TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG

Số 552
Tháng 6 - 2023
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 60 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

Trường Đại học Tổng hợp Moscow

# TẠO PHẦN DƯ KẾT HỢP HẰNG ĐẲNG THỨC ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

**PHẠM VĂN SƠN**

*(GV THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, Phú Thọ)*

Hằng đẳng thức là dạng toán rất cơ bản của chương trình môn Toán THCS và THPT. Việc sử dụng chúng để chứng minh bất đẳng thức cũng khá quen thuộc. Xuất phát từ ý tưởng biến đổi $f(x)$ bất kì thành dạng

$$f(x)=(x-a)^2g(x)+h(x),\ a\in\mathbb{R},$$

trong khuôn khổ bài viết này tác giả muốn giới thiệu đến bạn đọc cách "*Tạo lượng dư kết hợp hằng đẳng thức để chứng minh bất đẳng thức*" để giải một dạng toán bất đẳng thức mà trước nay chúng ta thường dùng phương pháp hệ số bất định để xử lí.

**I. Dạng** $f(a)+f(b)+f(c)\geq m(a^k+b^k+c^k)$

**hoặc** $f(a)+f(b)+f(c)\leq m(a^k+b^k+c^k)$

(*$m$ là số thực, $k$ là số tự nhiên*)

Ta bắt đầu tìm hiểu phương pháp này với thí dụ sau:

**Thí dụ 1.** *Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\geq\frac{3}{2}\quad(1).$$

***Phân tích và hướng dẫn giải.***

Dự đoán dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$ khi đó:

$$\frac{1}{1+a^2}=\frac{1}{1+b^2}=\frac{1}{1+c^2}=\frac{1}{2}.$$

Đặt $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ $(x>0)$. BĐT (1) trở thành:

$$f(a)+f(b)+f(c)\geq\frac{1}{2}(a+b+c).$$

Trước hết dựa vào vị trí xảy ra dấu bằng ta phân tích như sau:

$$\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}=\frac{1-x^2}{2(1+x^2)}=(1-x)\frac{(1+x)}{2(1+x^2)}\quad(1.1).$$

Tiếp tục phân tích để tạo hằng đẳng thức $(1-x)^2$ và phần dư dạng đa thức bậc nhất để khai thác điều kiện giả thiết:

$$(1-x)\frac{(1+x)}{2(1+x^2)}=(1-x)\left[\frac{(1+x)}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1-x}{2}$$

$$=(1-x)^2\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1-x}{2}$$

$$\geq\frac{1-x}{2}\quad(1.2).$$

Từ (1.1) và (1.2) suy ra:

$$\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\geq\frac{1-x}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1+x^2}\geq1-\frac{x}{2}.$$

Vậy khi chứng minh bất đẳng thức (1) trước hết ta chứng minh: $\dfrac{1}{1+x^2}\geq1-\dfrac{x}{2}$ với $x>0$. Thay $x$ bởi $a,b,c$ ta có:

$$\frac{1}{1+a^2}\geq1-\frac{a}{2};$$

$$\frac{1}{1+b^2}\geq1-\frac{b}{2};$$

$$\frac{1}{1+c^2}\geq1-\frac{c}{2}.$$

Cộng từng vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\geq3-\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}.$$

***Nhận xét.*** Như vậy ở thí dụ này với điều kiện $a+b+c=3$ dựa vào phân tích thông qua vị trí dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$ thêm bớt để tạo ra hằng đẳng thức $(1-x)^2$ và phần dư $\frac{1-x}{2}$. Ta tiếp tục với ví dụ sau với giả thiết chứa đa thức có bậc 2.

**Thí dụ 2.** *Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng*

$$2(a^3+b^3+c^3)\geq\frac{3}{2}+\frac{3}{2}(a+b+c)\ (2).$$

***Phân tích và hướng dẫn giải.*** Ta có:

$$2(a^3+b^3+c^3)\geq\frac{3}{2}+\frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow\left(2a^3-\frac{3}{2}a\right)+\left(2b^3-\frac{3}{2}b\right)+\left(2c^3-\frac{3}{2}c\right)\geq\frac{3}{2}.$$

Đặt $f(x)=2x^3-\frac{3}{2}x\ (x>0)$.

BĐT (2) $\Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\geq\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\geq\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Dự đoán dấu "=" xảy ra khi $x=a=b=c=1$, khi đó: $2x^3-\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}$. Xét:

$$2x^3-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=(x-1)(2x^2+2x+\frac{1}{2})$$

$$=(x^2-1).\frac{2x^2+2x+\frac{1}{2}}{x+1}.$$

Ta cố gắng làm xuất hiện hằng đẳng thức $(x-1)^2$ và phần dư dạng đa thức bậc hai để khai thác giả thiết $a^2+b^2+c^2=3$:

$$2x^3-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=(x^2-1)\left(\frac{2x^2+2x+\frac{1}{2}}{x+1}-\frac{9}{4}\right)+\frac{9x^2}{4}-\frac{9}{4}$$

$$=\frac{1}{4}(x-1)^2(8x+7)+\frac{9}{4}x^2-\frac{9}{4}$$

$$\geq\frac{9}{4}x^2-\frac{9}{4}\quad(\text{do } 8x+7>0)$$

$$\Rightarrow 2x^3-\frac{3}{2}x\geq\frac{9}{4}x^2-\frac{7}{4}.$$

Vậy để chứng minh bất đẳng thức (2) trước hết ta chứng minh:

$$2x^3-\frac{3}{2}x\geq\frac{9}{4}x^2-\frac{7}{4}$$

sau đó thay $x$ lần lượt bởi $a$, $b$, $c$ ta được:

$$2a^3-\frac{3}{2}a\geq\frac{9}{4}a^2-\frac{7}{4};$$

$$2b^3-\frac{3}{2}b\geq\frac{9}{4}b^2-\frac{7}{4};$$

$$2c^3-\frac{3}{2}c\geq\frac{9}{4}c^2-\frac{7}{4}.$$

Cộng từng vế các BĐT ta có:

$$(2a^3-\frac{3}{2}a)+(2b^3-\frac{3}{2}b)+(2c^3-\frac{3}{2}c)$$

$$\geq\frac{9}{4}(a^2+b^2+c^2)-\frac{21}{4}$$

$$=\frac{27}{4}-\frac{21}{4}=\frac{3}{2}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh!

Qua thí dụ 1, 2 ta nhận thấy: Để chứng minh BĐT đã cho, ta chỉ cần tạo lần lượt phần dư là đa thức bậc nhất, bậc hai, bậc ba,... tùy theo bậc của đa thức trong giả thiết và làm xuất hiện hằng đẳng thức $(x-1)^2$.

Ta tiếp tục nghiên cứu một thí dụ có bậc đa thức ở giả thiết là 3 như thí dụ sau đây:

**Thí dụ 3.** *Cho $a,b,c>0$ và $a^3+b^3+c^3=3$ Chứng minh rằng:*

$$4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+5\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 27\ (3).$$

***Phân tích và hướng dẫn giải.***

$$4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+5\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 27$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{4}{a}+5a^2\right)+\left(\frac{4}{b}+5b^2\right)+\left(\frac{4}{c}+5c^2\right)\geq 27$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{4}{a}+5a^2\right)+\left(\frac{4}{b}+5b^2\right)+\left(\frac{4}{c}+5c^2\right)$$
$$\geq 9\left(a^3+b^3+c^3\right).$$

Đặt $f(x)=\frac{4}{x}+5x^2$ $(x>0)$. Khi đó: BĐT(3) trở thành: $f(a)+f(b)+f(c)\geq 9\left(a^3+b^3+c^3\right)$.

Dự đoán dấu "=" xảy ra khi $x=a=b=c=1$. Khi đó: $\frac{4}{x}+5x^2=9$.

Xét: $\frac{4}{x}+5x^2-9=(x-1).\frac{5x^2+5x-4}{x}$

$$=(x^3-1)\left[\frac{5x^2+5x-4}{x(x^2+x+1)}\right]$$

$$=(x^3-1)\left[\frac{5x^2+5x-4}{x(x^2+x+1)}-2\right]+2x^3-2$$

$$=(x-1)^2.\frac{-2x^2+x+4}{x}+2x^3-2.$$

Vì $a^3+b^3+c^3=3\Rightarrow 0<a,b,c<\sqrt[3]{3}$

$\Rightarrow 0<x<\sqrt[3]{3}\Rightarrow -2x^2+x+4>0$

$\Rightarrow (x-1)^2.\frac{-2x^2+x+4}{x}+2x^3-2\geq 2x^3-2$

$\Rightarrow \frac{4}{x}+5x^2-9\geq 2x^3-2$

$\Rightarrow \frac{4}{x}+5x^2\geq 2x^3+7.$

Vậy để chứng minh bất đẳng thức (3) trước hết ta chứng minh: $\frac{4}{x}+5x^2\geq 2x^3+7$ với $0<x<\sqrt[3]{3}$, sau đó thay $x$ lần lượt bởi $a$, $b$, $c$ ta được:

$$\frac{4}{a}+5a^2\geq 2a^3+7;$$

$$\frac{4}{b}+5b^2\geq 2b^3+7;$$

$$\frac{4}{c}+5c^2\geq 2c^3+7.$$

Cộng từng vế các BĐT trên ta có:

$$4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+5\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 2(a^3+b^3+c^3)+21$$
$$=27$$

(vì $a^3+b^3+c^3=3$).

Phương pháp này còn xử lí khá tốt cho dạng bất đẳng thức sau:

**II. Dạng** $f(a,b)+f(b,c)+f(c,a)\geq m(a^k+b^k+c^k)$

**hoặc** $f(a,b)+f(b,c)+f(c,a)\leq m(a^k+b^k+c^k)$

*($m$ là số thực, $k$ là số tự nhiên)*

**Thí dụ 4.** *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^3}{a^2+3ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+3bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+3ac+a^2}\geq\frac{a+b+c}{5}\quad(4).$$

***Phân tích và hướng dẫn giải.***

Đặt: $f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+3xy+y^2}$ $(x,y>0)$. Ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+3ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+3bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+3ac+a^2}\geq\frac{a+b+c}{5}$$

$$\Leftrightarrow f(a,b)+f(b,c)+f(c,a)\geq\frac{a+b+c}{5}.$$

Dự đoán dấu "=" xảy ra khi $x=y$, khi đó:

$$\frac{x^3}{x^2+3xy+y^2}=\frac{x}{5}.$$

Xét: $\frac{x^3}{x^2+3xy+y^2}-\frac{x}{5}=(x-y).\frac{4x^2+yx}{5x^2+15xy+5y^2}$

$$=(x-y)\left(\frac{4x^2+yx}{5x^2+15xy+5y^2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{x-y}{5}$$

$$=(x-y)^2.\frac{3x+y}{5(x^2+3xy+y^2)}+\frac{x-y}{5}\geq\frac{x-y}{5}$$

$$\Rightarrow\frac{x^3}{x^2+3xy+y^2}-\frac{x}{5}\geq\frac{x-y}{5}$$

$$\Rightarrow\frac{x^3}{x^2+3xy+y^2}\geq\frac{2x-y}{5}.$$

Vậy để chứng minh bất đẳng thức (4) trước hết ta chứng minh:

$$\frac{x^3}{x^2+3xy+y^2} \geq \frac{2x-y}{5} \quad \text{với } x, y > 0$$

sau đó thay $(x, y)$ lần lượt bởi $(a, b)$; $(b, c)$; $(c, a)$ ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+3ab+b^2} \geq \frac{2a-b}{5};$$
$$\frac{b^3}{b^2+3bc+c^2} \geq \frac{2b-c}{5};$$
$$\frac{c^3}{c^2+3ca+a^2} \geq \frac{2c-a}{5}.$$

Cộng từng vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{a^3}{a^2+3ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+3bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+3ac+a^2} \geq \frac{a+b+c}{5}.$$

***Nhận xét và hướng dẫn giải.*** Với thí dụ này ta cần làm xuất hiện $(x-y)^2$ và phần dư $\frac{x-y}{5}$. Sau đây ta cùng xét tiếp một thí dụ khác xem phương pháp này có còn sử dụng hiệu quả không?

**Thí dụ 5.** *Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{5a^3-b^3}{ab+3a^2}+\frac{5b^3-c^3}{bc+3b^2}+\frac{5c^3-a^3}{ac+3c^2} \leq a+b+c \quad (5).$$

***Phân tích và hướng dẫn giải.***

Đặt: $f(x,y)=\frac{5x^3-y^3}{xy+3x^2}\ (x, y > 0)$.

$$\frac{5a^3-b^3}{ab+3a^2}+\frac{5b^3-c^3}{bc+3b^2}+\frac{5c^3-a^3}{ac+3c^2} \leq a+b+c$$

$\Leftrightarrow f(a,b)+f(b,c)+f(c,a) \leq a+b+c.$

Dự đoán dấu "=" xảy ra khi $x = y$ khi đó:

$$\frac{5x^3-y^3}{xy+3x^2}=x.$$

Xét $\frac{5x^3-y^3}{xy+3x^2}-x=(x-y).\frac{2x^2+yx+y^2}{xy+3x^2}$

$$=(x-y)\left(\frac{2x^2+yx+y^2}{xy+3x^2}-1\right)+x-y$$

$$=-(x-y)^2.\frac{x+y}{xy+3x^2}+x-y \leq x-y$$

$$\Rightarrow \frac{5x^3-y^3}{xy+3x^2}-x \leq x-y$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^3-y^3}{xy+3x^2} \leq 2x-y.$$

Vậy để chứng minh bất đẳng thức (5) trước hết ta chứng minh:

$$\frac{5x^3-y^3}{xy+3x^2} \leq 2x-y,$$

sau đó thay $(x, y)$ lần lượt $(a, b)$; $(b, c)$; $(c, a)$ ta được:

$$\frac{5a^3-b^3}{ab+3a^2} \leq 2a-b;$$
$$\frac{5b^3-c^3}{bc+3b^2} \leq 2b-c;$$
$$\frac{5c^3-a^3}{ca+3c^2} \leq 2c-a.$$

Cộng từng vế các BĐT trên ta có:

$$\frac{5a^3-b^3}{ab+3a^2}+\frac{5b^3-c^3}{bc+3b^2}+\frac{5c^3-a^3}{ac+3c^2} \leq a+b+c.$$

Như vậy bài toán được giải quyết khá đơn giản phải không các bạn!

Mở rộng hơn ta xét một thí dụ cho 4 biến sau:

**Thí dụ 6.** *Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{b^5}+\frac{b^2}{c^5}+\frac{c^2}{d^5}+\frac{d^2}{a^5} \geq \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3} \quad (6).$$

***Phân tích và hướng dẫn giải.*** Trước hết đặt:

$\frac{1}{a}=x, \frac{1}{b}=y, \frac{1}{c}=z, \frac{1}{d}=t\ (x, y, z, t > 0)$. Khi đó:

$$\frac{a^2}{b^5}+\frac{b^2}{c^5}+\frac{c^2}{d^5}+\frac{d^2}{a^5} \geq \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^5}{x^2}+\frac{z^5}{y^2}+\frac{t^5}{z^2}+\frac{x^5}{t^2} \geq x^3+y^3+z^3+t^3$$

$$\Leftrightarrow f(x,y)+f(y,z)+f(z,t)+f(t,x) \geq x^3+y^3+z^3+t^3.$$

Dự đoán dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=t$, khi đó:

$$\frac{x^5}{y^2}=y^3.$$

Xét: $\frac{y^5}{x^2}-y^3=(y-x)\frac{y^3(y+x)}{x^2}$

$$=(y-x)(y^2+xy+x^2)\frac{y^3(y+x)}{x^2y^2+x^3y+x^4}$$

$$=(y^3-x^3)\left(\frac{y^3(y+x)}{x^2y^2+x^3y+x^4}-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}(y^3-x^3)$$

$$=(y^3-x^3).\frac{3y^4+3y^3x-2x^2y^2-2x^3y-2x^4}{3(x^2y^2+x^3y+x^4)}+\frac{2}{3}(y^3-x^3)$$

$$=(y^3-x^3)\frac{(y-x)(3y^3+6y^2x+4yx^2+2x^3)}{3(x^2y^2+x^3y+x^4)}+\frac{2}{3}(y^3-x^3)$$

$$=(y-x)^2.\frac{3y^3+6y^2x+4yx^2+2x^3}{3x^2}+\frac{2}{3}(y^3-x^3)$$

$\geq \frac{2}{3}(y^3-x^3)$. Do đó:

$$\frac{y^5}{x^2}-y^3 \geq \frac{2}{3}(y^3-x^3) \Rightarrow \frac{y^5}{x^2} \geq \frac{5}{3}y^3-\frac{2}{3}x^3.$$

Vậy để chứng minh bất đẳng thức (6) trước hết ta chứng minh:

$$\frac{y^5}{x^2} \geq \frac{5}{3}y^3-\frac{2}{3}x^3 \text{ với } x,y>0.$$

Tương tự ta chứng minh được:

$$\frac{z^5}{y^2} \geq \frac{5}{3}z^3-\frac{2}{3}y^3;$$

$$\frac{t^5}{z^2} \geq \frac{5}{3}t^3-\frac{2}{3}z^3;$$

$$\frac{x^5}{t^2} \geq \frac{5}{3}x^3-\frac{2}{3}t^3.$$

Cộng từng vế các BĐT trên ta có:

$$\frac{y^5}{x^2}+\frac{z^5}{y^2}+\frac{t^5}{z^2}+\frac{x^5}{t^2} \geq x^3+y^3+z^3+t^3.$$

***Nhận xét.*** Việc phân tích nhân tử cho một biểu thức chứa căn bậc hai là điều không dễ dàng. Nhưng trong thí dụ sau chúng ta vẫn có thể lựa chọn phương pháp này để có phép chứng minh tự nhiên nhất.

**Thí dụ 7.** *Cho* $x,y,z>0$. *Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}+\sqrt{13y^2-8yz+20z^2}+\sqrt{13z^2-8xz+20x^2} \geq 5x+5y+5z \quad (7).$$

***Lời giải.*** Xét:

$$\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}-5x=\frac{13x^2-8xy+20y^2-25x^2}{\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}+5x}$$

$$=(y-x).\frac{12x+20y}{\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}+5x}$$

$$=(y-x)\left(\frac{12x+20y}{\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}+5x}-\frac{16}{5}\right)+\frac{16}{5}(y-x)$$

$$=\frac{4}{5}(y-x).\frac{25y-5x-4\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}}{\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}+5x}+\frac{16}{5}(y-x)$$

$$=\frac{4}{5}(y-x)\times$$
$$\times\frac{625y^2+25x^2-250xy-16(13x^2-8xy+20y^2)}{(\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}+5x)(25y-5x+4\sqrt{13x^2-8xy+20y^2})}+\frac{16}{5}(y-x)$$

$$=\frac{4}{5}(y-x)\times$$
$$\times\frac{305y^2-183x^2-122xy}{(\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}+5x)(25y-5x+4\sqrt{13x^2-8xy+20y^2})}+\frac{16}{5}(y-x)$$

$$=\frac{244}{5}(y-x)^2\times$$

$$\times\frac{5y+3x}{(\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}+5x)(25y-5x+4\sqrt{13x^2-8xy+20y^2})}$$

$$+\frac{16}{5}(y-x).$$

Mà:

$$25y-5x+4\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}>0$$

$$\Leftrightarrow 25y+4\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}>5x$$

$$\Leftrightarrow 625y^2+200y\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}$$
$$+16(13x^2-8xy+20y^2)>25x^2$$

$$\Leftrightarrow 945y^2+183x^2-128xy$$
$$+200y\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}>0$$

$$\Leftrightarrow 64(x-y)^2+881y^2+119x^2$$
$$+200y\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}>0$$

(luôn đúng)

nên với $x,y>0$ ta có:

$$\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}-5x$$

$$=\frac{244}{5}(y-x)^2\times$$

$$\times\frac{5y+3x}{(\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}+5x)(25y-5x+4\sqrt{13x^2-8xy+20y^2})}$$

$$+\frac{16}{5}(y-x)$$

$$\geq\frac{16}{5}(y-x)$$

$$\Rightarrow\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}\geq\frac{16}{5}y+\frac{9}{5}x \quad (7.1).$$

Tương tự:

$$\sqrt{13y^2-8yz+20z^2}\geq\frac{16}{5}z+\frac{9}{5}y \quad (7.2);$$

$$\sqrt{13z^2-8xz+20x^2}\geq\frac{16}{5}x+\frac{9}{5}z \quad (7.3).$$

Từ (7.1), (7.2), (7.3) suy ra:

$$\sqrt{13x^2-8xy+20y^2}+\sqrt{13y^2-8yz+20z^2}$$
$$+\sqrt{13z^2-8xz+20x^2}\geq 5x+5y+5z.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z$.

***Lời kết.*** Bất đẳng thức là một chủ đề hay và khó đòi hỏi sự cố gắng và sáng tạo không ngừng của người học toán. Chúc các bạn đọc tìm được nhiều niềm vui khi đọc và làm toán bất đẳng thức!

Sau đây là một số bài tập dành cho bạn đọc.

## BÀI TẬP

1. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$

Tìm GTNN của biểu thức:

$$\sqrt{2x^2+3xy+4y^2}+\sqrt{2y^2+3yz+4z^2}$$
$$+\sqrt{2z^2+3xz+4x^2}.$$

2. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+xy+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+yz+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+xz+x^2}}\geq\sqrt{3}.$$

3. Chứng minh rằng với $a,b,c>0$ thì

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(2c+b+a)^2}{2c^2+(b+a)^2}\leq 8.$$

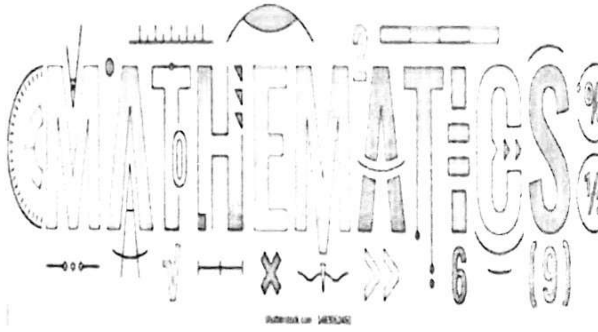
4. Chứng minh rằng với $a$, $b$, $c$ không âm thì

$$\frac{a^3}{2a^2+b^2}+\frac{b^3}{2b^2+c^2}+\frac{c^3}{2c^2+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

5. Cho $a,b,c$ là các số dương, chứng minh rằng:

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}+\frac{b^{n+1}+c^{n+1}}{b^n+c^n}+\frac{c^{n+1}+a^{n+1}}{c^n+a^n}\geq a+b+c$$

với mọi $n$ nguyên dương.



# HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
# TỈNH BÌNH ĐỊNH
# NĂM HỌC 2022 - 2023

**Bài 1.** 1) *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^3 - 5x = y^3 - 5y & (1) \\ x^4 + y^2 = 2 & (2) \end{cases}.$$

2) *Giải phương trình:*

$$\sqrt{3}\left(x^2 - 3x + 1\right) = -\sqrt{x^4 + x^2 + 1}.$$

***Lời giải.*** 1) Biến đổi phương trình (1):

$$(1) \Leftrightarrow (x^3 - y^3) - 5(x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 5 = 0 \end{array}\right..$$

Hệ phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 0 \\ x^4 + y^2 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 5 = 0 \\ x^4 + y^2 = 2 \end{cases} \end{array}\right..$$

• Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^4 + y^2 = 2 \end{cases}.$

Từ phương trình đầu ta có $x = y$. Thay vào phương trình sau ta được:

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 - 1) + (x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ hoặc } x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -1.$$

Với $x = 1$ thì $y = 1$; với $x = -1$ thì $y = -1$.

Hệ PT trên có 2 nghiệm $(x; y)$ là : $(1; 1), (-1; -1)$.

• Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy - 5 = 0 & (3) \\ x^4 + y^2 = 2 & (4) \end{cases}.$

Ta có: $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 \geq 3xy.$$

Giả sử hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$.

Từ (3) suy ra: $5 = x^2 + xy + y^2 \geq 3xy$

$$\Leftrightarrow xy \leq \frac{5}{3} \quad (5).$$

Từ (4) suy ra: $y^2 = 2 - x^4$.

