác của góc $\widehat{KIF}$.

NGUYỄN DŨNG

(GV THCS Lương Sơn, Bình Thuận)

Bài T5/551. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/551. Cho phương trình

$$(x-1)^2(x^2-2x)-(m+1)(x^2-2x-1)-4=0.$$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình trên có 4 nghiệm phân biệt, trong đó có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2+1=x_1+x_2+\sqrt{2}$.

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

Bài T7/551. Chứng minh rằng

$$\frac{36a^4+29b^4}{b^3+4a^2b}+\frac{36b^4+29c^4}{c^3+4b^2c}+\frac{36c^4+29a^4}{a^3+4c^2a}\ge 2023$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{117}{2023}.$$

ĐỖ BÁ CHỦ

(GV THPT Đông Hưng Hà, Thái Bình)

Bài T8/551. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ và ngoại tiếp đường tròn $(I;r)$. Các đường thẳng IA, IB, IC cắt lại đường tròn $(O;R)$ lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng

$$\frac{(A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1)^2}{A_1B_1.B_1C_1.C_1A_1}\le\frac{(a+b+c)^2}{abc}$$

trong đó $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$.

LÊ NGUYỄN

(SV K32, Khoa Công Nghệ, ĐH Cần Thơ)

Bài T9/551. Cho p, q, r là các số thực không âm thỏa mãn $p+q+r=1$. Chứng minh rằng

$$7(pq+qr+rp)\le 2+9pqr.$$

ĐINH THÁI SƠN

(SV lớp BK79K48, ĐH Bách khoa Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/551. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases}x_1=7, x_2=29\\ x_{n+2}=7x_{n+1}-10x_n, \forall n=1,2,...\end{cases}$$

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương k thì tồn tại số nguyên dương n sao cho $x_n+3\,\vdots\,7^k$.

NGUYỄN TUẤN NGỌC

(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Bài T11/551. Tìm tất cả các các hàm $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn: $f(2f(a)+f(b)) = 2a+b-4,\ \forall a,b \in \mathbb{Z}$.

HỒ THANH LAI

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

Bài T12/551. Cho tam giác nhọn ABC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp, K, L theo thứ tự là giao điểm của BO, CO với AC, AB. Giả sử bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác OAK bằng bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác OAL, chứng minh $AB = AC$.

NGUYỄN MINH HÀ

(Hà Nội)

Bài L1/551. Một sóng dọc truyền theo trục Ox có tần số 15 Hz, biên độ 4 cm. Tốc độ truyền sóng là 12 m/s. Xét hai phần tử B và C trên Ox có vị trí cân bằng cách nhau 40 cm. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa hai phần tử B và C khi có sóng truyền qua.

VIỆT CƯƠNG

(Hà Nội)

Bài L2/541. Trong đoạn mạch RLC nối tiếp, cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm L thay đổi được. Ứng với hai giá trị khác nhau của L là $L_1 = 3$ mH và $L_2 = 6$ mH thì điện áp hiệu dụng trên cuộn cảm có giá trị như nhau. Tìm giá trị của L để điện áp hiệu dụng trên cuộn cảm đạt cực đại.

THANH LÂM

(Hà Nội)

****

TIN TỨC TOÁN HỌC

GIẢI THƯỞNG TOÁN HỌC ABEL NĂM 2023 ĐÃ CÓ CHỦ

Nhà nghiên cứu người Mỹ gốc Argentina *Luis Caffarelli* đã trở thành chủ nhân của Giải thưởng Toán học Abel năm 2023 vì những đóng góp nổi trội cho lý thuyết về các phương trình đạo hàm riêng phi tuyến tính.

Nhà nghiên cứu người Mỹ gốc Argentina Luis Caffarelli.

Viện Hàn lâm khoa học Na Uy ngày 22/3 đã công bố giải thưởng này, đồng thời cho biết ông *Caffarelli* sẽ nhận giải thưởng trong buổi lễ trao giải ngày 23/5 tại Oslo.

Các phương trình đạo hàm riêng phi tuyến tính mô hình hóa cách một số biến thay đổi tương ứng với nhau và có vai trò nổi bật trong nhiều ngành, bao gồm Kỹ thuật, Vật lý, Kinh tế và Sinh học. Viện Hàn lâm Khoa học Na Uy ca ngợi những đóng góp nổi bật của ông cho lĩnh vực lý thuyết trong quá trình suốt hơn 40 năm.

Chủ tịch Ủy ban giải thưởng Abel, ông *Helge Holden* cho rằng kết hợp sự hiểu biết sâu sắc về hình học với các công cụ và phương pháp phân tích khéo léo, các công trình của *Caffarelli* đã và đang tiếp tục có tác động to lớn đến Toán học.

Năm ngoái, giải thưởng này thuộc về nhà Toán học người Mỹ *Dennis Sullivan* nhờ công trình nghiên cứu của ông về cấu trúc liên kết và lý thuyết hỗn loạn.

Được đặt theo tên của nhà toán học người Na Uy *Niels Henrik Abel* (1802 - 1829), giải thưởng này đi kèm với phần thưởng trị giá 7,5 triệu kroner (710.000 USD).

(nguồn: baotintuc.vn)

PROBLEM IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/551 (For 6th grade). Find the largest integer n such that the number $Q=4^{27}+4^{1017}+4^{n}$ is a perfect square.

Problem T2/551 (For 7th grade). Find the natural numbers x, y satisfying

$$x^2+2021x+2022y^2+y=xy+2022xy^2+2023.$$

Problem T3/551. Let a, b, c be positive rational numbers satisfying the condition $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$. Show that $A=\sqrt{\frac{abc}{(a+2bc)(b+2ca)+(c+2ab)}}$ is a rational number.

Problem T4/551. Given an acute scalene triangle ABC, two altitudes BE and CF intersect at H; M is the midpoint of BC. Let K be the perpendicular projection of H on AM. Two lines AH and BK intersect at I. Show that IH is the angle bisector of $\widehat{KIF}$.

Problem T5/551. Show the inequality

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

where a, b, c are positive numbers satisfying the condition $ab+bc+ca=1$.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/551. Given the equation with parameter m

$$(x-1)^2(x^2-2x)-(m+1)(x^2-2x-1)-4=0.$$

Find all the values of the parameter m so that the above equation has 4 distinct solutions of which two solutions x_1, x_2 satisfying

$$x_1x_2+1=x_1+x_2+\sqrt{2}.$$

Problem T7/551. Show that

$$\frac{36a^4+29b^4}{b^3+4a^2b}+\frac{36b^4+29c^4}{c^3+4b^2c}+\frac{36c^4+29a^4}{a^3+4c^2a}\ge 2023$$

where a, b, c are positive numbers satisfying the condition $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{117}{2023}$.

Problem T8/551. Given a triangle ABC inscribed in the circle $(O; R)$ and circumscribed the circle $(I; r)$. The lines IA, IB, IC respectively intersect $(O; R)$ at A_1, B_1, C_1. Show that

$$\frac{(A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1)^2}{A_1B_1.B_1C_1.C_1A_1}\le\frac{(a+b+c)^2}{abc}$$

where $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$.

Problem T9/551. Given non-negative numbers p, q, r satisfying $p+q+r=1$. Show that

$$7(pq+qr+rp)\le 2+9pqr.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/551. The sequence (x_n) is determined as following

$$\begin{cases} x_1=7, x_2=29 \\ x_{n+2}=7x_{n+1}-10x_n, \forall n=1,2,\ldots \end{cases}.$$

Show that for each positive integer k there always exists a positive integer n so that $x_n+3 \vdots 7^k$.

Problem T11/551. Find all functions $f: \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ satisfying $f(2f(a)+f(b))=2a+b-4,\ \forall a,b\in\mathbb{Z}$.

Problem T12/551. Given an acute triangle ABC and O is its circumcenter. Let K, L respectively be the intersections between BO, CO with AC, AB. Assume that the radius of the incircle of the triangle OAK is equal to the radius of the incircle of the triangle OAL. Prove that $AB=AC$.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science - Vietnam National University, Hanoi*)

Bài T1/547. *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a; b)$ sao cho $\frac{a^2-3}{ab+3}$ cũng là số nguyên dương.*

Lời giải. *Nhận xét.* Giả sử $a^2 - 3 = (ab + 3)k$ với các số nguyên dương a, b, k.

Do $a^2 - 3 \geq ab + 3 \geq 4$ nên $a \geq 3$ và $a > b > 0$.

Xét tích: $bk(ab + 3) = b(a^2 - 3)$

$= ba^2 - 3b + 3a - 3a = a(ab + 3) - 3(a + b)$,

hay là $3(a + b) = (ab + 3)(a - bk)$.

Từ $(a - 1)(b - 1) = ab + 1 - a - b \geq 0$ suy ra:

$$a + b \leq ab + 1 < ab + 3$$

nên $3(a + b) < 3(ab + 3)$. Như thế chỉ xảy ra:

$3(a + b) = ab + 3$ hoặc $3(a + b) = 2(ab + 3)$.

• Nếu $3(a + b) = ab + 3$ thì $ab + 9 - 3a - 3b = 6$, hay $(a - 3)(b - 3) = 6$, với $a \geq 3$ và $a > b > 0$ theo nhận xét trên, nên $a = 9$, $b = 4$, hoặc $a = 6$, $b = 5$. Thử lại thấy $(a ; b)$ như thế đều thỏa mãn đề bài.

• Nếu $3(a + b) = 2(ab + 3)$ thì

$$4ab + 9 - 6a - 6b = -3,$$

hay $(2a - 3)(2b - 3) = -3$, với $a \geq 3$ và $a > b > 0$ theo nhận xét trên, nên $a = 3$, $b = 1$. Thử lại thấy $a = 3$, $b = 1$ thỏa mãn đề bài.

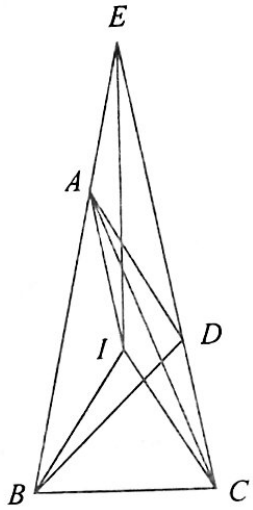
Vậy các cặp số nguyên dương $(a ; b)$ bằng $(9 ; 4)$, $(6 ; 5)$, $(3 ; 1)$ thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt. **Nghệ An**: *Hoàng Văn Duy, Nguyễn Trương Việt Anh*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi**: *Huỳnh Diễm Quỳnh*, 6B, THCS Phạm Văn Đồng, Hành Phước, Nghĩa Hành.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/547. *Cho tam giác ABC với $\widehat{BAC} = 30^0, \widehat{ABC} = 80^0$. Trên nửa mặt phẳng không chứa điểm B với bờ là đường thẳng AC, lấy điểm D sao cho tam giác DAC cân tại D và $\widehat{ADC} = 160^0$. Tính số đo của góc $\widehat{DBC}$.*

Lời giải.



Tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 30^0, \widehat{ABC} = 80^0$ cho nên $\widehat{ACB} = 70^0$. Vì tam giác DAC cân tại D và $\widehat{ADC} = 160^0$ cho nên $\widehat{DAC} = \widehat{DCA} = 10^0$, và do đó $\widehat{DCB} = 80^0$. Gọi E là giao điểm của DC với BA, ta có tam giác EBC cân tại E. Vì $\widehat{EDA} = 20^0 = \widehat{CEA}$ nên tam giác AED cân tại A. Ta có $AE = AD = DC$.

Lấy I đối xứng với D qua AC. Ta có $\widehat{ICE} = 20^0$, $IC = CD = AE$. Tam giác $AEC = ICE$ (c.g.c), và do đó $\widehat{IEC} = \widehat{ACE} = 10^0$.

Do $\widehat{CEA} = 20^0$, cho nên EI là phân giác góc $\widehat{CEA}$ và do đó tam giác IBC cân tại I.

Vì $\widehat{ICB} = \widehat{ACB} - \widehat{ICA} = 70^0 - 10^0 = 60^0$, cho nên tam giác IBC là tam giác đều. Ta có $DC = BC$ nên tam giác DBC cân tại C. Từ đó

$$\widehat{DBC} = \frac{1}{2}\left(180^0 - \widehat{DCB}\right) = 50^0.$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có đáp số đúng: **Nghệ An:** *Hoàng Văn Nhân, Lương Thị Hải Yến, Nguyễn Tất Han, Nguyễn Thị Băng Tâm, 7C*, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Lưu Khánh Huy*, 8H THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/547. *x, y là hai số thực thoả mãn $x \geq 2$, $0 < y \leq 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{x}{x^2+y}+\frac{y}{y^2+x} \leq 2\left(\frac{1}{x+4}+\frac{1}{y+4}\right).$$

Lời giải. Với giả thiết đã cho, ta sẽ chứng minh rằng: $\frac{x}{x^2+y} \leq \frac{2}{y+4}$ (1); $\frac{y}{y^2+x} \leq \frac{2}{x+4}$ (2).

Thật vậy, ta có: $(1) \Leftrightarrow x(y+4)-2(x^2+y) \leq 0$

$\Leftrightarrow xy-2y+4x-2x^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x-y) \geq 0.$

Bất đẳng thức cuối đúng vì với $x \geq 2$, $0 < y \leq 1$; cả hai thừa số trong vế trái không âm. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$, $0 < y \leq 1$.

Lại có: $(2) \Leftrightarrow y(x+4)-2(y^2+x) \leq 0$

$\Leftrightarrow xy-2x+4y-2y^2 \leq 0 \Leftrightarrow (y-2)(2y-x) \geq 0.$

Bất đẳng thức cuối đúng vì với $x \geq 2$, $0 < y \leq 1$; cả hai thừa số trong vế trái không dương. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$, $y = 1$.

Cộng theo vế của (1) và (2), ta được:

$$\frac{x}{x^2+y}+\frac{y}{y^2+x} \leq 2\left(\frac{1}{x+4}+\frac{1}{y+4}\right).$$

Bất đẳng thức trong đầu bài được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$, $y = 1$.

Nhận xét. Điều then chốt của lời giải là chứng minh với $x \geq 2$, $0 < y \leq 1$ có các bất đẳng thức (1), (2).

Có thể chứng minh $x+\frac{y}{x} \geq 2+\frac{y}{2}$, rồi từ đó suy ra (1); và chứng minh $y+\frac{x}{y} \geq 2+\frac{x}{2}$, suy ra (2).

Các bạn sau đây có bài giải tốt :

Hà Tĩnh: *Lưu Khánh Huy*, 8H, *Trần Diệu Linh*, 9A, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Việt*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Thọ:** *Trần Lan Anh*, *Đỗ Tuấn Minh Học*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, Q3; **Sơn La:** *Lương Hữu Bách*, 9A1, THCS Nguyễn Trãi, TP. Sơn La.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/547. *Cho tam giác ABC cân tại C, có $\widehat{C} = 30^0$, đường cao AH. Từ trung điểm M của cạnh BC dựng đường vuông góc với BC cắt cạnh AC tại N. Phân giác của góc $\widehat{NBC}$ cắt MN tại P. Phân giác của góc $\widehat{NAH}$ cắt BC tại Q. Chứng minh $PN = PQ$ và $\Delta ANP = \Delta BQP$.*

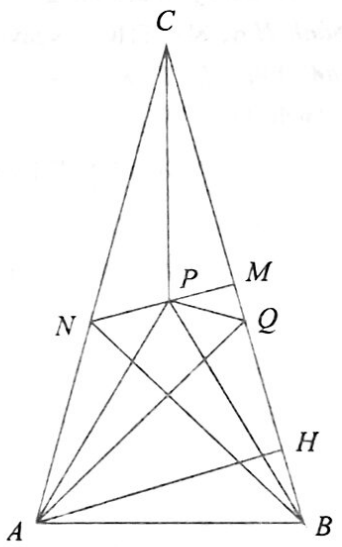
Lời giải. Cách 1. Tam giác BNC cân tại N và có $\widehat{NCB} = 30°$, suy ra $\widehat{ANB} = \widehat{BNM} = \widehat{MNC} = 60°$.

Lại có $\widehat{ABC} = 75°$, $\widehat{NBP} = \frac{1}{2}\widehat{NBC} = 15°$, suy ra $\widehat{ABP} = 60°$.

Từ đó suy ra tứ giác $ABPN$ nội tiếp, ta có:

$$\widehat{APB} = \widehat{ANB} = 60°,\ \widehat{NAP} = \widehat{NBP} = \widehat{PBM}.$$

Do đó tam giác ABP là tam giác đều.



Vì AQ là phân giác góc CAH và $\widehat{ACQ} = 30°$ nên tam giác AQC cân tại Q.

Hơn nữa $\Delta BNC = \Delta AQC$ (g.c.g), ta có $CN = CQ$, nên $AN = BQ$. Hai tam giác ANP và BQP có:

$$AN = BQ,\ \widehat{NAP} = \widehat{QBP},\ AP = BP,$$

suy ra $\Delta ANP = \Delta BQP$ (c.g.c). Do đó $PN = PQ$.

Cách 2. Tam giác BNC có NP, BP lần lượt là phân giác của góc $\widehat{BNC}$ và $\widehat{NBC}$, nên CP là phân giác của góc $\widehat{NCB}$.

Dễ thấy $\widehat{CAQ} = \frac{1}{2}\widehat{CAH} = 30°$, suy ra tam giác AQC cân tại Q, hơn nữa, $\Delta AQC = \Delta BNC$.

Vì tam giác ABC cân tại C nên CP là trung trực của AB, do đó $AP = BP$.

Lại có $P \in MN$ là trung trực của BC nên $PB = PC$.

Suy ra $PA = PC \Rightarrow \widehat{PAC} = \widehat{PCA} = \frac{1}{2}\widehat{CAQ}$.

Do $\Delta AQC = \Delta BNC$ và có P đều là giao các đường phân giác trong, do đó $QP = NP$. Cuối cùng, hai tam giác ANP và BQP có:

$AP = BP, PN = PQ, AN = BQ$ (do $CN = CQ$),

Suy ra $\Delta ANP = \Delta BQP$.

Nhận xét. Các bạn dưới đây có lời giải tốt.

Sơn La: *Lương Hữu Bách*, 9A1, THCS Nguyễn Trãi; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Lâm*, *Nguyễn Công Dũng*, *Nguyễn Thái Triệu*, *Hoàng Thái Phượng*, 8A, *Nguyễn Hải Triều*, *Nguyễn Văn Việt*, 9B, *Hoàng Văn Nhân*, 7A, *Nguyễn Tất Han*, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Lưu Khánh Huy*, 8H, THCS Nguyễn Du; **Phú Thọ:** *Trần Lan Anh*, *Hà Phương Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/547. *Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \neq 0$, $2a - b + c = 0$. Xét phương trình bậc hai*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1).$$

a) *Chứng minh rằng hai số nguyên liên tiếp bất kỳ không thể đồng thời là nghiệm của phương trình bậc hai* (1).

b) *Chứng minh rằng nghịch đảo của căn bậc hai của hai số nguyên dương phân biệt không thể đồng thời là nghiệm của phương trình bậc hai* (1).

Lời giải. Biệt thức của phương trình đã cho

$$\Delta = (2a - b)^2 + 4a^2 > 0, \forall a \neq 0$$

nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Theo định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Mặt khác, giả thiết bài toán cho ta $2a = b - c$, kéo theo $\frac{b}{a} - \frac{c}{a} = 2$. Do đó:

$$-(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 2$$

hay tương đương: $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = -1$ (*).

a) Nếu x_1, x_2 là hai số nguyên liên tiếp thì $x_1 + 1, x_2 + 1$ cũng là hai số nguyên liên tiếp, dẫn tới $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$ chia hết cho 2 là điều mâu thuẫn với (*). Do đó, phương trình không thể có hai nghiệm là hai số nguyên liên tiếp.

b) Giả sử phương trình có hai nghiệm dương $x_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}$ và $x_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ trong đó m, n là các số nguyên dương. Khi đó thì

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{m}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$$

cũng là điều mâu thuẫn với (*). Do đó phương trình đã cho không thể có hai nghiệm là nghịch đảo của các căn bậc hai của các số nguyên dương.

Nhận xét. Bài toán này cơ bản và có nhiều hướng giải. Ngoài ra thì ở khẳng định b) của bài toán, ta thấy phương trình không thể có hai nghiệm đều dương.

Có nhiều bạn gửi lời giải cho bài này, nhưng đáng tiếc có một bạn giải chưa chặt chẽ. Trong các lời giải gửi về Toà soạn, các bạn sau có lời giải đúng:

Hà Nội: *Trần Việt Anh*, 9C1, THCS Archimedes Academy, Cầu Giấy; **Phú Thọ:** *Đỗ Tuấn Minh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Sơn La:** *Lương Hữu Bách*, 9A1, THCS Nguyễn Trãi; **TP. Hồ Chí Minh**; *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, Q. 3; **Nghệ An:** *Nguyễn Hải Triều*, *Nguyễn Văn Việt*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T6/547. *Giải hệ phương trình sau*

$$\begin{cases} x > 0, y > 0, z > 0 \\ x + y + z = 3 \\ x^2y + y^2z + z^2x = 4 \end{cases}.$$

Lời giải. Giả sử hệ phương trình đã cho có nghiệm (x, y, z). Đặt $S = x^2y + y^2z + z^2x$

Vai trò của x, y, z có tính chất hoán vị vòng quanh, không mất tổng quát giả sử $x = \max(x, y, z)$, tức là $x \geq y > 0$ và $x \geq z > 0$. Suy ra $y^2z \leq xyz$ và $xz^2 \leq x^2z$.

Bài T5/547. *Cho các số thực a, b, c thỏa mãn* $a \neq 0$, $2a - b + c = 0$. *Xét phương trình bậc hai*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1).$$

a) *Chứng minh rằng hai số nguyên liên tiếp bất kỳ không thể đồng thời là nghiệm của phương trình bậc hai* (1).

b) *Chứng minh rằng nghịch đảo của căn bậc hai của hai số nguyên dương phân biệt không thể đồng thời là nghiệm của phương trình bậc hai* (1).

Lời giải. Biệt thức của phương trình đã cho

$$\Delta = (2a - b)^2 + 4a^2 > 0, \forall a \neq 0$$

nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Theo định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ và $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$. Mặt khác, giả thiết bài toán cho ta $2a = b - c$, kéo theo $\dfrac{b}{a} - \dfrac{c}{a} = 2$. Do đó:

$$-(x_1 + x_2) - x_1 x_2 = 2$$

hay tương đương: $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = -1 \quad (*)$.

rung trực của

ên $PB = PC$.

$\widehat{AQ}$.

ao các đường
cùng, hai tam

$N = CQ$),

Nguyễn Trãi;
Công Dũng,
g, 8A, *Nguyễn*
Văn Nhân, 7A,
Đô Lương; **Hà**
yễn Du; **Phú**
, 9A, THCS

ANH HỒNG

c thỏa mãn
h bậc hai

n tiếp bất kỳ
hương trình

a) Nếu x_1, x_2 là hai số nguyên liên tiếp thì x_1+1, x_2+1 cũng là hai số nguyên liên tiếp, dẫn tới $(x_1+1)(x_2+1)$ chia hết cho 2 là điều mâu thuẫn với (*). Do đó, phương trình không thể có hai nghiệm là hai số nguyên liên tiếp.

b) Giả sử phương trình có hai nghiệm dương $x_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}$ và $x_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ trong đó m, n là các số nguyên dương. Khi đó thì

$$(x_1+1)(x_2+1) = \left(1+\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$$

cũng là điều mâu thuẫn với (*). Do đó phương trình đã cho không thể có hai nghiệm là nghịch đảo của các căn bậc hai của các số nguyên dương.

Nhận xét. Bài toán này cơ bản và có nhiều hướng giải. Ngoài ra thì ở khẳng định b) của bài toán, ta thấy phương trình không thể có hai nghiệm đều dương.

Có nhiều bạn gửi lời giải cho bài này, nhưng đáng tiếc có một bạn giải chưa chặt chẽ. Trong các lời giải gửi về Toà soạn, các bạn sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Trần Việt Anh*, 9C1, THCS Archimedes Academy, Cầu Giấy; **Phú Thọ:** *Đỗ Tuấn Minh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Sơn La:** *Lương Hữu Bách*, 9A1, THCS Nguyễn Trãi; **TP. Hồ Chí Minh**; *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14,

KẾT QUẢ NÀO ?

Bài toán. *Tổng bình phương tất cả các giá trị của tham số m để hàm số* $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ *có hai điểm cực trị* x_1, x_2 *thỏa mãn* $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 + 3x_1^2x_2^2 = 3$ *bằng*

A. 2 **B.** 10 **C.** 1 **D.** 9.

Bạn Hân đưa ra lập luận như sau: Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$, tức là x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $3x^2 - 6x + m = 0$. Theo định lý Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2$; $x_1x_2 = \frac{m}{3}$. Vì vậy:

$$x_1 + x_2 - 2x_1x_2 + 3x_1^2x_2^2 = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{2m}{3} + \frac{m^2}{3} = 3$$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1, m = 3$. Vì thế:

$(-1)^2 + 3^2 = 10$. Chọn **B**.

Các bạn có tìm ra kết quả như vậy không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

Ta có: $S = x^2y + y^2z + z^2x$

$$\le x^2y + xyz + \frac{1}{2}z^2x + \frac{1}{2}x^2z$$

$$= xy(x+z) + \frac{1}{2}xz(x+z) = x(x+z)\left(y + \frac{z}{2}\right)$$

$$= 4.\frac{x}{2}.\frac{x+z}{2}\left(y + \frac{z}{2}\right).$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương $\frac{x}{2}, \frac{x+z}{2}, y + \frac{z}{2}$, hơn nữa $\frac{x}{2} < \frac{x+z}{2}$ (do $z > 0$), ta có: $S \le 4.\frac{x}{2}.\frac{x+z}{2}\left(y + \frac{z}{2}\right) < \frac{4}{27}\left(\frac{x}{2} + \frac{x+z}{2} + y + \frac{z}{2}\right)^3$

$$= \frac{4}{27}(x+y+z)^3 \quad (*).$$

Do $S = 4$ và $x + y + z = 3$, kết hợp với (*) suy ra $4 < 4$, điều này vô lí.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét. Vai trò x, y, z trong hệ phương trình có tính chất hoán vị vòng quanh nên ta chỉ chọn được số lớn nhất (hoặc số nhỏ nhất, hoặc số nằm giữa hai số còn lại) chứ không sắp thứ tự được chúng. Bài này có ít bạn tham gia gửi bài, một số bạn đã quan niệm vai trò của x, y, z bình đẳng như nhau và đặt điều kiện luôn là $x \ge y \ge z$ để giải là không đúng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải có lập luận chặt chẽ và ngắn gọn.

Hà Nội: *Trần Việt Anh*, 9C1, TH, THCS & THPT Archimesdes, Cầu Giấy; **Bình Định**: *Lê Vinh Quang*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/547. *Cho $0 \le x, y \le 1$. Chứng minh rằng*

$$8(x+y-1)^2 - 9xy(x+y-1) + xy \ge 0.$$

Lời giải. Trường hợp: $x + y - 1 < 0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Xét trường hợp: $x + y - 1 \ge 0$. Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$8(x+y-1)^2 - 8xy(x+y-1) - xy(x+y-1) + xy \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 8(x+y-1)(x+y-1-xy) + xy(2-x-y) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow -8(x+y-1)(1-x)(1-y) + xy(2-x-y) \ge 0 \ (*).$$

Đặt $a = x + y - 1, b = 1 - x, c = 1 - y$. Suy ra:

$$x = a + c, y = a + b, 2 - x - y = b + c, a, b, c \ge 0.$$

Khi đó (*) trở thành:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc \ (1).$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.\sqrt{ca} = 8abc.$$

Vậy (1) được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$ hay $x = y = z = \frac{2}{3}$.