Thay vào (3) có:

$$x^2 + (2 - x^4) + xy - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow xy = x^4 - x^2 + 3 \quad (6).$$

Từ (5) và (6) suy ra:

$$x^4 - x^2 + 3 \leq \frac{5}{3} \Leftrightarrow x^4 - x^2 + \frac{4}{3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{12} \leq 0 : \text{vô lý.}$$

Do đó hệ phương trình trên vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x; y)$ là:

$$(1; 1), (-1; -1).$$

2) Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$x^4 + x^2 + 1 \geq 3\sqrt[3]{x^4.x^2.1} = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^4 + x^2 + 1} \geq \sqrt{3}.|x|.$$

Suy ra: $VP \leq -\sqrt{3}|x|$. Dấu "=" xảy ra khi x2 = 1.

Ta có: $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \geq -x$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\left(x^2 - 3x + 1\right) \geq -\sqrt{3}.x$$

$$\Rightarrow VT \geq -\sqrt{3}x.$$

Do đó: $VT = VP \Leftrightarrow -\sqrt{3}|x| = -\sqrt{3}x$

$\Rightarrow x \geq 0$ và $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1.$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 1$.

**Bài 2.** 1) *Cho các số thực x, y thoả mãn*

$$x - 2y + 4 < 0.$$

*Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = y^2 - 4x + \frac{4(y^2 - 4x)}{(x - 2y + 4)^2}.$$

2) *Cho đa thức* $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. *Biết* $P(1) = 10$, $P(2) = 20$, $P(3) = 30$. *Tính giá trị biểu thức* $H = \frac{P(12) + P(-8)}{2023}$.

***Lời giải.***

1) Ta có: $x - 2y + 4 < 0 \Leftrightarrow x < 2y - 4$

$\Leftrightarrow -4x > -4(2y - 4) \Leftrightarrow -4x > -8y + 16$

$\Leftrightarrow y^2 - 4x > y^2 - 8y + 16$

$\Leftrightarrow y^2 - 4x > (y - 4)^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 - 4x > 0.$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số dương: 1 và $\frac{4}{(x - 2y + 4)^2}$, kết hợp với $(y^2 - 4x) > 0$ ta có:

$$y^2 - 4x + \frac{4(y^2 - 4x)}{(x - 2y + 4)^2}$$

$$= (y^2 - 4x)\left(1 + \frac{4}{(x - 2y + 4)^2}\right)$$

$$\geq (y^2 - 4x).2\sqrt{1.\frac{4}{(x^2 - 2y + 4)^2}}$$

$$= (y^2 - 4x).\frac{4}{|x - 2y + 4|}$$

$$\Rightarrow P \geq (y^2 - 4x).\frac{4}{|x - 2y + 4|}.$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$1 = \frac{4}{(x - 2y + 4)^2} \Leftrightarrow (x - 2y + 4)^2 = 4$$

$\Rightarrow x - 2y + 4 = -2$ (vì $x - 2y + 4 < 0$)

$\Leftrightarrow x = 2y - 6.$

Khi đó:

$$\min P = \left[y^2 - 4(2y - 6)\right].\frac{4}{|-2|} = 2(y^2 - 8y + 24)$$

$$= 2[(y - 4)^2 + 8] \geq 16.$$

Dấu "=" xảy ra khi $y - 4 = 0$ và $x = 2y - 6$

$\Rightarrow y = 4$ và $x = 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P$ là 16 khi $x = 2; y = 4$.

2) Từ điều kiện bài toán ta có:

$P(1) = 10 \Leftrightarrow 1 + a + b + c + d = 10$

$\Leftrightarrow a + b + c + d = 9$ (1).

$P(2) = 20 \Leftrightarrow 16 + 8a + 4b + 2c + d = 20$

$\Leftrightarrow 8a + 4b + 2c + d = 4$ (2).

$P(3) = 30 \Leftrightarrow 81 + 27a + 9b + 3c + d = 30$

$\Leftrightarrow 27a + 9b + 3c + d = -51$ (3).

Lấy (2) trừ (1) và lấy (3) trừ (2) ta được:

$$\begin{cases} 7a + 3b + c = -5 & (4) \\ 19a + 5b + c = -55 & (5) \end{cases}.$$

Lấy (5) trừ (4) ta được:

$$12a + 2b = -50 \Rightarrow b = -6a - 25.$$

Thay vào (4) ta có:

$$7a + 3(-6a - 25) + c = -5 \Rightarrow c = 11a + 70.$$

Thay các biểu thức của $b$ và $c$ vào (1) ta được:

$d = 9 - (a + b + c)$

$= 9 - (a - 6a - 25 + 11a + 70)$

$= -6a - 36.$

Thay các biểu thức của $b$, $c$, $d$ vào đa thức đã cho ta được: $P(x) = x^4 + ax^3 - (6a + 25)x^2$

$+ (11a + 70)x - 6a - 36$

($a$ được xem là tham số).

Từ đó:

$$P(12) = 12^4 + a.12^3 - (6a+25).12^2 + (11a+70).12 - 6a - 36$$
$$= 20736 + 1728a - (6a+25).144 + (11a+70).12 - 6a - 36;$$

$$P(-8) = (-8)^4 + a.(-8)^3 - (6a+25).(-8)^2 + (11a+70).(-8) - 6a - 36$$
$$= 4096 - 512a - (6a+25).64 + (11a+70).(-8) - 6a - 36.$$

Do đó:

$$P(12) + P(-8) = 24832 + 1216a - (6a+25).208 + (11a+70).4 - 12a - 72$$
$$= (1216 - 1248 + 44 - 12)a + (24832 - 5200 + 280 - 72)$$
$$= 19840.$$

Vậy $H = \dfrac{P(12)+P(-8)}{2023}$

$= \dfrac{19840}{2023}.$

**Bài 3.** *Cho tam giác nhọn $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ và một điểm $P$ bất kỳ nằm trong tam giác ($P$ khác $O$). Đường thẳng $AP$ cắt đường tròn $(O)$ tại điểm thứ hai là $D$, dựng các đường kính $DE$, $AF$ của đường tròn $(O)$. Gọi $G$, $I$ lần lượt là các giao điểm thứ hai của đường thẳng $EP$, $FP$ với đường tròn $(O)$, $K$ là giao điểm của $AI$ và $DG$. Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $K$ trên $OP$, đường thẳng $OP$ cắt $EF$ tại $M$.*

1) *Chứng minh $HO$ là phân giác của góc $\widehat{IHD}$.*

2) *Chứng minh $KD \perp DM$.*

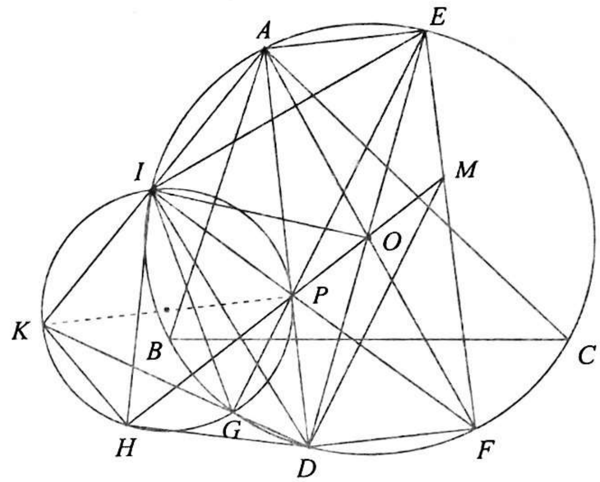
***Lời giải.***

1) Ta có: $\widehat{AIF} = 90^0 \Rightarrow \widehat{KIF} = 90^0$;

$\widehat{EGD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{KGP} = 90^0$ và $\widehat{KHP} = 90^0$.

Suy ra 5 điểm $I$, $K$, $H$, $G$, $P$ cùng nằm trên một đường tròn có đường kính $KP$. Do đó:

$$\widehat{IHP} = \widehat{IGP}\ \left(= \frac{1}{2}\text{sđ}\ \overset{\frown}{IP}\right).$$




Vì $\widehat{IGP} = \widehat{IDE}\ \left(= \frac{1}{2}\text{sđ}\ \overset{\frown}{IE}\right)$ nên $\widehat{IHP} = \widehat{IDE} \Rightarrow$ tứ giác $IHDO$ nội tiếp.

Vì $OI = OD$ nên $\overset{\frown}{OI} = \overset{\frown}{OD}$, suy ra $\widehat{IHO} = \widehat{OHD}$.

Vậy $HO$ là phân giác góc $\widehat{IHD}$.

2) Ta có $ADFE$ là hình chữ nhật nên $O$ là tâm đối xứng. Vì $M$, $O$, $P$ thẳng hàng suy ra $M$ và $P$ đối xứng qua $O$, do đó $O$ là trung điểm của $MP$, đồng thời $O$ là trung điểm của $DE$ nên tứ giác $EPDM$ là hình bình hành.

Suy ra $EP \,//\, MD$. Vì $EP \perp GD$ nên $MD \perp GD$.

Vậy $KD \perp MD$.

**Bài 4.** *Cho tam giác $ABC$ có các đường phân giác trong $AD$, $BE$, $CF$ cắt nhau tại $I$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{ID}{IA}} + \sqrt{\frac{IE}{IB}} + \sqrt{\frac{IF}{IC}} > 2.$$

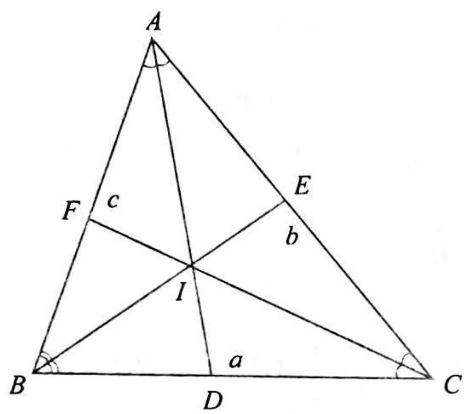
***Lời giải.*** Gọi độ dài 3 cạnh của tam giác $ABC$ là:

$BC = a, CA = b, AB = c\ (a, b, c > 0).$

Theo tính chất đường phân giác của tam giác, ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{DB}{DC+DB} = \frac{c}{b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{a} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow DB = \frac{ac}{b+c}$$




$$\Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{ac}{b+c}}{c} = \frac{a}{b+c}.$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{IE}{IB} = \frac{b}{c+a},\ \frac{IF}{IC} = \frac{c}{a+b}.$$

Từ đó:

$$P = \sqrt{\frac{ID}{IA}} + \sqrt{\frac{IE}{IB}} + \sqrt{\frac{IF}{IC}}$$
$$= \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}.$$

Vì $a$, $b$, $c$ là độ dài 3 cạnh của tam giác nên $0 < a < b + c$, $0 < b < a + c$, $0 < c < a + b$. Ta có:

$$\sqrt{a(b+c)} < \frac{1}{2}(a+b+c);$$

$$\sqrt{b(c+a)} < \frac{1}{2}(a+b+c);$$

$$\sqrt{c(a+b)} < \frac{1}{2}(a+b+c).$$

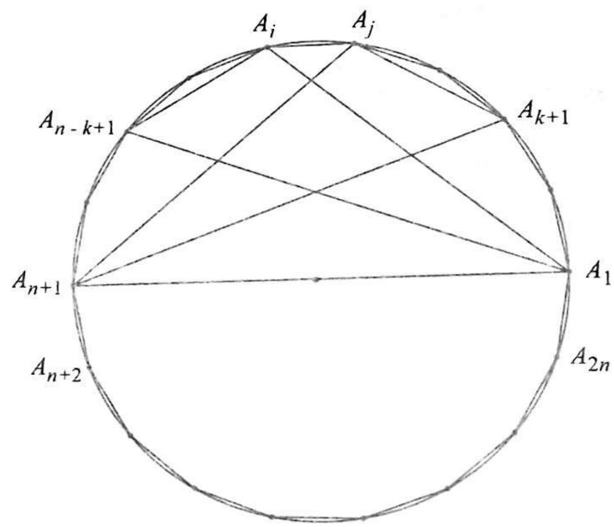
Suy ra:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$$
$$= \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} + \frac{b}{\sqrt{b(c+a)}} + \frac{c}{\sqrt{c(a+b)}}$$
$$> \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c}$$
$$= \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

Vậy $\sqrt{\frac{ID}{IA}} + \sqrt{\frac{IE}{IB}} + \sqrt{\frac{IF}{IC}} > 2.$

**Bài 5.** *Cho đa giác đều có $2n$ đỉnh ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$). Có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác và có một góc lớn hơn $100^0$?*

***Lời giải.***




Gọi $(O)$ là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều $A_1A_2\ldots A_{2n}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$).

Kẻ đường kính $A_1A_{n+1}$ của $(O)$.

Khi đó $A_1A_{n+1}$ là trục đối xứng của đa giác đều đã cho. Đa giác đều có $2n$ cạnh, nên mỗi cạnh của đa giác căng một cung nhỏ của đường tròn $(O)$ có số đo là:

$$\alpha = \frac{360^0}{2n} = \frac{180^0}{n}\ (n \geq 3).$$

Gọi $k$ là số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 sao cho $k.\alpha > 20^0$. Khi đó đa giác đều đã cho sẽ có 1 cạnh hoặc $k$ cạnh liên tiếp căng một cung nhỏ có số đo lớn hơn $20^0$.

Chẳng hạn trên hình vẽ, cung nhỏ $\overparen{A_1A_{k+1}}$ căng bởi $k$ cạnh liên tiếp của đa giác đều có số đo:

$$k.\alpha > 20^0 \Leftrightarrow k.\frac{180}{n} > 20$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{n} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow k > \frac{n}{9}.$$

Ta xác định số đỉnh của đa giác đều trên cung nhỏ $\overparen{A_{n+1}A_{k+1}}$.

Trên cung nhỏ $\overparen{A_{n+1}A_{k+1}}$ có:

$$(n+1)-(k+2) = n-k-1 \text{ (đỉnh)}$$

(không kể 2 mút của cạnh $A_{n+1}A_{k+1}$).

Mỗi đỉnh trên cung nhỏ này nhìn cạnh $A_{n+1}A_{k+1}$ dưới một góc có số đo bằng

$$\frac{1}{2}\text{sđ}\overparen{A_{n+1}A_{k+1}} = \frac{1}{2}\left(180^0 + k\alpha\right)$$

$$> \frac{1}{2}\left(180^0 + 20^0\right) = 100^0.$$

Số tam giác tạo bởi một đỉnh trên cung nhỏ $A_{n+1}A_{k+1}$ nối với cạnh $A_{n+1}A_{k+1}$ là

$(n-k-1)$ (tam giác).

Số đỉnh trên cung nhỏ $\overparen{A_{n+1}A_{k+1}}$ không kể 2 đầu mút là $(n-k-1)$ (đỉnh).

Do đó số tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm trong $(n-k-1)$ điểm này là số tổ hợp chập 3 của $(n-k-1)$, số tam giác đó là:

$C_{n-k-1}^3$ (tam giác) (với $(n-k-1 \geq 3)$.

Do tính đối xứng của đa giác đều, số đỉnh trên cung nhỏ $A_1A_{n-k+1}$ cũng là $(n-k-1)$ điểm nên số tam giác có 3 đỉnh trên cung nhỏ này nối với cạnh $A_1A_{n-k+1}$ là $(n-k-1)$ (tam giác). Mỗi đỉnh này nhìn cạnh $A_1A_{n-k+1}$ dưới một góc lớn hơn $100^0$, các tam giác này cũng có một góc lớn hơn $100^0$.

Vì vậy số tam giác có một góc lớn hơn $100^0$ và có các đỉnh trên nửa đường tròn đường kính $A_1A_{n+1}$ là: $[2.(n-k-1) + C_{n-k-1}^3]$ (tam giác).

Do tính đối xứng, số tam giác có một góc lớn hơn $100^0$ trên nửa đường tròn đường kính $A_1A_{n+1}$ còn lại là: $[2.(n-k-1) + C_{n-k-1}^3]$ (tam giác).

Vậy số tam giác có một góc lớn hơn $100^0$ và có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác đều $A_1A_2\ldots A_{2n}$ là:

$$2.[2(n-k-1) + C_{n-k-1}^3] \text{ (tam giác),}$$

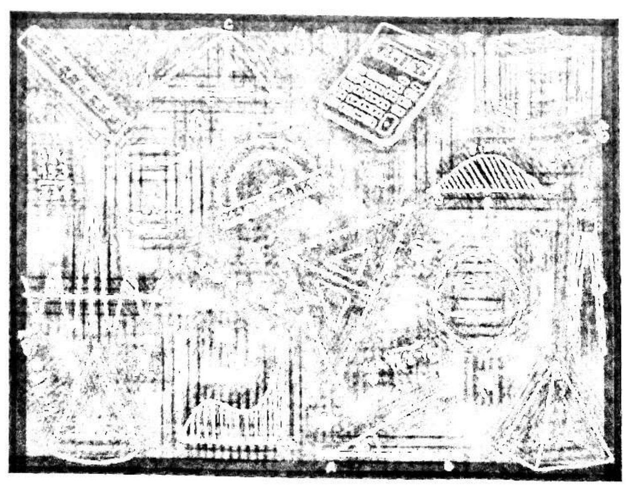
trong đó $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ và $k$ là số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 sao cho: $\frac{k}{n} > \frac{1}{9}$,

$$C_{n-k-1}^3 = \frac{(n-k-1)(n-k-2)(n-k-3)}{6},$$

với $(n-k-1) \geq 3$.

(Nếu $n-k-1 < 3$ thì ta đặt $C_{n-k-1}^3 = 0$).

**BÙI VĂN CHI**
*(21/2 Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định)*
***Giới thiệu***



# ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH NAM ĐỊNH

## NĂM HỌC 2022 - 2023

### MÔN THI: TOÁN

(*Thời gian làm bài*: 150 *phút*)

**Câu 1.** (*3,0 điểm*)

1) Cho $a, b, c$ là các số thực dương thoả mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}$. Chứng minh

$$\frac{bc+1}{a^2+1}+\frac{ac+1}{b^2+1}+\frac{ba+1}{c^2+1}=3.$$

2) Cho đa thức

$$P(x)=(x+1)(x+2)(x+3)...(x+2022).$$

Khi khai triển đa thức $P(x)$ ta được

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2021}x^{2021}+a_{2022}x^{2022}.$$

Tính giá trị của biểu thức

$$S=\frac{a_1+a_3+a_5+...+a_{2021}}{a_0+a_2+a_4+...+a_{2022}}-\frac{a_0}{2(a_1+a_3+a_5+...+a_{2021})}.$$

**Câu 2.** (*5,0 điểm*)

1). Giải phương trình

$$(x+1)\left(3x+\sqrt{x+1}-3\right)=4\sqrt{x^3}-2.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x(y+1)+y=3 \\ \sqrt{5-2(x+y)}+\sqrt{2-x^2y^2}=2 \end{cases}.$$

**Câu 3.** (*3,0 điểm*)

1) Tìm tất cả các số nguyên tố $p, q$ sao cho

$$p^4-q^2\left(p^2+q^2+1\right)=\left(q^2+1\right)^2.$$

2) Cho $m, n, p, q$ là các số nguyên thoả mãn

$$(m+n+p+q)\vdots 30.$$

Chứng minh rằng $\left(m^5+n^5+p^5+q^5\right)\vdots 30.$

**Câu 4.** (*7,0 điểm*) Cho tam giác nhọn $ABC$ với $AB<AC$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Gọi $BH$ và $CQ$ là hai đường cao của tam giác $ABC$. Tiếp tuyến tại $B$ và tại $C$ của đường tròn $(O)$ cắt nhau tại $M$. Đoạn thẳng $OM$ cắt $BC$ và cắt đường tròn $(O)$ lần lượt tại $N$ và $D$. Tia $AD$ cắt $BC$ tại $F$; $AM$ cắt $BC$ tại $E$ và cắt đường tròn $(O)$ tại điểm thứ hai là $K$ ($K$ khác $A$).

1) Chứng minh rằng: $AB.KC=AC.KB$ và $\widehat{ABM}=\widehat{AHN}$.

2) Gọi $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $AFN$. Chứng minh $\widehat{IOM}+\widehat{ADN}=180^0$.

3) Qua $E$ kẻ đường thẳng vuông góc với $BC$ cắt $QH$ tại $G$. Chứng minh ba điểm $A, G, N$ thẳng hàng.

**Câu 5.** (*2,0 điểm*)

1) Lấy 2018 điểm phân biệt ở miền trong của một ngũ giác lồi cùng với 5 đỉnh của ngũ giác đó ta được 2023 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của ngũ giác là 1 đơn vị. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 2023 điểm đã cho có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4039}$ đơn vị.

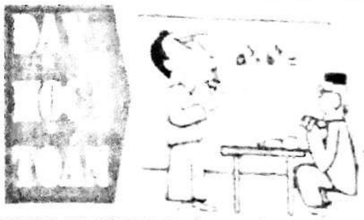
2) Xét $a, b, c$ là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c\geq 3$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{a+b^2+c}+\frac{1}{a+b+c^2}$

**TRẦN XUÂN ĐÁNG**

(5/7/136 *Phan Đình Phùng, TP. Nam Định*)

***Giới thiệu***

DIỄN ĐÀN




THEO CHƯƠNG TRÌNH VÀ SGK MỚI

# MỘT SỐ SAI LẦM THƯỜNG GẶP KHI GIẢI TOÁN ĐẠI SỐ TỔ HỢP

**NGUYỄN THANH GIANG**
*(GV THPT chuyên Hưng Yên)*

*(Kỳ 2)*

## 3. SAI LẦM KHI ÁP DỤNG CÁCH GIẢI DẠNG BÀI TẬP NÀY CHO BÀI TẬP KHÁC CÓ NỘI DUNG TƯƠNG TỰ

**Bài toán 1.** *Từ 20 câu hỏi trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó. Người ta chọn ra 10 câu để làm đề kiểm tra 15 phút sao cho phải có đủ cả 3 loại dễ, trung bình và khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra?*

**Lời giải bài toán** (*bằng cách làm gián tiếp*).

*Bước 1*: Chọn 10 câu tùy ý trong 20 câu có $C_{20}^{10}$ (cách).

*Bước 2*: Chọn 10 câu không thoả mãn đầu bài (có không quá 2 trong 3 loại dễ, trung bình và khó).

TH1: chọn 10 câu dễ và trung bình trong 16 câu có $C_{16}^{10}$ (cách).

TH2: chọn 10 câu dễ và khó trong 13 câu có $C_{13}^{10}$ (cách).

TH3: chọn 10 câu trung bình và khó trong 11 câu có $C_{11}^{10}$ (cách).

Vậy có:

$C_{20}^{10}-(C_{16}^{10}+C_{13}^{10}+C_{11}^{10})=176451$ đề kiểm tra.

Trong thực tế khi làm trực tiếp có nhiều trường hợp xảy ra và có những trường hợp khó xác định số cách thực hiện học sinh có thể giải bài toán một cách gián tiếp.Tuy nhiên khi sử dụng phương pháp này học sinh lại có thể mắc phải các sai lầm tương tự như trong thí dụ sau đây.

**Thí dụ 6.** *Từ 20 câu hỏi trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó. Người ta chọn ra 7 câu dễ làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ cả 3 loại dễ, trung bình và khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra?*

***Sai lầm thường mắc.***

***Cách 1.***

*Bước 1*: Chọn 7 câu tuỳ ý trong 20 câu có $C_{20}^{7}$ (cách).

*Bước 2*: Chọn 7 câu không thoả mãn đầu bài.

TH1: Chọn 7 câu dễ và trung bình trong 16 câu có $C_{16}^{7}$ (cách).

TH2: Chọn 7 câu dễ và khó trong 13 câu có $C_{13}^{7}$ (cách).

TH3: chọn 7 câu trung bình và khó trong 11 câu có $C_{11}^{7}$ (cách).

Vậy có $C_{20}^{7}-(C_{16}^{7}+C_{13}^{7}+C_{11}^{7})=64034$ đề kiểm tra.

***Cách 2.***

*Bước 1*: Chọn 7 câu tuỳ ý trong 20 câu có $C_{20}^{7}$ (cách)

*Bước 2*: Chọn 7 câu không thoả mãn đầu bài (có không quá 2 trong 3 loại dễ, trung bình và khó).

TH1: Chọn 7 câu dễ trong 9 câu dễ có $C_{9}^{7}$ (cách).

TH2: Chọn 7 câu trung bình trong 7 câu trung bình có 1 (cách).