Nhận xét. Các bạn tham gia đều giải đúng bài này với cách giải tương tự như trên. Một số bạn dùng phương pháp đạo hàm cũng cho kết quả đúng nhưng lời giải dài hơn. Các bạn sau có lời giải tốt:

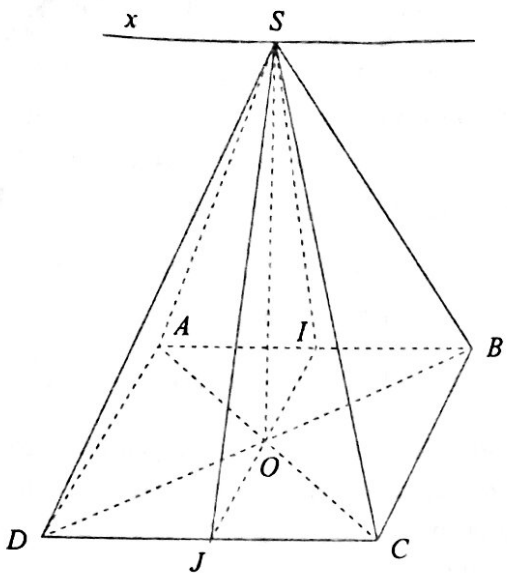
Hà Nội: *Trần Việt Anh*, 9C1, TH, THCS&THPT Archimedes Academy, Cầu Giấy; **Nghệ An:** *Thái Bá Nhân*, 8A, *Nguyễn Văn Việt*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Bình:** *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 11 Toán 2, *Nguyễn Trần Hoàng*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Đà Nẵng:** *Tô Đông Hải*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Nam:** *Trần Phạm Minh Đạt*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Sóc Trăng:** *Tiết Trọng Khiêm*, 11A2, THPT chuyên Nguyễn thị Minh Khai; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, Q.3.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/547. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a. $SA = SC = a\sqrt{3}$, $SB = SD$. Gọi φ là góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD). Chứng minh rằng $\cos\varphi \ge \frac{\sqrt{6}}{3}$.*

Lời giải. (Dựa theo lời giải của bạn *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới, **Quảng Bình**).

Vì $AB \parallel CD$ nên giao tuyến của mp(SAB) và mp(SCD) là đường thẳng x qua S và $x \parallel AB \parallel CD$. Trong mp($SAB$) kẻ $SI \perp x (I \in AB)$, mà $x \parallel AB$ nên $SI \perp AB$. Trong mp(SCD) kẻ $SJ \perp x (J \in CD)$, mà $x \parallel CD$ nên $SJ \perp CD$. Từ đó $((SAB); (SCD)) = (SI; SJ)$.



Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tam giác SAC cân tại S nên $SO \perp AC$, tam giác SBD cân tại S nên $SO \perp BD$. Suy ra $SO \perp (ABCD)$, kết hợp với $AB \perp SI$ ta được $AB \perp OI$. Lập luận tương tự ta cũng có $CD \perp OJ$, dẫn đến ba điểm O, I, J thẳng hàng.

Đặt $OA = m$ ($m > 0$). Xét tam giác AOB vuông tại O có $OB^2 = AB^2 - AO^2 = a^2 - m^2$.

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{a^2 - m^2} = \frac{a^2}{m^2(a^2 - m^2)}$$

$$\Rightarrow OI = \frac{m\sqrt{a^2 - m^2}}{a}.$$

Xét tam giác SAO vuông tại O có:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{3a^2 - m^2}.$$

Xét tam giác SOI vuông tại O có:

$$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{3a^2 - m^2 + \frac{m^2(a^2 - m^2)}{a^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3a^4 - m^4}}{a}.$$ Dễ thấy:

$$\Delta SAB = \Delta SCD \text{ (c.c.c)} \Rightarrow SI = SJ = \frac{\sqrt{3a^4 - m^4}}{a}.$$

Tam giác SIJ cân tại S có $SO \perp IJ$ (do $SO \perp (ABCD)$) nên O là trung điểm của IJ

$$\Rightarrow IJ = 2OI = \frac{2m\sqrt{a^2 - m^2}}{a}.$$ Chú ý rằng:

$$IJ < SI \Leftrightarrow \frac{2m\sqrt{a^2 - m^2}}{a} < \frac{\sqrt{3a^4 - m^4}}{a}$$

$$\Leftrightarrow 4m^2(a^2 - m^2) < 3a^4 - m^4$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 - m^2)^2 + a^4 + m^4 > 0.$$

Bất đẳng thức này đúng nên góc $\widehat{ISJ}$ là góc nhọn

$$\Rightarrow \widehat{((SAB);(SCD))} = \widehat{(SI;SJ)} = \widehat{ISJ} = \varphi.$$

Sử dụng định lý hàm số côsin cho tam giác SIJ ta có: $\cos\varphi = \dfrac{SI^2 + SJ^2 - IJ^2}{2SI.SJ} = \dfrac{3a^4 + m^4 - 2a^2m^2}{3a^4 - m^4}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{3a^4 + m^4 - 2a^2m^2}{3a^4 - m^4} \geq \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 9a^4 + 3m^4 - 6a^2m^2 \geq 3\sqrt{6}a^4 - \sqrt{6}m^4$$

(lưu ý do $a > m$ nên $3a^4 - m^4 > 0$)

$$\Leftrightarrow (9 - 3\sqrt{6})a^4 - 6a^2m^2 + (3 + \sqrt{6})m^4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 - \frac{2a^2m^2}{3 - \sqrt{6}} + \frac{3 + \sqrt{6}}{9 - 3\sqrt{6}}m^4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 - \frac{2a^2m^2}{3 - \sqrt{6}} + \frac{3}{(9 - 3\sqrt{6})(3 - \sqrt{6})}m^4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 - \frac{2a^2m^2}{3 - \sqrt{6}} + \left(\frac{1}{15 - 6\sqrt{6}}\right)m^4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2 - \frac{1}{3 - \sqrt{6}}m^2\right)^2 \geq 0.$$ BĐT đúng (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi $m = a\sqrt{3 - \sqrt{6}}$.

Nhận xét. Số bài giải gửi về Toà soạn khá ít, Ngoài bạn *Hạnh*, các bạn sau cũng có lời giải đúng: **Nghệ An**: *Phan Đại Hoàng*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Quảng Bình**: *Lê Gia Bảo*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Bình Định**: *Nguyễn Hữu Trí*, 11A1, THPT Số 2 Phù Cát, huyện Phù Cát.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/547. *Chứng minh rằng trong tam giác ABC bất kỳ ta luôn có*

$$1 + \frac{r}{R} \leq \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2} \leq \sqrt{2 + \frac{r}{2R}} \quad (1)$$

trong đó ký hiệu r, R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải (của *Lê Gia Quang*) Ta có kết quả quen biết: $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$=1+\frac{r}{R}\qquad(2).$$

Ta lại có: $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\le 2\sin\frac{C}{2}.$$

Tương tự: $\cos A+\cos C\le 2\sin\frac{B}{2};\cos B+\cos C\le 2\sin\frac{A}{2}.$

Kết hợp với (2) suy ra:

$$1+\frac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C$$

$$\le\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}.$$

Ta có: $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}(\sin A+\sin B).$$

Vì $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$ với mọi $a,b>0$ nên

$$\tan\frac{A}{2}\sin B+\tan\frac{B}{2}\sin A\ge 2\sqrt{\tan\frac{A}{2}\sin B\tan\frac{B}{2}\sin A}$$

$$=2\sqrt{\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

$\tan\frac{B}{2}\sin C+\tan\frac{C}{2}\sin B\ge 4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2};$

$\tan\frac{C}{2}\sin A+\tan\frac{A}{2}\sin C\ge 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$. Nhưng

$$\tan\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=\cos C+\cos B.$$

Tương tự: $\tan\frac{B}{2}(\sin C+\sin A)=\cos C+\cos A;$

$$\tan\frac{C}{2}(\sin A+\sin B)=\cos A+\cos B.$$

Vậy $2(\cos A+\cos B+\cos C)$

$$=\tan\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)+\tan\frac{B}{2}(\sin C+\sin A)$$

$$+\tan\frac{C}{2}(\sin A+\sin B)$$

$$\ge 4\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right).$$

Suy ra: $\cos A+\cos B+\cos C$

$$\ge 2\left(\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right)+\left(\cos^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right)+$$

$$+\left(\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$\ge 2\left(\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\ge\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2.$$

Mặt khác,

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=\frac{1+\cos A}{2}+\frac{1+\cos B}{2}+\frac{1+\cos C}{2}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{2}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{r}{R}\right)=2+\frac{r}{2R}\qquad(3).$$ Vậy

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\sqrt{\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$=\sqrt{2+\frac{r}{2R}}.$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh hoàn toàn.

Nhận xét. Có thể sử dụng phương trình bậc ba để chứng minh các bất đẳng thức (1), (2), (3). Xem [1], Bài 4.2.1 (trang 283), 4.4.14 (trang 332), 4.4.6 (trang 328) và Bài 4.5.1 (trang 344).

[1] *Tạ Duy Phượng, Hoàng Minh Quân*, Phương trình bậc ba với các hệ thức hình học và lượng giác

trong tam giác, NXBGD Việt Nam, 2017. Dưới đây là danh sách các bạn đã giải đúng.

Bình Định: *Lê Gia Quang*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Hà Nội**: *Trần Việt Anh*, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy. **Quảng Bình**: *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 11 Toán 2, *Nguyễn Trần Hoàng* 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T10/547. *Cho $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$. Xét dãy $(x_k)_{k\ge 0}$ xác định bởi $x_0=c\in\mathbb{Z}; x_{k+1}=P(x_k), \forall k\ge 0$. Biết mỗi số nguyên dương m đều là ước của một số x_k ($x_k\ne 0$) nào đó của dãy. Chứng minh degP = 1.*

Lời giải. (Dựa theo lời giải của bạn *Nguyễn Trần Hoàng*, 12 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**)

Rõ ràng đa thức hằng $P(x) = c$ với mọi x, không thỏa mãn.

Giả sử deg $P(x) > 1$. Khi đó $\lim\dfrac{|P(x)|}{|x|}=+\infty$ khi $x\to+\infty$. Do đó tồn tại $M > 0$ sao cho:

$$|P(x)| > 2|x| \text{ với mọi } |x| > M.$$

Đặt $M_n=\max\{|x_k|: 0\le k\le n\}$ thì (M_n) là dãy tăng. Từ giả thiết bài toán $\lim M_n=+\infty$. Gọi $k_n\in\{1,2,\ldots,n\}$ là chỉ số bé nhất sao cho $x_{k_n}=M_n$. Ta có $\lim M_n=+\infty$ nên tồn tại số n_0 sao cho $|x_{n_0}|>M$. Khi đó $|P(x_{n_0})|-|x_{n_0}|>|x_{n_0}|$.

Đặt $m=|x_{n_0+1}-x_{n_0}|$. Ta có

$$\begin{aligned} m&=|x_{n_0+1}-x_{n_0}|=|P(x_{n_0})-x_{n_0}|\\ &>|P(x_{n_0})|-|x_{n_0}|>|x_{n_0}|\\ &>\max\{|x_0|,|x_1|,\ldots,|x_{n_0-1}|\}. \end{aligned}$$

Vậy m không là ước của mỗi số hạng khác 0 trong các số $x_0,x_1,\ldots,x_{n_0-1},x_{n_0}$. Mặt khác với mỗi $n>n_0$ thì $x_n-x_{n_0}=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\ldots+(x_{n_0+1}-x_{n_0})$ (1).

Chú ý rằng với mỗi k thì

$$x_{k+1}-x_k=P(x_k)-P(x_{k-1})\,\vdots\,(x_k-x_{k-1}) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $x_n-x_{n_0}$ chia hết cho $(x_{n_0+1}-x_{n_0})$. Do đó $x_n-x_{n_0}$ chia hết cho $m=|x_{n_0+1}-x_{n_0}|$. Vậy m là ước của $x_n-x_{n_0}$ với mỗi $n>n_0$. Vì m không là ước của x_{n_0} nên m không là ước của x_n với mỗi $n>n_0$. Thành thử m không là ước của mọi số hạng trong dãy $(x_k)_{k\ge 0}$, trái với giả thiết bài toán. Vậy deg $P(x) = 1$.

Nhận xét. Ngoài bạn *Hoàng*, chỉ có hai bạn gửi lời giải là: **Quảng Nam:** *Trần Phạm Minh Đạt*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Bình Định:** *Phan Trung Trực*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn. Hai bạn trên có lời giải đúng tuy còn hơi dài.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/547. *Tìm tất cả các hàm $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ sao cho với mọi x, y dương ta luôn có: $f^2(x)\ge f(x+y)(f(x)+y)$ (1).*

Lời giải (Theo đa số các bạn). Giả sử tồn tại hàm $f(x)$ thỏa mãn bài toán. Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow f^2(x)+yf(x)\ge f(x+y)(f(x)+y)+yf(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x)-f(x+y)\ge\frac{yf(x)}{f(x)+y}>0.$$

Suy ra $f(x)$ là hàm nghịch biến trong $(0,+\infty)$.

Ứng với $x>0$ chọn n nguyên dương sao cho $f(x)>\dfrac{1}{n}$.

Khi đó, với mọi $k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$, ta có:

$$f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f\left(x+\frac{k+1}{n}\right)\ge\frac{f\left(x+\frac{k}{n}\right)}{nf\left(x+\frac{k}{n}\right)+1}\ge\frac{1}{2n}\quad(2).$$

Lấy tổng từ (2) ta thu được:

$$f(x)-f(x+1)\ge n\times\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\quad(3).$$

Từ (3) ta suy ra: $f(x)-f(x+1)\ge\dfrac{1}{2}$;

$$f(x+1)-f(x+2)\ge\frac{1}{2};$$

.....

$$f(x+2m-1)-f(x+2m)\geq\frac{1}{2}.$$

Cộng vế với vế ta thu được: $f(x)-f(x+2m)\geq m$ hay

$$f(x+2m)\leq f(x)-m \quad (4).$$

Vậy nếu trong (4) ta chọn $m > f(x)$ thì $f(x+2m)<0$, điều này không thể xảy ra.

Kết luận. Không tồn tại hàm số thỏa mãn các điều kiện bài ra.

Nhận xét. Đây là dạng toán về phương trình hàm cơ bản với cặp biến tự do trên tập số dương. Đa số các bạn gửi bài giải đều giải theo cách đã trình bày ở trên. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Bình Định: *Phan Trung Trực*, 11T, *Lê Gia Quang*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Nghĩa*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Bình:** *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 11T2, *Nguyễn Trần Hoàng*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Như Thuật*, 10T2, *Nguyễn Văn Hoàn Long*, 10T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Nam:** *Trần Phạm Minh Đạt*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/547. *Cho tam giác nhọn ABC, không cân tại A và nội tiếp đường tròn (O) với AB < AC. Các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau ở D. Gọi M, N lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACD, ABD. Gọi K là giao điểm của BM với CN; E là trung điểm của BC. Đường thẳng qua E và vuông góc với AE cắt các đường thẳng OM, ON lần lượt tại X, Y. Giả sử BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MEN. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp hai tam giác DBC, DXY tiếp xúc với nhau.*

Lời giải. (Theo bạn *Trần Phạm Minh Đạt*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông, **Quảng Nam**)

Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp. D là giao điểm của các tiếp tuyến với (O) tại B và C. Khi đó AD là đường đối trung của tam giác ABC.*

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC, AM là trung tuyến. Khi đó*

$$(AC,AM)+(BC,BA)\equiv\frac{\pi}{2}(\bmod\pi)\Leftrightarrow\widehat{BAC}=\frac{\pi}{2}.$$

Phép chứng minh các bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây.

Trở lại giải bài toán T12.

Gọi U, V theo thứ tự là trung điểm của AC, AB; T là giao điểm thứ hai của DM và đường tròn (ACD).

Dễ thấy các bộ bốn điểm (O, M, X, U), (O, N, Y, V) thẳng hàng và $(OMXU)\perp AC; (ONYV)\perp AB$.

Từ đó, chú ý rằng

$$(EXY)\perp AE; XU\perp AU; YV\perp AV,$$

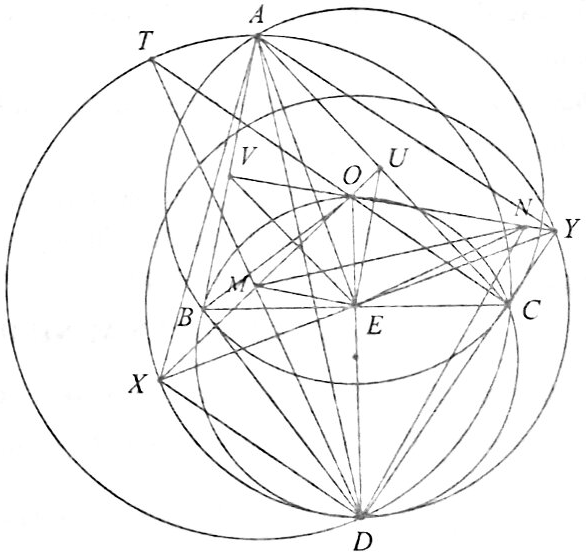
suy ra các bộ bốn điểm (A, E, X, U), (A, E, Y, V) cùng thuộc một đường tròn.

Dễ thấy $UE // AB; VE // AC$. Vậy

$$(AX,AE)\equiv(UX,UE)\equiv(UX,AB)\equiv(AC,VY)$$
$$\equiv(VE,VY)\equiv(AE,AY)(\bmod\pi).$$

Kết hợp với $EXY\perp AE$, suy ra $EX=EY$ (1).

Theo bổ đề 1, AD là đường đối trung của tam giác ABC.



Do đó: $(DM,DE)\equiv(DT,CT)+(OC,OD)$

$$\equiv(DA,CA)+(OC,OD)(\bmod\pi)$$

$$\equiv(AD,AC)+\frac{1}{2}(\overline{OC},\overline{OB})$$

$$\equiv(AD,AC)+(AC,AB)\equiv(AD,AB)(\bmod\pi)$$

$$\equiv(AC,AE)\equiv(XM,XE)(\bmod\pi).$$

Điều đó có nghĩa là D, M, E, X cùng thuộc một đường tròn.

Tương tự, D, N, E, Y cùng thuộc một đường tròn.

Vậy $\overline{OM}.\overline{OX} = \overline{OD}.\overline{OE} = \overline{ON}.\overline{OY}$.

Do đó M, N, X, Y cùng thuộc một đường tròn.

Vậy, chú ý rằng đường tròn (MEN) tiếp xúc với BC, ta có

$$\begin{aligned}(DY,DE) &\equiv (NY,NE) \equiv (NY,NM)+(NM,NE)\\ &\equiv (XY,XM)+(EM,EB) \pmod{\pi}\\ &\equiv (XE,XM)+(EM,ED)+(ED,EB)\\ &\equiv (DE,DM)+(EM,ED)+\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\\ &\equiv (EM,DM)+\frac{\pi}{2} \equiv (EX,DX)+\frac{\pi}{2}\\ &\equiv (YX,DX)+\frac{\pi}{2} \equiv -(XD,XY)+\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Do đó $(DY,DE)+(XY,XD) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ (2).

Từ (1) và (2), theo bổ đề 2, suy ra $\widehat{XDY} = \frac{\pi}{2}$.

Kết hợp với (1), suy ra E là tâm của đường tròn (DXY).

Vậy các đường tròn (DBC), (DXY) tiếp xúc với nhau.

Nhận xét. 1) Bài toán này không cần hai giả thiết: ΔABC nhọn và $K = BM \cap CN$.

2) Chỉ có bạn *Đạt* tham gia giải bài này. Tiếc rằng, vì không biết sử dụng góc định hướng nên lời giải của bạn *Đạt* phụ thuộc hình vẽ.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/547. *Một lò xo nhẹ có độ cứng k = 100 N/m và chiều dài tự nhiên l_0 = 0,3 m, một đầu cố định, một đầu gắn với khối gỗ hình hộp chữ nhật nhỏ có khối lượng m = 1 kg. Hệ vật (lò xo và khối gỗ) được đặt trên mặt bàn nằm ngang. Biết hệ số ma sát giữa khối gỗ và mặt bàn là μ = 0,1, lấy gia tốc trọng trường g = 10 m/s^2. Kéo khúc gỗ trên mặt bàn để lò xo dãn thêm 0,1 m rồi thả nhẹ cho khối gỗ dao động. Xác định chiều dài ngắn nhất của lò xo trong quá trình khúc gỗ dao động.*

Lời giải. Biên độ dao động lúc đầu của khối gỗ:

$$A = 0{,}1 \text{ cm}.$$

Độ giảm biên độ sau mỗi lần khối gỗ qua vị trí cân bằng:

$$\Delta A = \frac{2\mu mg}{k} = \frac{2.0{,}1.1.10}{100} = 0{,}02 \text{ m}.$$

Li độ cực đại của vật sau khi đi qua vị trí cân bằng lần 1 là: $A_1 = A - \Delta A = 0{,}1 - 0{,}02 = 0{,}08$ m.

Suy ra chiều dài cực tiểu của lò xo:

$$l_{\min} = l_0 - A_1 = 0{,}3 - 0{,}08 = 0{,}22 \text{ m}.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: **Bình Định:** *Lê Gia Quang*, 11T, trường THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** *Trần Thị Tuyết Trinh*, 11A1, Trung tâm giáo dục nghề nghiệp – Giáo dục thường xuyên, quận Ô Môn; **Thừa Thiên Huế:** *Trần Thị Thanh Thư*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Tiền Giang:** *Trương Phúc Vinh*, 11 Lý, THPT chuyên Tiền Giang.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/547. *Một máy biến áp lí tưởng có cuộn sơ cấp mắc vào điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi. Khi đồng thời giảm 2a vòng dây ở cuộn sơ cấp và 3a vòng dây ở cuộn thứ cấp thì tỉ số điện áp hiệu dụng ở hai đầu cuộn thứ cấp để hở không thay đổi so với ban đầu. Khi đồng thời tăng b vòng dây hoặc đồng thời giảm c vòng dây ở cả hai cuộn sơ cấp và thứ cấp thì điện áp hiệu dụng hai đầu cuộn thứ cấp để hở đều thay đổi một lượng là 10% điện áp hiệu dụng hai đầu cuộn sơ cấp. Tính tỉ số $\frac{b}{c}$.*

Lời giải. Gọi U_1 và U_2 lần lượt là điện áp hai đầu cuộn sơ cấp và thứ cấp lúc đầu. Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{N_1 - 2a}{N_2 - 3a} \Rightarrow N_2 = 1{,}5N_1\\[2ex] \dfrac{1{,}1U_1}{U_1} = \dfrac{N_2 + b}{N_1 + b} \Rightarrow \dfrac{1{,}5N_1 + b}{N_1 + b} = 1{,}1 \Rightarrow b = 4N_1\\[2ex] \dfrac{0{,}9U_1}{U_1} = \dfrac{N_2 - c}{N_1 - c} \Rightarrow \dfrac{1{,}5N_1 - c}{N_1 - c} = 0{,}9 \Rightarrow c = 6N_1\end{cases}$$

Suy ra : $\frac{b}{c} = \frac{2}{3}$.

Nhận xét. Chúc mừng bạn *Ngô Huỳnh Thiên Vinh*, 11 Lý, THPT chuyên Tiền Giang, **Tiền Giang** đã có lời giải đúng cho bài này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

MỘT SỐ SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI TOÁN ĐẠI SỐ TỔ HỢP

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

Trong Chương trình và Sách giáo khoa toán năm 2006 (Chương trình cũ), nội dung Đại số tổ hợp được dạy ở lớp 11. Trong Chương trình GDPT 2018 (Chương trình mới) nội dung này được chuyển xuống dạy ở lớp 10. Nhìn chung nội dung này tương đối khó và khá trừu tượng đối với học sinh lớp 11 trước đây và học sinh lớp 10 năm nay. Giải pháp của SGK lớp 10 là bố trí nội dung này học ở học kỳ II nhằm hai mục đích: Một là, đến thời điểm đó học sinh lớp 10 đã " chín hơn" về mặt tư duy nên sẽ dễ tiếp thu hơn; hai là, phục vụ trực tiếp cho việc học nội dung Xác suất và học Chuyên đề lựa chọn môn Toán 10 nội dung khai triển nhị thức Newton với số mũ lớn hơn 5 ngay sau đó.

Học sinh lớp 11 học theo Chương trình cũ, học sinh lớp 10 học theo Chương trình mới nội dung Đại số tổ hợp dễ mắc sai lầm trong khi giải toán. Bài viết này xin nêu một số sai lầm dễ mắc phải trong quá trình làm bài.

1. SAI LẦM DO KHÔNG NẮM VỮNG KHÁI NIỆM

Thí dụ 1. *Trong một lớp học có 20 nam và 23 nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn hai học sinh một nam và một nữ đi dự lễ kỉ niệm mừng ngày Quốc khánh. Hỏi giáo viên chủ nhiệm có bao nhiêu cách chọn?*

Sai lầm thường gặp. Áp dụng quy tắc cộng, số cách chọn là 20 + 23 = 43 cách chọn.

Phân tích sai lầm. Học sinh nhầm lẫn giữa quy tắc cộng và quy tắc nhân trong bài toán tổ hợp.

Nếu bài toán yêu cầu chỉ chọn một học sinh thì mới áp dụng quy tắc cộng.

Lời giải đúng. Có 20 cách chọn một học sinh nam và 23 cách chọn một học sinh nữ. Áp dụng quy tắc nhân ta có 20.23= 460 cách chọn.

Thí dụ 2. *Lớp 10A có 44 học sinh. Cần chọn một Ban cán sự gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 2 ủy viên. Có bao nhiêu cách lập ra Ban cán sự lớp?*

Sai lầm thường gặp.

Sai lầm 1. Chọn 4 bạn từ 44 bạn nên số cách lập ra Ban cán sự gồm 4 người C_{44}^4

Sai lầm 2. Chọn 2 học sinh để 1 bạn làm lớp trưởng, 1 bạn làm lớp phó có A_{44}^2 cách chọn; Chọn 2 uỷ viên trong 42 học sinh còn lại có A_{42}^2. Theo quy tắc nhân có $A_{44}^2 A_{42}^2$ cách.

Sai lầm 3. Chọn 2 học sinh để 1 bạn làm lớp trưởng, 1 bạn làm lớp phó có C_{44}^2 cách chọn; Chọn 2 uỷ viên trong 38 học sinh còn lại có C_{42}^2. Theo quy tắc nhân có $C_{44}^2 C_{42}^2$ cách.

Phân tích sai lầm.

Sai lầm 1. Học sinh hiểu đơn giản chọn 4 bạn từ 44 bạn nên số cách lập ra Ban cán sự gồm 4 người là C_{44}^4 nhưng không xét mỗi trường hợp lấy được 4 bạn, việc bạn nào làm lớp trưởng, bạn nào làm lớp phó sẽ cho các cách chọn Ban cán sự khác nhau.

Sai lầm 2. Khi chọn 2 bạn làm lớp trưởng, lớp phó thì có thứ tự nhưng khi chọn 2 ủy viên lại không cần thứ tự nên số cách chọn 2 ủy viên là C_{42}^2 hoặc $C_{42}^1 C_{41}^1$.