TH3: Chọn 7 câu dễ và trung bình trong 16 câu có $C_{16}^{7}$ (cách).

TH4: Chọn 7 câu dễ và khó trong 13 câu có $C_{13}^{7}$ (cách).

TH5: Chọn 7 câu trung bình và khó trong 11 câu có $C_{11}^7$ (cách).

Vậy có: $C_{20}^7 - (1 + C_9^7 + C_{16}^7 + C_{13}^7 + C_{11}^7) = 63997$ đề kiểm tra.

*Hai lời giải cho 2 kết quả khác nhau. Lời giải nào sai hay cả hai lời giải đều sai?*

***Phân tích sai lầm.***

***Cách 1.***

Cũng là bài toán tương tự bài toán 1 trên, lời giải tương tự lời giải của bài toán 1 trên nhưng lời giải lại mắc sai lầm. Sai lầm ở chỗ là lời giải loại trừ không hết các điều kiện không thoả mãn bài toán.

Ở bài toán 1 ***thì số câu được chọn nhiều hơn số câu của một loại*** dễ hoặc TB hoặc khó (*tức là chọn 10 câu, trong đó có 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó*). Trong khi thí dụ 5 thì ***số câu được chọn có ít hơn một trong số câu của một loại*** dễ hoặc TB hoặc khó (*tức là chọn 7 câu, trong đó có 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó*). Cho nên trong 7 câu được chọn lời giải đã sót ở chỗ 7 câu đó có thể toàn là câu dễ hoặc toàn là câu khó. Do đó kết quả sẽ ít hơn đáp án đúng.

***Cách 2.***

Tuy đã tính cách chọn được 7 câu dễ trong 9 câu dễ, có $C_9^7$ cách; chọn được 7 câu trung bình trong 7 câu trung bình, có 1 cách. Nhưng ở TH 3 không trừ đi các cách đã tính ở TH1 và TH2; TH4 không trừ đi các cách đã tính ở TH1; TH5 không trừ đi cách đã tính ở TH2, do đó lời giải vẫn mắc sai lầm.

***Lời giải đúng.***

*Bước 1*: Chọn 7 câu tuỳ ý trong 20 câu có $C_{20}^7$ (cách).

*Bước 2*: Chọn 7 câu không thoả mãn đầu bài (có không quá 2 trong 3 loại dễ, trung bình và khó).

TH1: 7 câu chọn được đều là câu dễ hoặc đều là câu trung bình

- Chọn 7 câu dễ trong 9 câu dễ có $C_9^7$ (cách).
- Chọn 7 câu trung bình trong 7 câu trung bình có 1 (cách).

Vậy TH1 có $C_9^7 + 1$ ( cách).

TH2: 7 câu chọn được có đúng hai trong ba loại câu dễ, trung bình, khó.

- Chọn 7 câu dễ và trung bình trong 16 câu có $C_{16}^7$ cách, trừ đi cách chọn được 7 câu dễ là $C_9^7$, trừ đi cách chọn được 1 câu trung bình còn

$$C_{16}^7 - C_9^7 - 1 \text{ cách.}$$

- Chọn 7 câu dễ và khó trong 13 câu có $C_{13}^7$ cách, trừ đi cách chọn được 7 câu dễ là $C_9^7$ còn $C_{13}^7 - C_9^7$ cách.
- Chọn 7 câu trung bình và khó trong 11 câu có $C_{11}^7$ cách, trừ đi 1 cách chọn được 7 câu trung bình còn $C_{11}^7 - 1$ cách.

Vậy TH2 có:

$$C_{16}^7 - C_9^7 - 1 + C_{13}^7 - C_9^7 + C_{11}^7 - 1$$
$$= C_{16}^7 + C_{13}^7 + C_{11}^7 - 2C_9^7 - 2 \text{ cách.}$$

Cả hai TH có:

$$(C_9^7 + 1 + C_{16}^7 + C_{13}^7 + C_{11}^7 - 2C_9^7 - 2)$$
$$= C_{16}^7 + C_{13}^7 + C_{11}^7 - C_9^7 - 1 \text{ cách.}$$

Vậy có $C_{20}^7 - (C_{16}^7 + C_{13}^7 + C_{11}^7 - C_9^7 - 1) = 64071$ đề kiểm tra.

**Bài toán 2.** *Cho tập hợp $A = \{0;1;2;3;4;5\}$, từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 0 và 1?*

***Lời giải bài toán như sau.***

Gọi số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được lập từ tập $A$ là: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, $a_1 \neq 0$.

Số cách chọn $a_1$ có 5 cách.

Số cách chọn $\overline{a_2a_3a_4a_5}$ là số chỉnh hợp chập 4 của 5 có: $A_5^4$ (cách).

Suy ra : có 5. $A_5^4 = 600$ (số).

Trong 600 số trên thì:

- Số không có chữ số 0 được lập từ tập $A_1 = \{1;2;3;4;5\}$ là số hoán vị của 5 số thuộc $A_1$ nên có $P_5 = 120$ (số).

- Số không có chữ số 1 được lập từ tập $A_2 = \{0;2;3;4;5\}$:

Số cách chọn $a_1 \neq 0$ có 4 cách.

Số cách chọn $\overline{a_2a_3a_4a_5}$ là số hoán vị của 4 có $P_4$ (cách).

Suy ra có: $4.P_4 = 96$ (số).

Vậy số các số cần lập là: $600 - (120 + 96) = 384$.

**Thí dụ 7.** *Cho tập hợp $A = \{0;1;2;3;4\}$, từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 0 và 1?*

***Sai lầm thường gặp khi thí dụ 7 làm tương tự lời giải bài toán 2 như sau.***

Gọi số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau được lập từ tập $A$ là: $\overline{a_1a_2a_3}$, $a_1 \neq 0$.

Số cách chọn $a_1$ có 4 cách.

Số cách chọn $\overline{a_2a_3}$ là số chỉnh hợp chập 2 của 4 có: $A_4^2$ (cách).

Suy ra có: $4.A_4^2 = 48$ (số).

Trong 48 số trên thì:

- Số không có chữ số 0 được lập từ tập $A_1 = \{1;2;3;4\}$ là số chỉnh hợp chập 3 của 4:

$$A_4^3 = 24 \text{ (số)}.$$

- Số không có chữ số 1 được lập từ tập $A_2 = \{0;2;3;4\}$:

Số cách chọn $a_1 \neq 0$ có 3 cách.

Số cách chọn $\overline{a_2a_3}$ là số chỉnh hợp chập 2 của 3 có: $A_3^2$ (cách).

Suy ra có: $3.A_3^2 = 18$ (số).

Vậy theo yêu cầu bài toán ta có:

$$48 - (24 + 18) = 6 \text{ (số)}.$$

***Phân tích sai lầm.***

Trong thí dụ 7 nếu bỏ ra chữ số 0 và 1 thì còn lại 3 số 2; 3; 4 nên lập được số có 3 chữ số khác nhau không có số 0 và 1.

Vì vậy trong 48 số gồm có:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{số không có chữ số 0}\\ \text{số không có chữ số 1}\\ \text{số không có chữ số 0 và 1}\\ \text{số có chữ số 0 và 1}\end{array}\right.$$

Cách làm trên ta thấy số không có chữ số 0 và 1 bị trừ đi hai lần nên dẫn đến trường hợp mất số. Số không có chữ số 0 và 1 có tất cả 6 số và bị trừ đi hai lần nên kết quả của lời giải bị mất đi 6 số so với kết quả đúng là 12 số.

Còn trong bài toán 2 nếu bỏ ra chữ số 0 và 1 thì còn lại 4 số 2 ; 3; 4 ; 5 nên không thể lập được số có 5 chữ số khác nhau. Chính vì thế mà trong bài toán 2 chỉ có 3 loại số nên lời giải như thế với bài toán 2 hoàn toàn đúng.

Ngoài cách bổ sung lời giải trên cho đúng có thể giải thí dụ 7 bởi cách giải đúng nhắn gọn sau đây:

Số cách chọn số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 0 và 1, chính là số cách xếp 3 chữ số từ tập A vào 3 vị trí liên tiếp nhau:

Vì nhất thiết phải có mặt chữ số 0 và 1 nên ta chọn số 0 và 1 xếp trước

Vì số 0 không được đứng ở vị trí đầu tiên nên có 2 cách xếp vào một trong hai vị trí sau của số cần lập.

Số 1 có 2 cách xếp vào 2 vị trí còn lại.

Số cách xếp 1 số trong 3 số còn lại vào vị trí còn lại sẽ là 3 cách.

Vậy số các số lập được sẽ là $2.2.3 = 12$.

(*Bài toán 2 giải tương tự cách giải trên sẽ " đẹp hơn".*).

## 4. SAI LẦM LIÊN QUAN ĐẾN NHỮNG KIẾN THỨC KHÁC

**Thí dụ 8.** *Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Trong S có bao nhiêu số thoả mãn $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = c$ với c là số lẻ.*

***Sai lầm thường gặp.*** Các số cần tìm xác định từ hai trường hợp sau:

TH1: $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = 7$.

Các cặp số $(a_1;a_2),(a_3;a_4),(a_5;a_6)$ sẽ là:

$$(6;1),(5;2),(4;3).$$

Coi mỗi số $\overline{a_1a_2},\overline{a_3a_4},\overline{a_5a_6}$ là một vị trí trong số cần xác định hay số cần xác định có 3 vị trí đặt các cặp số nói trên.

Đặt 3 cặp số trên vào 3 vị trí, khi đó có 3! cách đặt. Mỗi lần đổi vị trí 2 chữ số trong mỗi cặp số ta được một số khác thoả mãn, do đó trường hợp này có $3! \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ (số).

TH2: $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = 5$.

Các cặp số $(a_1;a_2),(a_3;a_4),(a_5;a_6)$ sẽ là:

$$(5;0),(4;3),(3;2).$$

Làm tương tự trường hợp 1, có 48 số thoả mãn.

Do đó số phần tử của $A$ là: 48 + 48 = 96.

***Phân tích sai lầm.*** Số phần tử của $A$ lập được trong trường hợp 2 không bằng số phần tử của $A$ lập được ở trường hợp 1: Không thể đổi vị trí hai chữ số trong cặp số $(5;0)$ để được số cần lập do số 0 không thể ở vị trí đầu.

***Lời giải đúng (cho trường hợp 2) như sau.***

TH2: $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = 5$

Các cặp số $(a_1;a_2),(a_3;a_4),(a_5;a_6)$ sẽ là:

$$(5;0),(4;3),(3;2).$$

Làm tương tự trường hợp 1 (kể cả số có số 0 đứng đầu) có 48 số.

Xét các số có số 0 đứng đầu: Đặt cặp số $(0;5)$ vào vị trí thứ nhất; đặt hai cặp số còn lại vào 2 vị trí còn lại có 2! cách; đổi vị trí 2 chữ số trong mỗi cặp số ở hai vị trí sau sẽ được các số khác nhau, khi đó sẽ có 2! × 2 × 2 = 8 (số).

Trường hợp 2 có : 48 × 8 = 40 (số).

Do đó số các số cần tìm là: 48 + 40 = 88.

**Thí dụ 9.** *Sau khi sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton và rút gọn*

$$P = (x - \frac{1}{x^2})^{20} + (x^3 - \frac{1}{x})^{10} - 400x^{14}$$

*thì biểu thức P sẽ có bao nhiêu số hạng?*

***Sai lầm thường gặp.***

Đặt $Q = \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20}$; $R = \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10}$, ta có:

$$Q = \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^{20-k}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{20} (-1)^k C_{20}^k x^{20-3k}.$$ Khai triển có 21 số hạng.

$$R = \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10} = \sum_{m=0}^{10} C_{10}^m (x^3)^{10-m}\left(-\frac{1}{x}\right)^m$$

$$= \sum_{m=0}^{10} (-1)^m C_{10}^m x^{30-4m}.$$ Khai triển có 11 số hạng.

Trong khai triển $Q$ số hạng chứa $x^{14}$ ứng với $k$ thoả mãn $20 - 3k = 14 \Leftrightarrow k = 2$ và có hệ số là $C_{20}^2 = 190$.

Trong khai triển $R$ số hạng chứa $x^{14}$ ứng với $m$ thoả mãn $30 - 4m = 14 \Leftrightarrow m = 4$ và có hệ số là $C_{10}^4 = 210$.

Trong khai triển $Q + R$ số hạng chứa $x^{14}$ có hệ số là $190+210=400$. Do đó khai triển và rút gọn $P$ hệ số của số hạng chứa $x^{14}$ là:

$$C_{20}^{2}+C_{10}^{4}-400=190+210-400=0$$

$\Rightarrow P$ không có số hạng chứa $x^{14}$.

Do đó khai triển $P$ có $21+11-2=30$ số hạng.

***Phân tích sai lầm.*** Biểu thức $P$ có số hạng $400x^{14}$ nên lời giải mới xét khi nào biểu thức $P$ sau rút gọn không có số hạng chứa $x^{14}$. Lời giải đã mắc sai lầm khi khai triển và rút gọn biểu thức $Q$ và $R$ có thể có trường hợp các luỹ thừa có cùng số mũ, chẳng hạn khai triển $Q$ có số hạng $ax^n$, khai triển $R$ có số hạng $bx^n$. Khi đó:

- Nếu $a+b=0$ thì khai triển $P$ sau rút gọn không có số hạng chứa $x^n$, khi đó số số hạng của khai triển $P$ giảm đi 2 số hạng.
- Nếu $a+b\neq 0$ thì khai triển $P$ sau rút gọn có số hạng chứa $x^n$ khi đó số số hạng của khai triển $P$ giảm đi 1 số hạng.

***Lời giải đúng.***

Ta tìm các số hạng có cùng luỹ thừa $x^n$ trong các khai triển $Q$ và $R$ tức là tìm

$$k,m \text{ thoả mãn } \begin{cases} 20-3k=30-4m \quad (1) \\ k,m\in\mathbb{N} \\ 0\le k\le 20; 0\le m\le 10 \end{cases}.$$

Từ (1) ta có: $4m=3k+10, 0\le 4m\le 40$

$$\Rightarrow 0\le 3k+10\le 40 \Rightarrow 0\le k\le 10.$$

Lại do (1) nên $k$ chia hết cho 2 và không chia hết cho 4. Suy ra $k\in\{2; 6; 10\}$.

- Với $k=2; m=4$ hệ số của $x^{14}$ là $C_{20}^{2}+C_{10}^{4}-400=0\Rightarrow$ sau khi khai triển và rút gọn $P$ không có số hạng chứa $x^{14}$.
- Với $k=6; m=7$ hệ số của $x^2$ là $C_{20}^{6}-C_{10}^{7}\neq 0$
- Với $k=10; m=10$ hệ số của $x^{-10}$ là $C_{20}^{10}+C_{10}^{10}\neq 0.$

Do đó khai triển $P$ có:

$$21+11-2-1-1=28 \text{ (số hạng).}$$

***Cuối cùng mời bạn giải một số bài tập sau:***

**Bài 1.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau, trong các số đó có mặt chữ số 0 nhưng không có mặt chữ số 1?

*ĐS*: 33600.

**Bài 2.** Cần chọn từ 9 học sinh nữ và 7 học sinh nam ra 3 nam và 3 nữ để ghép thành 3 cặp nhảy nam- nữ. Hỏi có bao nhiêu cách ghép?

*ĐS*: 17640.

**Bài 3.** Từ 8 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 4.

*ĐS*: 13320.

**Bài 4.** Với các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể lập bao nhiêu só gồm 5 chữ số khác nhau trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5? Nhất thiết có mặt cả chữ số 2 và 5?

*ĐS*: 1560; 1056.

**Bài 5.** Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư cũng khác nhau. Người ta muốn chọn từ đó ra 3 tem thư, 3 bì thư và dán 3 tem thư ấy lên 3 bì thư đã chọn. Một bì thư chỉ dán 1 tem thư. Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy?

*ĐS*: 1200.

**Bài 6.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau mà tổng các chữ số bằng 18? Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ thoả mãn điều đó?

*ĐS*: 1800; 768.

**Bài 7.** Biết tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức $(x^2+1)^n$ bằng 1024, hãy tìm hệ số của số hạng chứa $x^{12}$ trong khai triển đó.

*ĐS*: 210.

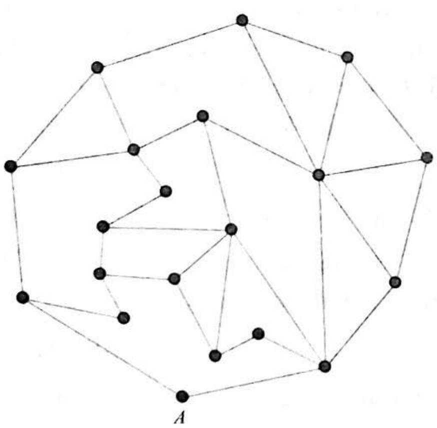
**Bài 8.** Tìm hệ số của $x^{31}$ trong khai triển nhị thức Newton $\left(\frac{1}{x^2}+x\right)^{40}$.

*ĐS*: 9880.


# GIẢI ĐÁP ĐỐ VUI

## *ĐI XEM TRIỂN LÃM*

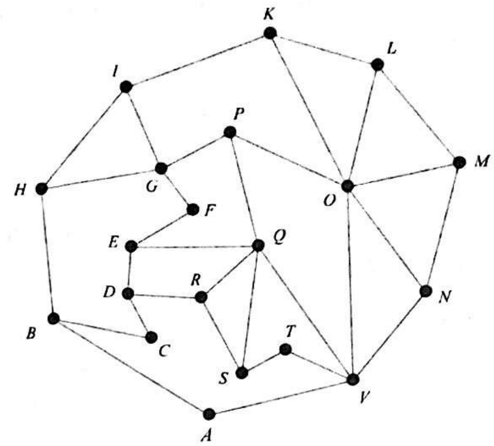
*Một khu triển lãm gồm 20 phòng, mỗi phòng được biểu thị bởi một điểm với các đoạn đường nối các phòng như ở sơ đồ dưới. Bạn hãy chỉ ra một đường đi xem triển lãm, bắt đầu đi từ phòng A, sao cho chỉ đến mỗi phòng một lần, cuối cùng trở về phòng A, mà không đi qua đoạn đường nào đó quá một lần. Bạn có thể chứng tỏ rằng đường đi đó là duy nhất không (không kể đi theo chiều ngược lại)? Trong bài giải bạn ghi các tên phòng đi liên tiếp theo thứ tự A - B - C - ... trên sơ đồ.*




*Sơ đồ khu triển lãm*

***Lời giải.*** Đường đi xem triển lãm thỏa mãn yêu cầu đề bài là đường đi qua các phòng:

$A - B - C - D - E - F - G - H - I - K - L - M - N - O - P - Q - R - S - T - V - A$ được ghi trên hình 1.




*Hình 1*

Để chứng minh đường đi này là duy nhất ta cần các nhận xét sau.

***Nhận xét 1.*** Khi phòng $A$ là đầu mút của *chỉ* 2 đoạn đường đi, chẳng hạn $V - A - B$, thì đó là đường đi xác định duy nhất nên được chọn và hai đoạn $VA$, $AB$ được tô màu đỏ.

***Nhận xét 2.*** Nếu đã có hai đoạn đường đi cùng qua phòng $A$ được xác định, tô màu đỏ, chẳng hạn là $VA$, $AB$, thì mọi đoạn đường nối từ phòng $A$ đến bất kì phòng nào khác $V$, $B$ đều không được chọn nữa nên bị xóa và các đoạn đường này được tô màu xanh.

Dựa vào hai Nhận xét trên, ta thực hiện thuật toán theo thứ tự sau.

1) $V - A - B$ màu đỏ.

2) $B - C - D$ màu đỏ.

3) $E - F - G$ màu đỏ.

4) $V - T - S$ màu đỏ.

5) Từ (1) và (2) thì $BH$ màu xanh.

6) Từ (5) thì $G - H - I$ màu đỏ.

7) Từ (3) và (6) thì $GI$ và $GP$ màu xanh.

8) Từ (7) thì $H - I - K$ màu đỏ.

9) Từ (7) thì $Q - P - O$ màu đỏ.

10) Từ (1) và (4) thì $VQ$, $VO$, $VN$ màu xanh.

11) Từ (10) thì $O - N - M$ màu đỏ

12) Từ (11) và (9) thì $OM$, $OL$, $OK$ màu xanh,
13) Từ (12) thì $N - M - L$ và $M - L - K$ màu đỏ.

Xét hai phòng $D$, $E$. Nếu $EQ$ màu đỏ thì $DE$, $QR$, $QS$ màu xanh, $DR$ và $RS$ màu đỏ, lúc đó có hai đường đi gấp khúc khép kín, không liên thông nhau, nên bị loại. Nếu tô $DE$ màu đỏ thì $DR$ màu xanh, lúc đó tô $QR$ và $RS$ màu đỏ và ta được đường đi duy nhất nêu trên.

**NGUYỄN VIỆT HẢI** (*Hà Nội*)

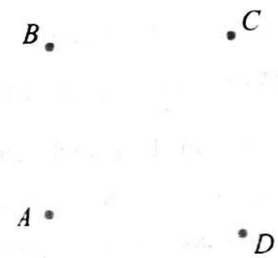
## ĐỐ VUI

### TỔNG ĐỘ DÀI CÁC ĐOẠN THẲNG NHỎ NHẤT

Trên một bản đồ địa lí mỗi bến xe ô tô được biểu thị bởi một điểm, mỗi tuyến đường nối hai bến xe được biểu thị bởi một đoạn thẳng. Một hệ hữu hạn các điểm và một số đoạn thẳng nối các điểm đó trên mặt phẳng được gọi là *liên thông* nếu từ một điểm bất kì của hệ có thể đi theo các đoạn thẳng của hệ đến được điểm bất kì khác của hệ.

Cho bốn điểm $A$, $B$, $C$, $D$ trên một mặt phẳng thỏa mãn điều kiện $AB = BC = a$, $CD = b$, $AB$ vuông góc với $BC$, $AC$ vuông góc với $BD$ và $2BD > AC$.

Trên hình 1 cho bốn bến xe $A$, $B$, $C$, $D$ thỏa mãn điều kiện trên mà chưa có tuyến xe nào được xây dựng. Hãy xác định bến xe $E$ và chỉ ra các tuyến xe cần xây dựng sao cho hệ năm bến xe $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ với các tuyến xe là liên thông và tổng độ dài các tuyến xe là nhỏ nhất.



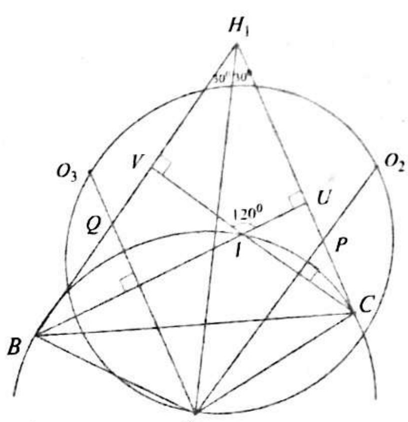

*Hình 1*

NGUYỄN VIỆT HẢI (*Hà Nội*)

***

... **BÀI TOÁN 81** (*Tiếp theo trang 46*)

$\widehat{H_1O_1O_2} = \widehat{H_1O_1O_3} = 30^0$. Suy ra đường thẳng Euler $O_1H_1$ của tam giác $BCI$ là phân giác của góc $\widehat{O_2O_1O_3}$, tức là nó đi qua tâm của tam giác đều $O_1O_2O_3$.




***Nhận xét***. Bạn *Trần Thị Thanh Thư*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** và bạn *Nguyễn Văn Cảnh*, GV THCS Long Hậu, xã Long Hậu, huyện Cần Giuộc, **Long An** đưa ra cách giải tương tự với cách giải 1 ở trên. Xin hoan nghênh hai bạn.

**NHƯ HOÀNG**

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.7.2023.

### BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

**BÀI TOÁN 83.** *Cho tứ giác lồi PQRS nằm bên trong tam giác ABC mà diện tích tam giác này là 1. Chứng minh rằng ba trong số các đỉnh của tứ giác này tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn* $\frac{1}{4}$.