Sai lầm 3. Chọn 2 học sinh để 1 bạn làm lớp trưởng, 1 bạn làm lớp phó, khi đó cách chọn này ***có thứ tự***. Chẳng hạn khi đã chọn 2 học sinh A và B để 1 bạn làm lớp trưởng, 1 bạn làm lớp phó thì có hai cách: A làm lớp trưởng còn B làm lớp phó và B làm lớp trưởng còn A làm lớp phó. Nên mỗi cách chọn là một chỉnh hợp chập 2 của 44 phần tử A_{44}^2.

Lời giải đúng. Để chọn được một Ban cán sự cần thực hiện 3 công đoạn chọn một lớp trưởng, chọn một lớp phó và chọn 2 uỷ viên. Do đó ta có lời giải

Cách 1.

Công đoạn 1: Chọn 1 lớp trưởng có 44 cách.

Công đoạn 2: Chọn 1 lớp phó trong 43 học sinh sau khi đã chọn lớp trưởng có 43 cách.

Công đoạn 3: Chọn 2 uỷ viên trong 42 học sinh còn lại (3 uỷ viên cần chọn ***không có thứ tự*** nên dùng tổ hợp) có C_{42}^2 cách.

Theo quy tắc nhân có:

$$44.43.C_{42}^2 = 1629012 \text{ (cách)}.$$

Cách 2.

Để chọn được một ban cán sự có thể thực hiện 2 công đoạn chọn 2 học sinh để 1 bạn làm lớp trưởng 1 bạn làm lớp phó và chọn 2 uỷ viên. Do đó ta có lời giải

Công đoạn 1: Chọn 2 học sinh để 1 bạn làm lớp trưởng, 1 bạn làm lớp phó, khi đó cách chọn này ***có thứ tự*** nên số cách chọn là A_{44}^2.

Công đoạn 2: Chọn 2 học sinh trong 42 học sinh còn lại làm uỷ viên, cách chọn này ***không có thứ tự*** nên số cách chọn là C_{42}^2.

Vậy số cách chọn ban đại diện lớp là:

$$A_{44}^2 . C_{42}^2 = 1629012 \text{ (cách)}.$$

Cách 3. Để chọn được một ban cán sự cũng có thể thực hiện 2 công đoạn. Trước tiên chọn cùng 1 lúc 4 học sinh sau đó rồi mới phân công chức vụ. Do đó ta có lời giải:

Chọn 4 học sinh để làm một ban cán sự cách chọn này ***không có thứ tự*** nên số cách chọn là C_{44}^4 cách. Với mỗi cách chọn 4 học sinh trên chọn 2 học sinh để 1 bạn làm lớp trưởng, 1 bạn làm lớp phó, khi đó cách chọn này ***có thứ tự*** nên số cách chọn là $A_4^2 = 12$ cách, tiếp theo chọn 2 học sinh còn lại làm uỷ viên có 1 cách chọn.

Theo quy tắc nhân có:

$$C_{44}^4 \times A_4^2 \times 1 = 1629012 \text{ (cách)}.$$

2. SAI LẦM KHI PHÂN CHIA TRƯỜNG HỢP

Thí dụ 3. *Từ các chữ số 1, 2, 5, 7, 8 lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau mà số đó nhỏ hơn 278.*

Sai lầm thường gặp.

Trường hợp 1.

Số cần lập có dạng $\overline{1ab}$: Có $A_4^2 = 12$ (số)

Trường hợp 2. Số cần lập có dạng $\overline{2ab}$, $\overline{ab}$ có thể chọn a, b như sau:

+ a chỉ có thể là 1,5 nên có 2 cách chọn a.

+ Có 3 cách chọn $b \in \{1,5,7,8\} \setminus \{a\}$.

Trường hợp này có $2 \times 3 = 6$ (số).

Vậy có $12 + 6 = 18$ số nhỏ hơn 278 .

Phân tích sai lầm. Trường hợp 2, chọn a không chỉ là 2 hoặc 5 mà còn có thể a là 7 khi đó chỉ cần

chọn b nhỏ hơn 8, hay chọn b là 1 hoặc 5. Do đó lời giải thiếu 2 số cần lập là 271 và 275.

Lời giải đúng (cho trường hợp 2).

- Nếu a là 1 hoặc 5, có 2 cách chọn; khi đó có 3 cách chọn $b \in \{1,5,7,8\} \setminus \{a\}$

Trường hợp này có $2 \times 3 = 6$ (số).

- Nếu a là 7, khi đó có 2 cách chọn b bằng 1 hoặc 5. Trường hợp này có 2 số thoả mãn.

Do đó trường hợp 2 lập được $6 + 2 = 8$ (số).

Vậy có $12 + 8 = 20$ số nhỏ hơn 278 .

Thí dụ 4. *Có 15 học sinh giỏi gồm 6 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh ?*

Sai lầm thường gặp.

- Chọn 6 học sinh giỏi trong 15 học sinh giỏi của 3 khối có: $C_{15}^6 = 5005$ cách.

- Số cách chọn được 6 học sinh giỏi từ 6 học sinh giỏi của khối 12 là $C_6^6 = 1$ cách.

- Số cách chọn được 6 học sinh giỏi từ 10 học sinh giỏi của hai khối 12 và khối 11 là $C_{10}^6 = 210$ cách.

- Số cách chọn được 6 học sinh giỏi từ 9 học sinh giỏi của hai khối 11 và khối 10 là $C_9^6 = 84$ cách.

- Số cách chọn được 6 học sinh giỏi từ 11 học sinh giỏi của hai khối 10 và khối 12 là $C_{11}^6 = 462$ cách.

Do đó số cách chọn 6 học sinh giỏi sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh là:

$$5005 - 1 - 210 - 84 - 462 = 4248.$$

Phân tích sai lầm. Số cách chọn được 6 học sinh giỏi từ 10 học sinh giỏi của hai khối 12 và khối 11 là $C_{10}^6 = 210$ cách. Trong 210 cách này có trường hợp 6 học sinh giỏi được chọn đều là học sinh khối 12.

Số cách chọn được 6 học sinh giỏi từ 11 học sinh giỏi của hai khối 10 và khối 12 là $C_{11}^6 = 462$ cách. Trong 462 cách này có trường hợp 6 học sinh giỏi được chọn đều là học sinh khối 12.

Do đó trong cách giải thích của bạn học sinh cách chọn được 6 học sinh giỏi đều là học sinh khối 12 đã bị trừ 3 lần, dẫn đến việc chọn sai kết quả của bài toán. Kết quả đúng phải là 4250 cách.

Lời giải đúng.

- Chọn 6 học sinh giỏi trong 15 học sinh giỏi của 3 khối có $C_{15}^6 = 5005$ cách.

- Số cách chọn được 6 học sinh giỏi từ 6 học sinh giỏi của khối 12 là $C_6^6 = 1$ cách.

- Số cách chọn được 6 học sinh giỏi từ 10 học sinh giỏi của hai khối 12 và khối 11 là $C_{10}^6 = 210$ cách, trừ đi cách chọn được 6 học sinh thuộc khối 12 còn 209 cách.

- Số cách chọn được 6 học sinh giỏi từ 9 học sinh giỏi của hai khối 11 và khối 10 là $C_9^6 = 84$ cách.

- Số cách chọn được 6 học sinh giỏi từ 11 học sinh giỏi của hai khối 10 và khối 12 là $C_{11}^6 = 462$ cách, trừ đi cách chọn được 6 học sinh thuộc khối 12 còn 461 cách.

Do đó số cách chọn 6 học sinh giỏi sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh là:

$$5005 - 1 - 209 - 84 - 461 = 4250 \text{ (cách)}.$$

Thí dụ 5. *Trong một hộp có 4 viên bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi vàng. Cần chọn ra 4 viên từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số 4 viên đó không có đủ 3 màu?*

Sai lầm thường gặp.

Sai lầm 1.

- Số cách chọn 4 viên không có màu trắng là

$$C_{10}^4 = 210 \text{ cách.}$$

- Số cách chọn 4 viên không có màu vàng là

$$C_9^4 = 126 \text{ cách.}$$

- Số cách chọn 4 viên không có màu đỏ là

$$C_{11}^4 = 330 \text{ cách.}$$

Theo quy tắc cộng có:

$$120 + 126 + 330 = 666 \text{ (cách).}$$

Sai lầm 2.

Trường hợp 1. Số cách chọn 4 viên chỉ có một màu: $C_4^4 + C_5^4 + C_6^4 = 21$

Trường hợp 2. Số cách chọn 4 viên có 2 màu:

Số cách chọn 4 viên không có màu trắng là

$$C_{10}^4 = 210 \text{ cách.}$$

Số cách chọn 4 viên không có màu vàng là

$$C_9^4 = 126 \text{ cách.}$$

Số cách chọn 4 viên không có màu đỏ là

$$C_{11}^4 = 330 \text{ cách.}$$

Vậy có:

$$C_4^4 + C_5^4 + C_6^4 + C_{10}^4 + C_9^4 + C_{11}^4 = 687 \text{ (cách).}$$

Phân tích sai lầm.

Sai lầm 1. Cách giải sai ở chỗ đã tính lặp lại 2 lần số các viên cùng một màu đỏ hoặc cùng màu trắng hoặc cùng màu vàng.

Sai lầm 2. Cách giải này thay cho việc trừ đi số cách chọn lặp lại 2 lần số viên cùng một màu đỏ hoặc cùng màu trắng hoặc màu vàng thì học sinh lại cộng thêm vào. Trường hợp 2 chọn 4 viên có 2 màu, chẳng hạn chọn 4 viên không có màu trắng, cách làm có cả trường hợp 4 viên bi cùng một màu đã tích ở trường hợp 1 mà không trừ đi.

Lời giải đúng.

Cách 1 (chọn trực tiếp),.

- Số cách chọn 4 bi cùng một màu là:

$$C_4^4 + C_5^4 + C_6^4 = 1 + 5 + 15 = 21.$$

- Số cách chọn 4 bi chỉ có hai màu đỏ và trắng là:

$$C_4^2.C_5^2 + C_4^3.C_5^1 + C_4^1.C_5^3 = 6.10 + 4.5 + 4.10 = 120.$$

- Số cách chọn 4 bi chỉ có hai màu trắng và vàng là:

$$C_5^2.C_6^2 + C_5^3.C_6^1 + C_5^1.C_6^3 = 10.15 + 10.6 + 5.20 = 310.$$

- Số cách chọn 4 bi chỉ có hai màu vàng và đỏ là:

$$C_6^2.C_4^2 + C_6^3.C_4^1 + C_6^1.C_4^3 = 6.5 + 20.4 + 6.4 = 194.$$

Theo quy tắc cộng có: $120 + 310 + 194 = 645$ cách.

Cách 2 (chọn gián tiếp).

- Số cách chọn tuỳ ý 4 viên là C_{15}^4 cách.

- Tính số cách chọn 4 viên đủ 3 màu:

Trong đó có 2 đỏ, 1 trắng, 1 vàng l có:

$$C_4^2.C_5^1.C_6^1 \text{ cách.}$$

Trong đó có 1 đỏ, 2 trắng, 1 vàng l có:

$$C_4^1.C_5^2.C_6^1 \text{ cách.}$$

Trong đó có 1 đỏ, 1 trắng, 2 vàng l có:

$$C_4^1.C_5^1.C_6^2 \text{ cách.}$$

- Số cách chọn cần tìm là:

$$C_{15}^4 - (C_4^2.C_5^1.C_6^1 + C_4^1.C_5^2.C_6^1 + C_4^1.C_5^1.C_6^2) = 645 \text{ cách.}$$

Cách 3.

- Số cách chọn 4 viên có 2 màu:

Số cách chọn 4 viên không có màu trắng là:

$$C_{10}^4 - C_4^4 - C_6^4 \text{ cách.}$$

Số cách chọn 4 viên không có màu vàng là:

$$C_9^4 - C_4^4 - C_5^4 \text{ cách.}$$

Số cách chọn 4 viên không có màu đỏ là:

$$C_{11}^4 - C_5^4 - C_6^4 \text{ cách.}$$

- Số cách chọn 4 viên chỉ có một màu:

$$C_4^4 + C_5^4 + C_6^4 \text{ cách.}$$

Vậy có:

$$C_{10}^4 + C_9^4 + C_{11}^4 - (C_4^4 + C_5^4 + C_6^4) = 645 \text{ (cách).}$$

(Kỳ sau đăng tiếp)

GIỚI THIỆU PHƯƠNG PHÁP KHỬ GAUSS

ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN VÀ ÁP DỤNG

TRẦN MINH VŨ (*GV THPT Trần Cao Vân, Gia Lai*)
NGUYỄN DUY CHIẾN (*GV THPT Phan Bội Châu, Bình Định*)

Lời dẫn: Trong chương trình giáo dục Phổ thông mới năm 2018, phương pháp khử Gauss được giảng dạy vào lớp 10. Đây là nội dung quan trọng, ở chương trình cũ thì phương pháp khử Gauss không được nói chi tiết, chỉ là giới thiệu và hướng dẫn sử dụng máy tính bỏ túi để giải hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn. Vì vậy để giúp giáo viên và học sinh có cách nhìn tốt hơn về nội dung này, chúng tôi xin trình bày chi tiết phương pháp giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn bằng phương pháp khử Gauss. Trong bài viết chúng tôi thống nhất ký hiệu $(a).n \pm (b)m$ chính là lấy phương trình (a) nhân thêm n cộng hoặc trừ cho phương trình (b) nhân với m.

1. Phương pháp Gauss

• Kết quả quan trọng

Với mọi hệ phương trình n ẩn $x_1; x_2; ...; x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ..... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

Ta luôn biến đổi được bằng phương pháp khử Gauss để đưa về được hệ phương trình tương đương sau

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + ... + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ ..... \\ \qquad\qquad a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases} \quad (\mathrm{II})$$

Định lý. *Hệ phương trình (II) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a'_{11}.a'_{22}...a'_{nn} \neq 0$. Ngược lại nếu $a'_{11}.a'_{22}...a'_{nn} = 0$ thì hệ (II) vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.*

Thí dụ 1. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 & (1) \\ x + 2y = 3 & (2) \end{cases}.$$

Lời giải. Thực hiện thao tác $(1).1-(2).2$ và giữ nguyên phương trình đầu ta được hệ tương đương

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -7y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 + 3y \\ y = \dfrac{5}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{7} \\ y = \dfrac{5}{7} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{11}{7}; \dfrac{5}{7}\right)$.