**KHÁNH HỮU** (*Hà Nội*)


## CÁC LỚP THCS

**Bài T1/552** (Lớp 6). Tìm các số nguyên tố $p$ sao cho $5^p + 4p^4$ là số chính phương.

NGUYỄN ĐỨC TƯỞNG

*(Pleiku)*

**Bài T2/552** (Lớp 7). Cho $I$ là một điểm trong hình vuông $MNPQ$, biết rằng $IM = 3\sqrt{2}$ cm, $IN = 5$ cm, $IQ = \sqrt{11}$ cm. Tính số đo góc $\widehat{MNI}$.

NGUYỄN VĂN BẢN

*(GV THCS Thanh Yên, H. Điện Biên, Điện Biên)*

**Bài T3/552.** Cho đa thức bậc ba $f(x)$ với hệ số của $x^3$ là một số nguyên dương. Biết $f(5) - f(3) = 2022$. Chứng minh rằng $f(7) - f(1)$ là hợp số.

NGUYỄN HÀM THÀNH

*(GV THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, Nghệ An)*

**Bài T4/552.** Trên đường tròn $(O)$ cho hai điểm $B$, $C$ cố định và điểm $A$ thay đổi. Gọi $I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$. Trên tiếp tuyến của $(O)$ tại $B$ lấy hai điểm $D$, $E$ sao cho $BD = BA$, $BE = CA$ và $A$, $D$, $E$ nằm cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $BC$. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $IDE$ luôn thuộc một đường thẳng cố định.

ĐẬU ANH HÙNG

*(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)*

**Bài T5/552.** Giải phương trình

$$x^3 + 6x^2 + 12x = 16\sqrt[3]{x+3}.$$

HUỲNH THANH TÂM

*(CB Bưu điện TX. An Nhơn, Bình Định)*

## CÁC LỚP THPT

**Bài T6/552.** Cho các số $a$, $b$, $c$ dương thỏa mãn

$$\begin{cases} a+b+c = \dfrac{1+2\sqrt{2}}{3} \\ a \le \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

VŨ VĂN PHAN

*(SV ĐH Bách Khoa Hà Nội, K-49, lớp BK41)*

**Bài T7/552.** Tìm $m$ để hệ phương trình sau đây có bốn nghiệm thực phân biệt

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+2x+1} + \sqrt{(2x^2-2y^2-3x+8)^2 + (4xy-3y)^2} = m \\ (3x+4y)^2 + (4x-3y)^2 = 100 \end{cases}.$$

NGUYỄN VĂN XÁ

*(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)*

**Bài T8/552.** Cho tam giác nhọn $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$, trực tâm $H$, trung tuyến $AM$ ($M$ thuộc cạnh $BC$). Đường thẳng qua $H$ vuông góc với $AM$ cắt $AM$ tại $N$, cắt $BC$ tại $T$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $OMN$ cắt lại $BC$ tại $G$ ($G$ khác $M$). Gọi $K$ là điểm đối xứng với $G$ qua $T$. Chứng minh rằng $KA = KN$.

TRẦN ĐẠI LỘ

*(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Điện Biên)*

**Bài T9/552.** Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ thỏa mãn $P^2(x) - x - 1$ chia hết cho $x^{100}$. Tìm hệ số của $x^{99}$ trong khai triển của đa thức $(P(x)+1)^{100}$.

ĐỖ LÊ HẢI THỤY

*(GV THPT chuyên Bảo Lộc, Lâm Đồng)*

## TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

**Bài T10/552.** Với mỗi số nguyên dương $n$, ta ký hiệu $\tau(n)$ và $\sigma(n)$ lần lượt là số các ước số dương và tổng các ước số dương của $n$. Chứng minh với mọi $n > 1$ ta có $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(2k-1)}{\tau(2k-1)} < \frac{n(n+1)}{2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k^2)}{\tau(k^2)}$.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

*(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)*

**Bài T11/552.** Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn: $P^2(x^2+2x-3) = 4P(x) - 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

KIỀU ĐÌNH MINH

*(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)*

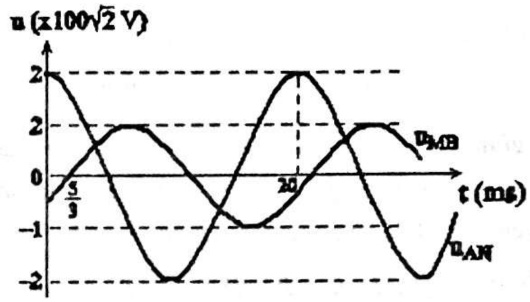
**Bài T12/552.** Cho tam giác $ABC$ với trọng tâm $G$; các đường cao $AD$, $BE$. Gọi $X$, $Y$ lần lượt là giao điểm của các tia $DG$, $EG$ với đường tròn $(O)$ ngoại tiếp tam giác $ABC$, $XY$ cắt $BC$, $AC$ lần lượt tại $P$, $Q$. Gọi $O_1$, $O_2$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $CXQ$ và $CYP$. Chứng minh rằng $CG$ vuông góc với $O_1O_2$.

NGUYỄN NGỌC TÚ
(*GV THPT chuyên Hà Giang*)

**Bài L1/552.** Một con lắc đơn dao động điều hoà trong một thang máy chuyển động thẳng đứng lên cao chia thành 3 giai đoạn liên tục. Giai đoạn một, thang máy chuyển động nhanh dần đều từ trạng thái nghỉ được đoạn đường $h$. Giai đoạn hai, thang máy chuyển động thẳng đều với tốc độ bằng tốc độ cuối giai đoạn một và đi được đoạn đường $2h$. Giai đoạn ba thang máy chuyển động chậm dần đều với tốc độ đầu bằng tốc độ chuyển động thẳng đều, đồng thời đi được đoạn đường h rồi dừng lại. Số dao động toàn phần trong giai đoạn một và hai tương ứng là 18 lần và 17 lần. Giai đoạn ba của thang máy thì con lắc thực hiện được số dao động toàn phần bằng bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

**Bài L2/552.** Cho đoạn mạch điện xoay chiều $AMNB$. Trong đó đoạn mạch $AM$ chỉ chứa cuộn cảm thuần có độ tự cảm $L$, đoạn mạch $MN$ chỉ chứa điện trở thuần $R$ và đoạn mạch $NB$ chỉ chứa tụ điện có điện dung $C$. Đặt điện áp $u = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ (trong đó $U$, $\omega$, $\varphi$ xác định) vào hai đầu đoạn mạch. Khi đó điện áp tức thời hai đầu đoạn mạch $AN$ là $u_{AN}$ và $MB$ là $u_{MB}$ được biểu thị ở hình dưới. Tính điện áp hiệu dụng hai đầu đoạn mạch $MN$.




THANH LÂM (*Hà Nội*)

******************************************

**ĐÍNH CHÍNH:** Trong TH&TT số 551, tháng 5 năm 2023, mục "*Đề ra kỳ này*", bài T3/551:

Đã viết: … $A = \sqrt{\dfrac{abc}{(a+2b)(b+2c)+(c+2a)}}$ …

xin sửa là: … $A = \sqrt{\dfrac{abc}{(a+2b)(b+2c)(c+2a)}}$ …

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

Tòa soạn TH&TT

## PROBLEMS IN THIS ISSUE

### FOR SECONDARY SCHOOL

**Problem T1/552** (For 6th grade). Find all the primes $p$ so that $5^p + 4p^4$ is a perfect square.

**Problem T2/552** (For 7th grade). Let $I$ be the point inside the square $MNPQ$ with $IM = 3\sqrt{2}$ cm, $IN = 5$ cm, and $IQ = \sqrt{11}$ cm. Compute the measurement of the angle $\widehat{MNI}$.

**Problem T3/552.** Given a cubic polynomial $f(x)$ of which the coefficient of $x^3$ is a positive integer. Suppose that $f(5) - f(3) = 2022$. Show that $f(7) - f(1)$ is a composite number.

**Problem T4/552.** In a circle $(O)$ two points $B$, $C$ are fixed and let a point $A$ vary. Let $I$ be the incenter of the triangle $ABC$. On the tangent to $(O)$ at $B$ choose two points $D$, $E$ so that $BD = BA$, $BE = CA$ and $A$, $D$, $E$ lies on the same half plane determined by $BC$. Show that the incenter of $IDE$ lies on a fixed line.

**Problem T5/552.** Solve the equation
$$x^3 + 6x^2 + 12x = 16\sqrt[3]{x+3}.$$

### FOR HIGH SCHOOL

**Problem T6/552.** Given positive numbers $a$, $b$, $c$ satisfying $\begin{cases} a+b+c = \dfrac{1+2\sqrt{2}}{3} \\ a \le \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

(*Xem tiếp trang 30*)


**Bài T1/548.** *Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p; q)$ mà $p - q$ và $pq - q$ đều là số chính phương.*

***Lời giải.*** Xét các số nguyên tố $p$ và $q$ mà $p - q = a^2 \geq 1$ thì $p > q \geq 2$ nên $p$ phải là số nguyên tố lẻ. Giả sử $p - q = a^2$ và $pq - q = b^2$.

Từ đó $b^2 - a^2 = pq - q - (p - q) = pq - p$
$= p(q - 1) \geq 1$

nên $b > a \geq 1$ và $(b + a)(b - a) = p(q - 1)$.

Từ $b^2 < pq < p^2$ thì $b - a < b < p$, mà $p$ là số nguyên tố, $p$ là ước số của $(b + a)(b - a)$ nên $p$ là ước số của $b + a$, mặt khác $b + a < p + b < 2p$ nên chỉ xảy ra $b + a = p$ với $p$ là số lẻ.

Do $b + a = b - a + 2a$ là số lẻ thì $b - a$ cũng là số lẻ.

Từ $(b + a)(b - a) = p(q - 1)$ suy ra $b - a = q - 1$ là số lẻ, mà $q$ là số nguyên tố nên số $q$ chẵn, suy ra $q = 2$. Do đó $b - a = 1$ hay là $b = a + 1$. Thay vào các hệ thức $p - q = a^2$ và $pq - q = b^2$ được:

$p - 2 = a^2$ hay là $p = a^2 + 2$ và $2p - 2 = b^2$.

Từ đó: $2a^2 + 4 = 2p = b^2 + 2 = (a + 1)^2 + 2$
$= a^2 + 2a + 3$.

Do đó $a^2 - 2a + 1 = 0$ hay $(a - 1)^2 = 0$, suy ra $a = 1$ và $p = a^2 + 2 = 3$.

Thử với số nguyên tố $q = 2$ và số nguyên tố $p = 3$ thì $p - q = 1 = 1^2$ và $pq - q = q(p - 1) = 2^2$, thỏa mãn đề bài.

Vậy chỉ có một cặp số nguyên tố $(p; q)$ thỏa mãn đề bài là $p = 3$ và $q = 2$.

***Nhận xét.*** Trong các bài giải gửi đến Tòa soạn, lập luận đều không chặt chẽ.

**NGUYỄN VIỆT HẢI**

**Bài T2/548.** *Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ có góc $\widehat{ACB} = 30^0$. Trên cạnh $BC$ lấy hai điểm $D$, $E$ sao cho $AB = BD$, $AC = CE$. Tính tỷ số $\frac{BE}{BD}$.*

***Lời giải.*** Tam giác vuông $ABC$ có góc $\widehat{ACB} = 30^0$ cho nên góc $\widehat{ABC} = 60^0$ và là nửa tam giác đều. Từ đó ta có $2AB = BC$ và từ định lý Pythagore suy ra $AC = \sqrt{3}AB$. Thay vào ta có:

$$\frac{BE}{BD} = \frac{BC - CE}{AB} = \frac{2AB - AC}{AB}$$
$$= \frac{2AB - AB\sqrt{3}}{AB} = 2 - \sqrt{3}.$$

***Nhận xét.*** Các bạn sau đây có đáp số đúng: **Nghệ An:** *Hoàng Văn Nhân, Nguyễn Tất Han, Nguyễn Cảnh Phước Hưng, Nguyễn Thị Băng Tâm,* 7C, THCS Lý Nhật Quang; **Quảng Bình:** *Hoàng Hà Uyên Nhi*, 7/2, THCS Đức Ninh Đông; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Trịnh Phương Minh*, 6/14, THCS Lê Quý Đôn; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Ngọc Bảo Châu*, 7C, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Hiệp*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ.

**VŨ ĐÌNH HÒA**

**Bài T3/548.** *Viết lên bảng bộ số*

$$(-69; -68; -67; \ldots; 94; 95; 96).$$

*Mỗi lượt chơi Quang Linh xóa đi một bộ 6 số có dạng: $(a + b; b + c; c + a; a - b; b - c; c - a)$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên và thay bởi bộ 3 số có dạng $(2a; 2b; 2c)$. Chứng minh rằng Quang Linh không thể chơi quá 51 lượt.*

***Lời giải.*** Vì $(a+b)+(b+c)+(c+a)+(a-b)$
$+(b-c)+(c-a) = 2a+2b+2c$

và $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2+(a-b)^2+(b-c)^2$
$+(c-a)^2 = (2a)^2+(2b)^2+(2c)^2$

nên sau mỗi thao tác thì tổng các số và tổng bình phương các số trên bảng không đổi. Do đó, tổng

các số trên bảng luôn bằng

$$(-69)+(-68)+\cdots+95+96 = 2241$$

và tổng bình phương các số trên bảng luôn bằng

$$(-69)^2+(-68)^2+\dots+95^2+96^2=411431.$$

Giả sử bạn *Linh* có thể thực hiện được nhiều hơn 52 lượt thì vì sau mỗi lượt số lượng các số trên bảng giảm đi 3 nên sau 52 lượt, trên bảng còn lại đúng 10 số, giả sử là $a_1,a_2,\dots,a_{10}$. Theo trên thì ta có: $a_1+a_2+\dots+a_{10}=2241$

và $a_1^2+a_2^2+\dots+a_{10}^2=411431.$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$10\left(a_1^2+a_2^2+\dots+a_{10}^2\right)\ge\left(a_1+a_2+\dots+a_{10}\right)^2$$

dẫn tới $10.411431>2241^2$, điều này là không thể. Do đó, điều giả sử là sai, nghĩa là *Linh* chỉ có thể thực hiện được các thao tác không quá 52 lần.

***Nhận xét.*** Mấu chốt của bài toán này là phát hiện ra hai bất biến: tổng và tổng bình phương các số trên bảng không đổi. Trong nhiều bài toán, việc phát hiện các bất biến là quan trọng, chẳng hạn

1) Nếu thay bộ số $(a,b,c,a+b+c)$ bởi bộ số $(a+b,b+c,c+a)$ thì tổng và tổng bình phương các số luôn không đổi.

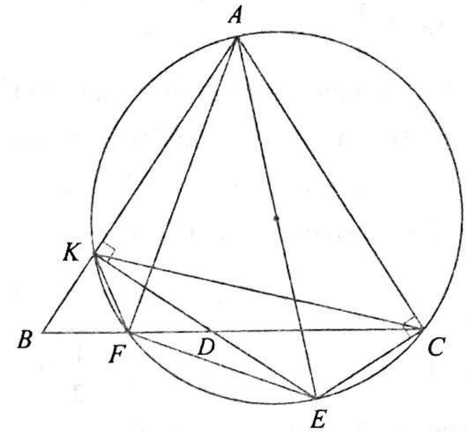
2) Nếu thay cặp số $(a,b)$ bởi cặp số $\left(\frac{3ab}{a+2b},\frac{3ab}{2a+b}\right)$ thì tổng nghịch đảo các số trên bảng sẽ không đổi.

3) Nếu thay cặp số nguyên dương $(a,b)$ bởi cặp số $((a,b),[a,b])$ thì tích các số trên bảng sẽ không đổi, trong đó kí hiệu $(a,b),[a,b]$ tương ứng là ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất của hai số $a,b$.

Bài toán này không khó nhưng chỉ có một bạn giải đúng là: *Trần Việt Anh*, 9A7, THCS Archimedes, Trung Yên, Cầu Giấy, **Hà Nội**. Tuy nhiên bạn *Việt Anh* chưa chỉ ra là các thao tác của bạn *Linh* sẽ phải dừng lại vì mỗi lượt chơi số lượng các số trên bảng giảm 3.

**NGUYỄN TIẾN LÂM**

**Bài T4/548.** *Cho tam giác ABC cân tại A, một điểm D bất kỳ trên cạnh BC (D khác B, C). Đường thẳng qua D vuông góc với AB cắt đường thẳng qua C vuông góc với AC tại E. Gọi K là giao điểm của ED và AB, F là trung điểm của BD. Chứng minh $\widehat{EAF}=\widehat{BDK}$.*




***Lời giải.*** Vì tam giác $ABC$ cân tại $A$ nên ta có:

$$\widehat{ECD}=90^\circ-\widehat{ACB}=90^\circ-\widehat{ABC}=\widehat{KDB}=\widehat{EDC}.$$

Mặt khác, tam giác $BKD$ vuông tại $K$ có $F$ là trung điểm cạnh huyền $BD$ nên tam giác $FKD$ cân tại $F$.

Ta có: $\widehat{FKD}=\widehat{FDK}=\widehat{EDC}=\widehat{ECD}.$

Suy ra tứ giác $CKFE$ nội tiếp. Từ đó suy ra các điểm $A, C, E, F, K$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AE$.

Do đó: $\widehat{EAF}=\widehat{ECF}=\widehat{EDC}=\widehat{BDK}.$

***Nhận xét.*** Các bạn dưới đây có lời giải tốt:

**Sơn La:** *Lương Hữu Bách*, 9A1, THCS Nguyễn Trãi, TP. Sơn La; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Việt*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Lưu Trọng Phúc*, 9B, THCS Đội Cung, TP. Vinh; *Ngô Văn Trường*, 9A, THCS Mai Hùng, Hoàng Mai; **Phú Thọ:** *Trần Lan Anh, Hà Phương Anh, Đỗ Tuấn Minh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông.

**NGUYỄN THANH HỒNG**

**Bài T5/548.** *Giải hệ phương trình sau*

$$\begin{cases} x^2+y^2+2=2(x+y+xy) & (1)\\ x^5+y^5=\dfrac{1}{16} & (2)\end{cases}$$

***Lời giải.*** Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow(x+y)^2-2(x+y)+1=4xy-1$$

$$\Leftrightarrow(x+y-1)^2=4xy-1\ge0.$$

Suy ra $xy \ge \frac{1}{4}$ (3). Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$. Từ (3) suy ra $x$, $y$ là hai số cùng dương hoặc cùng âm. Nếu $x<0,\ y<0 \Rightarrow x^5+y^5<0$ không thỏa mãn (2) nên $x>0,\ y>0$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, từ (2) ta có:

$$\frac{1}{16}=x^5+y^5 \ge 2\sqrt{(xy)^5} \Rightarrow xy \le \frac{1}{4} \quad (4).$$

Từ (3), (4) suy ra $xy=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$ thỏa mãn hệ phương trình đã cho.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $x=y=\frac{1}{2}$.

***Nhận xét.*** Hầu hết các bạn đã làm theo cách trên. Điều then chốt của lời giải là chứng minh $x>0, y>0$ và các bất đẳng thức (3), (4) để có:

$$xy=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}.$$

Có thể giải bài toán bằng cách đặt

$S=x+y;\ p=xy;$ tìm $S$, $p$ rồi suy ra $x$, $y$.

Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Sơn La:** *Lương Hữu Bách*, 9A1, THCS Nguyễn Trãi, TP. Sơn La; **Phú Thọ:** *Hà Phương Anh*, *Đỗ Tuấn Minh*, *Trần Lan Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Hà Tĩnh:** *Trần Diệu Linh*, 9A, *Lưu Khánh Huy*, *Trần Lê Nam Anh*, 8H, THCS Nguyễn Du, TP Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn,Quận 3; **Nghệ An:** *Ngô Văn Trường*, 9A, THCS Mai Hùng, TX. Hoàng Mai.

**NGUYỄN ANH DŨNG**

**Bài T6/548.** *Tìm giá trị lớn nhất của tham số a sao cho phương trình $a^x=\log_a x$ có nghiệm.*

***Lời giải.*** Điều kiện: $a>0, a\ne 1$ và $x>0$.

Để tìm GTLN của $a$, trước hết ta xét $a>1$, nếu tìm được giá trị của $a$ thỏa mãn thì ta lấy giá trị đó mà không cần xét trường hợp $0<a<1$.

Xét $a>1$, đặt $a^x=\log_a x=u$. Khi đó $a^x=u$ và $x=a^u$. Suy ra $a^x+x=a^u+u$.

Xét hàm số $f(t)=a^t+t$ có $f'(t)=a^t\ln a+1>0$ với mọi $t$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $a^x+x=a^u+u$

$\Leftrightarrow f(x)=f(u) \Leftrightarrow x=u \Leftrightarrow x=a^x$ (*).

Xét hàm số $y=a^x-x$ liên tục và có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ có: $y'=a^x\ln a-1$;

$y'=0$ khi $a^x=\frac{1}{\ln a} \Leftrightarrow x_0=\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)$.

Xét các trường hợp:

- Với $1<a<e$ thì $0<\ln a<\ln e$ nên $\frac{1}{\ln a}>1$, do đó $x_0>0$. Ta có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $0$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{1}{\ln a}-\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Suy ra phương trình (*) có nghiệm khi

$$\frac{1}{\ln a}-\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)\le 0 \Leftrightarrow \ln a.\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)\ge 1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right)\ge 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln a}\ge e \Leftrightarrow \ln a\le\frac{1}{e} \Leftrightarrow a\le e^{\frac{1}{e}}.$$

Dễ thấy $e^{\frac{1}{e}}>1$. Khi $a=e^{\frac{1}{e}}$, lấy $x=e$ thì

$$a^x=(e^{\frac{1}{e}})^e=e;\ \log_a x=\log_{e^{\frac{1}{e}}} e=e$$

nên $x=e$ là nghiệm của phương trình $a^x=\log_a x$.

- Với $a\ge e$ thì $\ln a\ge 1$, suy ra $x_0\le 0$. Ta cũng có $y'\ge 0$ với $x\ge x_0$ và do $y(0)>0$ nên (*) vô nghiệm.

Vậy giá trị lớn nhất của tham số $a$ để phương trình đã cho có nghiệm là $a=e^{\frac{1}{e}}$.

***Nhận xét.*** Bài này số bạn gửi bài không nhiều. Tuyên dương các bạn sau có lời giải có lập luận chặt chẽ và ngắn gọn: **Hà Nội:** *Trần Việt Anh*, 9A7, Archimesdes Academy Trung Yên, Cầu Giấy; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 10 T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

**PHẠM THỊ BẠCH NGỌC**

**Bài T7/548.** *Cho phương trình*

$$x^6 - x^4 - 2(m-1)x^3 + (m-1)^2 = 0 \quad (1).$$

*Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.*

***Lời giải.*** (Của *Trần Minh Hoàng* và nhiều bạn) Coi (1) như là phương trình bậc hai của *m*. Ta có

$$m^2 - 2(x^3+1)m + x^6 - x^4 + 2x^3 + 1 = 0 \quad (2)$$

$$\Delta' = (x^3+1)^2 - \left(x^6 - x^4 + 2x^3 + 1\right) = x^4;$$

$$\sqrt{\Delta'} = x^2;\ m_{1,2} = (x^3+1) \pm x^2.$$ Vậy

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow \left(m - x^3 - 1 - x^2\right)\left(m - x^3 - 1 + x^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 + 1 - m = 0 \\ x^3 - x^2 + 1 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 + 1 = m & (3) \\ x^3 - x^2 + 1 = m & (4) \end{cases}.$$

Xét $f_1(x) = x^3 + x^2 + 1$ có:

$$f_1'(x) = 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -\frac{2}{3}.$$

Xét $f_2(x) = x^3 - x^2 + 1$ có:

$$f_2'(x) = 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{2}{3}.$$

Ta có bảng biến thiên của hai hàm số như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $0$ | | $\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | | | |
| $f_1(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{31}{27}$ | ↘ | 1 | ↗ | $\frac{47}{27}$ | ↗ | $+\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $0$ | | $\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_2'(x)$ | | + | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f_2(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{7}{27}$ | ↗ | 1 | ↘ | $\frac{23}{27}$ | ↗ | $+\infty$ |

Giả sử (3) và (4) có nghiệm chung, tức là:

$$\begin{cases} x^3 + x^2 + 1 = m \\ x^3 - x^2 + 1 = m \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, m = 1.$$

Khi ấy (1) trở thành: $x^6 - x^4 = 0$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = -1.$$

Vậy $m = 1$ phương trình chỉ có ba nghiệm phân biệt. Để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì chỉ có các khả năng sau xảy ra:

- TH1: Phương trình (3) có ba nghiệm phân biệt và (4) chỉ có một nghiệm hoặc phương trình (3) có một nghiệm và (4) có ba nghiệm phân biệt, tức là

$$1 < m < \frac{31}{27} \text{ hoặc } \frac{23}{27} < m < 1.$$

- TH2: Phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt và (4) cũng có 2 nghiệm phân biệt. Nhưng (3) có hai nghiệm phân biệt khi $m = \frac{31}{27}$ và (4) có 2 nghiệm phân biệt khi $m = \frac{23}{27}$. Vậy không xảy ra trường hợp đồng thời (3) và (4) có hai nghiệm phân biệt.

*Kết luận*: (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\frac{23}{27} < m < \frac{31}{27} \text{ và } m \neq 1.$$

***Nhận xét.*** Tất cả các bạn đều đưa được (1) về dạng tương đương với (3) hoặc (4). Tuy nhiên, không bạn nào nói rõ cách phân tích (1) như thế nào. Ở đây, các bạn có thể *hoán đổi vai trò của ẩn và tham số*: coi (1) (phương trình bậc 6 đối với $x$) như phương trình bậc hai đối với $m$, từ đó phân tích được đa thức ban đầu thành tích của hai đa thức. Các bạn có thể xem thêm phương pháp *hoán đổi vai trò của ẩn và tham số* trong: *Lê Thống Nhất*, *Phải chăng đây là một phương pháp*, Toán học và Tuổi trẻ, số 103 (tháng 4-1978). Các bạn dưới đây đã gửi bài và có lời giải tốt:

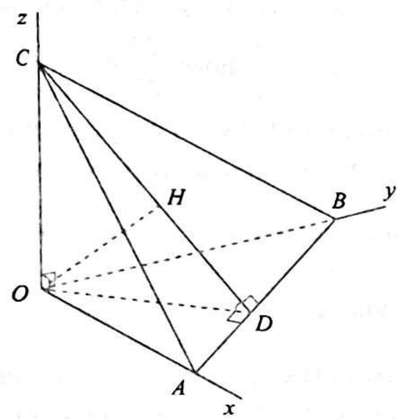
**Bình Định**: *Nguyễn Hữu Trí*, 11A1, THPT số 2 Phù Cát. **Hà Nội**: *Trần Việt Anh*, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy. **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thanh Bảo*, *Trần Minh Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh. **Quảng Bình**: *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Vĩnh Long**: *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

**TẠ DUY PHƯỢNG**

**Bài T8/548.** *Trong không gian, trên 3 tia Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc lần lượt lấy 3 điểm bất kỳ A, B, C không trùng với O. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Ký hiệu $S_O$, $S_A$, $S_B$, $S_C$ theo thứ tự là diện tích các tam giác ABC, OBC, OCA, OAB. Chứng minh rằng*

$$\frac{S_O}{S_A}+\frac{S_O}{S_B}+\frac{S_O}{S_C}-\frac{S_A}{S_O}-\frac{S_B}{S_O}-\frac{S_C}{S_O}\ge 2\sqrt{3}.$$

***Lời giải.***




Từ giả thiết $OC\perp OA; OC\perp OB \Rightarrow OC\perp (OAB)$ $\Rightarrow OC\perp AB$. Lại vì $AB\perp CH$ nên $AB\perp (OCH)$, suy ra $AB\perp OH$. Chứng minh tương tự có:

$AC\perp OH$, do đó $OH\perp (ABC)$.

Gọi $D$ là giao điểm của $CH$ và $AB$ khi đó $\widehat{CDO}$ là góc giữa hai mặt phẳng $(ABC)$ và $(OAB)$.

Sử dụng công thức hình chiếu ta có:

$$S_C=S_O.\cos\widehat{CDO}=S_O.\frac{DO}{DC}=S_O.\frac{OH}{OC}$$

(lưu ý rằng $\Delta ODC$ vuông tại $O$ với $OH\perp DC$), hay $\frac{S_C}{S_O}=\frac{OH}{OC}$. Tương tự: $\frac{S_A}{S_O}=\frac{OH}{OA}; \frac{S_B}{S_O}=\frac{OH}{OB}$. Suy ra:

$$\left(\frac{S_A}{S_O}\right)^2+\left(\frac{S_B}{S_O}\right)^2+\left(\frac{S_C}{S_O}\right)^2=OH^2\left(\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}\right)$$
$$=OH^2.\left(\frac{1}{OH^2}\right)=1.$$

Đặt $\frac{S_A}{S_O}=m, \frac{S_B}{S_O}=n, \frac{S_C}{S_O}=p$. Bài toán quy về chứng minh bất đẳng thức:

$$T=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)-(m+n+p)\ge 2\sqrt{3},$$

với điều kiện $m^2+n^2+p^2=1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy có:

$$\frac{1}{m}+3m\ge 2\sqrt{3}; \frac{1}{n}+3n\ge 2\sqrt{3}; \frac{1}{p}+3p\ge 2\sqrt{3}\quad (1).$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunyakovsky thì:

$$m+n+p\le\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)}=\sqrt{3}\quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$T=\left(\frac{1}{m}+3m\right)+\left(\frac{1}{n}+3n\right)+\left(\frac{1}{p}+3p\right)-4(m+n+p)$$
$$\ge 6\sqrt{3}-4\sqrt{3}=2\sqrt{3}.$$

Ta có điều cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m=n=p=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Leftrightarrow S_A=S_B=S_C=\frac{S_O}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow OA=OB=OC.$$

Lúc đó tứ diện $OABC$ là tứ diện vuông cân tại $O$.

***Nhận xét.*** Lưu ý rằng: ${S_O}^2={S_A}^2+{S_B}^2+{S_C}^2$ được gọi là *hệ thức Pythagore cho khối tứ diện vuông*.

Số bài giải gửi về Toà soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải đúng:

**Quảng Bình**: *Lê Gia Bảo, Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Bình Định**: *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn, *Nguyễn Hữu Trí*, 11A1, THPT Số 2 Phù Cát, huyện Phù Cát; **Vĩnh Long**: *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

**HỒ QUANG VINH**

**Bài T9/548.** *Cho n là số nguyên dương. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^n+b^n+c^n=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=\frac{a^2}{a+bc}+\frac{b^2}{b+ca}+\frac{c^2}{c+ab}+\frac{n}{a^2+b^2+c^2}$.

***Lời giải.*** Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a+bc\le\frac{a^2+1}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2+1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{a+bc} \ge \frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2+1}.$$

Tương tự:

$$\frac{b^2}{b+ca} \ge \frac{2b^2}{a^2+b^2+c^2+1};\ \frac{c^2}{c+ab} \ge \frac{2c^2}{a^2+b^2+c^2+1}.$$

Do đó: $P = \frac{a^2}{a+bc} + \frac{b^2}{b+ca} + \frac{c^2}{c+ab} + \frac{n}{a^2+b^2+c^2}$

$$\ge \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2+1} + \frac{n}{a^2+b^2+c^2}$$

$$= \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2+1} + \frac{9}{8}.\frac{a^2+b^2+c^2+1}{a^2+b^2+c^2} - \frac{9}{8} + \frac{n-\frac{9}{8}}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\overset{\text{BĐT Cauchy}}{\ge} 3 - \frac{9}{8} + \frac{n-\frac{9}{8}}{a^2+b^2+c^2} = \frac{15}{8} + \frac{n-\frac{9}{8}}{a^2+b^2+c^2}.$$

Vậy $P \ge \frac{15}{8} + \frac{n-\frac{9}{8}}{a^2+b^2+c^2}$. Ta xét các trường hợp:

• TH1: $n = 1$. Khi đó: $a + b + c = 3$.

Suy ra: $P \ge \frac{15}{8} - \frac{1}{8(a^2+b^2+c^2)}$.

Mặt khác $a^2+b^2+c^2 \ge \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$ nên

$$P \ge \frac{15}{8} - \frac{1}{8(a^2+b^2+c^2)} \ge \frac{15}{8} - \frac{1}{8.3} = \frac{11}{6}.$$

• TH2: $n = 2$. Suy ra: $n - \frac{9}{8} > 0$. Khi đó:

$a^2+b^2+c^2 = 3$. Suy ra: $P \ge \frac{15}{8} + \frac{2-\frac{9}{8}}{3} = \frac{13}{6}$.

• TH3: $n \ge 3$. Theo BĐT Cauchy ta có:

$$a^n + a^n + n - 2 = a^n + a^n + \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n-2 \text{ số } 1} \ge n\sqrt[n]{a^{2n}} = na^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^n + n - 2 \ge na^2.$$

Tương tự: $2b^n + n - 2 \ge nb^2$; $2c^n + n - 2 \ge nc^2$.

Suy ra: $2(a^n+b^n+c^n) + 3n - 6 \ge n(a^2+b^2+c^2)$

$$\Leftrightarrow 2.3 + 3n - 6 \ge n(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \le 3.$$

Do đó: $P \ge \frac{15}{8} + \frac{n-\frac{9}{8}}{a^2+b^2+c^2} \ge \frac{15}{8} + \frac{n-\frac{9}{8}}{3} = \frac{9+2n}{6}$.

Kết hợp ba trường hợp ta có: $P \ge \frac{9+2n}{6}$.

$P = \frac{9+2n}{6}$ khi $a = b = c = 1$. Vậy $\min P = \frac{9+2n}{6}$.

***Nhận xét.*** Một số ít bạn chỉ tìm giá trị nhỏ nhất của $P$ cho trường hợp $n = 1$ nên dẫn đến kết quả không chính xác là $\min P = \frac{11}{6}$. Đa số các bạn đều có lời giải đúng với cách giải tương tự như trên. Các bạn sau có lời giải tốt:

**Hà Nội:** *Trần Việt Anh*, 9C1, TH, THCS&THPT Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy; **Phú Thọ:** *Đỗ Tuấn Minh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Quảng Bình:** *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Đà Nẵng:** *Tô Đông Hải*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Định:** *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

**TRẦN HỮU NAM**

**Bài T10/548.** *Cho dãy số nguyên $(a_n)$ thỏa mãn*

$$\begin{cases} a_0 = 2023;\ a_1 = 2.2023^2 \\ a_{n+2} = 2023^2 a_n + 2.2023^{n+3}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

*Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k, tồn tại vô số số tự nhiên a dạng 6m + 1 sao cho $a_{4k^4-1} + a$ là hợp số.*

***Lời giải*** (Của bạn *Trần Minh Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**).

Dễ thấy $a_n$ chia hết cho 2023 với mọi $n$. Lại có $2023 \equiv 1 \pmod 6$, do đó:

$$2023^s \equiv 1 \pmod 6 \text{ với mọi } s \in \mathbb{N}^*.$$

Lấy $a = 2023^s, s \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a \equiv 1 \pmod 6 \Rightarrow a$ có dạng $6m + 1$.

Ta có: $a_{4k^4-1} + a = a_{4k^4-1} + 2023^s$ chia hết cho 2023 và lớn hơn 2023, do đó $a_{4k^4-1} + a$ là hợp số.

***Nhận xét.*** a) Ngoài lời giải của bạn *Hoàng*, các lời giải khác (kể cả lời giải của tác giả bài toán) đều thông qua việc trước hết chứng minh rằng $a_n = (n+1)2023^{n+1}$.

b) Từ lời giải của bạn *Hoàng* ta có khẳng định tổng quát: *Với mọi số nguyên dương n, tồn tại vô số số tự nhiên a có dạng* $6m+1$ *sao cho* $a_n + a$ *là hợp số.*

c) Có ít bạn tham gia giải bài toán này. Ngoài bạn *Hoàng*, các bạn sau đây có lời giải tốt

**Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Bình:** *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 11T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

**ĐẶNG HÙNG THẮNG**

**Bài T11/548.** *Tìm tất cả các hàm* $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn:*

$$f\left(f(x)+y^2+4\right)+4y=x+f^2(y+2),\forall x,y\in\mathbb{R}\quad(1).$$

***Lời giải.*** (Dựa theo ý của bạn *Trần Minh Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**)

Giả sử $f(x)$ thỏa mãn điều kiện (1). Thay $y=0$ vào (1) ta thu được:

$$f(f(x)+4)=x+f^2(2),\forall x\in\mathbb{R}\quad(2).$$

Tiếp tục thay $x$ bởi $f(x)+4$ vào (2), ta được:

$$f(f(f(x)+4)+4)=f(x)+4+f^2(2),\forall x\in\mathbb{R}\,(3).$$

Từ (1) ta cũng có:

$$f(f(f(x)+4)+4)=f(x+f^2(2)+4),\forall x\in\mathbb{R}\ (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$f(x+f^2(2)+4)=f(x)+4+f^2(2),\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x+c)=f(x)+c,\forall x\in\mathbb{R}\quad(5)$$

với $c=f^2(2)+4$.

Tiếp tục thay $y$ bởi $-y$ vào (1), ta được:

$$f(f(x)+y^2+4)-4y=x+f^2(-y+2),\forall x,y\in\mathbb{R}\ (6).$$

Kết hợp (1) và (6) ta thu được:

$$f^2(y+2)+x-4y=x+f^2(-y+2)+4y,\forall x,y\in\mathbb{R}$$

hay $f^2(y+2)-f^2(-y+2)=8y,\forall y\in\mathbb{R}\quad(7).$

Thay $y$ bởi $y+c$ vào (7) và sử dụng (5), ta thu được :

$$[f(y+2)+c]^2-[f(-y+2)-c]^2=8(y+c),\forall y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f^2(y+2)-f^2(-y+2)$$

$$+2c[f(2+y)+f(-y+2)]=8(y+c),\forall y\in\mathbb{R}.$$

Sử dụng (7) ta thu được:

$$f(y+2)+f(-y+2)=4,\forall y\in\mathbb{R}\quad(8)$$

và $f(y+2)-f(-y+2)=2y,\forall y\in\mathbb{R}\quad(9).$

Các hệ thức (8) và (9) kéo theo

$f(y+2)=y+2,\forall y\in\mathbb{R}$ hay $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}.$

Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn bài toán.

*Kết luận*: Phương trình hàm đã cho có nghiệm duy nhất $f(x)=x$.

***Nhận xét.*** Đây là dạng toán tương đối phức tạp về lớp phương trình hàm với hàm hợp trong lớp hàm một biến với cặp biến tự do. Chỉ có ba bạn tham gia giải và đều nhận được kết quả đúng.

**Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng, Lê Hữu Mạnh Tiến*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh ; **Bình Định :** *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

**NGUYỄN VĂN MẬU**

**Bài T12/548.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). I là tâm đường tròn nội tiếp. IB, IC lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai E, F. Gọi E', F' lần lượt đối xứng với E, F qua AC, AB. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OE'F' nằm trên đường thẳng AI.*

***Lời giải.*** (Theo bạn *Trần Minh Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**).

Gọi $U$, $V$ theo thứ tự là điểm đối xứng của $F'$, $F$ qua $AI$. Dễ thấy các bộ ba điểm ($O$, $E$, $E'$) và ($O$, $F$, $F'$) thẳng hàng. Dễ thấy $EA=EI;FA=FI$.

Do đó $EF$ là trung trực của $AI$. Vậy $E$, $F$, $V$ thẳng hàng. Qua phép đối xứng trục $AI$, các điểm $F'$, $F$ theo thứ tự biến thành các điểm $U$, $V$ và đường thẳng $AB$ biến thành đường thẳng $AC$.

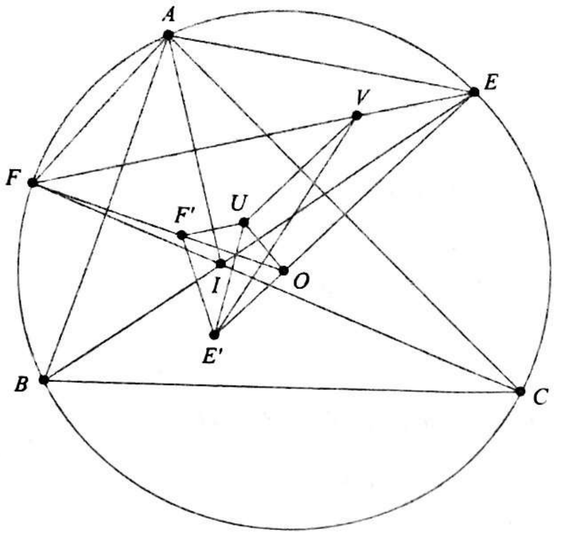
Từ đó, chú ý rằng $AB$ là trung trực của đoạn $F'F$, suy ra $AC$ là trung trực của đoạn $UV$.

Dễ thấy $OE=OF$ và $F'U\parallel FE$.

Vậy $(E'U,E'O)\equiv(E'U,E'E)\equiv(EE',EV)$

$$\equiv(EO,EV)(\text{mod}\,\pi)\equiv(EO,EF)\equiv(FE,FO)$$

$$\equiv(F'U,F'O)(\text{mod}\,\pi).$$




Do đó $E'$, $F'$, $U$ cùng thuộc một đường tròn. Điều đó có nghĩa là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác $OE'F'$ thuộc trung trực của $F'U$.

Nói cách khác tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác $OE'F'$ thuộc $AI$.

***Nhận xét.*** Bài toán này không khó nhưng, ngoài bạn *Hoàng*, chỉ có bốn bạn tham gia giải. **Nghệ An:** *Lưu Trọng Phúc*, 9B, THCS Đội Cung, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thanh Bảo*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** *Tô Đông Hải*, 10T2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

**NGUYỄN MINH HÀ**

**Bài L1/548.** *Một con lắc đơn dao động điều hoà trong một thang máy chuyển động thẳng đứng lên cao chia thành 3 giai đoạn liên tục. Giai đoạn một, thang máy chuyển động nhanh dần đều từ trạng thái nghỉ được đoạn đường h. Giai đoạn hai, thang máy chuyển động thẳng đều với tốc độ bằng tốc độ cuối giai đoạn một và đi được đoạn đường 2h. Giai đoạn ba thang máy chuyển động chậm dần đều với tốc độ đầu bằng tốc độ chuyển động thẳng đều, đồng thời đi được đoạn đường h rồi dừng lại. Số dao động toàn phần trong giai đoạn một và hai tương ứng là 18 lần và 17 lần. Giai đoạn ba của thang máy thì con lắc thực hiện được số dao động toàn phần bằng bao nhiêu?*

***Lời giải.*** *Giai đoạn 1*:

Chu kì của con lắc $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+a_1}}$ và vận tốc ở cuối giai đoạn: $v^2 = 2a_1h$ ; thời gian chuyển động của thang máy: $t_1 = \sqrt{\dfrac{2h}{a_1}}$.

*Giai đoạn 2*: Chu kì của con lắc $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ và thời gian chuyển động của thang máy:

$$t_2 = \frac{2h}{v} = \sqrt{\frac{2h}{a_1}} = t_1.$$

*Giai đoạn 3*: Chu kì của con lắc $T_3 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-a_3}}$ và $a_3 = \dfrac{v^2}{2h} = a_1$ ; thời gian chuyển động của thang máy : $t_3 = \sqrt{\dfrac{2h}{a_3}} = \sqrt{\dfrac{2h}{a_1}} = t_1$.

– Số dao động toàn phần :

$$N_1 = \frac{t_1}{T_1}\ ; N_2 = \frac{t_1}{T_2}\ ;\ N_3 = \frac{t_1}{T_3};$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g}{g+a_1}} = \frac{17}{18},$$

suy ra: $\dfrac{a_1}{g} = \left(\dfrac{18}{17}\right)^2 - 1 = \dfrac{35}{289}$;

$$\frac{N_3}{N_1} = \frac{T_1}{T_3} = \sqrt{\frac{g-a_1}{g+a_1}} = \sqrt{\frac{1-\frac{a_1}{g}}{1+\frac{a_1}{g}}} = \frac{\sqrt{254}}{18}$$

$\Rightarrow N_3 \approx 16$ lần.

***Nhận xét.*** Chúc mừng một bạn duy nhất đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Trần Thị Tuyết Trinh*, 11A1, Trung tâm giáo dục nghề nghiệp – Giáo dục thường xuyên, Quận Ô Môn, **Cần Thơ**.

**ĐINH THỊ THÁI QUỲNH**

**Bài L2/548.** *Đặt điện áp xoay chiều $u = U\sqrt{2}\cos 2\pi ft$ (V) có tần số f thay đổi được vào hai đầu đoạn mạch gồm điện trở thuần R, tụ điện có điện dung C và cuộn cảm thuần có độ tự* *cảm L mắc nối tiếp (với $2L > R^2C$). Khi $f = f_0$ thì $U_C = U$ và $6(R + Z_L)(Z_L + Z_C) = 7R(R + Z_C)$; khi $f = f_0 + 75$ Hz thì $U_L = U$. Tính giá trị của $f_0$.*

***Lời giải.*** Đặt $R = nZ_L$.

• Khi $f = f_0$ thì $U_C = U$, suy ra:

$$Z_C^2 = R^2 + (Z_L - Z_C)^2;$$

$$\begin{cases} Z_L^2 = 2\dfrac{L}{C} - R^2 & (1) \\ Z_C = \dfrac{R^2 + Z_L^2}{2Z_L} = \dfrac{n^2+1}{2}Z_L & (2) \end{cases}.$$

Theo đề bài: $6(R + Z_L)(Z_L + Z_C) = 7R(R + Z_C)$ (3).

Thay (2) vào (3) ta có: $6(nZ_L + Z_L)(Z_L + \dfrac{n^2+1}{2}Z_L)$

$$= 7nZ_L(nZ_L + \frac{n^2+1}{2}Z_L)$$

$$\Rightarrow 6(n+1)(n^2+3) = 7n(n+1)^2$$

$$\Rightarrow n^2 + 7n - 18 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 2 \\ n = -9 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow Z_C = \frac{n^2Z_L^2 + Z_L^2}{2Z_L} = 2{,}5Z_L \quad (4).$$

• Khi $f = f_0 + 75$ Hz thì $U_L = U$, suy ra:

$$Z_L'^2 = R^2 + (Z_L' - Z_C')^2 \quad \Rightarrow Z_C'^2 = \frac{2L}{C} - R^2 \quad (5).$$

Từ (1) và (5) suy ra: $Z_L' = Z_C'$ (6).

Thay (6) vào (4) được: $Z_C = 2{,}5Z_C'$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi f_0} = 2{,}5\frac{1}{2\pi(f_0+75)} \Rightarrow f_0 = 50 \text{ Hz}.$$

***Nhận xét.*** Rất tiếc là không có bạn nào tham gia giải bài này.

**NGUYỄN XUÂN QUANG**

*****************************************************************************************

PROBLEMS IN ... (*Tiếp theo trang 21*)

Find the minimum value of the expression

$$F = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

**Problem T7/552.** Find the values of the parameter $m$ so that the following system of equations has 4 different real solutions

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+2x+1} + \sqrt{(2x^2-2y^2-3x+8)^2+(4xy-3y)^2} = m \\ (3x+4y)^2 + (4x-3y)^2 = 100 \end{cases}.$$

**Problem T8/552.** Given an acute triangle $ABC$ inscribed in a circle $(O)$, with the orthocenter $H$ and the median $AM$. The line passing through $H$ and perpendicular to $AM$ intersects $AM$ at $N$ and intersects $BC$ at $T$. The circumcircle of $OMN$ intersects $BC$ at the second point $G$. Let $K$ be the reflection point of $G$ about $T$. Show that $KA = KN$.