Thí dụ 2. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} -4x + 5y = -3 & (1) \\ 7x + 3y = 8 & (2) \end{cases}.$$

Lời giải. Thực hiện thao tác $(1).7+(2).4$ và giữ nguyên phương trình đầu ta được hệ tương đương

$$\begin{cases} -4x + 5y = -3 \\ 47y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x = -3 - 5y \\ y = \dfrac{11}{47} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{49}{47} \\ y = \dfrac{11}{47} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\left(\frac{49}{47}; \frac{11}{47}\right).$$

Thí dụ 3. *Tìm m để hệ phương trình*

$$\begin{cases}(m-1)x-y=m+2 & (1)\\(m+1)x+2y=m-5 & (2)\end{cases}$$

có nghiệm duy nhất.

Lời giải. Thực hiện thao tác $(1).(m+1)-(2).(m-1)$ và giữ nguyên phương trình đầu ta được hệ tương đương

$$\begin{cases}(m-1)x-y=m+2\\-(3m-1)y=3(3m-1)\end{cases}.$$

Do đó để hệ có nghiệm duy nhất thì

$$(m-1)(3m-1)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 1\\m\neq \dfrac{1}{3}\end{cases}.$$

Thí dụ 4. *Tìm m để hệ phương trình* $\begin{cases}mx+2y=m & (1)\\(m-1)x+(m-1)y=1 & (2)\end{cases}$ *có nghiệm nguyên.*

Lời giải. Thực hiện thao tác $(1).(m-1)-(2).m$ và giữ nguyên phương trình đầu ta được hệ tương đương

$$\begin{cases}mx+2y=m\\(-m^2+3m-2)y=m^2-2m & (3)\end{cases}$$

Đề bài yêu cầu có nghiệm nguyên thì không cần thiết phải có nghiệm duy nhất nên ta có các lập luận trong trường hợp $m(-m^2+3m-2)=0$ như sau.

- Nếu $m=0$ thì hệ có có vô số nghiệm có dạng $(x,0)$ nên thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Nếu $m=1$ thì phương trình (3) vô nghiệm nên hệ đã cho vô nghiệm.
- Nếu $m=2$ thì phương trình (3) thỏa mãn với mọi y, và từ phương trình (1) suy ra được $x=1-y$. Do đó hệ sẽ có nghiệm nguyên dạng $(1-y;y), y\in\mathbb{Z}$.

Nếu $m(-m^2+3m-2)\neq 0$ thì từ phương trình (3) ta suy ra được

$$y=\frac{m^2-2m}{-m^2+3m-2}=\frac{m(m-2)}{(m-2)(-m+1)}$$
$$=\frac{m}{-m+1}$$
$$=-1+\frac{1}{-m+1}.$$

Để hệ có nghiệm nguyên thì trước hết y là nghiệm nguyên, suy ra $-m+1$ là ước của 1. Điều đó xảy ra 2 trường hợp

- $-m+1=1\Leftrightarrow m=0$, trường hợp này đã xét ở trên.
- $-m+1=-1\Leftrightarrow m=2$ trường hợp này đã xét ở trên.

Do đó để hệ có nghiệm nguyên thì $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2.\end{array}\right.$

Thí dụ 5. *Tìm tất cả các cặp $(a;b)$ sao cho hệ phương trình* $\begin{cases}ax+y=2 & (1)\\6x+by=4 & (2)\end{cases}$ *có vô số nghiệm?*

Lời giải. Thực hiện thao tác $(1).6-(2).a$ và giữ nguyên phương trình đầu ta được hệ tương đương

$$\begin{cases}ax+y=2\\6x+by=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ax+y=2\\(6-ab)y=4(3-a) & (3)\end{cases}$$

Để hệ vô nghiệm, ta xét trường hợp $a(6-ab)=0$. Do đó có các khả năng sau

- $a=0$, từ (1) suy ra $y=2$, thay vào (2) ta tìm ra $x=\dfrac{2-b}{3}$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất nếu $a=0$.
- $ab=6$, từ (3) suy ra hệ có vô số nghiệm thì $a=3$, do đó $b=2$.

Vậy hệ sẽ có vô số nghiệm nếu $\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$, và khi đó các nghiệm của hệ có tọa độ nằm trên đường thẳng $3x+y=2$.

Thí dụ 6. *Xác định a để tổng $x_0^2+y_0^2$ đạt giá trị nhỏ nhất biết $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình* $\begin{cases}3x-y=2-a & (1)\\x+2y=a+1 & (2)\end{cases}.$

Lời giải. Thực hiện thao tác $(1).1-(2).3$ và giữ nguyên phương trình thứ hai ta được hệ tương đương

$$\begin{cases} x+2y=a+1 \\ -7y=-4a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+1-2\left(\dfrac{4a+1}{7}\right) \\ y=\dfrac{4a+1}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5-a}{7} \\ y=\dfrac{4a+1}{7} \end{cases}.$$

Do vậy

$$x_0^2+y_0^2=\left(\frac{5-a}{7}\right)^2+\left(\frac{4a+1}{7}\right)^2$$

$$=\frac{17a^2-2a+26}{49}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{17}a-\dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)^2+26-\dfrac{1}{17}}{49}.$$

Ta kết luận tổng $x_0^2+y_0^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $a=\dfrac{1}{17}$.

Thí dụ 7. *Giải hệ phương trình sau*

$$\begin{cases} -x+5y+z=2 & (1) \\ 2x-9y+2z=8 & (2). \\ 3x-4y+z=5 & (3) \end{cases}$$

Lời giải. Thực hiện các thao tác $(1).2+(2).1$; $(1).3+(3).1$ và giữ nguyên phương trình đầu ta được hệ tương đương

$$\begin{cases} -x+5y+z=2 \\ y+4z=12 & (4). \\ 11y+4z=11 & (5) \end{cases}$$

Thực hiện các thao tác $(4).11-(5).1$ ta được hệ tương đương

$$\begin{cases} -x+5y+z=2 \\ y+4z=12 \\ 40z=121 & (6) \end{cases}.$$

Giải từ (6) ta được $z=\dfrac{121}{40}$, thay vào và giải (4) ta được $y=\dfrac{-1}{10}$ rồi thay chúng vào (1) ta được $x=\dfrac{21}{40}$.

Do đó hệ có nghiệm $x=\dfrac{21}{40}; y=\dfrac{-1}{10}; z=\dfrac{121}{40}$.

Thí dụ 8. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 5x+y-4z=2 \\ x-y-z=-1 \\ 3x+3y-2z=4 \end{cases}.$$

Lời giải. Trước hết ta đổi chỗ phương trình thứ nhất và phương trình thứ hai

$$\begin{cases} x-y-z=-1 & (1) \\ 5x+y-4z=2 & (2). \\ 3x+3y-2z=4 & (3) \end{cases}$$

Thực hiện các thao tác $(1).5-(2).1$; $(1).3-(3).1$ ta được hệ

$$\begin{cases} x-y-z=-1 \\ -6y-z=-7 & (4). \\ -6y-z=-7 & (5) \end{cases}$$

Làm gọn khi thấy có hai phương trình giống nhau, ta được hệ tương đương

$$\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 6y+z=7. \end{cases}$$

Rút z theo y từ phương trình thứ hai của hệ ta được $z=7-6y$. Thế vào phương trình thứ nhất ta được $x=-5y+6$. Vậy hệ đã cho có vô số nghiệm và tập nghiệm của hệ là

$$S=\{(-5t+6;t;7-6t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}.$$

Thí dụ 9. *Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau vô nghiệm*

$$\begin{cases} x+y+3z=m & (1) \\ mx+y+5z=4 & (2). \\ x+my+4z=m & (3) \end{cases}$$

Lời giải. Thực hiện các thao tác $(1).m-(2).1$; $(1).1-(3).1$ và giữ nguyên phương trình đầu ta được hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x+y+3z=m \\ (m-1)y+(3m-5)z=m^2-4 & (4) \\ (1-m)y-z=0 & (5) \end{cases}$$

Thực hiện các thao tác $(4).1+(5).1$ ta được hệ

$$\begin{cases} x+y+3z=m \\ (m-1)y+(3m-5)z=m^2-4 & (6) \\ 3(m-2)z=m^2-4 & (7) \end{cases}$$

Do đó để hệ vô nghiệm, ta xét các trường hợp: $(m-1)(m-2)=0$.

- Trường hợp 1: $m=1$, từ phương trình (5) ta được $z=0$, thay vào (4) ta thấy không thỏa mãn. Vì vậy $m=1$ là một giá trị cần tìm.
- Trường hợp 2: $m=2$, từ phương trình (7) ta thấy thỏa mãn với mọi z, từ (7) ta được $y=-z$.

Cuối cùng thay vào (1) ta được $x=-2z+2$.

Vậy hệ có vô số nghiệm, với tập nghiệm $S=\{(-2t+2;-t;t)|t\in\mathbb{R}\}$.

2. Áp dụng để giải các dạng toán khác

Trong nội dung này, các thí dụ đưa ra sẽ được tinh giản về cách chứng minh, nghĩa là bạn đọc có thể tìm được nhiều cách chứng minh khác. Tuy nhiên chúng tôi chỉ sử dụng phép đổi và bất đẳng thức Cauchy (BĐT AM-GM) được học ở chương trình lớp 9, lớp 10 hiện nay.

Thí dụ 10. *Cho a,b là 2 số dương bất kỳ. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{3a+5b}+\frac{b}{3b+5a}\ge\frac{1}{4}.$$

Lời giải. Ta đặt

$$\begin{cases} 3a+5b=x & (1) \\ 3b+5a=y & (2) \end{cases} \quad (x>0, y>0).$$

Ta sẽ giải hệ trên để tìm ra a,b theo các biến mới vừa đặt. Thực hiện thao tác $(1).3-(2).5$, ta được

$$\begin{cases} 3a+5b=x \\ -16a=3x-5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{5x-3y}{16} \\ a=\dfrac{-3x+5y}{16} \end{cases}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{-3x+5y}{16x}+\frac{-3y+5x}{16y}\ge\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{5}{16}\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\ge\frac{5}{8}.$$

Tới đây áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương, ta có

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\ge 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y\Leftrightarrow a=b$.

Thí dụ 11. *Cho a,b,c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}.$$

Lời giải. Ta đổi biến để thuận lợi cho việc khai thác mẫu của các phân số. Ta đặt

$$\begin{cases} a+b=x \\ b+c=y \\ c+a=z. \end{cases}$$

Ta sẽ giải hệ trên để tìm ra a,b,c theo các biến mới vừa đặt.

$$\begin{cases} a+b=x\ (1) \\ b+c=y\ (2) \\ a+c=z\ (3) \end{cases} \overset{(1)-(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a+b=x \\ b+c=y \\ b-c=x-z\ (4) \end{cases}$$

$$\overset{(2)-(4)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a+b=x \\ b+c=y \\ 2c=y-x+z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{x-y+z}{2} \\ b=\dfrac{x+y-z}{2} \\ c=\dfrac{-x+y+z}{2} \end{cases}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x-y+z}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}+\frac{-x+y+z}{2x}\ge\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2y}+\frac{z}{2y}+\frac{x}{2z}+\frac{y}{2z}+\frac{y}{2x}+\frac{z}{2x}\ge 3.$$

Tới đây áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 6 số dương, ta có

$$\frac{x}{2y}+\frac{z}{2y}+\frac{x}{2z}+\frac{y}{2z}+\frac{y}{2x}+\frac{z}{2x}$$

$$\ge \frac{1}{2}.6\sqrt[6]{\frac{x}{y}.\frac{z}{y}.\frac{x}{z}.\frac{y}{z}.\frac{y}{x}.\frac{z}{x}}=3.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c$.

Thí dụ 12. *Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác bất kỳ. Chứng minh rằng*

$$abc \ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Lời giải. Ta đổi biến để thuận lợi cho việc khai thác tích ở vế trái. Ta đặt

$$\begin{cases} a+b-c=x \\ b+c-a=y \\ c+a-b=z. \end{cases}$$

Ta sẽ giải hệ trên để tìm ra a,b,c theo các biến mới vừa đặt.

$$\begin{cases} a+b-c=x \quad (1) \\ -a+b+c=y \ (2) \\ a-b+c=z \quad (3) \end{cases} \overset{(1)+(2)}{\underset{(2)+(3)}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} a+b-c=x \\ 2b=x+y \\ 2c=y+z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{z+x}{2} \\ b=\dfrac{x+y}{2}. \\ c=\dfrac{y+z}{2} \end{cases}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz.$$

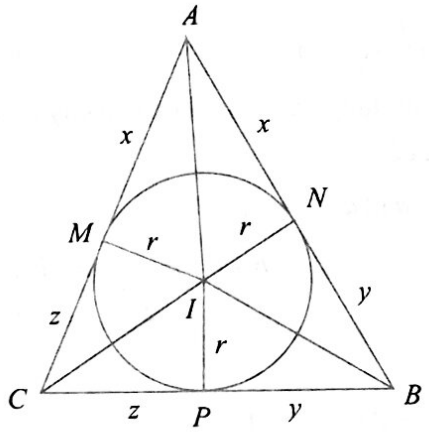
Tới đây áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số, ta có

$$(x+y)\ge 2\sqrt{xy};(y+z)\ge 2\sqrt{yz};(z+x)\ge 2\sqrt{zx}.$$

Ta có điều phải chứng minh khi nhân các bất đẳng thức cùng chiều trên. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c$.

Thí dụ 13. *Cho tam giác ABC có $BC=a, AC=b, AB=c$ và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. Biết rằng $\cot^2\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}=\frac{b^2c^2}{16r^4}$, chứng minh rằng tam giác đã cho là tam giác đều.*

Lời giải.



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC (là giao điểm của 3 đường phân giác).