**Problem T9/552.** Given a polynomial $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ satisfying $P^2(x) - x - 1$ is divisible by $x^{100}$. Find the coefficient of $x^{99}$ in the expansion of the polynomial $(P(x)+1)^{100}$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

**Problem T10/552.** For each positive integer $n$, denote by $\tau(n)$ and $\sigma(n)$ respectively the number of positive factors and the sum of positive factors of $n$. Show that, for any $n > 1$, we have

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma(2k-1)}{\tau(2k-1)} < \frac{n(n+1)}{2} < \sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma(k^2)}{\tau(k^2)}.$$

**Problem T11/552.** Find all polynomials $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ satisfying

$$P^2(x^2+2x-3) = 4P(x) - 3, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Problem T12/552.** Given a triangle $ABC$ with the centroid $G$; the altitudes $AD$, $BE$. Let $X$, $Y$ respectively be the intersections between the rays $DG$, $EG$ with the circumcircle $(O)$ of $ABC$. $XY$ intersects $BC$, $AC$ at $P$, $Q$ respectively. Let $O_1$, $O_2$ respectively be the circumcenters of $CXQ$ and $CYP$. Show that $CG$ is perpendicular to $O_1O_2$.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

# OLYMPIC TOÁN HỌC "Chinh phục đồi chim sẻ" - 2020-2021

**HOÀNG NGỰ HUẤN**
*(GV Trường Đại học Mỏ - Địa chất)*

Xin được giới thiệu với bạn đọc về kỳ thi "*Chinh phục đồi chim sẻ*". Đây là kỳ thi do Trường Đại học Tổng hợp Moscow và Nhà xuất bản Thanh niên Moscow cùng phối hợp tổ chức từ năm 2005 nhằm tuyển chọn sinh viên cho trường Đại học Tổng hợp Moscow. Xin được nói thêm Trường Đại học Tổng hợp Moscow là trường đại học lâu đời nhất và cũng là trường đại học nổi tiếng nhất nước Nga. Nơi đây đã đào tạo ra rất nhiều nhà khoa học danh tiếng. Thi đỗ vào trường là niềm mơ ước của rất nhiều học sinh Nga. Tham gia kỳ thi này là học sinh các lớp từ 9 tới 11. Trong đó có kỳ thi riêng dành cho lớp 11 và cho các bạn lớp 9 và 10. Năm 2009 có 500 bạn học sinh đã được giải thưởng kỳ thi này và khoảng 400 bạn đã trở thành sinh viên của trường. Sau đây là bài kiểm tra của năm học 2020 - 2021.

Kỳ thi "*Chinh phục đồi chim sẻ*" năm học 2020 - 2021 gồm hai vòng và đều tiến hành thi online. *Vòng tuyển loại* (diễn ra vào tháng 11-12 năm 2020) kéo dài 24 h gồm hai vòng nhỏ hơn: *Vòng blits* có 6 bài toán và kéo dài 3 giờ, *phần sáng tạo* gồm 3 bài toán và cần phải gửi lời giải trong khoảng thời gian còn lại. Vượt qua vòng loại, các bạn trẻ sẽ được tham gia vào *Vòng chung kết* diễn ra vào tháng 4 năm 2021.

## VÒNG LOẠI

(Vòng blits)

*Mỗi học sinh sẽ nhận được danh sách các bài toán riêng khác biệt với những bạn khác. Sau đây là một ví dụ về sau bài toán của vòng Blits.*

1. Giải bất phương trình $\dfrac{\sqrt{x+5}-x-3}{x^2-15x+54} \geq 0$.

Trong đó hãy tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình trên.

2. Giải phương trình: $\cos 2x + \cos 6x + 2\sin^2 x = 1$.

Trong đó hãy chỉ ra tổng các nghiệm thuộc đoạn $\left[\dfrac{5\pi}{6}; \pi\right]$, làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy.

3. Từ điểm $M$ nằm trong tam giác $ABC$ hạ các đường vuông góc xuống các cạnh $BC$, $AC$, $AB$. Các đường vuông góc này có độ dài tương ứng là $k$, $l$ và $m$. Tìm diện tích của tam giác $ABC$, biết rằng $\widehat{CAB} = \alpha$ và $\widehat{ABC} = \beta$. Nếu kết quả thu được không là số nguyên, hãy làm tròn nó tới số nguyên gần nhất.

Cho biết các giá trị số là: $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, $\beta = \dfrac{\pi}{4}$, $k = 3$, $l = 2$, $m = 4$.

4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3y^3 = 11 \\ x^2 y + xy^2 = 6 \end{cases}$.

Với mỗi nghiệm $(x, y)$ của hệ, hãy tính giá trị của biểu thức $\dfrac{x}{y}$; sau đó tìm giá trị nhỏ nhất trong các giá trị thu được, lấy xấp xỉ tới hai chữ số sau dấu phẩy.

5. Có hai hợp kim. Hợp kim thứ nhất chứa $p$ % tạp chất, hợp kim thứ hai chứa $q$ % hợp chất. Hỏi rằng cần phải nung chảy hai hợp kim theo một tỷ lệ nào để thu được một hợp kim mới chứa $r$ % tạp chất. Trong đáp án khi tính xấp xỉ tỷ lệ khối lượng của hợp kim thứ nhất với khối lượng của hợp kim thứ hai thì làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy.

Các dữ liệu số: $p = 70$, $q = 5$, $r = 40$.

**6.** Hãy tìm tất cả các số nguyên $a$ có giá trị tuyệt đối không vượt quá 15 sao cho bất phương trình

$$\frac{4x-a-4}{6x+a-12} \le 0$$

thỏa mãn với mọi $x$ thuộc khoảng $[2;3]$. Sau đó hãy tính tổng tất cả các giá trị $a$ vừa tìm được.

## VÒNG TUYỂN CHỌN

### (Các bài tập yêu cầu tính sáng tạo cao)

**7.** Tìm tất cả các số tự nhiên $n$ không vượt quá 100 sao cho tổng $1^2+2^2+3^2+...+n^2$ chia hết cho 50.

Với những giá trị $n$ vừa tìm được, hãy sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần: $n_1 < n_2 < ... < n_k$. Từ đó hãy cho biết $n_{k-2}$ là số nào?

**8.** Cho trước một đường tròn, trong tất cả các tam giác nội tiếp đường tròn có tổng bình phương của các góc là $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{\pi^2}{2}$ (các góc $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ được tính bằng radian) hãy tìm tất cả các tam giác có diện tích lớn nhất.

Với mỗi tam giác tìm được, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tích các cặp góc. Giá trị nhỏ nhất được làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy.

**9.** Hãy tìm tất cả các cặp số dương $x$, $y$ thỏa mãn đẳng thức

$$\frac{4x^2y+6x^2+2xy-4x}{3x-y-2}+\sin\left(\frac{3x^2+xy+x-y-2}{3x-y-2}\right)$$
$$=2xy+y^2+\frac{x^2}{y^2}+\frac{2x}{y}+\frac{2xy(x^2+y^2)}{(3x-y-2)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\times$$
$$\times\left(x^2\sin\frac{(x+y)^2}{x}+y^2\sin\frac{(x+y)^2}{y^2}+2xy\sin\frac{(x+y)^2}{3x-y-2}\right).$$

Trong đáp án hãy viết tổng $x^2+y^2$ của tất cả các nghiệm $(x, y)$. Kết quả được làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy.

## VÒNG CHUNG KẾT

### ĐỀ 1

**10.** Viết các số tự nhiên bắt đầu từ 20 thành một dòng: 20212223… Hỏi rằng trong dãy ký tự thu được, chữ số nào đứng ở vị trí 2021?

**11.** Hãy tìm tất cả các giá trị của $a$ sao cho phương trình

$$|x|-\arcsin x+b(\arccos x+|x|-1)+a=0$$

có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của $b$.

**12.** Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm

$$2^{\lg(x^2-3)}=\lg 2^{x^2-2}?$$

**13.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x-3y+\dfrac{1}{xy}=6 \\ 3z-6x+\dfrac{1}{xz}=2. \\ 6y-2z+\dfrac{1}{yz}=3 \end{cases}$

**14.** Gấp một tờ giấy hình vuông có diện tích là 17 theo đường thẳng đi qua tâm. Sau đó dính các mảnh lại với nhau. Hãy tìm diện tích lớn nhất trong các hình có thể tạo được.

## ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI

### VÒNG LOẠI

**1.** *Đáp án*: 7.

***Lời giải.*** Nếu $x > -3$, thì

$$\frac{\sqrt{x+5}-(x+3)}{x^2-15x+54} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x+5)-(x+3)^2}{(x-6)(x-9)} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2-5x-4}{(x-6)(x-9)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+4)}{(x-6)(x-9)} \le 0.$$

Tức là $x \in (-3;-1] \cup (6;9)$.

Nếu $x \in [-5;-3]$, thì tử số và mẫu số của vế trái của bất đẳng thức là dương.

Vì vậy $x \in [-5;-1] \cup (6;9)$, số nghiệm nguyên là $5+2=7$.

**2.** *Đáp án*: 2,88 (giá trị chính xác: $\frac{11\pi}{12}$).

***Lời giải.*** Vì $\cos 2x + 2\sin^2 x = 1$, nên phương trình đầu tương đương với phương trình $\cos 6x = 0$. Trong tất cả các nghiệm $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$, trên đoạn $\left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$ chỉ có một nghiệm $x = \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{6} = \frac{11\pi}{12} \approx 2,88$.

3. *Đáp án*: 67.

***Lời giải.*** Ký hiệu các cạnh của tam giác là $a$, $b$, $c$, $\gamma = \alpha + \beta$, $R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Áp dụng định lý hàm số sin có:

$$S = \frac{ka + lb + mc}{2} = R(k\sin\alpha + l\sin\beta + m\sin\gamma).$$

Ngoài ra, vì $S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$, nên ta có thể biểu diễn $R = \frac{k\sin\alpha + l\sin\beta + m\sin\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$.

Vì vậy $S = \frac{(k\sin\alpha + l\sin\beta + m\sin\gamma)^2}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$.

Thế các giá trị $k, l, m, \alpha, \beta, \gamma$, ta thu được:

$$S = \frac{(3\sin\alpha + 2\sin\beta + 4\sin\gamma)^2}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$= \frac{\left(3 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\right)^2}{\sqrt{3} + 1} \approx 67.$$

4. *Đáp án*: $-1,31$ (giá trị chính xác: $-\frac{1 + \sqrt{217}}{12}$).

***Lời giải.*** Nhân phương trình thứ nhất với 6, tiếp đó nhân phương trình thứ hai với $(-11)$ và cộng hai phương trình lại:

$$6x^3 - 11x^2y - 11xy^2 + 18y^3 = 0.$$

Chia cả hai vế cho $y^3$ và đặt $t = \frac{x}{y}$, ta có:

$$6t^3 - 11t^2 - 11t + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(6t^2 + t - 9) = 0.$$

Từ đây có $t_1 = 2$, $t_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{217}}{12}$. Với mỗi giá trị $t$ tìm được, thay $x = ty$ trong phương trình đầu tiên và thu được nghiệm của hệ.

Giá trị nhỏ nhất của $\frac{x}{y} = t$ bằng $-\frac{1 + \sqrt{217}}{12} \approx -1,31$.

5. *Đáp án*: 1,17 (đáp án chính xác: $\frac{7}{6}$).

***Lời giải.*** Gọi khối lượng của hợp kim thứ hai là $a$. Khi đó khối lượng của hợp kim thứ nhất là $xa$. Như vậy $x$ chính là đại lượng cần phải đi tìm.

Theo điều kiện của đề tài, khối lượng của các hợp kim bằng $\frac{xa \cdot p}{100} + \frac{a \cdot q}{100}$. Mặt khác, khối lượng đó cũng bằng $\frac{(xa + a) \cdot r}{100}$. Tức là

$$\frac{xa \cdot p}{100} + \frac{a \cdot q}{100} = \frac{(xa + a) \cdot r}{100}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot p + q = (x+1) \cdot r \Leftrightarrow x = \frac{r - q}{p - r}.$$

Thay các dữ liệu số vào, ta được:

$$x = \frac{40 - 5}{70 - 40} = \frac{7}{6} \approx 1,17.$$

6. *Đáp án*: $-7$.

***Lời giải.*** Dùng phương pháp xét khoảng để giải bất phương trình, ta thu được kết quả sau: vế trái bằng 0 tại $x = 1 + \frac{a}{4}$ và không xác định tại $x = 2 - \frac{a}{6}$. Hai giá trị này trùng nhau tại $a = \frac{12}{5}$.

Với $a > \frac{12}{5}$ nghiệm của bất phương trình là khoảng $\left(2 - \frac{a}{6}; 1 + \frac{a}{4}\right]$. Bất phương trình có nghiệm $x \in [2; 3]$ khi $\begin{cases} 2 - \frac{a}{6} < 2, \\ 3 \le 1 + \frac{a}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a \ge 8.$

Với $a < \dfrac{12}{5}$ nghiệm của bất phương trình là khoảng $\left[1+\dfrac{a}{4}; 2-\dfrac{a}{6}\right)$. Bất phương trình có nghiệm $x \in [2; 3]$ khi $\begin{cases} 1+\dfrac{a}{4} \le 2, \\ 3 < 2-\dfrac{a}{6} \end{cases} \Leftrightarrow a < -6.$

Như vậy $a \in (-\infty; -6) \cup [8; +\infty)$. Tổng tất cả các giá trị nguyên $a \in [-15; -6) \cup [8; 15]$ bằng

$$-15-14-13-\ldots-8-7+8+9+\ldots+14+15 = -7.$$

## VÒNG TUYỂN CHỌN

**(Bài tập sáng tạo)**

7. *Đáp án*: 87.

***Lời giải.*** Vì

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

nên $n(n+1)(2n+1)$ phải chia hết cho $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Bởi vì các số $n$, $n+1$, $2n+1$ nguyên tố cùng nhau nên ít nhất phải có một số chia hết cho 25.

Nếu $n$ chia hết cho 25, thì $n = 25, 50, 75$ hay $100$. Thay lần lượt các giá trị này vào biểu thức $n(n+1)(2n+1)$, ta thấy biểu thức này chia hết cho 300 trong hai trường hợp $n = 75$ và $n = 100$.

Nếu $n + 1$ chia hết cho 25, thì $n = 24, 49, 74$ hay 99. Thay lần lượt các giá trị này vào biểu thức $n(n+1)(2n+1)$, ta thấy biểu thức này chia hết cho 300 trong hai trường hợp $n = 24$ và $n = 99$.

Nếu $2n + 1$ chia hết cho 25, thì $n = 12, 37, 62, 87$. Lần lượt thay thế các giá trị này vào biểu thức $n(n+1)(2n+1)$. Dễ dàng nhận thấy biểu thức này chia hết cho 300 khi $n = 12$ và $n = 87$.

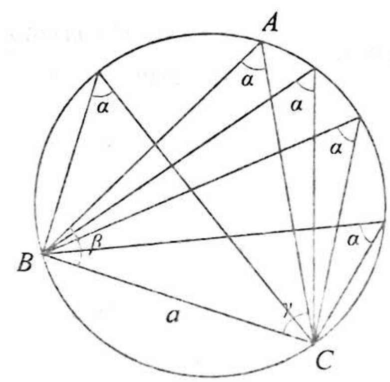
Như vậy các giá trị thích hợp là 12, 24, 75, 87, 99, 100. Tức là $n_{k-2} = 87$.

8. *Đáp án*: 0,27 (giá trị chính: $\dfrac{\pi^2}{36}$).

***Lời giải.*** Đầu tiên ta sẽ đưa ra một số gợi ý giúp ta đoán đúng đáp án.

Nếu cố định bán kính của đường tròn ngoại tiếp và một trong các góc của tam giác (góc $\alpha$), thì diện tích lớn nhất chính là của tam giác cân với các góc $\alpha$, $\beta = \gamma = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$.

Thật vậy, nếu biết bán kính $R$ và góc $\alpha$, thì cũng có nghĩa là ta cũng biết cạnh của tam giác $a = 2R\sin\alpha$. Trong số các tam giác có cùng đáy và góc ở đỉnh bằng $\alpha$, thì tam giác có diện tích lớn nhất khi chiều cao hạ xuống đáy $a$ lớn nhất. Đó chính là tam giác cân (h.1).




*Hình 1*

Ta thu được phương trình

$$\alpha^2 + \left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2}.$$

Nghiệm của nó là $\alpha = 0$ và $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$. Nghiệm thứ hai là hợp lý, từ đó thu được các góc của tam giác là $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$, $\beta = \gamma = \dfrac{\pi}{6}$. Giá trị nhỏ nhất của tích các cặp góc bằng $\dfrac{\pi^2}{36} \approx 0,27$.

Ta đã thu được đáp án của bài toán. Thế nhưng lập luận trên là không chặt chẽ vì ta đã thừa nhận mà không chứng minh rằng: tam giác cân thỏa mãn điều kiện về tổng bình phương các góc (trường hợp tổng quát là không đúng). Vì vậy ta vẫn cần một chứng minh khác mà ta sẽ đưa ra sau đây. Cách chứng minh này không hề đơn giản nhưng nó chính là một phần khác biệt của các bài toán đòi hỏi tính sáng tạo trong kỳ thi Olympic này.

Như vậy, ta cần phải tìm diện tích lớn nhất $S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ với các điều kiện ràng buộc: $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{\pi^2}{2}$. Để đơn giản hóa, ta giả sử rằng $0<\alpha\le\beta\le\gamma$.

Đầu tiên ta sẽ chỉ ra rằng, tam giác thỏa mãn điều kiện của đề bài chỉ có thể là tam giác tù hoặc là tam giác vuông. Thật vậy

$$\frac{\pi^2}{2}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\le(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\gamma=\pi\cdot\gamma$$

$$\Rightarrow\ \gamma\ge\frac{\pi}{2},\ \alpha+\beta\le\frac{\pi}{2}.$$

Rút $\gamma$ từ phương trình $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ và thế vào $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{\pi^2}{2}$, ta thu được:

$$\alpha^2+\beta^2+(\pi-\alpha-\beta)^2=\frac{\pi^2}{2}$$

hay

$$3(\alpha+\beta)^2-4\pi(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)^2+\pi^2=0.$$

Đặt $x=\alpha-\beta$ và $y=\alpha+\beta$.

Khi đó: $x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right]$, $y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$;

$$\begin{aligned}S&=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\\&=R^2\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]\sin(\pi-\alpha-\beta)\\&=R^2\left(\cos x-\cos y\right)\sin y.\end{aligned}$$

Điều kiện về tổng bình phương của các góc dẫn tới phương trình:

$$x^2+3\left(y-\frac{2\pi}{3}\right)^2=\frac{\pi^2}{3},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right],$$

$$y\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right].$$

Điều kiện $y\ge\frac{\pi}{3}$ suy ra từ chính phương trình trên vì từ phương trình suy ra rằng $\left|y-\frac{2\pi}{3}\right|\le\frac{\pi}{3}$.

Lưu ý là cũng từ chính phương trình này, ta có thể thu được dạng tường minh:

$$y(x)=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{\frac{\pi^2}{9}-\frac{x^2}{3}}.$$

Trước tiên, ta lấy đạo hàm theo biến $x$:

$$y'(x)=\frac{x}{2\pi-3y},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right].$$

Nhận thấy $y'(x)\le0$ trên miền đang xét của $x$.

Như vậy bài toán quy về tìm cực đại của hàm số $f(x)=\left[\cos x-\cos\left(y(x)\right)\right]\sin\left(y(x)\right)$ trên khoảng $x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right]$. Ta sẽ chỉ ra rằng $f'(x)\ge0$ trên khoảng đang xét. Điều đó có nghĩa là cực đại đạt được tại điểm $x=0$, tức giá trị cực đại là của tam giác cân.

Các đẳng thức sau đúng (từ nay về sau thay vì viết $y(x)$, ta chỉ viết ngắn gọn $y$):

$$\begin{aligned}f'(x)&=-\sin x\sin y+y'(x)\left(\cos x\cos y-\cos 2y\right)\\&\ge\frac{-2x}{\pi}\cdot\frac{2y}{\pi}+y'(x)\left(\cos y-\cos 2y\right)\\&=\frac{-4xy}{\pi^2}+\frac{x\left(\cos y-\cos 2y\right)}{2\pi-3y}=\\&=\frac{-x}{2\pi-3y}\left(\frac{4y(2\pi-3y)}{\pi^2}+\cos 2y-\cos y\right).\end{aligned}$$

Trong phép biến đổi trên, ta đã sử dụng bất đẳng thức $\sin y\ge\frac{2y}{\pi}$. Điều này có được do hàm $\sin y$ lồi trên đoạn $y\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Tương tự như vậy có bất đẳng thức $\sin(-x)\ge\frac{2(-x)}{\pi}$ đúng trên đoạn

$x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$. Ta cũng sử dụng bất đẳng thức $\cos x\le 1$.

Vì $\frac{-x}{2\pi-3y}\ge 0$ với $x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right]$, $y\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$, nên ta chỉ cần phải chứng minh: Với mọi $t\in I=\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$, bất đẳng thức sau đúng:

$$g(t)=\frac{4t(2\pi-3t)}{\pi^2}+\cos 2t-\cos t\ge 0.$$

Ta sẽ chứng minh rằng: Trên đoạn $I$ bất đẳng thức sau đúng :

$$g'(t)=\frac{4(2\pi-6t)}{\pi^2}-2\sin 2t+\sin t<0.$$

Kết luận trên suy ra từ bất đẳng thức $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ và từ $g''(t)=\frac{-24}{\pi^2}-4\cos 2t+\cos t>0$ trên đoạn $I$.

Để chứng minh bất đẳng thức cuối cùng, ta sẽ xét đạo hàm của hàm $g''(t)$.

Ta có: $g'''(t)=8\sin 2t-\sin t=\sin t(16\cos t-1)$, vì $g'''(t)\ge 0$ khi $t\in\left[\frac{\pi}{3};\arccos\frac{1}{16}\right]$ và $g'''(t)<0$ khi $t\in\left(\arccos\frac{1}{16};\frac{\pi}{2}\right]$. Tức là:

$$g''(t)\ge \min\left\{g''\left(\frac{\pi}{3}\right),g''\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}>0.$$

Như vậy hàm số $g(t)$ đơn điệu giảm và đạt giá trị nhỏ nhất tại $\frac{\pi}{2}$. Vì vậy $g(t)\ge g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ với mọi $t\in I$.

Điều đó có nghĩa là hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=0$. Tức là ta đã chứng minh được rằng $\alpha=\beta$, tam giác cân có diện tích đạt cực đại.

**9.** *Đáp án*: 4,33.

***Lời giải.*** Viết phương trình đã cho dưới dạng:

$$f(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3)=\alpha_1f(u_1)+\alpha_2f(u_2)+\alpha_3f(u_3),$$

trong đó: $f(t)=t^2+\sin t$, $\alpha_1=\frac{x^2}{(x+y)^2}$,

$$\alpha_2=\frac{y^2}{(x+y)^2},\ \alpha_3=\frac{2xy}{(x+y)^2},\ u_1=\frac{(x+y)^2}{x},$$

$$u_2=\frac{(x+y)^2}{y^2},\ u_3=\frac{(x+y)^2}{3x-y-2}.$$

Lưu ý là hàm $f(t)=t^2+\sin t$ lồi trên toàn trục số. Thêm vào đó $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_3>0$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$ với mọi $x,y>0$.

Bất đẳng thức Jensen xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi $u_1=u_2=u_3$, tức là $x=y^2=3x-y-2$

$\Rightarrow\ 2y^2-y-2=0$.

Từ đây ta thu được cặp số dương duy nhất:

$$y=\frac{1+\sqrt{17}}{4},\ x=\frac{9+\sqrt{17}}{8}.$$

Vì vậy: $x^2+y^2=\frac{85+13\sqrt{17}}{32}\approx 4,33$.

## VÒNG CHUNG KẾT

## ĐỀ 1

**10.** *Đáp án*: 7.

***Lời giải.*** Các chữ số của các số từ 20 tới 99 chiếm $80\cdot 2=160$ vị trí đầu tiên trong chuỗi. Trong $2021-160=1861$ vị trí tiếp theo, thì các chữ số của các số từ 100 tới 719 chiếm $(719-99)\cdot 3=1860$ vị trí. Điều đó có nghĩa là vị trí thứ 2021 là chữ số đầu tiên của số 720. Đó chính là chữ số 7.

**11.** *Đáp án*: $\frac{\pi}{2}-1$.

***Lời giải.*** Khi $b=-1$, phương trình có dạng:

$$|x|-\arcsin x-\arccos x-|x|+1+a=0.$$

Với $x\in[-1;1]$ phương trình tương đương với

$1+a-\dfrac{\pi}{2}=0$. Như vậy, khi $b=-1$ nghiệm chỉ tồn tại khi $a=\dfrac{\pi}{2}-1$.

Mặt khác, khi $a=\dfrac{\pi}{2}-1$ phương trình

$$|x|-\arcsin x+b\cdot(\arccos x+|x|-1)+\frac{\pi}{2}-1=0$$

có nghiệm $x=1$ với bất kỳ giá trị nào của $b$.

***Chú thích.*** Các bạn thí sinh có nhiều lời giải không đúng vì dựa trên suy luận sau: câu văn từ điều kiện của bài toán "với mọi giá trị của $b$ có ít nhất một nghiệm" thì được hiểu là "có cùng một nghiệm với mọi trí trị của $b$" (đây là một bài toán khác, đơn giản hơn mặc dù đáp án của nó trùng với đáp án của bài toán đã cho).

12. *Đáp án*: 4.

***Lời giải.*** Phương trình được biến đổi về dạng

$$t^{\alpha}=\alpha(t+1),$$

với $\alpha=\lg 2\in(0,1)$, $t=x^2-3>0$.

Vì vế trái của phương trình $f(t)=t^{\alpha}$ là hàm lũy thừa với miền xác định $t>0$; và với $\alpha\in(0,1)$ thì đây là hàm số lồi. Trong khi đó vế phải của phương trình $g(t)=\alpha(t+1)$ là hàm tuyến tính với hệ số góc α dương nên đồ thị của hai hàm số $f(t)$ và $g(t)$ sẽ cắt nhau tại không quá hai điểm.

Vì $f(0)=0<\alpha=g(0)$ và

$$f(1)=1=\lg 10>\lg 4=2\alpha=g(1),$$

nên trong khoảng $(0;1)$ tồn tại ít nhất một điểm.

Vì $f(1)>g(1)$,

$$f(10)=10^{\lg 2}=2=\lg 100<\lg 2^{11}=11\alpha=g(10)$$

nên trong khoảng $(1;10)$ cũng tồn tại ít nhất một nghiệm. Điều đó có nghĩa là đồ thị hai hàm số $f$ và g cắt nhau tại đúng hai điểm (một điểm nằm giữa 0 và 1, một điểm khác nằm giữa 1 và 10).

Mỗi nghiệm dương $t$ lại sinh ra hai nghiệm $x$ của phương trình đầu. Vì vậy, có cả thảy là 4 nghiệm.

13. *Đáp án*: $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{3}$, $z=1$ và $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=-\dfrac{1}{3}$, $z=-1$.

***Lời giải.*** Nhân phương trình đầu với $(2x-3y)$, phương trình hai với $(3z-6x)$, phương trình thứ ba với $(6y-2z)$. Sau đó cộng chúng lại và thu được phương trình hệ quả:

$$(2x-3y)^2+(3z-6x)^2+(6y-2z)^2+\frac{2x-3y}{xy}+\frac{3z-6x}{xz}+\frac{6y-2z}{yz}=6(2x-3y)+2(3z-6x)+3(6y-2z)$$

$$\Leftrightarrow (2x-3y)^2+(3z-6x)^2+(6y-2z)^2=0$$

$$\Leftrightarrow 2x=3y=z.$$

Thế $2x=3y=z$ vào hệ, ta được: $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{3}$, $z=1$ hoặc $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=-\dfrac{1}{3}$, $z=-1$.

***Chú thích.*** Dễ dàng nhận thấy là nếu $2x=3y=z$ thì tất cả các nhân tử nhân thêm vào phương trình đều bằng 0. Thế nhưng nó không làm xuất hiện nghiệm ngoại lai vì phương trình tổng vẫn là phương trình hệ quả của hệ đã cho.

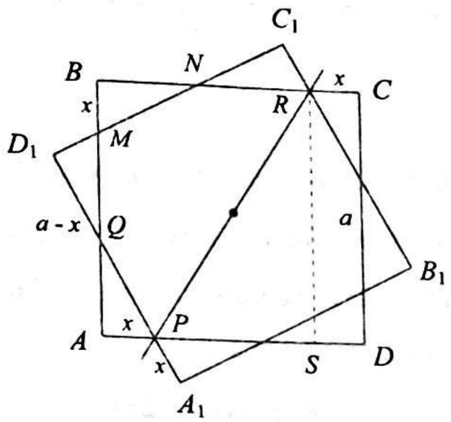
14. *Đáp án*: $17(2-\sqrt{2})$.

***Lời giải.*** Gọi cạnh của hình vuông là $a$. Giả sử đường thẳng cắt và tạo trên cạnh hình vuông $AD$ một đoạn $AP=x<\dfrac{a}{2}$ (h.2).

Hình vẽ thu được đối xứng qua đường thẳng $PR$. Mặt khác, hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ là ảnh của hình vuông $ABCD$ qua phép quay quanh tâm của hình vuông. Khi đó:

$$x=AP=PA_1=C_1R=RC=BM=MD_1.$$

Vì vậy các tam giác vuông $AQP$, $BNM$, $C_1NR$, $D_1QM$ là bằng nhau.




*Hình 2*

Như vậy diện tích của hình thu được bằng tổng diện tích của hình thang vuông $PD_1C_1R$ và diện tích của hai tam giác vuông bằng nhau $AQP$, $BNM$. Diện tích hình thang vuông bằng $\frac{a^2}{2}$. Vì vậy ta cần tìm diện tích lớn nhất của tam giác vuông $AQP$. Chu vi của nó là:

$$AP + AQ + QP = BM + AQ + QM = AB = a.$$

Trong số các tam giác vuông có chu vi không đổi, thì tam giác vuông cân có diện tích lớn nhất.

Ta sẽ chứng minh khẳng định trên. Gọi $a$, $b$ là các cạnh của tam giác vuông còn $c$ là độ dài của cạnh huyền. Chu vi tam giác là $P = a + b + c$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy có:

$$P = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\geq 2\sqrt{ab} + \sqrt{2ab} = \sqrt{ab}\left(2 + \sqrt{2}\right).$$

Từ đó suy ra: $S = \frac{ab}{2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{P}{2+\sqrt{2}}\right)^2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

• Ta cũng có thể chứng minh khẳng định trên thuần thúy bằng hình học: Nếu trong góc vuông $ABC$ dựng một đường tròn có bán kính là $\frac{P}{2}$ tiếp xúc với các tia $BA$, $BC$ thì đường tròn này sẽ là đường tròn bàng tiếp của tất cả các tam giác vuông có chu vi là $P$ và các cạnh góc vuông $BX$, $BY$ nằm trên hai cạnh của góc. Vì chu vi cho trước, cho nên tam giác có diện tích lớn nhất là tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất. Bán kính này đạt giá trị lớn nhất khi đường tròn nội tiếp tiếp xúc với đường tròn bàng tiếp (nếu bán kính lớn hơn nữa thì hai đường tròn này sẽ cắt nhau, đó là điều không thể), tức là khi tam giác cân.

Như vậy: $\widehat{QPA} = 45^\circ$,

$$\widehat{RPD} = \widehat{QPR} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67{,}5^\circ.$$

Khi đó $a = AB = 2x + x\sqrt{2}$. Từ đây rút ra được $x = \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}$, diện tích tam giác $\Delta QPA$ bằng

$$\frac{x^2}{2} = \frac{a^2\left(4+2-4\sqrt{2}\right)}{8} = \frac{a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4}.$$

Điều đó có nghĩa là diện tích cần tìm là:

$$\frac{a^2}{2} + 2\cdot\frac{a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4} = \frac{a^2\left(1+3-2\sqrt{2}\right)}{2}$$
$$= a^2\left(2-\sqrt{2}\right).$$

• Vẫn tồn tại một lời giải khác hoàn toàn bằng đại số. Giả sử cạnh của hình vuông bằng $a$, đường thẳng cắt cạnh $AD$ của hình vuông một đoạn $AP = x < \frac{a}{2}$. Ta sẽ đi tìm $AQ$. Ký hiệu các góc $\widehat{RPS} = \widehat{RPQ} = \alpha$, $\widehat{QPA} = \beta$. Từ tam giác vuông $PRS$ (với $S$ là hình chiếu của điểm $R$ lên cạnh $AD$), ta tìm được $\tan\alpha = \frac{a}{a-2x}$. Do đó $\tan 2\alpha = \frac{a(a-2x)}{2x(x-a)}$,

$$AQ = x\cdot\tan\beta = x\tan(-2\alpha) = \frac{a(a-2x)}{2(a-x)}.$$

(Xem tiếp trang 41)


# VỀ MỘT BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA THỨC CÓ NGHIỆM HẰNG

**KIỀU ĐÌNH MINH**
*(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)*

Trong kỳ thi **Austrian – Polish – Competition 1996**, có bài toán phương trình hàm đa thức khá thú vị sau:

*Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn*

$$P(x^2+1) = P^2(x) - 1, \forall x \in \mathbb{R},$$

*trong đó $P^2(x) = (P(x))^2$.*

Bài toán này có thể được giải bằng cách xây dựng dãy nghiệm của đa thức. Ở đây, chúng tôi xin đưa ra lời giải cho bài toán này như sau

***Lời giải.*** Giả sử tồn tại đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn phương trình đã cho. Ta xét hai trường hợp:

1) Nếu $\deg P = 0$ thì $P(x) = c$, suy ra:

$$c = c^2 - 1 \Leftrightarrow c^2 - c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

2) Nếu $\deg P \geq 1$. Xét phương trình:

$$x^2 + 1 = x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Thay $x = x_0$ vào phương trình đã cho thì $P(x_0) = c$. Đặt $P(x) = (x - x_0)^n Q(x) + c$ với $Q(x_0) \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$. Thay vào phương trình đã cho, ta được:

$$(x^2+1-x_0)^n Q(x^2+1) + c = \left[(x-x_0)^n Q(x) + c\right]^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left[x^2+1-(x_0^2+1)\right]^n Q(x^2+1) + c$$

$$= (x-x_0)^{2n} Q^2(x) + 2c(x-x_0)^n Q(x) + c^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)^n (x+x_0)^n Q(x^2+1)$$

$$= (x-x_0)^{2n} Q^2(x) + 2c(x-x_0)^n Q(x) + c^2 - c - 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)^n (x+x_0)^n Q(x^2+1)$$

$$= (x-x_0)^{2n} Q^2(x) + 2c(x-x_0)^n Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (x+x_0)^n Q(x^2+1)$$

$$= (x-x_0)^n Q^2(x) + 2cQ(x), \forall x \in \mathbb{R}, x \neq x_0$$

$$\Rightarrow (x+x_0)^n Q(x^2+1)$$

$$= (x-x_0)^n Q^2(x) + 2cQ(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cho $x = x_0$, ta có:

$$(2x_0)^n Q(x_0^2+1) = 2cQ(x_0)$$

$$\Leftrightarrow 2^n x_0^n Q(x_0) = 2cQ(x_0) \Leftrightarrow \left(1 \pm i\sqrt{3}\right)^n = 1 \pm \sqrt{5},$$

(do $Q(x_0) \neq 0$). Đẳng thức cuối cùng cho thấy không tồn tại số $n \in \mathbb{N}^*$ nào thỏa mãn.

*Kết luận*: Tất cả các đa thức cần tìm là:

$$P(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; P(x) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

***Nhận xét.*** Mấu chốt của cách giải này là đẳng thức $\left(1 \pm i\sqrt{3}\right)^n = 1 \pm \sqrt{5}$ không có nghiệm $n \in \mathbb{N}^*$ và do đó bài toán chỉ có nghiệm là các đa thức hằng.

Trong quá trình giảng dạy và tìm tòi, suy nghĩ, chúng tôi nhận thấy có thể mở rộng bài toán trên theo các hướng sau:

**Hướng thứ nhất.** *Thay $x^2+1$ bởi một tam thức bậc hai đầy đủ $ax^2 + bx + c$.*

**Bài toán 1.** *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn: $P^2(x) = P(x^2 + 2x - 3) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.*

***Lời giải.*** Ta xét hai trường hợp sau:

1) Nếu $\deg P = 0$ thì $P(x) = c$, suy ra:

$$c = c^2 - 1 \Leftrightarrow c^2 - c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

2) Nếu $\deg P \geq 1$. Xét phương trình:

$$x = x^2 + 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Suy ra $P(x_0) = c$. Đặt $P(x) = (x - x_0)^n Q(x) + c$ với $Q(x_0) \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$. Thay vào phương trình đã cho, làm tương tự như bài toán trên, ta được:

$$\left[(x - x_0)^n Q(x) + c\right]^2$$

$$= (x^2 + 2x - 3 - x_0)^n Q(x^2 + 2x - 3) + c + 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (x - x_0)^n Q^2(x) + 2cQ(x)$$

$$= (x + x_0 + 2)^n Q(x^2 + 2x - 3), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cho $x = x_0$, ta có:

$$2cQ(x_0) = 2^n (x_0 + 1)^n Q(x_0^2 + 2x_0 - 3)$$

$$\Leftrightarrow 2cQ(x_0) = 2^n (x_0 + 1)^n Q(x_0)$$

$$\Leftrightarrow 2c = 2^n (x_0 + 1)^n \ (*).$$

Với $c = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ và $x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ ta thấy (*) không xảy ra.

*Kết luận*: Tất cả các đa thức cần tìm là

$$P(x) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; P(x) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

**Hướng thứ hai.** *Nâng bậc của phương trình.*

**Bài toán 2.** *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thoa mãn $(P(x) - 6)^3 = P(x^3 + x - 1), \forall x \in \mathbb{R}$.*

***Lời giải.*** 1) Nếu $P(x) = c$ thì

$$(c - 6)^3 = c \Leftrightarrow (c - 8)\left[(c - 5)^2 + 2\right] = 0 \Leftrightarrow c = 8.$$

2) Nếu $\deg P(x) \geq 1$, xét phương trình:

$$x = x^3 + x - 1 \Leftrightarrow x = x_0 = 1.$$

Suy ra $P(x_0) = c$. Đặt $P(x) = (x - x_0)^n Q(x) + c$, với $Q(x_0) \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$. Thay vào phương trình đã cho và biến đổi như các bài toán trên, ta được:

$$(x - x_0)^{2n} Q^3(x) + 3(c - 6)(x - x_0)^n Q^2(x)$$

$$+ 3(c - 6)^2 Q(x)$$

$$= (x^2 + xx_0 + x_0^2 + 1)^n Q(x^3 + x - 1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay $x$ bởi $x_0$, ta được:

$$3(c - 6)^2 Q(x_0) = (3x_0^2 + 1)^n Q(x_0^3 + x_0 - 1)$$

$$\Rightarrow 3(c - 6)^2 = (3x_0^2 + 1)^n \Rightarrow 12 = 4^n.$$

Đẳng thức cuối cùng là vô lý với $n \in \mathbb{N}^*$.

*Kết luận*: Đa thức cần tìm là $P(x) = 8, \forall x \in \mathbb{R}$.

**Hướng thứ ba.** *Nâng bậc của phương trình và thay $x$ bởi các đa thức bậc cao khác nhau.*

**Bài toán 3.** *Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thoa mãn*

$$P^3(x) - \frac{3}{2}P^2(2x - 1) = P(x^3 + x - 1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

***Lời giải.*** 1) Nếu $P(x) = c$ thì

$$c^3 - \frac{3}{2}c^2 = c \Leftrightarrow c(c - 2)(2c + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 0, c = 2, c = -\frac{1}{2}.$$

2) Nếu $\deg P(x) \geq 1$, xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 2x - 1 \\ x = x^3 + x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = x_0 = 1.$$

Suy ra $P(x_0) = c$. Đặt $P(x) = (x - x_0)^n Q(x) + c$, với $Q(x_0) \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$. Thay vào phương trình đã cho, ta được:

$$2\left[(x - x_0)^n Q(x) + c\right]^3 - 3\left[(2x - 1 - x_0)^n Q(2x - 1) + c\right]^2$$

$$= 2\left[(x^3 + x - 1 - x_0)^n Q(x^3 + x - 1) + c\right], \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 2(x-x_0)^{2n}Q^3(x)+6c(x-x_0)^nQ^2(x)+6c^2Q(x)$$
$$-3.4^n(x-x_0)^nQ^2(2x-1)-6c.2^nQ(2x-1)$$
$$=2\left(x^2+xx_0+x_0^2+1\right)^nQ\left(x^3+x-1\right),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Thay $x$ bởi $x_0$, ta được:

$$6c^2Q(x_0)-6c.2^nQ(2x_0-1)$$
$$=2\left(3x_0^2+1\right)Q\left(x_0^3+x_0-1\right)$$
$$\Rightarrow 3c^2-3c.2^n=3x_0^2+1 \quad (*).$$

Với $c=0, c=2, c=-\dfrac{1}{2}$ và $x_0=1$ thì đẳng thức (*) không tồn tại $n\in\mathbb{N}^*$.

*Kết luận*: Tất cả các đa thức cần tìm là:

$$P(x)=0, P(x)=2, P(x)=-\frac{1}{2}.$$

Như vậy, bằng cách làm tương tự, bạn đọc có thể tự sáng tác cho mình những bài toán hay để phục vụ công tác giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi hiệu quả. Chúc các bạn thành công. Cuối cùng là một số bài tập tự luyện.

## BÀI TẬP LUYỆN TẬP

1. Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$2P^2(x)-3=-P\left(x^2-1\right),\forall x\in\mathbb{R}.$$

2. Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P\left(2x^2-1\right)=\frac{P^2(x)}{2}-1,\forall x\in\mathbb{R}.$$

3. Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P^2(x)-1=2P\left(x^2-3\right),\forall x\in\mathbb{R}.$$

4. Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$P\left(x^2+2x-3\right)=4P^2(x)-3,\forall x\in\mathbb{R}.$$

5. Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn

$$\left(P(x)+24\right)^3=P\left(x^3-x+1\right),\forall x\in\mathbb{R}.$$

************************************************************************************

***OLYMPIC ...*** *(Tiếp theo trang 38)*

Từ đó suy ra, các cạnh của tam giác vuông bằng $x$ và $\dfrac{a(a-2x)}{2(a-x)}$. Khi đó diện tích cần tìm bằng:

$$\frac{a^2}{2}+\frac{ax(a-2x)}{2(a-x)}.$$

Bằng cách tính đạo hàm, ta có thể suy ra rằng hàm số $f(x)=\dfrac{x(a-2x)}{a-x}$ đạt cực đại tại $x=\dfrac{a(2-\sqrt{2})}{2}$. Nó tương ứng với các góc $\beta=\dfrac{\pi}{4}, 2\alpha=\dfrac{3\pi}{4}, \alpha=\dfrac{3\pi}{8}$.

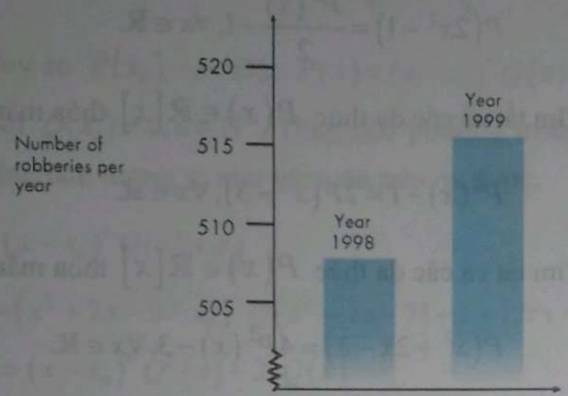
## TÀI LIỆU THAM KHẢO


1. Олимпиада по математике «Покори Воробьевы горы!» – 2019-2020 / *Б. А. Будак и др.* // Математика в школе. – 2021. – № 1. С. 28 – 39.
2. Олимпиада по математике «Покори Воробьевы горы!» – 2018-2019 / *Б. А. Будак и др.* // Математика в школе. – 2020. – № 4. С. 11 – 23.
3. Олимпиада по математике «Покори Воробьевы горы!» – 2017-2018 / *Б. А. Будак и др.* // Математика в школе. – 2018. – № 5. С. 20 – 32.
4. Олимпиада по математике «Покори Воробьёвы горы!» – 2016-2017 / *Д. В. Горяшин и др.* // Математика в школе. – 2017. – № 8. С. 31 – 40.
5. Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» / *В. В. Галатенко и др.* // Математика в школе. – 2017. – № 2. С. 12 – 23.
6. Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» / *А. С. Зеленский и др.* // Математика в школе. – 2016. – № 4. С. 10 – 25.
7. Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике (2013 – 2018) / *А. С. Зеленский и др.* – М.: МЦНМО, 2019. – 192 С.

# TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

## BÀI SỐ 93

**PROBLEM:** *A TV reporter showed this graph and said: "The graph shows that there is a huge increase in the number of robberies from 1998 to 1999."*




*Do you consider the reporter's statement to be a reasonable interpretation of the graph? Give explanation to support your answer.*

***Remark***: This problem is collected from Sample Questions from OECD's PISA Assessments. (PISA: Programme for International Student Assessment).

***SOLUTION***: The reporter's statement is not reasonable interpretation of the graph since only a small part of the graph is given. In fact, the number of robberies increased only about $515-507=9$ or $\frac{516-507}{507}\approx 1.8\%$.

The reporter got the wrong idea may be because based on the given graph the number of robberies in 1999 seems double than the number of robberies in 1998.

### TỪ VỰNG

*graph* : *đồ thị, biểu đồ*
*reasonable* : *hợp lý*
*interpretation* : *diễn giải*

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(*College of Science–Vietnam National University, Hanoi*)

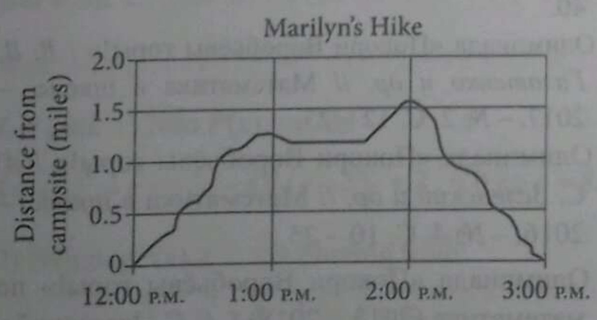
****************************************

## BÀI DỊCH SỐ 91

**BÀI TOÁN**. *Biểu đồ dưới đây cho biết khoảng cách của Marilyn từ khu cắm trại của cô ấy trong 3 giờ đi bộ. Cô ấy dừng lại 30 phút trong chuyến đi bộ của mình để ăn trưa. Dựa vào biểu đồ, xem thời điểm nào sau đây gần nhất với thời điểm cô ấy ăn xong bữa trưa và tiếp tục đi bộ.*

**A.** **12: 40** *chiều* **B.** **1: 10** *chiều*

**C.** **1: 40** *chiều* **D.** **2: 00** *chiều*




***Lưu ý***: *Bài toán này được sưu tầm từ một đề thi thử SAT.*

***Lời giải***. Một phần của biểu đồ có dạng là một đoạn thẳng nằm ngang. Phần này cho thấy khoảng cách di chuyển của cô *Marilyn* tính từ khu cắm trại không thay đổi và điều này tương ứng với khoảng thời gian *Marilyn* dùng bữa trưa. Chúng ta có thể thấy rằng thời điểm cô ấy ăn xong bữa trưa và tiếp tục đi bộ là vào khoảng **1:40** chiều.

***Nhận xét***. Các bạn *Nguyễn Quốc Hoàng Anh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Trần Thị Thanh Thư*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm. Xin hoan nghênh ba bạn.

**HỒ HẢI** (*Hà Nội*)

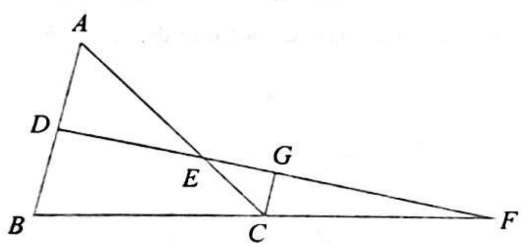
## NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

**BÀI TOÁN 72.** *Cho tam giác $ABC$. Gọi $D$ là trung điểm của $AB$, $E$ là điểm thuộc cạnh $AC$ sao cho $EA = 2EC$. Gọi $F$ là giao điểm của $DE$ và $BC$. Chứng minh rằng $CF = CB$.*

***Lời giải.*** *Cách 1.* (h.1) *Sử dụng định lý Menelaus.*

Theo định lý Menelaus vào tam giác $ABC$ cho ba điểm $D, E, F$ ta có:

$$\frac{AD}{BD}.\frac{BF}{CF}.\frac{CE}{AE}=1 \Leftrightarrow 1.\frac{BF}{CF}.\frac{1}{2}=1 \Leftrightarrow BF=2CF.$$




*Hình 1*

Do đó $C$ là trung điểm của $BF$ hay $CF = CB$.

*Cách 2.* (h.1) *Vẽ đường phụ qua C và song song với AB.*

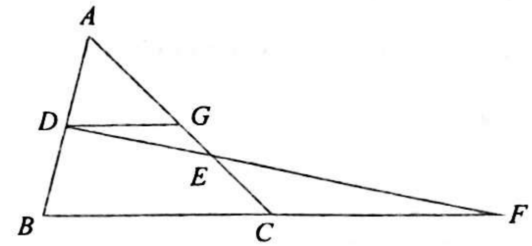
Kẻ $CG \parallel AB\,(G \in DF)$. Theo định lý Thales ta có: $\frac{CG}{AD}=\frac{CE}{AE}=\frac{1}{2}$. Mà $DA = DB$ nên $\frac{CG}{BD}=\frac{1}{2}$.

Mặt khác $\frac{CG}{BD}=\frac{FC}{FB}$ do đó $\frac{FC}{FB}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow FB = 2FC$ hay $C$ là trung điểm của $BF$.

*Cách 3.* (h.2) *Vẽ đường phụ qua $D$ và song song với $BC$.*

Kẻ $DG \parallel BC\,(G \in AC)$, suy ra $G$ là trung điểm của $AC$. Theo định lý Thales ta có $\frac{DG}{CF}=\frac{EG}{EC}$. Mặt khác $\frac{EG}{EC}=\frac{1}{2}$ nên $\frac{DG}{CF}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2DG = CF$.

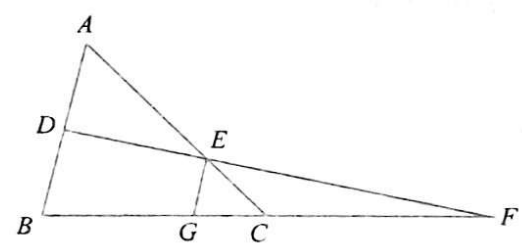
Theo tính chất đường trung bình trong tam giác $ABC$ có $2DG = BC$, do đó $BC = CF$.




*Hình 2*

*Cách 4.* (h.3) *Vẽ đường phụ qua $E$ và song song với $AB$.*

Kẻ $EG \parallel AB\,(G \in BC)$. Theo định lí Thales ta có: $\frac{EG}{AB}=\frac{CE}{CA}$. Theo bài ra $\frac{CE}{CA}=\frac{1}{3}$ suy ra: $\frac{EG}{AB}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{EG}{BD}=\frac{2}{3}$. Mặt khác $\frac{EG}{BD}=\frac{FE}{FD}$ nên $\frac{FE}{FD}=\frac{2}{3}$. Xét tam giác $ABF$ có trung tuyến $FD$, $E \in FD$ sao cho $\frac{FE}{FD}=\frac{2}{3}$ nên $E$ là trọng tâm tam giác $ABF$. Do đó $AC$ là đường trung tuyến của $\Delta ABF$ hay $CB = CF$.




*Hình 3*

*Cách 5.* (h.4) *Vẽ đường phụ qua $D$ và song song với $AC$.*

Kẻ $DG \parallel AC\,(G \in BC)$. Suy ra $DG$ là đường trung bình của tam giác $ABC$, do đó:

$$\frac{DG}{AC}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow DG=\frac{1}{2}AC.$$

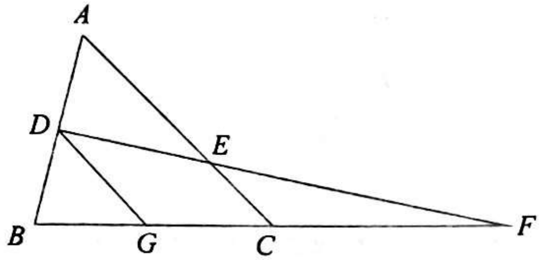
Mặt khác theo bài ra ta có $AC = 3EC$ nên

$$DG=\frac{1}{2}.3EC=\frac{3}{2}EC \Leftrightarrow \frac{EC}{DG}=\frac{2}{3}.$$

Xét tam giác $FDG$ có $EC \parallel DG$. Do đó:

$$\frac{EC}{DG}=\frac{FC}{FG}\Rightarrow\frac{FC}{FG}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{FC}{FG-FC}=\frac{2}{3-2}$$

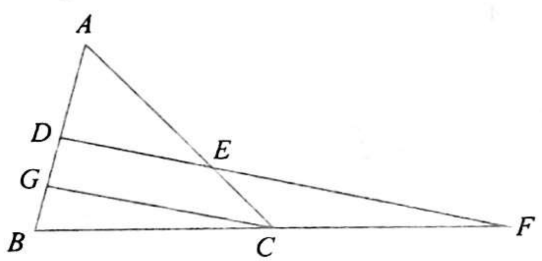
$$\Leftrightarrow FC=2CG=2.\frac{1}{2}CB\Leftrightarrow FC=CB.$$




*Hình 4*

*Cách 6.* (h.5) *Dựng trung điểm của $BD$ (hoặc qua $C$ kẻ đường thẳng song song với $DE$ cắt $AB$ tại $G$).*

Gọi $G$ là trung điểm của $BD$. Ta có: $\frac{AD}{AG}=\frac{2}{3}$, $\frac{AE}{AC}=\frac{2}{3}$. Suy ra $\frac{AD}{AG}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow DE\parallel CG$ (định lý Thales đảo). Xét tam giác $BDF$ có $G$ là trung điểm của $BD$ và $DF\parallel CG$. Suy ra $CG$ là đường trung bình của tam giác $BDF$. Do đó $C$ là trung điểm của $BF$ hay $BC=CF$.



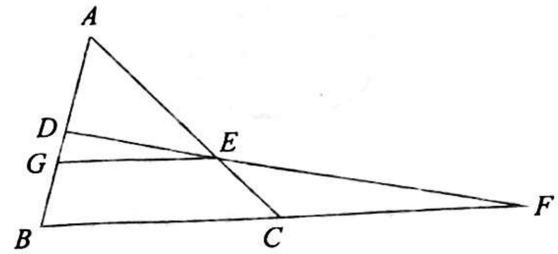

*Hình 5*

*Cách 7.* (h.6) *Vẽ đường phụ qua $E$ và song song với $BC$.*

Kẻ $EG\parallel BC\left(G\in AB\right)$. Theo định lý Thales ta có:

$\frac{GB}{AB}=\frac{EC}{AC}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{GB}{2BD}=\frac{1}{3}$ (vì $AB=2BD$)

$\Leftrightarrow\frac{GB}{BD}=\frac{2}{3}$. Mà $\frac{GB}{BD}=\frac{EF}{DF}$ nên $\frac{EF}{DF}=\frac{2}{3}$. Xét tam giác $ABF$ có $DF$ là trung tuyến và $\frac{EF}{DF}=\frac{2}{3}$ nên $E$ là trọng tâm $\Delta ABF$. Do đó $C$ là trung điểm của $BF$ hay $CB=CF$.



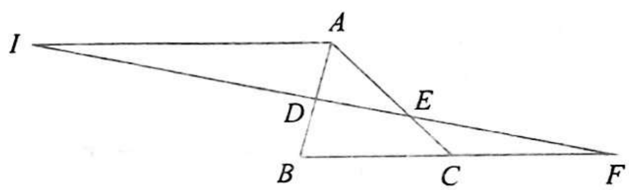

*Hình 6*

*Cách 8.* (h.7) *Vẽ đường phụ qua $A$ và song song với $BC$.*

Qua $A$ kẻ đường thẳng song song với $BC$ cắt $DE$ tại $I$. Áp dụng định lí Thales ta có: $\frac{EC}{EA}=\frac{CF}{AI}$, mà $\frac{EC}{EA}=\frac{1}{2}$ nên $\frac{CF}{AI}=\frac{1}{2}$ hay $CF=\frac{1}{2}AI$.

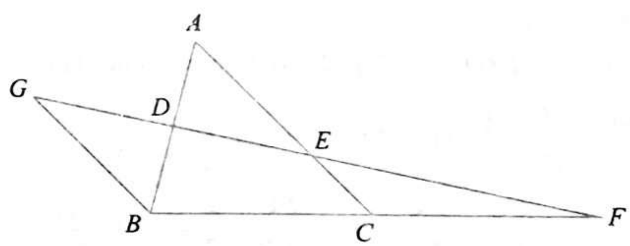
Vì $D$ là trung điểm của $AB$ và $AI\parallel BC$ nên dễ dàng chứng minh được $IA=BF$.

Suy ra $CF=\frac{1}{2}BF$ hay $C$ là trung điểm của $BF$.




*Hình 7*

*Cách 9.* (h.8) *Vẽ đường phụ qua $B$ và song song với $AC$.*



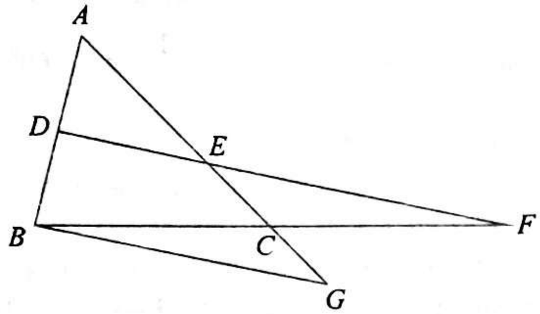

*Hình 8*

Qua $B$ kẻ đường thẳng song song với $AC$ cắt $DE$ tại $G$. Dễ dàng chứng minh được $\Delta DBG=\Delta DAE$ (g.c.g). Suy ra $BG=AE$.

Áp dụng định lí Thales cho tam giác $BGF$ ta có $\frac{FC}{FB}=\frac{EC}{BG}$. Theo giả thiết $\frac{CE}{AE}=\frac{1}{2}$. Mặt khác $BG=AE$ (chứng minh trên) nên $\frac{FC}{FB}=\frac{EC}{AE}=\frac{1}{2}$.

Do đó $C$ là trung điểm của $BF$ hay $CF = CB$.

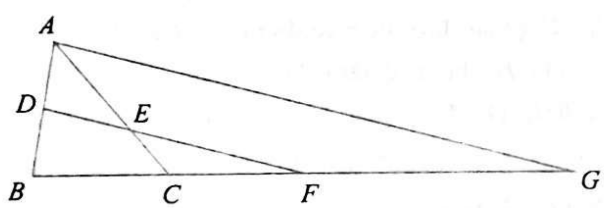
*Cách 10.* (h.9) *Vẽ đường phụ qua* $B$ *và song song với DE.*




*Hình 9*

Qua $B$ kẻ đường thẳng song song với $DE$ cắt $AC$ tại $G$. Xét tam giác $ABG$ có $DE \parallel BG$ và $D$ là trung điểm của $AB$ nên $DE$ là đường trung bình của tam giác $ABG$. Do đó $EA = EG$. Mặt khác theo giả thiết $AE = 2EC$. Do đó $EG = 2EC$ hay $CE = CG$. Khi đó dễ chứng minh được $\Delta CBG = \Delta CFE$ (g.c.g). Do đó $CB = CF$.

*Cách 11.* (h.10) *Vẽ đường phụ qua* $A$ *và song song với DE.*




*Hình 10*

Qua $A$ kẻ đường thẳng song song với $DE$ cắt đường thẳng $BC$ tại $G$. Xét $\Delta ABG$ có $D$ là trung điểm của $AB$ và $DF \parallel AG$. Suy ra $DF$ là đường trung bình của $\Delta ABG$. Do đó $F$ là trung điểm của $BG$ hay $FB = FG$. Áp dụng định lý Thales ta có:

$$\frac{CF}{FG} = \frac{CE}{EA} = \frac{1}{2} \text{ (vì theo giả thiết } EA = 2EC).$$

Suy ra $CF = \frac{1}{2}FG$. Mà $FB = FG$ nên

$$CF = \frac{1}{2}FB \text{ hay } CB = CF.$$

Cách 12. (h.1) *Sử dụng vectơ.*

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Giả sử $\overrightarrow{BF} = x\overrightarrow{BC}$.

Biểu diễn $\overrightarrow{DE}$ và $\overrightarrow{DF}$ theo các vectơ $\vec{b}$ và $\vec{c}$ ta có: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$;

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\vec{b} + x\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{b} + x\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{b} + x\vec{c} - x\vec{b} = \left(\frac{1}{2} - x\right)\vec{b} + x\vec{c}.$$

Vì ba điểm $D, E, F$ thẳng hàng nên $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$ cùng phương. Do đó: $\dfrac{\frac{1}{2}-x}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{x}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}-x\right) = -\frac{x}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{2x}{3} = -\frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow x = 2.$$

Suy ra $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$ hay $CB = CF$.

**TRỊNH VĂN CẢNH.**

*(GV THCS và THPT Nguyễn Khuyến, TP. Thủ Dầu Một, Bình Dương).*

***Nhận xét.*** Bạn *Hà Phương Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Phú Thọ** đóng góp 4 cách giải, tương tự như cách 1, cách 2, cách 3, cách 4 của bạn *Trịnh Văn Cảnh*. Bạn *Nguyễn Văn Cảnh*, GV THCS Long Hậu, xã Long Hậu, Cần Guộc, **Long An** đóng góp 2 cách giải, cách 1 tương tự như cách 7, cách 2 sử dụng phương pháp tọa độ. Bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đóng góp 2 cách giải tương tự như cách 1 và cách 12. Bạn *Trần Thị Thanh Thư*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** đóng góp 2 cách giải tương tự như cách 4 và cách 5. Xin hoan nghênh các bạn.

**LÊ MAI** (*Hà Nội*)

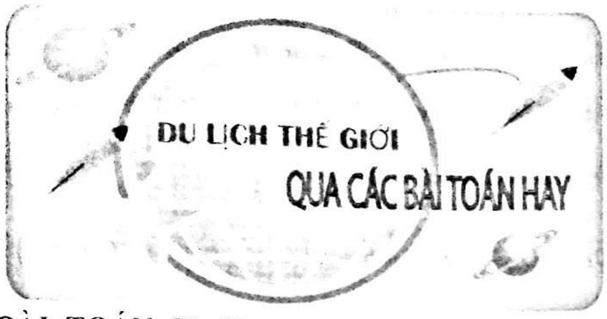
Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 74 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.7.2023.

**BÀI TOÁN 74.** *Giải phương trình*

$$3\sqrt{4x+1} + 4x\sqrt{3x-2} = 3x^2 + 4x + 5.$$

**NGUYỄN VĂN XÁ**

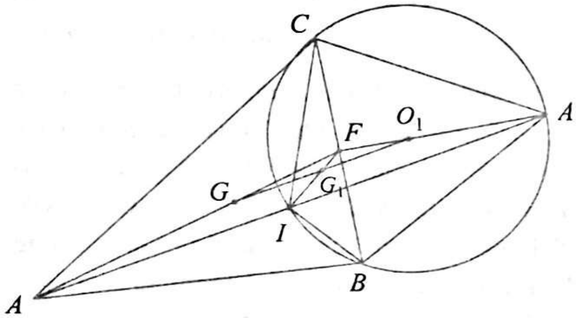
*(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)*




**BÀI TOÁN 81 (Tạp chí KOMAL, Hungary, 323, 2003).** *Gọi I là điểm đẳng giác trong tam giác ABC (tức là I nằm trong tam giác ABC thỏa mãn $\widehat{AIB} = \widehat{BIC} = \widehat{CIA} = 120^0$).*

*Chứng minh rằng các đườn thẳng Euler của các tam giác ABI, BCI, CAI đồng quy.*

***Lời giải. Cách*** 1. Ta sẽ chứng ba đường thẳng Euler nói trong đề bài đi qua trọng tâm của $\Delta ABC$. Do tính đối xứng, ta chỉ cần chứng minh cho đường thẳng Euler của $\Delta BCI$ là đủ.

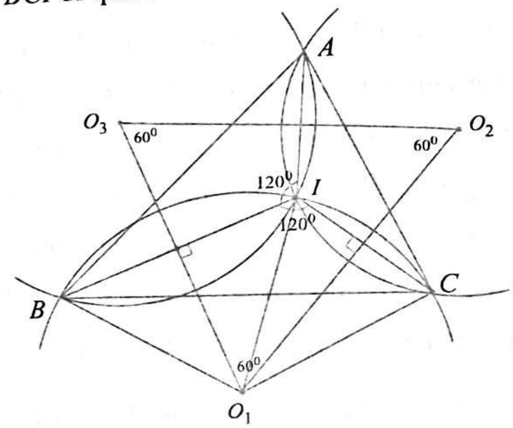



Vẽ ra phía ngoài $\Delta ABC$ một tam giác đều $BCA'$ và gọi $O_1$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều đó. Vì $\widehat{BIC} + \widehat{BA'C} = 120^0$ nên tứ giác $IBA'C$ nội tiếp. Do $A'B = A'C$ nên $IA'$ là đường phân giác của góc $\widehat{BIC}$. Phân giác này cũng chính là đường thẳng $AI$. Gọi $F$ là trung điểm của $BC$, $G$ là trọng tâm $\Delta ABC$, $G_1$ là trọng tâm $\Delta BCI$. Vì $\frac{FG}{FA} = \frac{FG_1}{FI} = \frac{FO_1}{FA'} = \frac{1}{3}$ nên các điểm $G$, $G_1$, $O_1$ thẳng hàng. Nói cách khác đường thẳng Euler $O_1G_1$ của $\Delta BCI$ đi qua trọng tâm $G$ của $\Delta ABC$.

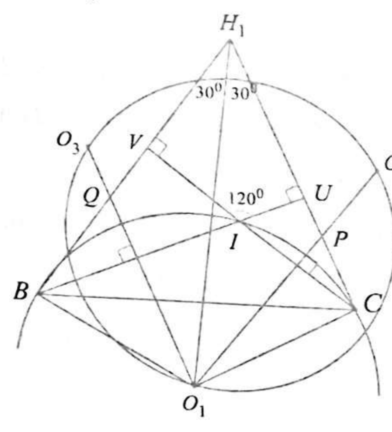
***Cách 2.*** Gọi $O_1, H_1$; $O_2, H_2$; $O_3, H_3$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của các tam giác $BCI$, $CAI$, $ABI$ tương ứng.

Dễ thấy $\widehat{BO_1C} = \widehat{CO_2A} = \widehat{AO_3B} = 120^0$. Vì $BO_1 = IO_1 = CO_1$ nên hai đường thẳng $O_1O_2$ và $O_1O_3$ lần lượt là phân giác của các góc $\widehat{BO_1I}$ và $\widehat{CO_1I}$, suy ra: $\widehat{O_3O_1O_2} = \frac{1}{2}\widehat{BO_1C} = \frac{1}{2}.120^0 = 60^0$.

Tương tự: $\widehat{O_3O_2O_1} = \widehat{O_1O_3O_2} = 60^0 \Rightarrow \Delta O_1O_2O_3$ đều. Ta sẽ chứng minh ba đường thẳng Euler của các tam giác $BCI$, $CAI$, $ABI$ đều đi qua tâm của tam giác đều $O_1O_2O_3$. Cũng do tính đối xứng, ta chỉ cần chứng minh đường thẳng Euler của tam giác $BCI$ đi qua tâm của $\Delta O_1O_2O_3$.




Gọi $U$, $P$ lần lượt là giao điểm của $BI$, $O_1O_2$ với $CH_1$; $V$, $Q$ lần lượt là giao điểm của $CI$, $O_1O_3$ với $CH_1$. Do $H_1$ là trực tâm $\Delta BCI$ nên $BI \perp CH_1$, $CI \perp BH_1$. Do đó tứ giác $H_1UIV$ là tứ giác nội tiếp, mặt khác $\widehat{UIV} = 120^0$ nên $\widehat{BH_1C} = 60^0$ và tứ giác $H_1BO_1C$ nội tiếp.




Từ $BO_1 = CO_1$ suy ra: $\widehat{BH_1O_1} = \widehat{CH_1O_1} = 30^0$ (1). Do $O_1O_2 \,//\, BH_1$, $O_1O_3 \,//\, CH_1$ nên tứ giác $H_1PO_1Q$ là hình bình hành, kết hợp với (1) suy ra

*(Xem tiếp trang 19)*


## ĐÚNG HAY SAI ?

Trong một đề thi học sinh giỏi có bài tập sau:

*Cho hàm số* $f(x)=\log_3 x+3^x-3^{\frac{1}{x}}$. *Tìm các giá trị của tham số* $m$ *để phương trình*

$$f\left(\frac{1}{4|x-m+1|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$$

*có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?*

**Có một lời giải như sau:**

Xét hàm số $f(x)=\log_3 x+3^x-3^{\frac{1}{x}}$.

Điều kiện xác định: $x>0$. Ta có:

$$f\left(x^{-1}\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)=\log_3\frac{1}{x}+3^{\frac{1}{x}}-3^x$$
$$=-\left(\log_3 x+3^x-3^{\frac{1}{x}}\right)$$
$$=-f(x)$$

và $$f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}+3^x.\ln 3+\frac{1}{x^2}3^{\frac{1}{x}}\ln 3>0,$$

$\forall x\in(0;+\infty)$, suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Vậy phương trình

$$f\left(\frac{1}{4|x-m+1|+3}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$$

tương đương với:

$$f\left(\left(4|x-m+1|+3\right)^{-1}\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$$
$$\Leftrightarrow -f\left(4|x-m+1|+3\right)+f\left(x^2-4x+7\right)=0$$
$$\Leftrightarrow f\left(4|x-m+1|+3\right)=f\left(x^2-4x+7\right)$$
$$\Leftrightarrow 4|x-m+1|+3=x^2-4x+7$$
$$\Leftrightarrow 4|x-m+1|=(x-2)^2$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-8x+4m=0 & (1)\\ x^2=4m-8 & (2)\end{array}\right.$$

Ta nhận thấy $(2)$ chỉ có duy nhất 1 nghiệm dương khi $m>2$ và nghiệm dương đó là $x=\sqrt{4m-8}$. Cho nên yêu cầu bài toán trở thành: phương trình

$$x^2-8x+4m=0\ (1)$$

phải có hai nghiệm dương phân biệt khác $\sqrt{4m-8}$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} S=-\dfrac{b}{a}=8>0\\ P=\dfrac{c}{a}=4m>0\\ \Delta'=16-4m>0\\ 4m-8-8\left(\sqrt{4m-8}\right)+4m\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} m>0\\ m<4\\ m-1-\sqrt{4m-8}\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 0<m<4\\ m-1\neq\sqrt{4m-8}\end{cases}.$$

Khi $m>2$ thì

$$m-1\neq\sqrt{4m-8}$$
$$\Leftrightarrow (m-1)^2\neq 4m-8\Leftrightarrow m\neq 3.$$

*Kết luận*: $2<m<4$ và $m\neq 3$ là các giá trị cần tìm.

**Câu hỏi:** ***Theo các bạn, lời giải trên đúng hay sai? Nếu sai hãy chỉ ra điểm sai và điều chỉnh lại cho đúng.***

**TRẦN MINH VŨ**

*(GV THPT Trần Cao Vân, Gia Lai)*

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 552 (6.2023)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com



## TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
*For Lower Secondary School*
*Phạm Văn Sơn* – Tạo phần dư kết hợp hằng đẳng thức để chứng minh bất đẳng thức.

7 Hướng dẫn giải đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Bình Định, năm học 2022 - 2023.

12 Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Nam Định, năm học 2022 - 2023.

13 **Diễn đàn dạy học toán**
*Nguyễn Thanh Giang* – Một số sai lầm thường gặp khi giải toán đại số tổ hợp (*Kỳ 2*).

20 **Đề ra kỳ này**
T1/552, ..., T12/552, L1/552, L2/552.

21 **Problems in This Issue**

22 **Giải bài kì trước**
T1/548, ..., T12/548, L1/548, L2/548.
*Solutions to Previous Problems*

31 **Bạn có biết**
*Hoàng Ngự Huấn* – Olympic Toán học: "*Chinh phục đồi chim sẻ*" - 2020 - 2021.

39 **Bạn đọc tìm tòi**
*Kiều Đình Minh* – Về một bài toán phương trình hàm đa thức có nghiệm hằng.

42 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 93 – Bài dịch số 91.

43 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 72 – Đề bài toán 74.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 81. Đề bài toán 83.

47 **Sai lầm ở đâu?**

***Biên tập***: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
***Trị sự, phát hành***: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
***Mĩ thuật***: QUỐC HIỆP, THANH LONG
***Thiết kế, chế bản***: MINH HÒA