Hạ IM, IN, IP lần lượt vuông góc với các cạnh AC, AB, BC. Đặt $AM = AN = x$; $BN = BP = y$; $CM = CP = z$. Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} x+y=c \ (1) \\ y+z=a \ (2) \\ z+x=b \ (3) \end{cases} \overset{(1)-(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y=c \\ y+z=a \\ y-z=c-b \ (4) \end{cases}$$

$$\overset{(2)+(4)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y=c \\ y+z=a \\ 2y=a+c-b \ (4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{b+c-a}{2} \\ z=\dfrac{a+b-c}{2}. \\ y=\dfrac{a+c-b}{2} \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\cot\frac{A}{2}=\frac{AM}{r}=\frac{b+c-a}{2r};$$

$$\cot\frac{B}{2}=\frac{a+c-b}{2r};$$

$$\cot\frac{C}{2}=\frac{a+b-c}{2r}.$$

Do đó từ giả thuyết ta có

$$\cot^2\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}=\frac{b^2c^2}{16r^4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b+c-a)^2.(a+c-b)(a+b-c)}{16r^4}=\frac{b^2c^2}{16r^4}.$$

Ta được $(b+c-a)^2.(a+c-b)(a+b-c)=b^2c^2$.

Lần lượt áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta có

$$(b+c-a).(a+c-b)\le\left(\frac{b+c-a+a+c-b}{2}\right)^2=c^2$$

và

$$(b+c-a)(a+b-c)\le\left(\frac{b+c-a+a+b-c}{2}\right)^2=b^2.$$

Do đó

$$(b+c-a)^2.(a+c-b)(a+b-c)\le b^2c^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hay tam giác đã cho là tam giác đều.

Thí dụ 14. *Tìm hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(x)+xf(-x)=x+1,\forall x\in\mathbb{R}\ (1).$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn phương trình đã cho.

Trong (1), ta thay $t=-x$, ta được: $f(-t)-tf(-t)=-t+1,\forall t\in\mathbb{R}$. Đổi biến trở lại ta có phương trình

$$-xf(x)+f(-x)=-x+1,\forall x\in\mathbb{R}\ (2).$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}f(x)+xf(-x)=x+1\\-xf(x)+f(-x)=-x+1\end{cases}$$

$$\overset{(1)-(2).x}{\Rightarrow}(1+x^2)f(x)=1+x^2\Rightarrow f(x)=1.$$

Thử lại hàm số cần tìm là:

$$f(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thí dụ 15. *Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x,\ \forall x\in\mathbb{R}^*\ (1).$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn phương trình đã cho.

Trong (1), ta thay $u=\frac{x-1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{1-u}$, ta được:

$$f\left(\frac{1}{1-u}\right)+f(u)=\frac{2-u}{1-u}\ (2).$$

Đổi biến trở lại ta được

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2-x}{1-x}\ (3).$$

Trong (1), ta thay $v=\frac{1}{1-x}\Rightarrow x=\frac{v-1}{v}$, ta được:

$$f\left(\frac{v-1}{v}\right)+f\left(\frac{1}{1-v}\right)=\frac{2v-1}{v}\ (4)$$

Đổi biến trở lại ta có phương trình

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2x-1}{x}\ (5).$$

Ký hiệu $a=f(x);\ b=f\left(\frac{1}{1-x}\right);$

$$c=f\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

Từ (1), (3) và (5), ta có hệ

$$\begin{cases}a+c=1+x\\a+b=\frac{2-x}{1-x}\\b+c=\frac{2x-1}{x}.\end{cases}$$

Giải hệ này bằng phương pháp Gauss ta được

$$a=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right).$$

Thử lại với $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)$, thấy thỏa mãn đề bài. Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right),\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}.$$

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 92

PROBLEM. *An empty fuel tank is filled using a cylindrical pipe with diameter* 8 cm. *Fuel flows along this pipe at a rate of* 2 metres per second. *It takes* 24 minutes *to fill the tank. Calculate the capacity of the tank. Give your answer in* litres.

***Remark*:** This problem is collected from a IGCSE past paper.

***Solution*:** In 1 second, the amount of water runs into the tank is equal to the volume of a cylinder with diameter 8 cm and height 2 metres. This amount is

$$V = hB = 200 \times \pi \times 4^2 \ (\text{cm}^3).$$

Therefore in 24 minutes, the amount of water runs into the tank is

$$24 \times 60 \times 200 \times \pi \times 4^2 \approx 14476459 \ (\text{cm}^3)..$$

Thus the capacity of the tank is about 14476.5 litres.

TỪ VỰNG

cylindrical pipe	*: ống dạng hình trụ*
diameter	*: đường kính*
capacity	*: dung tích*

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science–Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 90

BÀI TOÁN. *Xét tập hợp S gồm tất cả các tam giác vuông với hai cạnh góc vuông có độ dài là các số tự nhiên. Chứng minh rằng tích độ dài các cạnh huyền của hai tam giác bất kì trong tập S lại là độ dài của cạnh huyền của của một tam giác vuông nào đó trong S (chú ý rằng ta tập trung vào các giá trị, không phải đơn vị đo của các độ dài).*

Lời giải. Một cách tương đương, ta chứng minh rằng với 4 số nguyên dương bất kì m, n, p, q luôn tồn tại 2 số nguyên dương a, b sao cho

$$\sqrt{m^2+n^2} \times \sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

hay $(m^2 + n^2)(p^2 + q^2) = a^2 + b^2$ (*).

Xét các số phức $z = m + ni$ và $w = p + qi$. Ta có thể chứng minh được hai tính chất sau:

1) $m^2+n^2 = z.\overline{z}$ với $\overline{z} = m - ni$ là số phức liên hợp của số phức z;

2) Số phức liên hợp của một tích hai số phức bằng tích của hai số phức liên hợp $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$.

Bây giờ kí hiệu L là vế trái của (*). Từ (1) có thể viết $L = (z.\overline{z})(w.\overline{w})$. Ta có thể sắp xếp lại để được $L = (z.w)(\overline{z}.\overline{w})$. Từ (2) có $L = (z.w)(\overline{z.w})$.

Tính tích $z.w$; và giả sử rằng $zw = a + bi$ với a, b là các số nguyên dương. Tiếp tục sử dụng (1) ta thấy $L = a^2 + b^2$ (điều phải chứng minh).

Nhận xét. Các bạn *Nguyễn Quốc Hoàng Anh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Trần Thị Thanh Thư*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định**; *Nguyễn Văn Cảnh*, GV THCS Long Hậu, xã Long Hậu, huyện Cần Giuộc, **Long An** có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm. Xin hoan nghênh tất cả các bạn.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 71. *Cho m số thực dương* $a_1, a_2, ..., a_m, m \in \mathbb{N}; m \geq 2$ *và* $S = a_1 + a_2 + ... + a_m$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + ... + \frac{a_m}{S-a_m} \geq \frac{m}{m-1}.$$

Lời giải. Cách 1.

Đặt $P = \frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + ... + \frac{a_m}{S-a_m}$. Ta có:

$$SP = S.\left(\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + ... + \frac{a_m}{S-a_m}\right)$$

$$= \frac{a_1^2}{S-a_1} + \frac{a_2^2}{S-a_2} + ... + \frac{a_m^2}{S-a_m} + S$$

nên theo bất đẳng thức Schwarz ta có:

$$S.P \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_m)^2}{m.S - (a_1 + a_2 + ... + a_m)} + S$$

$$= \frac{S^2}{(m-1)S} + S = \frac{m.S}{m-1} \Rightarrow P \geq \frac{m}{m-1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_m$. Bài toán được chứng minh.

Cách 2. Đặt $P = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{S-a_i}$, $T = \sum_{i=1}^{m} \frac{S-a_i}{S} = m-1$, $Q = \sum_{i=1}^{m} \frac{S}{S-a_i} = P + m$. Theo bất đẳng thức Schwarz ta có:

$$T.Q \geq m^2 \Rightarrow (m-1)(P+m) \geq m^2 \Leftrightarrow P \geq \frac{m}{m-1}.$$

Cách 3. Đặt $P = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{S-a_i}$, $T = \sum_{i=1}^{m} \frac{S-a_i}{S} = m-1$,

$$Q = \sum_{i=1}^{m} \frac{S}{S-a_i} = P + m.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$T = \sum_{i=1}^{m} \frac{S-a_i}{S} \geq m\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{S-a_i}{S}\right)},$$

$$Q = \sum_{i=1}^{m} \frac{S}{S-a_i} \geq m\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{S}{S-a_i}\right)}.$$

Suy ra: $T.Q \geq m^2$ hay

$$(m-1)(P+m) \geq m^2$$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{m}{m-1}.$$

Cách 4. Dễ thấy

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{S-a_i} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{a_i}{S-a_i} + 1\right) - m = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{S}{S-a_i}\right) - m$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{1-\frac{a_i}{S}}\right) - m.$$

Theo bất đẳng thức Schwarz thì

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{1-\frac{a_i}{S}}\right) \geq \frac{m^2}{m - \sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{S}} = \frac{m^2}{m-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{S-a_i} \geq \frac{m^2}{m-1} - m = \frac{m}{m-1}.$$

Cách 5. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau

$$\frac{ma_1 - S}{(m-1)(S-a_1)} + \frac{ma_2 - S}{(m-1)(S-a_2)} + ... + \frac{ma_m - S}{(m-1)(S-a_m)} \geq 0;$$

$$\Leftrightarrow \frac{ma_1 - S}{S-a_1} + \frac{ma_2 - S}{S-a_2} + ... + \frac{ma_m - S}{S-a_m} \geq 0 \quad (*).$$

Bây giờ ta đi chứng minh (*)

Vì bất đẳng thức đề ra và (*) đều là bất đẳng thức đối xứng, không mất tính tổng quát ta giả sử

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_m > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ma_1 - S \geq ma_2 - S \geq ... \geq ma_m - S \\ \frac{1}{S-a_1} \geq \frac{1}{S-a_2} \geq ... \geq \frac{1}{S-a_m} > 0 \end{cases}.$$

Theo bất đẳng thức Chebyshev ta có:

$$VT(*) \geq \frac{1}{m}(ma_1 - S + ma_2 - S + \ldots + ma_m - S) \times$$
$$\times \left(\frac{1}{S-a_1} + \frac{1}{S-a_2} + \ldots + \frac{1}{S-a_m} \right) = 0.$$

Cách 6. Dễ thấy với $X > -1$ thì

$$(X-\alpha)^2 \geq 0 \Leftrightarrow X \geq \frac{(2\alpha+1)X - \alpha^2}{X+1}.$$

Từ $\left[\frac{a_i}{S-a_i} - \frac{1}{(m-1)} \right]^2 \geq 0;\ \forall i = \overline{1,m},$ theo bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a_i}{S-a_i} \geq \frac{\left[2.\frac{1}{(m-1)}+1\right]\frac{a_i}{S-a_i} - \left(\frac{1}{m-1}\right)^2}{\frac{a_i}{S-a_i}+1}, \forall i = \overline{1,m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_i}{S-a_i} \geq \frac{(m+1)(m-1)a_i - (S-a_i)}{(m-1)^2 S}$$

$$= \frac{m^2 a_i - S}{(m-1)^2 S};\ \forall i = \overline{1,m}.$$

Vậy

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{S-a_i} \geq \sum_{i=1}^{m} \frac{m^2 a_i - S}{(m-1)^2 S} = \frac{(m^2-m)S}{(m-1)^2 S}$$

$$= \frac{m}{m-1}.$$

Cách 7.

Với m số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_m$, theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$x_1^m + (m-1)x_2^m \geq m x_1 x_2^{m-1};$$

$$x_1^m + (m-1)x_3^m \geq m x_1 x_3^{m-1};$$

$$x_1^m + (m-1)x_m^m \geq m x_1 x_m^{m-1}$$

$$\Rightarrow (m-1)\left(x_1^m + x_2^m + \ldots + x_m^m\right)$$
$$\geq m x_1 \left(x_2^{m-1} + x_3^{m-1} + \ldots + x_m^{m-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^{m-1}}{\left(x_2^{m-1} + x_3^{m-1} + \ldots + x_m^{m-1}\right)} \geq \frac{m x_1^m}{(m-1)\left(x_1^m + x_2^m + \ldots + x_m^m\right)}.$$

Tương tự:

$$\frac{x_2^{m-1}}{\left(x_1^{m-1} + x_3^{m-1} + \ldots + x_m^{m-1}\right)} \geq \frac{m x_2^m}{(m-1)\left(x_1^m + x_2^m + \ldots + x_m^m\right)};$$

.....

$$\frac{x_m^{m-1}}{\left(x_1^{m-1} + x_2^{m-1} + \ldots + x_{m-1}^{m-1}\right)} \geq \frac{m x_m^m}{(m-1)\left(x_1^m + x_2^m + \ldots + x_m^m\right)}.$$

Cộng vế với vế của m bất đẳng thức trên rồi rút gọn và đặt $a_i = x_i^{m-1}\ \forall i = \overline{1,m}$, sẽ được bài toán cần chứng minh.

Lời bình. *Bài toán trên không khó, tuy nhiên nếu chúng ta chịu khó tìm tòi ra những cách giải mới thì sẽ tiếp cận và phát hiện được nhiều phương pháp mới đa dạng, qua đó giúp xử lý bài toán trở nên linh hoạt hơn. Trên đây là một số cách của tác giả, hy vọng nhận được sự đóng góp nhiều hơn từ bạn đọc trong cả nước.*

ĐÀO VĂN NAM

(*GV TH&THCS May Academy Hoàng Mai, Hà Nội*)

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đóng góp 6 cách giải tương tự như các cách giải của bạn *Đào Văn Nam*, người đề xuất bài toán 71. Bạn *Nguyễn Văn Cảnh*, GV THCS Long Hậu, Cần Giuộc, **Long An** đóng góp 2 cách giải: cách 1 như cách 1 trong lời giải trên, cách 2 sử dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm lồi $f(x) = \frac{x}{S-x}$ $(0 < x < S)$.

Xin hoan nghênh hai bạn.

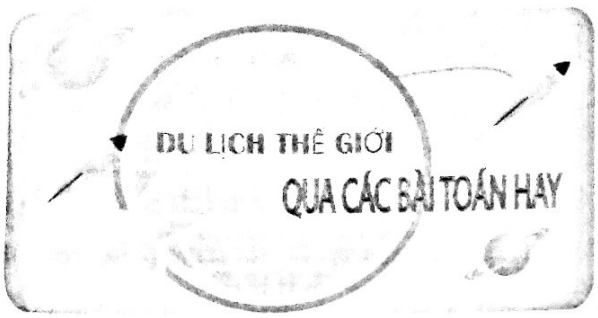
LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 73 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.6.2023.

BÀI TOÁN 73. *Cho hình vuông ABCD. Gọi E là điểm nằm giữa hai điểm D và C. Tia phân giác của góc $\widehat{ABE}$ cắt AD tại K. Chứng minh rằng BE = AK + CE.*

ĐÀO QUỐC CHUNG

(*GV THCS Vạn Phong, Diễn Châu, Nghệ An*)



BÀI TOÁN 80 (AMC10, 2020). *Có bao nhiêu số nguyên dương $n \le 1000$ thỏa mãn*

$$\left[\frac{998}{n}\right]+\left[\frac{990}{n}\right]+\left[\frac{1000}{n}\right]$$

không chia hết cho 3.

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh bổ đề

Bổ đề. Với mỗi số tự nhiên n, N, khi đó:

Nếu $N \vdots n$ thì $\left[\frac{N}{n}\right]=\left[\frac{N-1}{n}\right]+1$;

Nếu $N \not\vdots n$ thì $\left[\frac{N}{n}\right]=\left[\frac{N-1}{n}\right]$.

Chứng minh. Đặt $N = nk + r$ với $0 \le r \le n-1$.

- Nếu $N \vdots n$ thì $r = 0$, suy ra: $\left[\frac{N}{n}\right]=k$ và

$$\left[\frac{N-1}{n}\right]=\left[\frac{(k-1)n+n-1}{n}\right]=k-1+\left[\frac{n-1}{n}\right]=k-1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{N}{n}\right]=\left[\frac{N-1}{n}\right]+1.$$

- Nếu $N \not\vdots n$ thì $1 \le r \le n-1 \Rightarrow \left[\frac{N}{n}\right]=k$ và

$$\left[\frac{N-1}{n}\right]=\left[\frac{nk+r-1}{n}\right]=k+\left[\frac{r-1}{n}\right]=k$$

$\Rightarrow \left[\frac{N}{n}\right]=\left[\frac{N-1}{n}\right]$. Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán.

Đặt $A=\left[\frac{998}{n}\right]+\left[\frac{990}{n}\right]+\left[\frac{1000}{n}\right]$.

Dễ thấy $n = 1$ thì $A \vdots 3$, ta không xét trường hợp này. Từ bổ đề trên ta có các trường hợp sau:

TH1: $\left[\frac{998}{n}\right]+1=\left[\frac{999}{n}\right]=\left[\frac{1000}{n}\right]-1$. Trường hợp này n là ước của 999, suy ra $A \vdots 3$ (loại).

TH2: $\left[\frac{998}{n}\right]=\left[\frac{999}{n}\right]=\left[\frac{1000}{n}\right]$. Trường hợp này $A \vdots 3$ (loại).

TH3: $\left[\frac{998}{n}\right]+1=\left[\frac{999}{n}\right]+1=\left[\frac{1000}{n}\right]$. Trường hợp này $999 \not\vdots n$ và $1000 \vdots n$. Vì $1000 = 2^3.5^3$ nên số giá trị n thỏa mãn bài toán là:

$$(3+1)(3+1) - 1=15 \text{ (do } n \ne 1).$$

TH4: $\left[\frac{998}{n}\right]+1=\left[\frac{999}{n}\right]=\left[\frac{1000}{n}\right]$. Trường hợp này $999 \vdots n$ và $1000 \not\vdots n$. Vì $999 = 3^3.37$ nên số giá trị n thỏa mãn bài toán là:

$$(3+1)(1+1) - 1= 7 \text{ (do } n \ne 1).$$

Vậy tổng các giá trị n thỏa mãn bài toán là

$$15 + 7 = 22.$$

Nhận xét. Các bạn *Đào Văn Nam*, GV TH&THCS May Academy Hoàng Mai, **Hà Nội**; *Nguyễn Văn Cảnh*, GV THCS Long Hậu, xã Long Hậu, huyện Cần Giuộc, **Long An**; *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** cũng có lời giải tương tự như lời giải trên. Xin hoan nghênh ba bạn.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.6.2023.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 82. *Cho P là điểm cố định nằm bên trong một hình cầu cho trước. Ba đoạn thẳng PA, PB, PC vuông góc đôi một có ba đầu mút A, B, C nằm trên mặt cầu. Gọi Q là đầu mút thứ hai của đường chéo PQ của hình hộp chữ nhật mà ba cạnh là PA, PB, PC. Tìm quỹ tích của điểm Q khi ba điểm A, B, C chạy trên mặt cầu.*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP: ĐÁP ÁN NÀO?

(Đề đăng trên TH&TT số 547, tháng 1 năm 2023)

Phân tích sai lầm. Lập luận của bạn *Cẩm Tú* sai ở chỗ "*Do đó, đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng khi phương trình* (1) *có đúng một nghiệm, điều này tương đương với PT*(1) *có nghiệm kép*".

Lời giải đúng. Ta biết, $x = x_0$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x^2-2x+m}$ khi $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{x-2}{x^2-2x+m} = \pm\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{x-2}{x^2-2x+m} = \pm\infty$, suy ra x_0 là một nghiệm của phương trình $x^2-2x+m=0$ (1).

Do đó, đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng khi PT(1) có đúng một nghiệm x_0, thoả mãn $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{x-2}{x^2-2x+m} = \pm\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{x-2}{x^2-2x+m} = \pm\infty$.

Khi đó ta xét hai trường hợp sau:

TH1: PT(1) có nghiệm kép. Ta có: $\Delta' = 1-m = 0$ $\Leftrightarrow m = 1$. Với $m = 1$ ta có: $y = \dfrac{x-2}{x^2-2x+1}$ và $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x^2-2x+1} = -\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng duy nhất của đồ thị hàm số đã cho. Vậy $m = 1$ thoả yêu cầu bài toán.

TH2: PT (1) có hai nghiệm phân biệt.

Ta có: $\Delta' = 1-m > 0 \Leftrightarrow m < 1$. Khi đó, PT(1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Khi $x \to x_i\ (i = 1,2)$ ta có: $x-2 \to x_i - 2\ (i=1,2)$ và $x^2-2x+m \to 0$. Do đó, nếu $x_i - 2 \neq 0\ (i=1,2)$ thì $x = x_1, x = x_2$ là hai tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-2}{x^2-2x+1}$.

Vậy để đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng thì $x_1 = 2$ hoặc $x_2 = 2$ hay $x = 2$ là một nghiệm của PT(1).

Khi $x = 2$ là một nghiệm của phương trình (1) ta có $2^2 - 2.2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Với $m = 0$, ta có phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x = 2, x = 0$ và $y = \dfrac{x-2}{x^2-2x}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 2$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-2}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Trong TH2, $m = 0$ thoả yêu cầu bài toán. Vậy có hai giá trị m thoả mãn yêu cầu bài toán. Chọn đáp án **B**.

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** và bạn *Trần Thị Thanh Thư*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Xin hoan nghênh hai bạn.

KIHIVI

KẾT QUẢ NÀO ?

Bài toán. *Tổng bình phương tất cả các giá trị của tham số m để hàm số* $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ *có hai điểm cực trị* x_1, x_2 *thỏa mãn* $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 + 3x_1^2x_2^2 = 3$ *bằng*

A. 2 **B.** 10 **C.** 1 **D.** 9.

Bạn Hân đưa ra lập luận như sau: Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$, tức là x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $3x^2 - 6x + m = 0$. Theo định lý Viète ta có: $x_1 + x_2 = 2$; $x_1x_2 = \dfrac{m}{3}$. Vì vậy:

$$x_1 + x_2 - 2x_1x_2 + 3x_1^2x_2^2 = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{2m}{3} + \frac{m^2}{3} = 3$$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1, m = 3$. Vì thế: $(-1)^2 + 3^2 = 10$. Chọn **B**.

Các bạn có tìm ra kết quả như vậy không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 551 (5.2023)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

Năm 2010
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 240.000 đồng

Năm 2022
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 260.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
TẬP TRUNG MỌI NGUỒN LỰC ĐỂ CUNG ỨNG SÁCH GIÁO KHOA

Hiện nay, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đang tập trung mọi nguồn lực in sách giáo khoa (SGK) để kịp thời phát hành đến các địa phương trước năm học mới.

Tập trung và khẩn trương trong mọi công đoạn

Toàn hệ thống NXBGDVN hiện đang nỗ lực triển khai in gấp, nhập nhanh để có sách giáo khoa (SGK) đồng bộ dự kiến phát hành từ ngày 1/5/2023. Riêng đối với SGK lớp 4, 8,11 mới, NXBGDVN dự kiến phát hành từ ngày 15/6/2023.

Để đảm bảo đủ SGK phục vụ kịp thời năm học 2023-2024, NXBGDVN đang triển khai in đồng thời trên cả nước đối với các SGK tái bản; chuẩn bị sẵn vật tư để tiến hành in SGK lớp 4,8,11 ngay khi có kết quả lựa chọn của các địa phương. Hiện đã có một số địa phương công bố danh mục lựa chọn SGK lớp 4,8,11 theo CTGDPT 2018. Kết quả sơ bộ cho thấy SGK của NXBGDVN vẫn được đa số các thầy cô, nhà trường và phụ huynh học sinh tin tưởng, lựa chọn đưa vào dạy học từ năm học 2023-2024. Cùng với việc tập trung nguồn lực để in và phát hành sách, NXBGDVN cũng đã lập đường dây nóng hỗ trợ phụ huynh, học sinh mua SGK nhanh chóng, thuận tiện, đặc biệt là trong thời gian cao điểm từ tháng 5 đến hết tháng 9. Theo đó, khi phụ huynh, học sinh, nhà trường cần hỗ trợ về mua sách hay phản ánh các vấn đề liên quan đến SGK có thể liên lạc đến số điện thoại **0344181018**. Hệ thống sẽ tiếp nhận thường xuyên để tiếp nhận các ý kiến, phản ánh cùng như giải đáp những vướng mắc. Đồng thời mở rộng các kênh bán SGK trực tuyến bên cạnh việc phát hành SGK qua các kênh truyền thống. Đồng thời NXBGDVN thực hiện công tác chuẩn bị đầy đủ, đa dạng nguồn tài liệu, dữ liệu cho SGK của tất cả các môn học/hoạt động giáo dục phục vụ công tác bồi dưỡng, gồm: Phiên bản điện tử SGK, SGV; tài liệu tập huấn giáo viên sử dụng SGK; slide báo cáo tập huấn giáo viên sử dụng SGK; các video giới thiệu SGK, video tiết dạy minh họa. Tất cả các tài liệu, dữ liệu nêu trên sẽ được số hóa, đăng tải miễn phí và cập nhật thường xuyên trên website taphuan.nxbgd.vn. Bằng cách truy cập vào website (không cần tài khoản đăng nhập), thông qua các tài liệu, dữ liệu này, cán bộ quản lý, giáo viên, các địa phương có thể chủ động tự tìm hiểu, nghiên cứu về SGK các môn học.

Cung cấp bản in SGK, SGV, tài liệu phục vụ công tác tập huấn

Để hỗ trợ các trường trong công tác tập huấn, NXBGDVN cũng sẽ chuyển các bản in SGK, SGV, tài liệu phục vụ tập huấn tới tất cả các tỉnh, thành phố trên cả nước. NXBGDVN đã xây dựng kế hoạch, lịch trình tổ chức tập huấn cho 100% giáo viên sử dụng SGK lớp 4,8,11 và cán bộ quản lý trên địa bàn tất cả các tỉnh/ thành phố bằng hình thức trực tuyến kết hợp với trực tiếp. Để đáp ứng được các yêu cầu về mặt kĩ thuật, đảm bảo chất lượng (hình ảnh, âm thanh, tương tác giữa báo cáo viên và người nghe,...) tại các buổi tập huấn trực tuyến, NXBGDVN đã chuẩn bị hệ thống 30 phòng studio đạt tiêu chuẩn. NXBGDVN cũng tổ chức test kỹ thuật với tất cả điểm cầu địa phương trước ngày tổ chức chính thức. Cùng với đó, nội dung các buổi tập huấn sẽ được hệ thống ghi lại để giáo viên có thể truy cập vào website xem, nghe lại nội dung bồi dưỡng các môn học. Theo kế hoạch, NXBGDVN sẽ triển khai công tác bồi dưỡng SGK các môn học tới các địa phương theo 8 đợt, từ 5/6/2023 đến 28/7/2023, mỗi đợt 5 ngày. Trong mỗi đợt sẽ thực hiện tập huấn đầy đủ các tên sách lớp 4,8,11 với thời lượng từ 1/2 ngày đến 1 ngày SGK môn học. Bên cạnh đó, để chuẩn bị cho công tác bồi dưỡng trực tiếp tại địa phương, NXBGDVN sẽ tổ chức tập huấn (trực tuyến và trực tiếp) cho đội ngũ báo cáo viên là giảng viên các trường Đại học, Cao đẳng, Viện nghiên cứu, cán bộ quản lý, giáo viên cốt cán... phủ khắp các tỉnh thành trong cả nước. Lực lượng báo cáo viên này sẽ cùng với các tác giả SGK đảm bảo đáp ứng được nhu cầu tập huấn cho 100% giáo viên dạy học SGK 4,8,11.

NXBGDVN

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT5M23
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2023

Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng