



# TOÁN HỌC & Tuổi trẻ



Số 553  
Tháng 7 - 2023  
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 60 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;

ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuasachgd.com



Rudolf Emil Kalman (1930 - 2010)





# CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

NGUYỄN ANH TUẤN

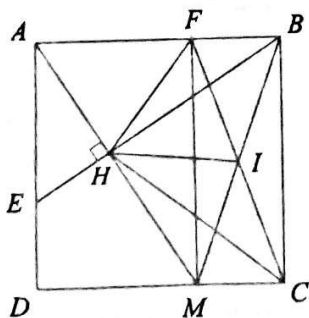
(GV THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An)

Có nhiều dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng vuông góc, trong khuôn khổ bài viết này tác giả xin phép nêu ứng dụng của hai định lý cơ bản trong sách giáo khoa môn Toán lớp 8 vào việc chứng minh hai đường thẳng vuông góc như sau:

1. Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.
2. Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

**Bài 1.** Cho hình vuông  $ABCD$ , lấy  $E, F$  lần lượt thuộc các cạnh  $AD, AB$  sao cho  $AE = AF$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  trên đường thẳng  $BE$ . Chứng minh  $\widehat{CHF} = 90^\circ$ .

**Lời giải.** (h.1)



Hình 1

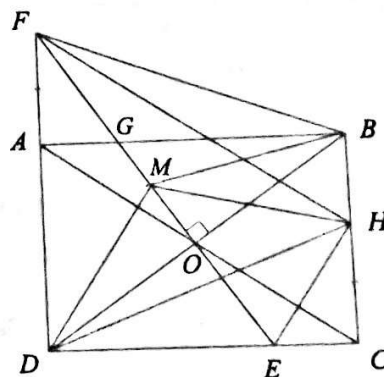
Kéo dài  $AH$  cắt  $CD$  tại  $M$ , ta có  $\triangle BAE = \triangle ADM$  (g.c.g)  $\Rightarrow DM = AE = AF \Rightarrow CM = BF$  nên  $BFMC$  là hình chữ nhật. Gọi  $I$  là giao điểm của  $CF$  và  $BM \Rightarrow IF = IC = IM = IB$ .

Xét  $\triangle MHB$  vuông tại  $H$  có  $HI$  là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền  $BM$  suy ra

$$HI = \frac{BM}{2} = \frac{FC}{2} \Rightarrow \triangle FHC \text{ vuông tại } H \\ \Rightarrow \widehat{CHF} = 90^\circ.$$

**Bài 2.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  ( $AB > AD$ ) có  $O$  là giao điểm hai đường chéo. Đường thẳng qua  $O$  và vuông góc với  $BD$  cắt  $CD, AD, AB$  lần lượt tại  $E, F, G$ . Đường thẳng qua  $F$  song song với  $AC$  cắt  $BC$  tại  $H$ . Chứng minh  $\widehat{FHE} = 90^\circ$ .

**Lời giải.** (h.2)



Hình 2

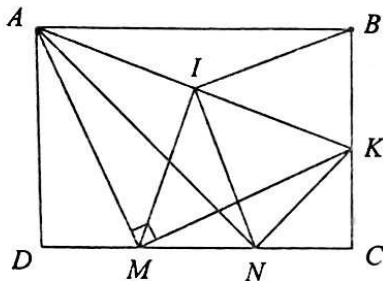
Vì  $AF \parallel HC$  và  $AC \parallel FH$  nên tứ giác  $ACHF$  là hình bình hành  $\Rightarrow AF = HC \Rightarrow \triangle BAF = \triangle DCH$  (c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{DHC} = \widehat{BFA}$ . Mà  $\widehat{DHC} = \widehat{HDF}$  (so le trong) nên  $\widehat{HDF} = \widehat{BFA}$ . Do đó tứ giác  $BHDF$  là hình thang cân.

Gọi  $M$  là trung điểm của  $EF$ , vì  $MO$  vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của  $\triangle MDB$  nên  $MB = MD$ . Tam giác  $DEF$  có  $DM$  là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền  $EF \Rightarrow MD = \frac{EF}{2} \Rightarrow MD = MF \Rightarrow M$  thuộc đường trung trực của

$FD$  nên  $M$  cũng thuộc đường trung trực của  $BH$  (do  $BHDF$  là hình thang cân)  $\Rightarrow MH = MB$   
 $\Rightarrow MH = MD = \frac{EF}{2} \Rightarrow \triangle HEF$  vuông tại  $H$   
 $\Rightarrow \widehat{FHE} = 90^\circ$ .

**Bài 3.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ , lấy  $M$  và  $N$  trên  $CD$  sao cho  $DM = CN$ . Đường thẳng qua  $M$  vuông góc với  $AM$  cắt  $BC$  tại  $K$ . Chứng minh  $AN \perp NK$ .

**Lời giải.** (h.3)



Hình 3

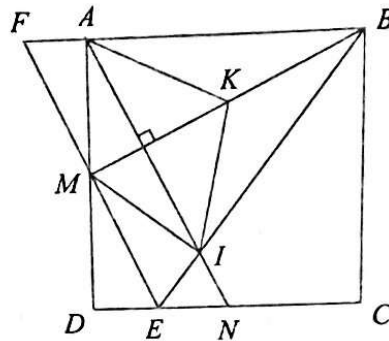
Ta có  $\triangle DMA = \triangle CNB$  (c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{DAM} = \widehat{CBN}$   
 $\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{NBA}$  nên tứ giác  $ABNM$  là hình thang cân. Gọi  $I$  là trung điểm của  $AK$ , ta có  
 $IB = \frac{AK}{2} \Rightarrow IA = IB$  nên  $I$  nằm trên đường trung  
 trực  $AB$ , cạnh đáy của hình thang cân  $ABNM$  nên  $I$   
 thuộc đường trung trực  $MN$  suy ra  $IM = IN$ .  
 Mặt khác: tam giác  $MAK$  vuông tại  $M$  có  $MI$  là  
 đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên  
 $MI = \frac{AK}{2}$ . Từ đó suy ra  $IN = \frac{AK}{2}$  nên tam giác  
 $ANK$  vuông tại  $N \Rightarrow AN \perp NK$ .

**Bài 4.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt  
 là trung điểm của  $AD, DC$ . Gọi  $E$  là trung điểm  
 của  $DN$  và  $I$  là giao điểm của  $AN$  và  $BE$ . Chứng  
 minh  $MI \perp BE$ .

**Lời giải.** (h.4)

Ta có  $\triangle ABM = \triangle DAN$  (c.g.c) suy ra  $AN \perp BM$ .  
 Mà  $ME \parallel AN$  nên  $ME \perp MB$ . Kéo dài  $EM$  cắt

$AB$  tại  $F$ . Ta có  $\triangle AMF = \triangle DME$  (g.c.g)  
 $\Rightarrow ME = MF$ .



Hình 4

Xét  $\triangle BEF$  có  $BM$  vừa là đường cao vừa là đường  
 trung tuyến nên  $\triangle BEF$  cân tại  $B$ , suy ra  $BM$  là  
 đường phân giác của  $\triangle BEF$ .

Gọi  $K$  là trung điểm của  $BM \Rightarrow AK = \frac{BM}{2}$  (1).

Vì  $AI \parallel ME$  và  $BM \perp ME$  nên  $BM \perp AI$ . Xét  
 $\triangle BAI$  có  $BM$  vừa là đường cao vừa là đường  
 phân giác nên  $\triangle BAI$  cân tại  $B$  suy ra  $BM$  là  
 đường trung trực của  $\triangle BAI \Rightarrow KI = AK$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra  $IK = \frac{BM}{2}$  nên tam giác  $MIB$   
 vuông tại  $I \Rightarrow MI \perp BE$ .

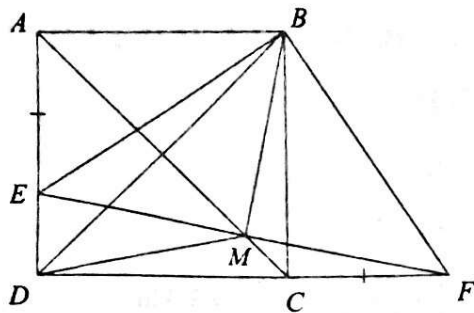
**Bài 5.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Lấy  $E, F$  lần lượt  
 trên cạnh  $AD$  và tia đối của tia  $CD$  sao cho  
 $AE = CF$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $AC$  và  $EF$ .  
 Chứng minh  $BM \perp EF$ .

**Lời giải.** (h.5)

Ta có  $\triangle ABE = \triangle CBF$  (c.g.c) suy ra  $BE = BF$  và  
 $\widehat{ABE} = \widehat{CBF} \Rightarrow BE \perp BF$ . Gọi  $M'$  là trung điểm  
 của  $EF$ . Các tam giác vuông  $DEF$  và  $BEF$  có  
 $DM'$  và  $BM'$  lần lượt là các đường trung tuyến  
 ứng với cạnh huyền  $EF \Rightarrow DM' = BM' = \frac{EF}{2}$  nên

$M'$  thuộc đường trung trực của  $BD \Rightarrow M' \in AC$   
 $\Rightarrow M \equiv M'$  nên  $BM \perp EF$  (do tam giác  $BEF$   
 vuông cân tại  $B$ ).





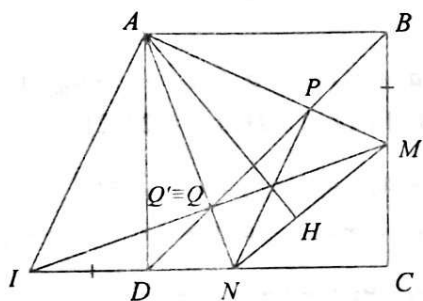
Hình 5

**Bài 6.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Lấy hai điểm  $M, N$  bất kì lần lượt trên các cạnh  $BC, CD$  sao cho  $\widehat{MAN} = 45^\circ$ .

a) Chứng minh  $MN = BM + DN$ .

b) Hạ  $AH$  vuông góc với  $MN$  tại  $H$ .  $BD$  cắt  $AM, AN$  lần lượt tại  $P, Q$ . Chứng minh  $AH, MQ, PN$  đồng quy.

**Lời giải.** (h.6)



Hình 6

a) Lấy điểm  $I$  trên tia đối của tia  $DC$  sao cho  $DI = BM \Rightarrow \triangle ABM = \triangle ADI$  (c.g.c)  $\Rightarrow AI = AM$  và  $\widehat{DAI} = \widehat{BAM}$ . Mặt khác

$$\widehat{DAN} + \widehat{BAM} = 90^\circ - \widehat{MAN} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

từ đó suy ra:  $\widehat{DAN} + \widehat{DAI} = \widehat{BAM} + \widehat{DAN} = 45^\circ$ .

Xét  $\triangle IAN$  và  $\triangle MAN$  có  $AI = AM$ ;

$\widehat{IAN} = \widehat{MAN} = 45^\circ$  và cạnh  $AN$  chung  
 $\Rightarrow \triangle IAN = \triangle MAN$  (c.g.c)

$$\Rightarrow MN = NI = ND + DI = ND + BM$$

(do  $DI = BM$ ).

b) Vì  $AI = AM$  và

$$\widehat{IAN} + \widehat{MAN} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

nên  $\triangle AMI$  vuông cân tại  $A$ .

Gọi  $Q'$  là giao điểm của  $AN$  và  $IM$ , vì tam giác  $AIM$  vuông cân tại  $A$  có  $AN$  là đường phân giác nên  $AN$  cũng là đường trung tuyến  $\Rightarrow IQ' = MQ'$ .

Xét tam giác  $AMI$  vuông cân tại  $A$  có  $AQ'$  là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền  $IM$  nên

$$AQ' = \frac{IM}{2}.$$

Mà  $CQ'$  là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền  $IM$  của tam giác vuông  $CIM$  nên

$$CQ' = \frac{IM}{2}.$$

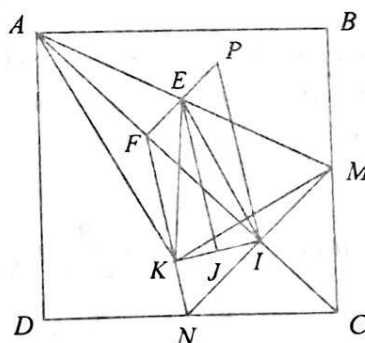
Do đó  $AQ' = CQ'$ , nên  $Q'$  thuộc đường trung trực của  $AC \Rightarrow Q' \in BD \Rightarrow Q' \equiv Q \Rightarrow MQ \perp AN$ .

Tương tự  $NP \perp AM$ . Vậy  $AH, MQ, PN$  lần lượt là các đường cao của tam giác  $AMN$  nên chúng đồng quy.

**Bài 7.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $CD$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AC$  và  $MN$ ,  $F$  là trung điểm của  $AI$ . Kẻ  $IK$  vuông góc với  $NF$  tại  $K$ . Chứng minh  $\widehat{AKM} = 90^\circ$ .

**Lời giải.**

**Cách 1** (h.7)



Hình 7

Vì  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $CD$  nên  $AC$  vuông góc với  $MN$  tại  $I$ .

Gọi  $E$  là trung điểm của  $AM$ ,  $P$  là điểm đối xứng với  $F$  qua điểm  $E$ . Ta có  $EF$  là đường trung bình của tam giác  $AMI$  nên  $FP = MI$  và  $FP \parallel MI$ .

(Xem tiếp trang 26)



# HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH NAM ĐỊNH

**NĂM HỌC 2022 - 2023**

**Câu 1.**

1) Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}. \text{ Chứng minh}$$

$$\frac{bc+1}{a^2+1} + \frac{ac+1}{b^2+1} + \frac{ba+1}{c^2+1} = 3.$$

2) Cho đa thức

$$P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+2022).$$

Khi khai triển đa thức  $P(x)$  ta được

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2021}x^{2021} + a_{2022}x^{2022}.$$

Tính giá trị của biểu thức

$$S = \frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021}}{a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2022}} - \frac{a_0}{2(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021})}.$$

**Lời giải.** 1) Ta có:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc} \Leftrightarrow ab + bc + ac = 1.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{bc+1}{a^2+1} &= \frac{bc+ab+bc+ac}{a^2+ab+bc+ac} = \frac{b(a+c)+c(a+b)}{(a+c)(a+b)} \\ &= \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c}. \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự:  $\frac{ac+1}{b^2+1} = \frac{a}{a+b} + \frac{c}{b+c}$

và  $\frac{ab+1}{c^2+1} = \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c}.$

Do đó:

$$\begin{aligned} \frac{bc+1}{a^2+1} + \frac{ac+1}{b^2+1} + \frac{ba+1}{c^2+1} &= \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b} \\ &\quad + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} \\ &= \left( \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} \right) + \left( \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+c} \right) \\ &\quad + \left( \frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} \right) \end{aligned}$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3.$$

Vậy  $\frac{bc+1}{a^2+1} + \frac{ac+1}{b^2+1} + \frac{ba+1}{c^2+1} = 3$  khi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc} \text{ và } a, b, c > 0.$$

2) Ta có:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2022}x^{2022} \\ &= (x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+2022) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(1) &= a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + \dots + a_{2022}1^{2022} \\ &= (1+1)(1+2)(1+3)\dots(1+2022) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2022} = 2023!$$

Lại có:

$$\begin{aligned} P(-1) &= a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + \dots + a_{2022}(-1)^{2022} \\ &= (-1+1)(-1+2)\dots(-1+2022) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{2022} = 0$$

$$\Rightarrow a_0 + a_2 + \dots + a_{2022} = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021}.$$

$$\text{Mà } a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2022} = 2023!$$

$$\Rightarrow a_0 + a_2 + \dots + a_{2022} = a_1 + a_3 + \dots + a_{2021} = \frac{2023!}{2}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} P(0) &= a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \dots + a_{2022} \cdot 0^{2022} \\ &= (0+1)(0+2)\dots(0+2022) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(0) = a_0 = 2022!$$

Do đó:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021}}{a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2022}} - \frac{a_0}{2(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021})} \\ &= 1 - \frac{2022!}{2 \cdot \frac{2023!}{2}} = 1 - \frac{2022!}{2023!} \\ &= 1 - \frac{1}{2023} = \frac{2022}{2023}. \end{aligned}$$

**Câu 2.** 1) Giải phương trình

$$(x+1)(3x+\sqrt{x+1}-3)=4\sqrt{x^3}-2.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x(y+1)+y=3 \\ \sqrt{5-2(x+y)}+\sqrt{2-x^2y^2}=2 \end{cases}$$

**Lời giải.**

1) Điều kiện xác định:  $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 3x^2+3x-3x-3+(x+1)\sqrt{x+1}=4x\sqrt{x}-2 \\ \Leftrightarrow & 3x^2-4x\sqrt{x}+x+(x+1)\sqrt{x+1}-(x+1)=0 \\ \Leftrightarrow & x(3x-4\sqrt{x}+1)+(x+1)(\sqrt{x+1}-1)=0 \\ \Leftrightarrow & x(3x-4\sqrt{x}+1)+\frac{(x+1)x}{\sqrt{x+1}+1}=0 \\ \Leftrightarrow & x\left(3x-4\sqrt{x}+1+\frac{(x+1)}{\sqrt{x+1}+1}\right)=0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x=0 \\ 3x-4\sqrt{x}+1+\frac{x+1}{\sqrt{x+1}+1}=0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta thấy:

$$\begin{aligned} 3x-4\sqrt{x}+1+\frac{x+1}{\sqrt{x+1}+1} &= 3x-4\sqrt{x}+\frac{x+2+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1} \\ &= 3\left(\sqrt{x}-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{x+2+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}-\frac{4}{3} \\ &= 3\left(\sqrt{x}-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{6x+4-2\sqrt{x+1}}{6(\sqrt{x+1}+1)} \\ &= 3\left(\sqrt{x}-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2+5x+2}{6(\sqrt{x+1}+1)} > 0. \end{aligned}$$

Ta thấy  $x=0$  thỏa mãn điều kiện. Vậy tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là  $x=0$ .

2) Điều kiện:  $\begin{cases} 5-2(x+y) \geq 0 \\ 2-x^2y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \leq \frac{5}{2} \\ x^2y^2 \leq 2 \end{cases}$

Kết hợp với phương trình đầu trong hệ ta được điều kiện  $\frac{1}{2} \leq xy \leq \sqrt{2}$ .

Từ phương trình

$$x(y+1)+y=3 \Leftrightarrow xy+x+y=3 \Leftrightarrow x+y=3-xy$$

thế vào phương trình

$$\sqrt{5-2(x+y)}+\sqrt{2-x^2y^2}=2$$

$$\text{ta được: } \sqrt{5-2(3-xy)}+\sqrt{2-x^2y^2}=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5-6+2xy}+\sqrt{2-x^2y^2}=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2xy-1}+\sqrt{2-x^2y^2}=2$$

$$\Leftrightarrow 4-2\sqrt{2xy-1}-2\sqrt{2-x^2y^2}=0$$

$$\Leftrightarrow (2xy-1-2\sqrt{2xy-1}+1)+(2-x^2y^2-2\sqrt{2-x^2y^2}+1)+(x^2y^2-2xy+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2xy-1}-1)^2+(\sqrt{2-x^2y^2}-1)^2+(xy-1)^2=0.$$

Với  $\frac{1}{2} \leq xy \leq \sqrt{2}$  thì  $\begin{cases} (\sqrt{2xy-1}-1)^2 \geq 0 \\ (\sqrt{2-x^2y^2}-1)^2 \geq 0 \\ (xy-1)^2 \geq 0 \end{cases}$

Do đó:

$$(\sqrt{2xy-1}-1)^2+(\sqrt{2-x^2y^2}-1)^2+(xy-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2xy-1}-1)^2=0 \\ (\sqrt{2-x^2y^2}-1)^2=0 \\ (xy-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2xy-1}=1 \\ \sqrt{2-x^2y^2}=1 \\ xy=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow xy=1.$$

Với  $xy=1$  kết hợp với  $x+y=3-xy$  ta được:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ (2-y)y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ (y-1)^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=1.$$

Ta thấy  $x=y=1$  thỏa mãn điều kiện. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là  $(x;y)=(1;1)$ .

**Câu 3.** 1) Tìm tất cả các số nguyên tố  $p, q$  sao

$$\text{cho } p^4 - q^2(p^2 + q^2 + 1) = (q^2 + 1)^2.$$

2) Cho  $m, n, p, q$  là các số nguyên thỏa mãn

$$(m + n + p + q) : 30.$$

Chứng minh rằng  $(m^5 + n^5 + p^5 + q^5) : 30.$

**Lời giải.** 1) Ta có:  $p^4 - q^2(p^2 + q^2 + 1) = (q^2 + 1)^2$

$$\Leftrightarrow p^4 - (q^2 + 1)^2 - q^2(p^2 + q^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (p^2 + q^2 + 1)(p^2 - q^2 - 1) - q^2(p^2 + q^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (p^2 + q^2 + 1)(p^2 - 2q^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (p^2 + q^2 + 1)(p^2 - 2q^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 2q^2 - 1 = 0 \text{ (do } p, q \text{ là các số nguyên tố)}$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 1 = 2q^2$$

$$\Leftrightarrow (p - 1)(p + 1) = 2q^2.$$

Nếu  $p = 2 \Rightarrow (2 - 1)(2 + 1) = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = \frac{3}{2}$  (loại

do  $q$  là số nguyên tố).

Nếu  $p \geq 3$  mà  $p$  nguyên tố thì  $p - 1$  và  $p + 1$  là các số chẵn, do đó:  $(p - 1)(p + 1) : 4$

$$\Rightarrow 2q^2 : 4 \Rightarrow q^2 : 2, \text{ mà } q \text{ nguyên tố} \Rightarrow q = 2.$$

Thay  $q = 2$  vào  $p^2 - 1 = 2q^2 \Rightarrow p^2 = 9 \Rightarrow p = 3$  thỏa mãn.

Vậy tất cả các nguyên tố  $p, q$  là  $\begin{cases} p = 3 \\ q = 2 \end{cases}$ .

2) Ta có:

$$m^5 - m = m(m^4 - 1) = m(m - 1)(m + 1)(m^2 + 1)$$

$$= m(m - 1)(m + 1)(m^2 + 1)$$

$$= m(m - 1)(m + 1)(m^2 - 4 + 5)$$

$$= m(m - 1)(m + 1)(m - 2)(m + 2) + 5m(m - 1)(m + 1).$$

Ta có  $m(m - 1)(m + 1)(m - 2)(m + 2)$  là tích của 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, 3 và 5.

$5m(m - 1)(m + 1)$  là tích của 5 và 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, 3 và 5.

Vì  $(2, 3) = 1$  và  $(5, 6) = 1$  nên

$$m(m - 1)(m + 1)(m - 2)(m + 2) : 30$$

$$\text{và } 5m(m - 1)(m + 1) : 30.$$

Do đó:

$$m(m - 1)(m + 1)(m - 2)(m + 2) + 5m(m - 1)(m + 1) : 30$$

$$\Rightarrow (m^5 - m) : 30.$$

Chứng minh tương tự ta được  $\begin{cases} n^5 - n : 30 \\ p^5 - p : 30. \\ q^5 - q : 30 \end{cases}$

$$\text{Do đó } (m^5 + n^5 + p^5 + q^5) - (m + n + p + q) : 30$$

mà  $(m + n + p + q) : 30$ , vậy

$$m^5 + n^5 + p^5 + q^5 : 30.$$

**Câu 4.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  với  $AB < AC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $BH$  và  $CQ$  là hai đường cao của tam giác  $ABC$ . Tiếp tuyến tại  $B$  và tại  $C$  của đường tròn  $(O)$  cắt nhau tại  $M$ . Đoạn thẳng  $OM$  cắt  $BC$  và cắt đường tròn  $(O)$  lần lượt tại  $N$  và  $D$ . Tia  $AD$  cắt  $BC$  tại  $F$ ;  $AM$  cắt  $BC$  tại  $E$  và cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai là  $K$  ( $K$  khác  $A$ ).

1) Chứng minh rằng:  $AB \cdot KC = AC \cdot KB$  và  $\widehat{ABM} = \widehat{AHN}$ .

2) Gọi  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AFN$ . Chứng minh  $\widehat{IOM} + \widehat{ADN} = 180^\circ$ .

3) Qua  $E$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $BC$  cắt  $QH$  tại  $G$ . Chứng minh ba điểm  $A, G, N$  thẳng hàng.

**Lời giải.** 1) Trong đường tròn  $(O)$  có  $\widehat{MBK} = \widehat{BAK}$  (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn  $\widehat{BK}$ ).

Xét  $\triangle MBK$  và  $\triangle MAB$  có:

$$\widehat{MBK} = \widehat{BAK} \text{ và chung } \widehat{BMK}$$

$$\Rightarrow \triangle MBK \text{ và } \triangle MAB \text{ đồng dạng}$$





giác có 3 đỉnh lấy từ 2023 điểm đã cho có diện

tích không vượt quá  $\frac{1}{4039}$  đơn vị.

2) Xét  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a + b + c \geq 3$ . Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu

$$\text{thức } Q = \frac{1}{a^2 + b + c} + \frac{1}{a + b^2 + c} + \frac{1}{a + b + c^2}.$$

**Lời giải.**

1) Nối các điểm trong 2023 điểm đã cho tạo thành các tam giác đôi một chỉ chung nhiều nhất một cạnh, phù vừa kín ngũ giác. Giả sử có  $n$  tam giác được tạo thành. Khi đó tổng tất cả các góc của  $n$  tam giác này là  $n.180^\circ$ .

Tổng trên có thể tính thông qua những tổng sau:

- Tổng các góc xung quanh một điểm trong ngũ giác là  $360^\circ$  mà có 2018 điểm trong ngũ giác nên tổng số đo các góc xung quanh 2018 điểm đó là  $2018.360^\circ$ .

- Tổng các góc trong của ngũ giác là  $3.180^\circ$ .

Do đó ta có:

$$n.180^\circ = 3.180^\circ + 2018.360^\circ \Rightarrow n = 4039.$$

Như vậy ta có 4039 tam giác đôi một chỉ chung nhiều nhất một cạnh tạo thành từ 2023 điểm phân biệt như đề bài phù kín hình ngũ giác. Vì diện tích của ngũ giác là 1 đơn vị nên luôn tồn tại một tam giác có diện tích không vượt quá  $\frac{1}{4039}$  đơn vị.

2) Ta có:  $x(y-1)^2 \geq 0$  với  $x, y > 0$

$$\Rightarrow xy^2 - 2xy + x \geq 0 \Rightarrow xy^2 + x \geq 2xy$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + xy^2 + x \geq (x+y)^2$$

$$\Rightarrow y^2(x+1) + x(x+1) \geq (x+y)^2$$

$$\Rightarrow (y^2 + x)(x+1) \geq (x+y)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2 + x} \leq \frac{x+1}{(x+y)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi  $y = 1$ .

$$\text{Vậy } \frac{1}{y^2 + x} \leq \frac{x+1}{(x+y)^2} (*) \text{ với } x, y > 0.$$

Áp dụng BĐT (\*) ta có:

$$\frac{1}{a^2 + b + c} \leq \frac{b+c+1}{(a+b+c)^2};$$

$$\frac{1}{a+b^2+c} \leq \frac{a+c+1}{(a+b+c)^2};$$

$$\frac{1}{a+b+c^2} \leq \frac{b+a+1}{(a+b+c)^2}.$$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta được:

$$Q = \frac{1}{a^2 + b + c} + \frac{1}{a + b^2 + c} + \frac{1}{a + b + c^2} \leq \frac{2(a+b+c)+3}{(a+b+c)^2}.$$

$$\text{Ta chứng minh: } \frac{2(a+b+c)+3}{(a+b+c)^2} \leq 1.$$

Thật vậy:

$$\frac{2(a+b+c)+3}{(a+b+c)^2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 - 2(a+b+c) - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c+1)(a+b+c-3) \geq 0$$

luôn đúng do  $a+b+c \geq 3$ . Suy ra:

$$Q = \frac{1}{a^2 + b + c} + \frac{1}{a + b^2 + c} + \frac{1}{a + b + c^2} \leq \frac{2(a+b+c)+3}{(a+b+c)^2} \leq 1.$$

Vậy  $\max Q = 1$  khi

$$\begin{cases} a+b+c-3=0 \\ a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1.$$

**TRẦN XUÂN ĐĂNG**

(5/7/136 Phan Đình Phùng, TP. Nam Định)

*Giới thiệu*

# ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH BẮC NINH

NĂM HỌC 2022 - 2023

MÔN THI: TOÁN

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 (4,0 điểm).

1) Cho biểu thức

$$P = \left( \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$$

với  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ ,  $x \neq \frac{1}{4}$ . Rút gọn biểu thức  $P$

và tìm giá trị của  $x$  để  $P = \frac{7}{3}$ .

2) Gọi  $A$  và  $B$  là giao điểm của đường thẳng  $d: y = -x + 2$  với parabol  $(P): y = x^2$ . Tính diện tích tam giác  $OAB$  ( $O$  là gốc tọa độ).

Câu 2 (4,0 điểm).

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5(2x - y) = 0 \\ x^2 - 2xy - 3y^2 + 15 = 0 \end{cases}$$

2) Giải phương trình

$$3\sqrt{4x+1} + 4x\sqrt{3x-2} = 3x^2 + 4x + 5.$$

Câu 3 (3,0 điểm).

1) Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn

$$y(x-1) = x^2 + 2.$$

2) Với mỗi số nguyên  $a$ , gọi  $x_1, x_2$  là các nghiệm của phương trình  $x^2 + 2ax - 1 = 0$ . Chứng minh  $(x_1^{2n} - x_2^{2n})(x_1^{4n} - x_2^{4n})$  chia hết cho 48 với mọi số tự nhiên  $n$ .

Câu 4 (6,0 điểm).

1) Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$ ,  $D$  là điểm bất kì thuộc cạnh  $BC$  ( $D$  khác  $B$  và  $C$ ). Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các

cạnh  $AB$  và  $AC$ . Đường thẳng  $MN$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $P, Q$  sao cho  $M$  nằm giữa  $P$  và

$N$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BDP$  cắt  $AB$  tại  $I$  (khác  $B$ ). Các đường thẳng  $DI$  và  $AC$  cắt nhau tại  $K$ .

a) Chứng minh  $\widehat{PID} = \widehat{PAC}$ . Từ đó suy ra 4 điểm  $A, I, P, K$  cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh  $\triangle PBD$  đồng dạng với  $\triangle PAK$  và  $\frac{QA}{QB} = \frac{PD}{PK}$ .

c) Đường thẳng  $CP$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BDP$  tại  $G$  (khác  $P$ ). Đường thẳng  $IG$  cắt đường thẳng  $BC$  tại  $E$ . Chứng minh khi  $D$  di chuyển trên đoạn  $BC$  thì tỉ số  $\frac{CD}{CE}$  không đổi.

2) Cho tứ giác nội tiếp  $ABCD$ . Chứng minh  $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ .

Câu 5 (3,0 điểm).

1) Cho 3 số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $1 \leq a \leq 3; 1 \leq b \leq 3; 1 \leq c \leq 3$  và  $a + b + c = 6$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $F = a^2 + b^2 + c^2$ .

2) Cho đa giác lồi  $A_1A_2 \dots A_{2024}$ . Tại mỗi đỉnh  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 2024$ ), người ta ghi một số thực  $a_k$  sao cho giá trị tuyệt đối của hiệu hai số trên hai đỉnh kề nhau bằng một số nguyên dương không lớn hơn 3. Tìm giá trị lớn nhất có thể được của giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số ghi trên mỗi cặp đỉnh của đa giác đã cho, biết rằng các số ghi tại các đỉnh đã cho đôi một khác nhau.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Yên Phong, Bắc Ninh)

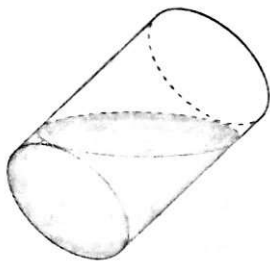
Giới thiệu



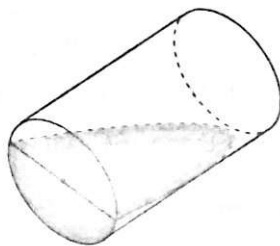
# MỘT ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

PHAN THẾ HẢI  
(GV CDSP Bà Rịa - Vũng Tàu)

Trong cuộc sống hàng ngày, ai ai trong chúng ta cũng đều phải uống nước. Thường thì nước sẽ được uống bằng ly (hay còn gọi là cốc). Có người sẽ uống hết ly nhưng cũng có người uống được một phần nước trong ly rồi dừng lại. Chẳng hạn, có một chiếc ly hình trụ chứa đầy nước, ta sẽ uống đi một phần nước và phần còn lại được thể hiện như trong hình 1 và hình 2 dưới đây.



Hình 1



Hình 2

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra ở đây là: Lượng nước còn lại trong các ly là bao nhiêu?

Đối với hình 1, vì nước còn lại trong ly vừa phủ trọn mặt đáy nên chúng ta dễ dàng suy ra được

phần nước này bằng  $\frac{1}{2}$  thể tích của ly. Tuy nhiên,

đối với phần nước trong ly như ở hình 2 thì việc đưa ra một con số chính xác là không dễ dàng, để tính được chính xác thể tích của nó, chúng ta cần phải dùng đến phép tính tích phân.

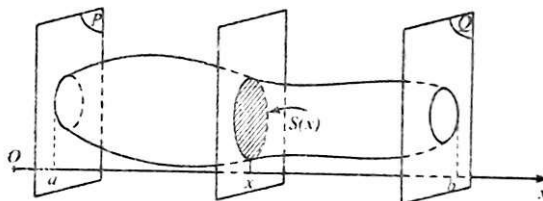
Trong bài viết này, chúng tôi sẽ đề cập về ứng dụng của phép tính tích phân để tính thể tích của nước trong một chiếc ly hình trụ khi chúng ta nghiêng chiếc ly ở các góc nghiêng khác nhau. Kết quả này nhằm đóng góp một phần nhỏ bé được thể hiện trong quan điểm khi xây dựng chương trình môn toán đối với Chương trình giáo

dục phổ thông 2018, đó là: *Chương trình môn toán chú trọng tính ứng dụng, gắn kết với thực tiễn hay các môn học, hoạt động giáo dục khác, đặc biệt với các môn học nhằm thực hiện giáo dục STEM, gắn với xu hướng phát triển hiện đại của kinh tế, khoa học, đời sống xã hội và những vấn đề cấp thiết có tính toàn cầu,...*

## 1. Nội dung

### 1.1. Công thức tính thể tích của một vật thể

Giả sử chúng ta cắt một vật thể  $T$  bởi hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  vuông góc với trục  $Ox$  lần lượt tại  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a < b$ ). Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với  $Ox$  tại điểm  $x$  ( $a \leq x \leq b$ ) cắt  $T$  theo thiết diện có diện tích là  $S(x)$  (xem hình 3).



Hình 3

Giả sử  $S(x)$  là một hàm số liên tục trên đoạn  $[a, b]$ , khi đó thể tích  $V$  của phần vật thể  $T$  giới hạn bởi hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  được tính theo

$$\text{công thức } V = \int_a^b S(x) dx.$$

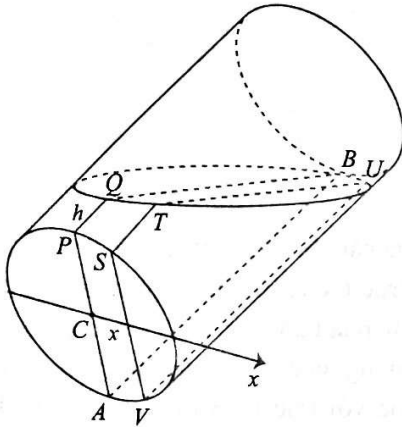
### 1.2. Tính thể tích còn lại của nước trong ly

Trong phần tiếp theo sau đây, chiếc ly được xem xét là chiếc ly thủy tinh hình trụ có bán kính đáy  $r$ , chiều cao  $L$  và tâm đáy là  $C$ . Giả sử chiếc ly được đổ đầy nước. Khi đó, thể tích của nước trong ly là  $V_0 = \pi r^2 L$ . Bây giờ, chúng ta sẽ đổ bớt nước ra ngoài trong các trường hợp cụ thể như sau:



**Trường hợp 1.** Chúng ta sẽ nghiêng chiếc ly sao cho phần nước còn lại trong ly có giao tuyến tạo bởi mặt nước và thành ly (không phải đáy ly) cách chu vi đáy ở chỗ gần nhất một khoảng là  $h$ . Khi đó, thể tích nước trong ly còn lại là bao nhiêu so với  $V_0$ ?

**Lời giải.**



Hình 4

Trước hết chúng ta chọn trục tọa độ  $Cx$ , (xem hình 4). Mặt phẳng  $PQBA$  là mặt phẳng vuông góc với trục  $Cx$  và đi qua tâm  $C$ . Bây giờ ta cắt khối nước theo một thiết diện vuông góc với trục  $Cx$  và đi qua điểm có hoành độ  $x$ , khi đó thiết diện là hình thang vuông  $STUV$  có chiều cao là  $SV$ . Nếu  $S(x)$  là diện tích của hình thang  $STUV$  thì thể tích của khối nước sẽ là  $V = \int_{-r}^r S(x)dx$ . Để tính diện

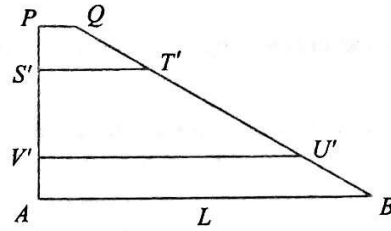
tích hình thang  $STUV$ , ta chiếu vuông góc hình thang này lên mặt phẳng chứa hình thang vuông  $PQBA$ . Gọi hình chiếu của hình thang  $STUV$  là hình thang  $S'T'U'V'$  (xem hình 5). Khi đó, ta có  $PQ=h$ ,  $AB=L$ ,  $PA=2r$ ,  $S'V'=SV=2\sqrt{r^2-x^2}$ , do đó:

$$PS' = V'A = \frac{1}{2}(PA - S'V') = \frac{1}{2}(2r - 2\sqrt{r^2 - x^2})$$

$$= r - \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{và } PV' = PA - V'A = 2r - (r - \sqrt{r^2 - x^2})$$

$$= r + \sqrt{r^2 - x^2}.$$



Hình 5

Lúc này ta có:

$$\frac{PS'}{PA} = \frac{r - \sqrt{r^2 - x^2}}{2r} \quad \text{và} \quad \frac{PV'}{PA} = \frac{r + \sqrt{r^2 - x^2}}{2r}.$$

Xét hình thang  $PQBA$  thì chúng ta dễ dàng chứng

$$\text{minh được: } ST = S'T' = h + (L - h) \frac{PS'}{PA}$$

$$= h + (L - h) \frac{r - \sqrt{r^2 - x^2}}{2r}$$

$$\text{và } VU = V'U' = h + (L - h) \frac{PV'}{PA}$$

$$= h + (L - h) \frac{r + \sqrt{r^2 - x^2}}{2r}.$$

$$\text{Do đó: } S(x) = \frac{1}{2} \cdot SV \cdot (ST + VU) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} \times$$

$$\times \left( h + (L - h) \frac{r - \sqrt{r^2 - x^2}}{2r} + h + (L - h) \frac{r + \sqrt{r^2 - x^2}}{2r} \right)$$

$$= (L + h) \sqrt{r^2 - x^2}. \text{ Vậy } V = \int_{-r}^r (L + h) \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$= (L + h) \left[ \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} \right]_{-r}^r$$

$$= \frac{\pi r^2 (L + h)}{2} = \frac{1}{2} V_0 + \frac{\pi r^2 h}{2}.$$

**Nhận xét.** Khi  $h = 0$  thì  $V = \frac{1}{2} V_0 + \frac{\pi r^2 \cdot 0}{2} = \frac{1}{2} V_0$ .

Đây chính là trường hợp nước trong ly như Hình 1 đã được đề cập ở phần đầu của bài viết này.

• Khi  $h = \frac{L}{3}$  thì

$$V = \frac{1}{2} V_0 + \frac{\pi r^2 h}{2} = \frac{1}{2} V_0 + \frac{\pi r^2 L}{6} = \frac{1}{2} V_0 + \frac{1}{6} V_0 = \frac{2}{3} V_0.$$

Đây là một kết quả bất ngờ và rất thú vị vì khi ta

ngiêng ly sao cho  $h$  bằng  $\frac{1}{3}$  chiều cao của ly, lúc đó lượng nước bị đổ ra ngoài đúng bằng  $\frac{1}{3}$  thể tích của ly.

• Khi  $h = L$  thì  $V = \frac{1}{2}V_0 + \frac{\pi r^2 L}{2} = V_0$ . Đây chính là lúc nước đang đầy ly.

• Trong lời giải nêu trên, chúng ta đã dùng một công cụ mạnh để giải quyết bài toán, đó là phép tính tích phân. Thực ra, trong trường hợp này, chúng ta có thể tính toán đơn giản hơn như sau.

Chúng ta sẽ chia hình trụ thành 2 phần. Phần 1 là hình trụ có chiều cao bằng  $h$  tính từ đáy lên. Phần 2 là phần hình trụ còn lại. Đối với phần 1 thì thể tích của nước sẽ là  $V_1 = \pi r^2 h$  (do phần này chứa đầy nước). Đối với phần 2 thì do nó có chiều cao là  $L - h$  và nước chiếm một nửa nên thể tích nước sẽ là  $V_2 = \frac{1}{2}\pi r^2(L - h)$ . Như vậy, thể tích nước

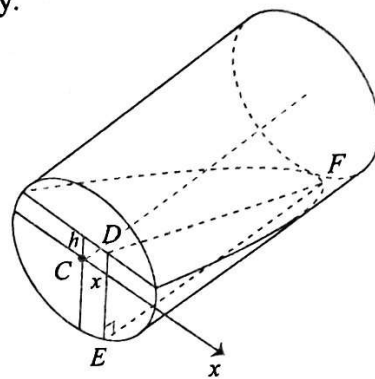
còn lại trong trường hợp 1 sẽ là  $V = V_1 + V_2 = \pi r^2 h + \frac{1}{2}\pi r^2(L - h) = \frac{\pi r^2(L + h)}{2}$ .

**Trường hợp 2.** Chúng ta sẽ nghiêng chiếc ly sao cho phần nước còn lại trong ly có giao tuyến tạo bởi mặt nước và đáy ly cách tâm  $C$  một khoảng là  $h$  về phía trên. Khi đó, thể tích nước trong ly còn lại là bao nhiêu so với  $V_0$ ?

**Lời giải:** Vẽ trục  $Cx$  song song với mặt nước khi nghiêng. Bây giờ ta cắt khối nước theo một thiết diện vuông góc với trục  $Cx$  và đi qua điểm có hoành độ  $x$  thì trong trường hợp này, vấn đề trở nên phức tạp hơn. Cụ thể là, trong đoạn  $[-\sqrt{r^2 - h^2}; \sqrt{r^2 - h^2}]$  trên trục  $Cx$  thì thiết diện là hình tam giác nhưng tại các đoạn  $[-r; -\sqrt{r^2 - h^2}]$  và  $[\sqrt{r^2 - h^2}; r]$  trên trục  $Cx$  thì thiết diện lại là hình thang.

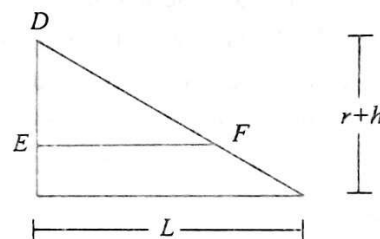
+ Trước hết, ta cần tính toán trong trường hợp thiết diện là hình tam giác, tức  $x \in [-\sqrt{r^2 - h^2}; \sqrt{r^2 - h^2}]$ .

Cũng lý luận như trường hợp 1, chúng ta chọn trục tọa độ  $Cx$  và một số thông tin khác như trong hình 6 dưới đây.



Hình 6

Bây giờ ta cắt khối nước theo một thiết diện vuông góc với trục  $Cx$  và đi qua điểm có hoành độ  $x$ , khi đó thiết diện là tam giác vuông  $DEF$  (vuông tại  $E$ ). Chiều vuông góc tam giác này lên mặt phẳng vuông góc với trục  $Cx$  và đi qua tâm  $C$ . Khi đó, các cạnh của tam giác  $DEF$  có quan hệ với  $L$ ,  $r$  và  $h$  được thể hiện như trong hình 7.



Hình 7

Vì  $\frac{DE}{r + h} = \frac{EF}{L}$  nên  $EF = \frac{L}{r + h} DE$ .

Do  $DE = \sqrt{r^2 - x^2} + h$  nên ta có diện tích của tam

giác  $DEF$  là:  $S(x) = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot EF = \frac{L}{2(r + h)} \cdot DE^2$

$$= \frac{L}{2(r + h)} \left[ (r^2 - x^2) + h^2 + 2h\sqrt{r^2 - x^2} \right].$$

$$\text{Vậy } V_1 = \int_{-\sqrt{r^2 - h^2}}^{\sqrt{r^2 - h^2}} S(x) dx = \frac{L}{2(r + h)} \left[ \int_{-\sqrt{r^2 - h^2}}^{\sqrt{r^2 - h^2}} (r^2 - x^2) dx + h^2 \int_{-\sqrt{r^2 - h^2}}^{\sqrt{r^2 - h^2}} dx + 2h \int_{-\sqrt{r^2 - h^2}}^{\sqrt{r^2 - h^2}} \sqrt{r^2 - x^2} dx \right]$$

Ta có:  $\int_{-\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-h^2}} (r^2-x^2) dx = 2 \int_0^{\sqrt{r^2-h^2}} (r^2-x^2) dx$

$$= 2 \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{r^2-h^2}}$$

$$= 2 \left[ r^2 \sqrt{r^2-h^2} - \frac{(r^2-h^2)\sqrt{r^2-h^2}}{3} \right]$$

$$= 2 \cdot \left[ \frac{2r^2\sqrt{r^2-h^2} + h^2\sqrt{r^2-h^2}}{3} \right]$$

$$\bullet h^2 \int_{-\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-h^2}} dx = [h^2 x]_{-\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-h^2}} = 2h^2 \sqrt{r^2-h^2}.$$

$$\bullet 2h \int_{-\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-h^2}} \sqrt{r^2-x^2} dx$$

$$= 2h \left[ \frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{r} \right]_{-\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-h^2}}$$

$$= 2h \left( \left[ \frac{h\sqrt{r^2-h^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r} \right] - \left[ \frac{-h\sqrt{r^2-h^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \cdot \arcsin \frac{-\sqrt{r^2-h^2}}{r} \right] \right)$$

$$= 2h \left( h\sqrt{r^2-h^2} + r^2 \arcsin \frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r} \right).$$

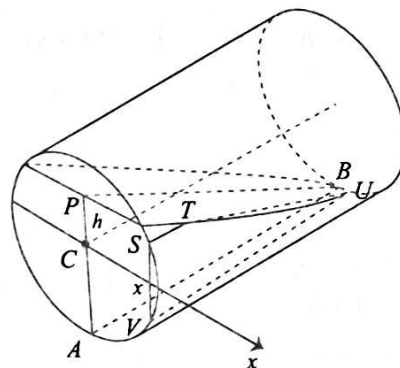
Do đó:  $V_1 = \frac{L}{2(r+h)} \left\{ 2 \left[ \frac{2r^2\sqrt{r^2-h^2} + h^2\sqrt{r^2-h^2}}{3} \right] + 2h^2\sqrt{r^2-h^2} + 2h \left( h\sqrt{r^2-h^2} + r^2 \arcsin \frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r} \right) \right\}$

$$= \frac{L}{r+h} \left[ \frac{2r^2\sqrt{r^2-h^2} + h^2\sqrt{r^2-h^2}}{3} + 2h^2\sqrt{r^2-h^2} + hr^2 \arcsin \frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r} \right]$$

$$= \frac{L}{r+h} \left[ \frac{2r^2\sqrt{r^2-h^2} + 7h^2\sqrt{r^2-h^2}}{3} + hr^2 \arcsin \frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r} \right].$$

+ Tiếp theo, chúng ta cần tính toán trong trường hợp thiết diện là hình thang, tức là  $x$  thuộc các đoạn  $[-r; -\sqrt{r^2-h^2}]$  và  $[\sqrt{r^2-h^2}; r]$ .

Cũng lý luận như trên, chúng ta chọn trục tọa độ  $Cx$  và một số thông tin khác như trong hình 8 dưới đây.

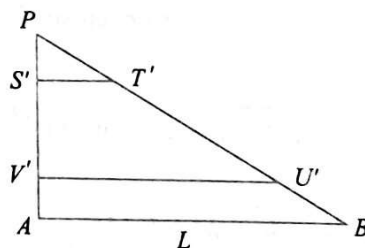


Hình 8

Mặt phẳng  $PAB$  là mặt phẳng vuông góc với trục  $Cx$  và đi qua tâm  $C$ . Khi chúng ta cắt khối nước theo một thiết diện vuông góc với trục  $Cx$  và đi qua điểm có hoành độ  $x$  mà  $x$  thuộc các đoạn  $[-r; -\sqrt{r^2-h^2}]$  và  $[\sqrt{r^2-h^2}; r]$  thì thiết diện là hình thang vuông  $STUV$  có chiều cao là  $SV$ .

Giả sử hình chiếu vuông góc của hình thang  $STUV$  lên mặt phẳng  $PAB$  là hình thang  $S'T'U'V'$  (xem hình 9). Khi đó, xét hai tam giác đồng dạng là

$$\Delta PS'T' \text{ và } \Delta PAB \text{ ta có: } \frac{PS'}{PA} = \frac{S'T'}{AB}$$



Hình 9

$$\Rightarrow ST = S'T' = \frac{AB \cdot PS'}{PA} = \frac{L(h - \sqrt{r^2-x^2})}{r+h}.$$

Một cách tương tự, ta có:  $\frac{PV'}{PA} = \frac{V'U'}{AB}$

$$\Rightarrow VU = V'U' = \frac{AB(PA - V'A)}{PA}$$

$$= \frac{L\left((r+h) - r + \sqrt{r^2 - x^2}\right)}{r+h} = \frac{L\left(h + \sqrt{r^2 - x^2}\right)}{r+h}.$$

Do đó:  $S(x) = \frac{1}{2} \cdot SV \cdot (ST + VU)$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} \left( \frac{L\left(h - \sqrt{r^2 - x^2}\right)}{r+h} + \frac{L\left(h + \sqrt{r^2 - x^2}\right)}{r+h} \right)$$

$$= \frac{2hL\sqrt{r^2 - x^2}}{r+h}. \text{ Vậy}$$

$$V_2 = 2 \int_{\sqrt{r^2 - h^2}}^r \frac{2hL\sqrt{r^2 - x^2}}{r+h} dx = \frac{4hL}{r+h} \int_{\sqrt{r^2 - h^2}}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$= \frac{4hL}{r+h} \left[ \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{r} \right]_{\sqrt{r^2 - h^2}}^r$$

$$= \frac{4hL}{r+h} \left( \frac{\pi r^2}{4} - \frac{h\sqrt{r^2 - h^2}}{2} - \frac{r^2}{2} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r} \right)$$

$$= \frac{L}{r+h} \left( h\pi r^2 - 2h^2\sqrt{r^2 - h^2} - 2hr^2 \arcsin \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r} \right).$$

Tóm lại, thể tích của khối nước trong trường hợp 2 này là

$$V = V_1 + V_2 = \frac{L}{r+h} \left[ \left( \frac{2r^2\sqrt{r^2 - h^2} + 7h^2\sqrt{r^2 - h^2}}{3} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + hr^2 \arcsin \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r} \right) + \left( h\pi r^2 - 2h^2\sqrt{r^2 - h^2} - 2hr^2 \arcsin \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r} \right) \right]$$

$$= \frac{L}{r+h} \left[ \frac{2r^2\sqrt{r^2 - h^2} + h^2\sqrt{r^2 - h^2}}{3} + \right.$$

$$\left. + h\pi r^2 - hr^2 \arcsin \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r} \right]$$

$$= \frac{L}{r+h} \left[ \sqrt{r^2 - h^2} \cdot \frac{2r^2 + h^2}{3} + hr^2 \left( \pi - \arcsin \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r} \right) \right].$$

### Nhận xét.

• Khi  $h=0$  thì  $V = \frac{2r^2L}{3} = \frac{2}{3\pi}V_0 \approx 0,21V_0$ . Đây

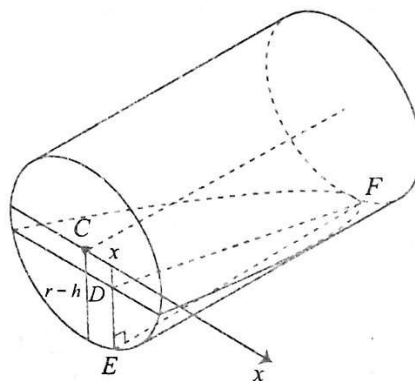
chính là trường hợp nước trong ly như Hình 2 đã được đề cập ở phần đầu của bài viết này.

• Khi  $h=r$  thì  $V = \frac{\pi r^2L}{2} = \frac{1}{2}V_0$ . Đây chính là

trường hợp nước trong ly như Hình 1 đã được đề cập ở phần đầu của bài viết và cũng đã được bình luận trong trường hợp 1 khi  $h=0$ .

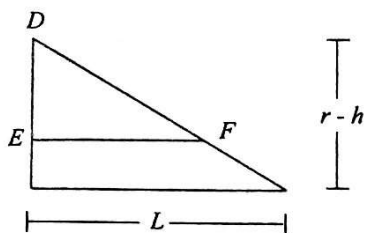
**Trường hợp 3:** Chúng ta sẽ nghiêng chiếc ly sao cho phần nước còn lại trong ly có giao tuyến tạo bởi mặt nước và đáy ly cách tâm  $C$  một khoảng là  $h$  về phía dưới (với điều kiện là  $h \neq r$ ). Khi đó, thể tích nước trong ly còn lại là bao nhiêu so với  $V_0$ ?

**Lời giải:** Chúng ta chọn trục tọa độ  $Cx$  và một số thông tin khác như trong hình 10 dưới đây.



Hình 10

Bây giờ ta cắt khối nước theo một thiết diện vuông góc với trục  $Cx$  và đi qua điểm có hoành độ  $x$ , khi đó thiết diện là tam giác vuông  $DEF$  (vuông tại  $E$ ). Chiều vuông góc tam giác này lên mặt phẳng vuông góc với trục  $Cx$  và đi qua tâm  $C$ . Khi đó, các cạnh của tam giác  $DEF$  có quan hệ với  $L$ ,  $r$  và  $h$  được thể hiện như trong hình 11.



Hình 11

Vì  $\frac{DE}{r-h} = \frac{EF}{L}$  nên  $EF = \frac{L}{r-h} DE$ .

Do  $DE = \sqrt{r^2 - x^2} - h$  nên ta có diện tích của tam giác DEF là:

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot EF = \frac{L}{2(r-h)} \cdot DE^2$$

$$= \frac{L}{2(r-h)} \left[ (r^2 - x^2) + h^2 - 2h\sqrt{r^2 - x^2} \right].$$

Vậy

$$V = \frac{L}{2(r-h)} \left[ \int_{-\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-h^2}} (r^2 - x^2) dx + h^2 \int_{-\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-h^2}} dx - 2h \int_{-\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-h^2}} \sqrt{r^2 - x^2} dx \right].$$

Ta có:

$$\bullet \int_{-\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-h^2}} (r^2 - x^2) dx = 2 \int_0^{\sqrt{r^2-h^2}} (r^2 - x^2) dx$$

$$= 2 \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{r^2-h^2}}$$

$$= 2 \left[ r^2 \sqrt{r^2-h^2} - \frac{(r^2-h^2)\sqrt{r^2-h^2}}{3} \right]$$

$$= 2 \cdot \left[ \frac{2r^2\sqrt{r^2-h^2} + h^2\sqrt{r^2-h^2}}{3} \right].$$

$$\bullet h^2 \int_{-\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-h^2}} dx = [h^2 x]_{-\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-h^2}} = 2h^2 \sqrt{r^2-h^2}.$$

$$\bullet -2h \int_{-\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-h^2}} \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$= -2h \left[ \frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{r} \right]_{-\sqrt{r^2-h^2}}^{\sqrt{r^2-h^2}}$$

$$= -2h \left[ \left( \frac{h\sqrt{r^2-h^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r} \right) - \left( -\frac{h\sqrt{r^2-h^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r} \right) \right]$$

$$= -2h \left( h\sqrt{r^2-h^2} + r^2 \arcsin \frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r} \right).$$

Do đó:

$$V = \frac{L}{2(r-h)} \left[ 2 \cdot \frac{2r^2\sqrt{r^2-h^2} + h^2\sqrt{r^2-h^2}}{3} + 2h^2\sqrt{r^2-h^2} - 2h \left( h\sqrt{r^2-h^2} + r^2 \arcsin \frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r} \right) \right]$$

$$= \frac{L}{r-h} \left[ \frac{2r^2\sqrt{r^2-h^2} + h^2\sqrt{r^2-h^2}}{3} - hr^2 \arcsin \frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r} \right].$$

**Nhận xét.** Khi  $h=0$  thì  $V = \frac{L}{r} \cdot \frac{2r^3}{3} = \frac{2r^2 L}{3}$

$= \frac{2}{3\pi} V_0 \approx 0,21 V_0$ . Đây chính là trường hợp nước trong ly như Hình 2 đã được đề cập ở phần đầu của bài viết này và cũng đã được bình luận trong trường hợp 2 khi  $h=0$ .

## 2. Kết luận

Qua các kết quả nêu trên, chúng ta thấy việc ứng dụng tích phân để nghiên cứu các bài toán thực tiễn là rất quan trọng và có ý nghĩa. Những nội dung nêu trên mới chỉ dừng lại ở việc dùng phép tính tích phân để tính thể tích còn lại của nước khi chúng ta nghiêng một chiếc ly hình trụ ở các góc nghiêng khác nhau. Chúng tôi hy vọng rằng, những nội dung trong bài viết sẽ là những gợi ý để độc giả có thể đồng hành cùng chúng tôi trong việc đưa toán học vào thực tiễn nhằm góp phần cải tạo thế giới này ngày một tốt hơn.





# TOÀN ÁNH, ĐƠN ÁNH, SONG ÁNH

## VỚI BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM CHỨA THAM SỐ

NGUYỄN VĂN MÊN  
(GV THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Kon Tum)

Phương trình hàm là một chủ đề khó và thường xuyên xuất hiện trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi cấp Tỉnh, trong các kỳ thi cấp Khu vực và học sinh giỏi cấp Quốc gia môn toán. Ta xét một bài tập cụ thể như sau:

**Bài 1.** Tìm tất cả các hàm số  $f$  xác định trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện

$$f(3x + f(y)) = 2x + f(x + y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Với đẳng thức hoàn toàn xác định như trên, học sinh hoàn toàn có thể xác định được nghiệm hàm của bài tập bằng kỹ thuật “thế triệt tiêu” thích hợp

là thay  $x$  bởi  $\frac{y - f(y)}{2}$ . Tuy nhiên để khai thác

sâu bài toán này, dưới góc độ của người giáo viên, có thể đặt ra câu hỏi “Bài toán có thể giải bằng kỹ thuật tương tự hay không nếu ta thay đổi một số hệ số trong đẳng thức hàm?” chẳng hạn, xét bài 2 sau:

**Bài 2.** Tìm tất cả giá trị thực của số  $a$  để tồn tại hàm số  $f$  xác định trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện

$$f(3x + f(y)) = 2x + af(x + y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Khi đó, tất cả học sinh đều nhận ra được với  $a = 1$  ta đã giải quyết được ở Bài 1. Với bài tập 2 này giáo viên cần hướng dẫn học sinh tìm các cách giải để trả lời cho các câu hỏi: “Còn giá trị  $a$  nào khác hay không để tồn tại nghiệm hàm thỏa mãn đẳng thức hàm?”, “Phải chăng mỗi giá trị của  $a$  ta có thể xác định được một hàm số tương ứng với nó?” hay “Có bao nhiêu hàm số như vậy ứng với

mỗi giá trị của  $a$ ?”, ... Trong bài viết này chúng tôi đưa ra một hướng giải phương trình hàm chứa tham số bằng cách sử dụng các tính chất của đơn ánh, toàn ánh và song ánh.

### I. BÀI TOÁN MỞ ĐẦU VỀ TOÀN ÁNH, ĐƠN ÁNH, SONG ÁNH

**1. Bài toán 1.** Cho hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện

$$f(A.f(x) + B.x + C) = D.x + E, \forall x \in \mathbb{R} \text{ với } D \neq 0.$$

Chứng minh rằng  $f$  là một toàn ánh.

**Chứng minh.** Với mọi số thực  $y$ , do  $D \neq 0$  nên

$$\text{tồn tại số thực } x = A.f\left(\frac{y - E}{D}\right) + B.\left(\frac{y - E}{D}\right) + C.$$

$$\text{Khi đó } f(x) = f\left(A.f\left(\frac{y - E}{D}\right) + B.\left(\frac{y - E}{D}\right) + C\right)$$

$$= D.\left(\frac{y - E}{D}\right) + E = y.$$

Vậy  $f$  là một toàn ánh.

**2. Bài toán 2.** Cho hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện

$$f(A.f(x) + B) = C.f(x) + D.x + E, \forall x \in \mathbb{R}$$

với  $D \neq 0$ . Chứng minh rằng  $f$  là một đơn ánh.

**Chứng minh.** Với mọi số thực  $x_1, x_2$  sao cho  $f(x_1) = f(x_2)$ . Khi đó:

$$\begin{aligned} C.f(x_1) + D.x_1 + E &= f(A.f(x_1) + B) \\ &= f(A.f(x_2) + B) = C.f(x_2) + D.x_2 + E \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Dx_1 = Dx_2.$$

Mà  $D \neq 0$  nên  $x_1 = x_2$  hay  $f$  là một đơn ánh.

**3. Bài toán 3.** Cho hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện

$$f(A.f(x) + B) = C.x + D, \forall x \in \mathbb{R} \text{ với } C \neq 0.$$

Chứng minh rằng  $f$  là một song ánh.

**Chứng minh.** Với mọi số thực  $x_1, x_2$  sao cho  $f(x_1) = f(x_2)$ . Khi đó:

$$\begin{aligned} Cx_1 + D &= f(A.f(x_1) + B) \\ &= f(A.f(x_2) + B) = Cx_2 + D \\ \Rightarrow Cx_1 &= Cx_2. \end{aligned}$$

Mà  $C \neq 0$  nên  $x_1 = x_2$  hay  $f$  là một đơn ánh.

Với mọi số thực  $y$ , do  $C \neq 0$  nên tồn tại số thực

$$x = A.f\left(\frac{y-D}{C}\right) + B. \text{ Khi đó}$$

$$f(x) = f\left(A.f\left(\frac{y-D}{C}\right) + B\right) = C.\left(\frac{y-D}{C}\right) + D = y.$$

Suy ra  $f$  là toàn ánh. Vậy  $f$  là song ánh.

**Nhận xét.** Việc nhận dạng được các tính chất đơn ánh, toàn ánh và song ánh của hàm số là đặc biệt quan trọng trong việc giải bài toán phương trình hàm. Qua ba bài toán trên bạn đọc nhận thấy, nếu một vế của đẳng thức hàm có chứa biến tự do  $x, y$  ở bên ngoài và vế còn lại không có thì thông thường  $f$  là hàm số có tính đơn ánh hoặc toàn ánh.

## II. SỬ DỤNG TÍNH TOÀN ÁNH, ĐƠN ÁNH, SONG ÁNH CỦA ÁNH XẠ GIẢI BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM CHỨA THAM SỐ.

**1. Sử dụng tính toàn ánh của ánh xạ giải bài toán phương trình hàm chứa tham số.**

Nếu  $f$  là một toàn ánh ta thường sử dụng các kỹ thuật sau để giải bài toán phương trình hàm:

- Sử dụng tính chất toàn ánh để xác định hàm số nhận giá trị đặc biệt nào đó là tồn tại, tức là phương trình (ẩn  $x$ )  $f(x) = y$  luôn có nghiệm.

- Biến đổi đẳng thức hàm để tạo ra

$$f(\phi(f(x))) = \phi(f(x)) \Rightarrow f(x) = \phi(\phi^{-1}(x))$$

(trong đó  $\phi(x)$  là một song ánh). Đặc biệt, ta thường sử dụng kết quả:

$$f(a.f(x) + b) = c.f(x) + d, \forall x \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$$\text{suy ra } f(x) = c.\frac{x-b}{a} + d, \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Thí dụ 1.** Tìm tất cả giá trị thực của  $a$  để tồn tại hàm số  $f$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn điều kiện

$$f(3x + f(y)) = 2x + af(x + y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1.1).$$

**Lời giải.** Trong (1.1) cho  $y = -x$ , ta có

$$f(3x + f(-x)) = 2x + af(0), \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên theo}$$

Bài toán 1 ta có  $f$  là một toàn ánh. Trong (1.1)

lại cho  $x = 0$  suy ra  $f(f(y)) = af(y), \forall y \in \mathbb{R}$ ,

kết hợp với  $f$  là một toàn ánh suy ra

$$f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Thử lại, ta thấy}$$

$$3ax + a^2y = 2x + a^2x + a^2y, \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ nên } a = 1 \text{ hoặc } a = 2.$$

Vậy với  $a = 1$  tồn tại hàm số  $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ ,

Với  $a = 2$  tồn tại hàm số  $f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Thí dụ 2.** Tìm tất cả giá trị thực của  $a$  để tồn tại duy nhất hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn

$$f(yf(x) + f(y)) = a.y + y.f(x) + f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1.2).$$

**Lời giải.** Trong (1.2) cho  $x = 0$  ta có:

$$f(yf(0) + f(y)) = a.y + y.f(0) + f(0), \forall y \in \mathbb{R} \quad (1.2.a).$$

Ta xét hai trường hợp:

**TH1:**  $f(0) = -a$ . Đẳng thức (1.2a) được viết lại:

$$f(-ay + f(y)) = -a; \forall y \in \mathbb{R} \quad (1.2b).$$

Từ (1.2b) cho  $y = 0$  ta có  $f(-a) = -a$ .

Trong (1.2) lại cho  $x = -a$  và kết hợp  $f(-a) = -a$  ta có:

$$f(-ay + f(y)) = f(-ay); \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1.2c).$$

Từ (1.2b) và (1.2c) suy ra  $f(-ay) = -a, \forall y \in \mathbb{R}$ .

Nếu  $a \neq 0$  ta có  $f(x) = -a, \forall x \in \mathbb{R}$ . Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn bài toán.

Nếu  $a = 0$  ta có  $f(0) = 0$  và từ (1.2b) ta cũng có  $f(f(y)) = 0; \forall y \in \mathbb{R}$ . Mặt khác, trong (1.2) ta thay  $x$  bởi  $f(x)$  và vận dụng  $f(f(y)) = 0; \forall y \in \mathbb{R}$  ta được:

$$f(f(x).y) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

nên  $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$  (vì nếu ngược lại có số thực

$c$  sao cho  $f(c) \neq 0$ , ta cho  $x = c; y = \frac{c}{f(c)}$  thì

$$0 = f\left(f(c) \cdot \frac{c}{f(c)}\right) = f(c) \text{ mâu thuẫn}.$$

Tóm lại, trong trường hợp 1 với mọi giá trị của  $a$  có duy nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là  $f(x) = -a, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**TH2:**  $f(0) \neq -a$ . Từ đẳng thức (1.2a) kết hợp  $f(0) \neq -a$  nên theo Bài toán 1 ta có  $f$  là một toàn ánh. Khi đó với  $y = 1$  đẳng thức (1.2) được viết lại

$$\begin{aligned} f(f(x) + f(1)) &= a + f(x) + f(x) \\ &= 2f(x) + a, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Mà  $f$  là một toàn ánh nên  $f(x) = 2x + b, \forall x \in \mathbb{R}$  với  $b = a - 2f(1)$ . Thử lại, ta thấy:

$$4xy + 2by + 4y + 3b = 4xy + (a+b)y + b, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

nên  $a = 4$  và  $b = 0$ .

Tóm lại, trong trường hợp 2 với  $a = 4$  thì có duy

nhất một hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là  $f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 4$  không tồn tại hàm số thỏa mãn.

Mặt khác ta nhận thấy  $f(x) = -a, \forall x \in \mathbb{R}$  là một nghiệm hàm của bài toán nên  $a \neq 4$  là tất cả giá trị cần tìm của bài toán.

## 2. Sử dụng tính đơn ánh của ánh xạ giải bài toán phương trình hàm chứa tham số

Khi  $f$  là một đơn ánh ta thường sử dụng các kỹ thuật biến đổi tạo ra biểu thức  $f(\phi(x)) = f(\phi(x)) \Rightarrow \phi(x) = \phi(x)$  để giải bài toán phương trình hàm.

**Thí dụ 3.** Tìm tất cả giá trị của  $a, b$  để tồn tại hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện:

$$f(xf(y) + a) + f(xy) = 2xy + b, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2.3).$$

**Lời giải.** Trong (2.3) cho  $x = 1$  ta được  $f(f(y) + a) + f(y) = 2y + b; \forall y \in \mathbb{R}$ , do đó theo Bài toán 2 ta có  $f$  là một đơn ánh.

Mặt khác, trong (2.3) khi hoán vị  $x$  và  $y$  ta được

$$f(yf(x) + a) + f(yx) = 2yx + b; \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2.3a).$$

Từ (2.3) và (2.3a) ta được  $f(xf(y) + a) = f(yf(x) + a), \forall x, y \in \mathbb{R}$ , mà  $f$  là một đơn ánh nên ta có:

$$xf(y) + a = yf(x) + a, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{hay } f(x) = f(1).x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại, ta thấy

$$f^2(1).xy + a.f(1) + f(1).xy = 2xy + b, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{cho nên } \begin{cases} f(1) = 1 \\ a = b \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} f(1) = -2 \\ -2a = b \end{cases}.$$

Vậy với  $a = b$  tồn tại hàm số  $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$  hoặc với  $-2a = b$  tồn tại hàm số  $f(x) = -2x, \forall x \in \mathbb{R}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Thí dụ 4.** Tìm tất cả giá trị của tham số  $a, b$  để tồn tại duy nhất hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn

$$f(f(x) + af(y)) = f(y) + 4x + b, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2.4).$$

**Lời giải.** Trong (2.4) cho  $y = 0$ , ta được:

$$f(f(x) + af(0)) = f(0) + 4x + b, \forall x \in \mathbb{R}$$

nên theo Bài toán 2 ta có  $f$  là một đơn ánh.

Trong (2.4) lại cho  $x = -\frac{b}{4}$ , ta có

$$f\left(f\left(-\frac{b}{4}\right) + af(y)\right) = f(y); \forall y \in \mathbb{R}, \text{ mà } f \text{ là}$$

một đơn ánh nên

$$f\left(-\frac{b}{4}\right) + af(y) = y; \forall y \in \mathbb{R}.$$

Do đó, ta nhận thấy  $a \neq 0$  và

$$f(y) = \frac{1}{a}y + c; \forall y \in \mathbb{R} \quad (\text{với } c = -\frac{1}{a}f\left(-\frac{b}{4}\right)).$$

Thử lại, ta thấy

$$\frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a}y + \frac{c}{a} + 2c = 4x + \frac{1}{a}y + c + b, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{nên } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ c = -b \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ c = \frac{b}{3} \end{cases}.$$

**Kết luận:**

- Với  $a = \frac{1}{2}, b \in \mathbb{R}$ , tồn tại duy nhất hàm số

$$f(x) = 2x + \frac{b}{3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Với  $a = -\frac{1}{2}, b \in \mathbb{R}$ , tồn tại duy nhất hàm số

$$f(x) = -2x - b, \forall x \in \mathbb{R}.$$

**3. Sử dụng tính song ánh của ánh xạ giải bài toán phương trình hàm chứa tham số**

Nếu  $f$  là một song ánh, để vận dụng tính chất này vào giải toán ta có thể chỉ sử dụng tính chất đơn ánh hoặc chỉ sử dụng tính chất toàn ánh của  $f$  như

trong mục II.1 và II.2 hoặc ta có thể kết hợp cả hai tính chất này một cách linh hoạt.

**Thí dụ 5.** Tìm tất cả giá trị của  $a$  để tồn tại hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(y) + x) = x.y + \frac{f(ax) + f(f(x))}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3.5).$$

**Lời giải.** Trong đẳng thức (3.5) cho  $x = 1$  ta có:

$$f(f(y) + 1) = y + \frac{f(a) + f(f(1))}{2}; \forall y \in \mathbb{R}$$

nên theo Bài toán 3 ta có  $f$  là một song ánh.

Trong (3.5) lại cho  $x = 0$  suy ra:

$$f(0) = \frac{f(0) + f(f(0))}{2} \quad \text{hay } f(0) = f(f(0)),$$

mà  $f$  là một đơn ánh nên suy ra  $f(0) = 0$ .

Vì  $f$  là một toàn ánh nên tồn tại số  $b$  sao cho  $f(b) = a - 1$  và thực hiện thế  $y = b$  vào đẳng thức (3.5) ta có:

$$f(ax) = x.b + \frac{f(ax) + f(f(x))}{2}; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{hay } f(f(x)) = f(ax) - 2bx, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó, đẳng thức (3.5) được viết lại

$$f(xf(y) + x) = x.y + f(ax) - bx; \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3.5a).$$

Trong (3.5a) cho  $y = 0$  suy ra

$$f(x) = f(ax) - bx, \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.5b).$$

Mặt khác,  $f$  là một toàn ánh nên tồn tại số  $c$  sao cho  $f(c) = -1$ . Trong (3.5a) cho  $y = c$  vận dụng

$f(0) = 0$  ta được

$$0 = x.c + f(ax) - bx; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{hay } f(ax) = (b - c).x; \forall x \in \mathbb{R}$$

Kết hợp với (3.5b) suy ra  $f(x) = -cx; \forall x \in \mathbb{R}.$

Thử lại, ta thấy:

$$c^2xy - cx = x.y + \frac{-a.c.x + c^2x}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{nên } \begin{cases} c=1 \\ a=3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} c=-1 \\ a=1 \end{cases}.$$

Vậy với  $a=1$  tồn tại hàm số  $f(x)=x, \forall x \in \mathbb{R}$  hoặc với  $a=3$  tồn tại hàm số  $f(x)=-x, \forall x \in \mathbb{R}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Thí dụ 6.** Với hai số thực  $a, b$ , xét hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(y)+x) = axy + f(bx), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3.6).$$

Tìm tất cả giá trị của  $a$  và  $b$  để tồn tại hàm số  $f$  thỏa mãn bài toán.

**Lời giải.** Rõ ràng ta nhận thấy với  $a=0$  tồn tại hàm số  $f(x)=0$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do đó ta chỉ cần xét  $a \neq 0$ .

Trong (3.6) cho  $x=1$  ta được  $f(f(y)+1) = ay + f(b), \forall y \in \mathbb{R}$  nên theo Bài toán 3 có  $f$  là một song ánh.

Trong (3.6) lại cho  $x=1$  và  $y=0$  ta được  $f(f(0)+1) = f(b)$ , kết hợp với  $f$  là một đơn ánh nên có  $b = f(0)+1$ .

Bây giờ với mọi số thực  $x$  khác 0, ta thay  $y$  bởi  $\frac{f(0)-f(bx)}{ax}$  ta được:

$$f\left(xf\left(\frac{f(0)-f(bx)}{ax}\right)+x\right) = f(0)$$

$$\text{suy ra: } xf\left(\frac{f(0)-f(bx)}{ax}\right)+x = 0,$$

$$\text{tức là } f\left(\frac{f(0)-f(bx)}{ax}\right) = -1 = f(c)$$

(do  $f$  là toàn ánh nên tồn tại số  $c$  thỏa mãn  $f(c) = -1$ ). Từ đó:

$$f(bx) = f(0) - a.c.x, \forall x \neq 0 \quad (3.6a).$$

Mặt khác đẳng thức (3.6a) vẫn đúng với  $x=0$  nên

$$f(bx) = f(0) - a.c.x, \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.6b).$$

Đến đây, ta sẽ chứng minh hàm số  $f$  luôn có dạng  $f(x) = A.x + f(0)$  trong hai trường hợp  $b=0$  và  $b \neq 0$ .

**TH1:**  $b \neq 0$ . Rõ ràng từ (3.6b) suy ra:

$$f(x) = -\frac{a.c}{b}.x + f(0), \forall x \in \mathbb{R} \text{ hay } f \text{ có dạng}$$

$$f(x) = A.x + f(0).$$

**TH2:**  $b=0$ . Từ (3.6b) suy ra  $c=0$  hay  $f(0) = -1$ . Đẳng thức (3.6) được viết lại:

$$f(xf(y)+x) = axy - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vì  $f$  là một toàn ánh nên tồn tại số  $d$  sao cho  $f(d) = 0$ . Khi đó với  $y=d$  ta được  $f(x) = a.d.x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$  hay  $f$  có dạng  $f(x) = A.x + f(0)$ . Do đó, khẳng định trên được chứng minh.

Thử lại, ta có:

$$A^2xy + Ax f(0) + Ax + f(0) = axy + Abx + f(0), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{nên } \begin{cases} A^2 = a \\ A.f(0) + A = A.b \end{cases}.$$

Do đó để tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán thì  $a > 0$ .

**Kết luận.**

Với  $a=0, b \in \mathbb{R}$  tồn tại hàm số  $f(x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với  $a > 0, b \in \mathbb{R}$  tồn tại hàm số  $f(x) = \sqrt{a}.x + b - 1, \forall x \in \mathbb{R}$  hoặc  $f(x) = -\sqrt{a}.x + b - 1, \forall x \in \mathbb{R}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

#### 4. Bài tập tổng hợp

**Bài 1.** Có hay không số thực  $a$  để tồn tại hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn

$$f(xf(y) + 2f(x)) = af(x) - xy, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$



**Hướng dẫn giải.** Giả sử tồn tại số  $a$  và tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Trong (4.1) cho  $x=1$  ta có  $f(f(y)+2f(1))=af(1)-y$  nên theo Bài toán 3 dễ thấy  $f$  là một song ánh.

Vì  $f$  là một song ánh nên tồn tại số  $u$  sao cho  $f(u)=0$ . Khi đó, trong (4.1) với  $x=y=u$  ta có  $f(0)=-u^2$ . Trong (4.1) lại cho  $x=u, y=0$  thì

$$f(-u^3)=0=f(u)$$

suy ra  $-u^3=u$  hay  $u=0$  hay  $f(0)=0$ .

Khi đó, trong (4.1) cho  $y=0$  ta được:

$$f(2f(x))=af(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mà  $f$  là một toàn ánh nên  $f(x)=\frac{a}{2}x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Thử lại, ta thấy  $\frac{a^2}{4}=-1$  (vô nghiệm).

Vậy không tồn tại số thực  $a$  để tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Bài 2.** Xác định tất cả các giá trị của  $a$  để tồn tại hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện

$$f(f(x)+y)=ax+f(f(y)-x), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4.2).$$

**Hướng dẫn giải.**

Ta thấy, nếu  $a=0$  thì tồn tại hàm số  $f(x) \equiv 0$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do đó ta chỉ cần xét  $a \neq 0$ .

Rõ ràng, ta thấy với  $a \neq 0$  ta nhận thấy nếu  $f$  là một đơn ánh thì bằng cách cho  $x=0$  vào trong (4.2) ta được  $f(f(0)+y)=f(f(y))$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$  nên  $f(y)=y+f(0)$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ . Vấn đề còn lại ta cần chứng minh  $f$  là một đơn ánh.

Trước hết ta dễ nhận thấy  $f$  là một toàn ánh. Thật vậy, trong (4.2) thay  $y$  bởi  $-f(x)$  ta được

$$f(0)=ax+f(f(-f(x))-x), \forall x \in \mathbb{R}$$

nên theo Bài toán 1 khẳng định  $f$  là một toàn ánh. Bây giờ, giả sử tồn tại hai số  $p, q$  sao cho  $f(p)=f(q)$  ta có:

$$\begin{aligned} f(f(x)+p) &= ax+f(f(p)-x) \\ &= ax+f(f(q)-x) = f(f(x)+q). \end{aligned}$$

Mà  $f$  là một toàn ánh nên

$$f(x+p)=f(x+q), \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.2a).$$

Mặt khác (4.2) được viết lại:

$$ax=f(f(x)+y)-f(f(y)-x), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4.2b).$$

Khi đó, vận dụng (4.2b) lần lượt với  $x=p, x=q$  và kết hợp (4.2a) ta được:

$$\begin{aligned} a.p &= f(f(p)+y)-f(f(y)-p) \\ &= f(f(q)+y)-f(f(y)-(p+q)+q) \\ &= f(f(q)+y)-f(f(y)-(p+q)+p) \\ &= f(f(q)+y)-f(f(y)-q)=a.q. \end{aligned}$$

Do đó  $p=q$ , hay  $f$  là một đơn ánh. Vậy theo nhận xét ban đầu ta thấy  $f(x)=x+b, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Thử lại, ta thấy  $a=2$ .

Vậy với  $a=0$  hoặc  $a=2$  thì tồn tại hàm số  $f$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Bài 3.** Với hai số thực  $a, b$ , xét hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện

$$f((a+x)f(y))=yf(f(x)+b), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4.3).$$

Giai và biện luận theo  $a$  và  $b$  nghiệm hàm  $f$  thỏa mãn bài toán.

**Hướng dẫn giải.** Nhận thấy bài toán có dạng trong Bài toán 3 nên ý tưởng ta đi chứng minh tính đơn ánh hoặc toàn ánh của hàm số.

Nhận xét rằng nếu  $f$  là đơn ánh thì bài toán trở nên dễ dàng. Thật vậy, nếu điều đó xảy ra, với mọi số thực  $x$  ta cho  $y=1$  đẳng thức (4.3) được viết lại:  $f((a+x)f(1))=f(f(x)+b), \forall x \in \mathbb{R}$ .

Kết hợp với  $f$  là một đơn ánh ta có:

$$(a+x)f(1) = f(x) + b, \forall x \in \mathbb{R}.$$

hay  $f(x) = f(1).x + a.f(1) - b, \forall x \in \mathbb{R}.$

Mặt khác với  $x=1$  suy ra  $a.f(1) - b = 0$  do đó ta có  $f(x) = A.x, \forall x \in \mathbb{R}.$  Thử lại, ta thấy

$$A^2(a+x).y = y(A^2x + A.b), \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ nên suy ra}$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ A.a = b \end{cases}$$

Vấn đề còn lại ta xét  $f$  không phải là đơn ánh, tức là tồn tại hai số thực  $x_1, x_2, x_1 \neq x_2$  sao cho  $f(x_1) = f(x_2)$  ta đi chứng minh  $f$  là hàm đồng nhất 0. Đúng vậy, trong (4.3) lần lượt thay  $y$  bởi  $x_1$  và  $x_2$  ta được

$$x_1.f(f(x) + b) = x_2.f(f(x) + b), \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó  $f(f(x) + b) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$  nên đẳng thức (4.3) được viết lại:

$$f((a+x)f(y)) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4.3a).$$

Rõ ràng chỉ có hàm số  $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện (4.3a) vì nếu ngược lại nếu có  $f(y_0) \neq 0$  ta có thể thay  $x = \frac{y_0}{f(y_0)} - a$  và

$y = y_0$  dẫn đến:

$$0 = f\left(\left(\frac{y_0}{f(y_0)}\right).f(y_0)\right) = f(y_0), \text{ mâu thuẫn.}$$

Quay lại Nhận xét của bài toán ta có thể kết luận:

- Với  $\begin{cases} a=0 \\ b \neq 0 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} a \neq 0 \\ b=0 \end{cases}$  có duy nhất hàm số

$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$  thỏa mãn bài toán.

- Với  $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$  nghiệm hàm của bài toán có dạng

$f(x) = A.x, \forall x \in \mathbb{R}$ , với số thực  $A$  tùy ý.

- Với  $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$  có đúng hai nghiệm hàm của bài

toán là  $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $f(x) = \frac{b}{a}.x, \forall x \in \mathbb{R}.$

**Bài 4.** Với hai số thực  $a, b$ , xét hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện

$$f(x-y+af(x)) + f(x)f(y) = xy + b, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

Tìm tất cả giá trị của  $a$  và  $b$  để tồn tại duy nhất nghiệm hàm  $f$  thỏa mãn bài toán.

**Hướng dẫn giải.**

Nhận thấy bài toán có  $x, y$  tự do nằm ngoài  $f$  đưa ra cho ta ý tưởng chứng minh tính đơn ánh, toàn ánh của hàm số. Mặt khác, ta thấy biểu thức  $y-x+af(y)$  là biểu thức không đối xứng giữa hai biến  $x$  và  $y$  còn về phải là biểu thức đối xứng giữa chúng nên khi hoán đổi vai trò của  $x, y$  ta được đẳng thức

$$f(x-y+af(x)) = f(y-x+af(y)).$$

Từ đó, nếu  $f$  là đơn ánh ta có:

$$x-y+af(x) = y-x+af(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đến đây, ta có thể dễ dàng xác định được hàm số  $f$  thỏa mãn bài toán.

Ta bắt đầu đi chứng minh  $f$  đơn ánh bằng việc giả sử ngược lại nếu có hai số  $x_1, x_2$  với  $x_1 \neq x_2$  sao cho  $f(x_1) = f(x_2).$

Trong (4.4) lần lượt cho  $x=y=x_1$  và  $x=y=x_2$  suy ra  $f(af(x_1)) + f^2(x_1) = x_1^2 + b$  và  $f(af(x_2)) + f^2(x_2) = x_2^2 + b$  nên  $x_1^2 + b = x_2^2 + b.$

Do đó  $x_1 = -x_2 \neq 0$ . Mặt khác, trong (4.4) thay  $y = af(x)$  ta có:

$$f(x) + f(x)f(af(x)) = xaf(x) + b, \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.4.a).$$

Trong (4.4a) thay  $x$  lần lượt bởi  $x_1$  và  $x_2$  và so sánh hai vế của chúng ta được:

$$a.x_2.f(x_2) = a.x_1.f(x_1).$$

Do đó  $f(x_1) = f(x_2) = 0$  hoặc  $a = 0$ .

Ta đi chứng minh trong hai trường hợp này đều không có hàm số thỏa mãn bài toán. Thật vậy

**TH1:**  $a = 0$ . Đẳng thức (4.4) được viết lại:

$$f(x-y) + f(x)f(y) = xy + b; \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4.4b)$$

Trong (4.4b) cho  $y = 0$  ta có

$$f(x) + f(x)f(0) = b \text{ và vì hàm số hằng}$$

$f(x) = C$  không là nghiệm hàm của bài toán nên

$$f(0) = -1 \text{ và } b = 0.$$

Trong (4.4b) lại cho  $x = 0$  ta được:

$$f(-y) + f(0)f(y) = b; \forall y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với  $f(0) = -1$  và  $b = 0$  ta được

$$f(-y) = f(y); \forall y \in \mathbb{R} \text{ hay } f \text{ là hàm số chẵn.}$$

Trong (4.4b) thay  $y$  bởi  $-y$  và kết hợp  $f$  hàm số chẵn ta được:

$$f(x-y) - xy = f(x+y) + xy, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4.4c).$$

Trong (4.4c) thay  $x, y$  bởi  $\frac{x}{2}$  ta được

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} - 1, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Thử lại ta thấy hàm số}$$

này không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**TH2:**  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ . Trong (4.4) cho  $x = x_1$  ta có:

$$f(x_1 - y) = x_1.y + b; \forall y \in \mathbb{R} \quad (4.4d).$$

Trong (4.4d), nếu cho  $y = 0$  suy ra  $b = 0$ , và nếu

thay  $y = x_1 - x_2$  suy ra  $x_1.(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ ,

mâu thuẫn. Do đó, đẳng thức (4.4d) cũng không thể xảy ra.

Vậy điều giả sử là không đúng hay  $f$  là một đơn ánh. Quay lại bài toán ta có được kết quả:

$$x - y + af(x) = y - x + af(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Rõ ràng với đẳng thức trên thì  $a \neq 0$  và

$$f(x) = -\frac{2}{a}x + f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại, ta có  $\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}$ .

**Kết luận:**

- Với  $a = 2$  và  $b = 0$  tồn tại duy nhất hàm số

$$f(x) = -x + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Với  $a = -2$  và  $b = 0$  tồn tại duy nhất hàm số

$$f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

## 5. Bài tập tự luyện

1. Tìm tất cả giá trị của tham số  $a$  để tồn tại hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(y) - 1) + f(xy) = a.xy - 1; \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Tìm tất cả giá trị của tham số  $a$  để tồn tại duy nhất hàm số  $f$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn điều kiện

$$f(y + f(x).f(y)) = f(y - x + a) + y.f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Với số thực  $a$ , cho hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(y) + x) + a = xy + f(f(x)), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Tìm tất cả giá trị của  $a$  để tồn tại hàm số  $f$  thỏa mãn bài toán.

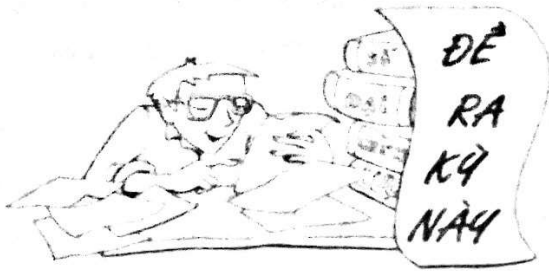
4. Tìm tất cả các giá trị của  $a$  để tồn tại duy nhất một hàm số  $f$  xác định trên tập số thực  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn điều kiện

$$f(x + f(y)) = a + x + f(y) + xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

5. Với số thực  $a$  tùy ý. Cho hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(x) + f(x) + f(y)) = f^2(x) + 4y + a, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải và biện luận theo  $a$  nghiệm hàm thỏa mãn đẳng thức đã cho.



### CÁC LỚP THCS

**Bài T1/553 (Lớp 6).** Cho 625 số nguyên dương 1, 2, 3, ..., 625 ta chọn ra 312 số sao cho không có hai số nào có tổng bằng 625. Chứng minh trong 312 số được chọn bao giờ cũng có ít nhất hai số chính phương.

NGUYỄN ĐỨC TÂN  
(TP. Hồ Chí Minh)

**Bài T2/553 (Lớp 7).** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{BAC} = 15^\circ$ ,  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Đặt  $AB = a$ . Tính  $BC$ ,  $CA$  theo  $a$ .

CAO NGỌC TOÀN  
(GV THCS Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

**Bài T3/553.** Cho tập  $A = \{1, 2, \dots, 2023\}$ . Hỏi có thể chọn ra nhiều nhất bao nhiêu phần tử của  $A$  sao cho trong những phần tử được chọn ra không tồn tại ba phần tử  $a, b, c$  mà  $a - b$  chia hết cho  $c$ ?

NGUYỄN TIẾN LÂM  
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

**Bài T4/553.** Cho tam giác  $ABC$  ( $BC > CA > AB$ ). Trên hai tia  $BC$  và  $CB$  lần lượt lấy hai điểm  $D$  và  $M$  sao cho  $BD = CM = AB$ . Trên hai tia  $CA$  và  $AC$  lần lượt lấy hai điểm  $E$  và  $N$  sao cho  $CE = AN = BC$ . Trên hai tia  $AB$  và  $BA$  lần lượt lấy hai điểm  $F$  và  $P$  sao cho  $AF = BP = CA$ . Chứng minh

a)  $S_{DEF} = S_{MNP}$ ;

b)  $S_{DEF} > S_{ABC}$ .

LỤC BÌNH  
(GV Trường Trưng Vương, TP. Đông Hà, Quảng Trị)

**Bài T5/553.** Giải phương trình

$$(4x^2 + x - 1)\sqrt{x^2 + x + 2} - (5x^2 + 3x + 4)\sqrt{x^2 - 1} = 0.$$

ĐOÀN CÁT NHƠN  
(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

### CÁC LỚP THPT

**Bài T6/553.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{b^2 \sqrt{(a^2 + 3ab + b^2)^3}} + \frac{b^5}{c^2 \sqrt{(b^2 + 3bc + c^2)^3}} + \frac{c^5}{a^2 \sqrt{(c^2 + 3ca + a^2)^3}} \geq \frac{3}{5\sqrt{5}}.$$

NGÔ VĂN THÁI  
(Thái Bình)

**Bài T7/553.** Cho  $x$  là số nguyên lớn hơn 1 và  $a, b \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh hệ phương trình

$$\begin{cases} x+1=5^a \\ 1+x^2+x^4+\dots+x^{2m-2}=5^b \end{cases}$$

vô nghiệm với  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ .

NGUYỄN VĂN LƯƠNG  
(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

**Bài T8/553.** Cho tam giác  $ABC$  có độ dài các cạnh  $BC, CA, AB$  lần lượt là  $a, b, c$ . Gọi  $l_a, l_b, l_c$  lần lượt là độ dài các đường phân giác trong kẻ từ các đỉnh  $A, B, C$  của tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{l_b l_c} + \frac{b^2}{l_c l_a} + \frac{c^2}{l_a l_b} \geq 4.$$

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG  
(GV THPT Khoa học Giáo dục, Đại học Giáo dục, ĐHQG Hà Nội)

**Bài T9/553.** Tìm số dương  $k$  lớn nhất sao cho

$$a^2 + b^2 + c^2 + k(a+b+c) \geq 3 + k(ab+bc+ca)$$

với mọi số dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $abc = 1$ .

LEONARD GIUGIUC – DANIEL SITARU  
(Romania)

### TIỀN TỚI OLYMPIC TOÁN

**Bài T10/553.** Chứng minh rằng

$$2^{2n} \mid \varphi(2^{2^{n-1}} + 1), \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4,$$

trong đó  $\varphi(m)$  là số các số nguyên dương không vượt quá  $m$  và nguyên tố cùng nhau với  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ .

NGUYỄN TUẤN NGỌC  
(GV THPT chuyên Tiền Giang, Tiền Giang)

Bài T11/553. Tìm hàm  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  thỏa mãn:

$$xf(f(x+y)) = xf(y) + \frac{1}{f(x)}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

NGUYỄN HỮU BÌNH

(SV lớp K52A1S, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T12/553. Cho tam giác  $ABC$ ,  $O$ ,  $H$  theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác.  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  theo thứ tự là giao điểm của  $AH$ ,  $BH$ ,  $CH$  và  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ .  $A_1$  là giao điểm của đường thẳng qua  $B$  song song với  $A_0B_0$  và đường thẳng qua  $C$  song song với  $A_0C_0$ .  $A_2$  là trung điểm của  $AA_1$ . Các điểm  $B_2$ ,  $C_2$  được xác định tương tự. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $A_2B_2C_2$  thuộc  $OH$ .

NGUYỄN MINH HÀ

(Hà Nội)

Bài L1/553. Trên mặt thoáng của chất lỏng, tại hai điểm  $A$  và  $B$  cách nhau 20 cm, người ta bố trí hai nguồn đồng bộ có tần số 20 Hz. Tốc độ truyền

song trên mặt thoáng chất lỏng  $v = 50$  cm/s. Hình vuông  $ABCD$  nằm trên mặt thoáng chất lỏng.  $I$  là trung điểm của đoạn  $CD$ ,  $M$  là điểm nằm trên  $CD$  gần  $I$  nhất dao động với biên độ cực đại. Tính khoảng cách từ  $M$  đến  $I$ .

VIỆT CƯỜNG (Hà Nội)

Bài L2/553. Điện năng được truyền từ nơi phát đến một xưởng sản xuất bằng đường dây một pha với hiệu suất truyền tải là 90%. Ban đầu xưởng sản xuất này có 90 máy hoạt động, vì muốn mở rộng quy mô sản xuất nên xưởng đã nhập về thêm một số máy. Hiệu suất truyền tải lúc sau khi có thêm các máy mới cùng hoạt động giảm đi 10% so với ban đầu. Coi hao phí điện năng chỉ do tỏa nhiệt trên đường dây, công suất tiêu thụ điện của các máy hoạt động (kể cả các máy mới nhập về) đều như nhau và hệ số công suất đều bằng 1. Nếu giữ nguyên công suất điện nơi phát thì số máy nhập về là bao nhiêu?

THANH LÂM (Hà Nội)

## PROBLEMS IN THIS ISSUE

### FOR SECONDARY SCHOOL

**Problem T1/553** (For 6<sup>th</sup> grade). Choosing 312 numbers from 1, 2, 3, ..., 625 so that no two numbers have their sum equal to 625. Show that, among 312 chosen numbers, there are at least two perfect squares.

**Problem T2/553** (For 7<sup>th</sup> grade). Given a triangle  $ABC$  with  $\widehat{BAC} = 15^\circ$ ,  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Assume that  $AB = a$ . Compute  $BC$ ,  $CA$  in terms of  $a$ .

**Problem T3/553.** Consider the set  $A = \{1, 2, \dots, 2023\}$ . What is the maximum number of elements we can choose from  $A$  so that among the chosen numbers there do not exist 3 numbers  $a, b, c$  with  $a - b$  is divisible by  $c$ ?

**Problem T4/553.** Given a triangle  $ABC$  with  $BC > CA > AB$ . On the rays  $BC$  and  $CB$  choose two points  $D$  and  $M$  respectively so that  $BD = CM = AB$ . On the rays  $CA$  and  $AC$  choose

two points  $E$  and  $N$  respectively so that  $CE = AN = BC$ . On the rays  $AB$  and  $BA$  choose two points  $F$  and  $P$  respectively so that  $AF = BP = CA$ . Prove that

a)  $S_{DEF} = S_{MNP}$ ;

b)  $S_{DEF} > S_{ABC}$ .

**Problem T5/553.** Solve the equation

$$(4x^2 + x - 1)\sqrt{x^2 + x + 2} - (5x^2 + 3x + 4)\sqrt{x^2 - 1} = 0.$$

### FOR HIGH SCHOOL

**Problem T6/553.** Given 3 positive numbers  $a, b, c$ . Show that

$$\frac{a^5}{b^2\sqrt{(a^2 + 3ab + b^2)^3}} + \frac{b^5}{c^2\sqrt{(b^2 + 3bc + c^2)^3}} + \frac{c^5}{a^2\sqrt{(c^2 + 3ca + a^2)^3}} \geq \frac{3}{5\sqrt{5}}.$$

Problem T7/553 Given  $a, b \in \mathbb{N}^*$ . Show

that, for any  $m \in \mathbb{N}^*$ , the following system of

$$\begin{cases} x+1=5^a \\ 1+x^2+x^4+\dots+x^{2m-2}=5^b \end{cases}$$

cannot have a solution which is an integer and greater than 1.

Problem T8/553. Given a triangle  $ABC$  with the lengths of the sides  $BC, CA, AB$  are  $a, b, c$  respectively. Let  $l_a, l_b, l_c$  respectively be the lengths of the angle bisectors from the vertices  $A, B, C$ . Show that

$$\frac{a^2}{l_b l_c} + \frac{b^2}{l_c l_a} + \frac{c^2}{l_a l_b} \geq 4.$$

Problem T9/553. Find the maximum positive number  $k$  show that

$$a^2 + b^2 + c^2 + k(a+b+c) \geq 3 + k(ab+bc+ca)$$

for any positive numbers  $a, b, c$  satisfying  $abc = 1$ .

#### TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/553. Show that

CHỨNG MINH HAI... (Tiếp theo trang 3)

Do đó tứ giác  $FPIN$  là hình bình hành  
 $\Rightarrow NF \parallel PI$ . Gọi  $J$  là trung điểm của  $KI$  ta có  $EJ$  là đường trung bình của hình thang  $PFKI$   
 $\Rightarrow EJ \parallel FK \Rightarrow EJ \perp KI$ . Tam giác  $EKI$  có  $EJ$  vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên tam giác  $EKI$  cân tại  $E \Rightarrow EK = EI$ . Mà  $EI$  là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của  $\triangle AM$  của tam giác vuông  $IAM$  nên  $EI = \frac{AM}{2} \Rightarrow EK = \frac{AM}{2}$

$\Rightarrow \triangle KAM$  vuông tại  $K \Rightarrow \widehat{AKM} = 90^\circ$ .

**Cách 2** (h.8) Vì  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $CD$  nên  $AC$  vuông góc với  $MN$  tại  $I$ .

$$\text{Ta có: } AF^2 = FI^2 = FK \cdot FN \Rightarrow \frac{AF}{FK} = \frac{FN}{AF}$$

$$\Rightarrow \triangle AFN \sim \triangle KFA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{FAN} = \widehat{FKA} \quad (1)$$

$$2^{2n} \mid \varphi(2^{2^{n-1}} + 1), \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4,$$

where  $\varphi(m)$  is the number of positive integers which are not greater than  $m$  and coprime with  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ .

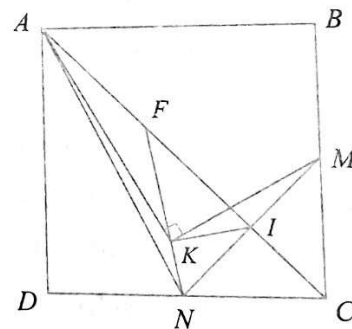
Problem T11/553. Find all functions  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfying

$$xf(f(x+y)) = xf(y) + \frac{1}{f(x)}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Problem T12/553. Given a triangle  $ABC$  and let  $O, H$  respectively be its circumcenter and orthocenter. Denote  $A_0, B_0, C_0$  respectively the intersections between  $AH$  and  $BH, CH$  and  $BC, CA$  and  $AB$ . Let  $A_1$  be the intersection between the line through  $B$  parallel to  $A_0B_0$  and the line through  $C$  parallel to  $A_0C_0$ . Denote by  $A_2$  the midpoint of  $AA_1$ . The points  $B_2, C_2$  are determined in the same way. Prove that the circumcenter of  $A_2B_2C_2$  belongs to  $OH$ .

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science - Vietnam National University, Hanoi)



Hình 8

$$\text{Mặt khác: } \frac{IK}{IM} = \frac{IK}{IN} = \frac{FI}{FN} = \frac{FA}{FN}$$

$$\Rightarrow \triangle KIM \sim \triangle AFN \text{ (c.g.c)}$$

$$(\text{do } \widehat{NFI} = \widehat{NIK} \Rightarrow \widehat{AFN} = \widehat{KIM})$$

$$\Rightarrow \widehat{IKM} = \widehat{FAN} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\widehat{IKM} = \widehat{FKA} \Rightarrow \widehat{AKM} = 90^\circ$ .





**Bài T1/549.** Tìm các bộ số tự nhiên  $(a, b, c, d)$  thỏa mãn:  $a > b > c > d$ ;  $b + c + d$  chia hết cho  $a$ ;  $2a + c$  chia hết cho  $b + d$  và  $\text{ƯCLN}(b + d, c) = 1$ .

**Lời giải.** Từ giả thiết  $a > b > c > d \geq 0$  suy ra  $c \geq 1, b \geq 2, a \geq 3$ , do đó  $b + c + d < 3a$  và  $b - d = (b - c) + (c - d) \geq 1 + 1 = 2$ .

Từ  $b + c + d < 3a$  và  $b + c + d$  chia hết cho  $a$  suy ra: hoặc  $b + c + d = a$ , hoặc  $b + c + d = 2a$ .

• Nếu  $b + c + d = a$  thì

$2a + c = 2(b + c + d) + c = 2(b + d) + 3c$  mà  $2a + c$  chia hết cho  $b + d$  nên  $3c$  chia hết cho  $b + d$ . Do  $(b + d, c) = 1$  nên 3 phải chia hết cho  $b + d$ . Từ đó  $b + d = 3$  và do  $b - d \geq 2$  nên chỉ có thể là  $b = 3$  và  $d = 0$ .

Khi  $c = 1$  thì  $a = b + c + d = 4$  và  $2a + c = 9$  nên  $2a + c$  chia hết cho  $b + d = 3$ ,

còn  $(b + d, c) = (3, 1) = 1$ , thỏa mãn.

Khi  $c = 2$  thì  $a = b + c + d = 5$  và  $2a + c = 12$  nên  $2a + c$  chia hết cho  $b + d = 3$ ,

còn  $(b + d, c) = (3, 2) = 1$ , thỏa mãn.

• Nếu  $b + c + d = 2a$  thì

$2a + c = (b + c + d) + c = b + d + 2c$  mà  $2a + c$  chia hết cho  $b + d$  nên  $2c$  chia hết cho  $b + d$ . Do  $(b + d, c) = 1$  thì 2 phải chia hết cho  $b + d$ . Từ đó  $b + d = 2$  và do  $b - d \geq 2$  nên chỉ có thể là  $b = 2$  và  $d = 0$ .

Lúc đó  $c = 1$  và  $2a = b + c + d = 3$ , suy ra số  $a$  không là số nguyên.

Vậy bài toán có hai nghiệm là:  $a = 4, b = 3, c = 1, d = 0$  và  $a = 5, b = 3, c = 2, d = 0$ .

**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng. **Nghệ An:** Hoàng Văn Duy, Võ Nhật Hoàng, Đặng Bá Khôi Nguyên, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **TP.** **Hồ Chí Minh:** Nguyễn Trịnh Phương Minh, 6/14, THCS Lê Quý Đôn, Q. 3; **Cần Thơ:** Dương Ngũ Kim Lân, 6A6, THCS Đoàn Thị Điểm, Q. Ninh Kiều.

**NGUYỄN VIỆT HẢI**

**Bài T2/549.** Cho  $x, y, z$  là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức  $xy + yz + zx = -7$ . Chứng minh

$$A = (x^2 + 2yz + 7)(y^2 + 2zx + 7)(-z^2 - 2xy - 7)$$

là một số chính phương.

**Lời giải.** Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 + 2yz + 7 &= x^2 + 2yz - (xy + yz + zx) \\ &= x^2 - x(y + z) + yz \\ &= (x - y)(x - z). \end{aligned}$$

Tương tự:  $y^2 + 2zx + 7 = (y - x)(y - z)$  và

$$-z^2 - 2xy - 7 = -(z - y)(z - x) = (y - z)(z - x).$$

Từ đó có:

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + 2yz + 7)(y^2 + 2zx + 7)(-z^2 - 2xy - 7) \\ &= (x - y)(x - z)(y - x)(y - z)(y - z)(z - x) \\ &= [(x - y)(y - z)(z - x)]^2 \end{aligned}$$

là một số chính phương.

**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải đúng:

**Hưng Yên:** Lê Tuấn Hiệp, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Trịnh Phương Minh, 6/14, THCS Lê Quý Đôn; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Lâm, 8A, Nguyễn Tất Han, Hoàng Văn Nhân, Nguyễn Thị Băng Tâm, Nguyễn Tất Hoàng Anh, 7C, Đặng Bá Khôi Nguyên, Hoàng Văn Duy, 6D, THCS Lý Nhật Quang; **Đậu Công Nhất Nam**, 7C, THCS Cao Xuân Huy; **Quảng Trị:** Lê Thị Ngân Tâm, 8G, THCS Phan Đình Phùng, Nguyễn Phi Tiến Khoa, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hà; **Phú Thọ:**

Nguyễn Xuân Hồng, Nguyễn Đoàn Anh Tú, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông.

### VŨ ĐÌNH HÒA

**Bài T3/549.** Cho  $a, b, c$  là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh

$$(a-b)^{3n} + (b-c)^{3n} + (c-a)^{3n} : 72$$

với mọi số tự nhiên  $n$ .

**Lời giải.** Gọi  $A = (a-b)^{3n} + (b-c)^{3n} + (c-a)^{3n}$ .

Đặt  $x = a-b, y = b-c, z = c-a$  thì

$$x + y + z = 0.$$

Suy ra  $z = -(x+y)$  và từ đó  $A = x^{3n} + y^{3n} + z^{3n}$ .

Vì  $n$  lẻ nên  $x^{3n} + y^{3n}$  chia hết cho

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = -z^3 + 3xyz.$$

Vì  $a, b, c$  là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên ba số này không chia hết cho 3. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 3. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử  $c, a$  có cùng dư khi chia cho 3, dẫn tới  $z$  chia hết cho 3. Do vậy,  $x^3 + y^3$  chia hết cho 9. Từ đó,  $A$  chia hết cho 9.

Mặt khác vì  $a, b, c$  là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên cả ba số này đều lẻ, kéo theo  $a-b, b-c, c-a$  là các số chẵn tức là  $x, y, z$  đều chẵn. Suy ra  $x^3, y^3, z^3$  đều chia hết cho 8, dẫn tới  $A$  chia hết cho 8.

Từ các chứng minh trên với chú ý  $(8, 9) = 1$  nên  $A$  chia hết cho 72.

**Nhận xét.** Bài toán này cơ bản và có nhiều bạn tham gia giải, tuy nhiên một số bạn giải quá dài. Khi giải bài toán này, các bạn chú ý tính chất  $a^n + b^n$  chia hết cho  $a+b$  với mọi số tự nhiên  $n$  lẻ và  $a, b$  nguyên thoả mãn  $a+b \neq 0$ . Ngoài ra ta cũng có  $a^n - b^n$  chia hết cho  $a-b$  với mọi số tự nhiên  $n$  và  $a, b$  nguyên phân biệt.

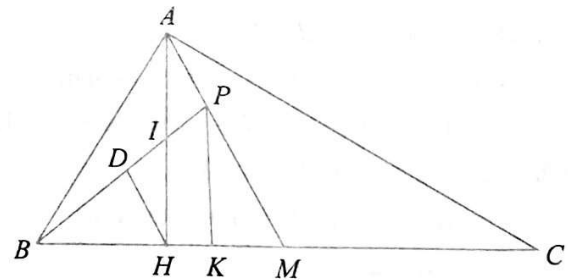
Các bạn sau có lời giải đúng

**Nghệ An:** Hoàng Văn Nhân, Nguyễn Thị Bằng Tâm, Nguyễn Tất Hoàng Anh, 7C, Nguyễn Hải Triều, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Ngô Văn Trường, 9A, THCS Mai Hùng, Hoàng Mai; **Hà Nội:** Nguyễn Trung Hiếu, Nguyễn Vũ Minh Khôi, Ngô Minh Chấn, Nguyễn Nam Anh, 8A5, THCS Archimedes, Đông Anh, Trần Việt Anh, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy, Bùi Minh Khang, 8A1, THCS Lô môn xôp Hà Đông; **Phú Thọ:** Hà Phương Anh, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Chánh Thiện, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3; **Sơn La:** Lương Hữu Bách, 9A1, THCS Nguyễn Trãi, TP. Sơn La; **Cần Thơ:** Dương Ngũ Kim Lân, 6A6, THCS Đoàn Thị Điểm, Ninh Kiều.

### NGUYỄN TIẾN LÂM

**Bài T4/549.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ) đường cao  $AH$  và trung tuyến  $AM$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AH$ , đường thẳng  $BI$  cắt  $AM$  tại  $P$ , qua  $P$  kẻ  $PK$  vuông góc với  $BC$  ( $K$  thuộc  $BC$ ). Chứng minh rằng  $KC = 2PM$ .

**Lời giải.**



**Cách 1.** Áp dụng hệ quả định lý Thales cho tam giác

$$AMH \text{ ta có: } \frac{MP}{MA} = \frac{MK}{MH} = \frac{PK}{AH} = \frac{PK}{2IH} \quad (1).$$

Áp dụng định lý Thales cho tam giác  $BKP$  ta có:

$$\frac{PK}{IH} = \frac{KB}{HB} \quad (2).$$

Từ (1), (2) ta có:

$$\frac{MP}{MA} = \frac{KB + KM}{MH + 2BH} = \frac{MB}{MB + HB} = \frac{BC}{2(MB + HB)}$$

$$= \frac{KB}{2HB} = \frac{BC - KB}{2(MB + HB) - 2HB} = \frac{KC}{2MA}.$$

Từ đó suy ra  $\frac{MP}{MA} = \frac{KC}{2MA}$ . Suy ra  $KC = 2PM$ . Bài toán chứng minh xong.

**Cách 2.** Kẻ  $HD \parallel AM$ , ( $D \in BP$ ). Áp dụng hệ quả

định lý Thales ta có:  $\frac{HD}{AP} = \frac{IH}{IA} = 1$ , suy ra  $AP = HD$ .

Áp dụng định lý Thales ta có:  $\frac{MP}{PA} = \frac{MP}{HD} = \frac{MB}{HB}$ .

Lại có  $\frac{MP}{PA} = \frac{MK}{KH}$ . Từ đó suy ra:

$$\frac{MP}{PA} = \frac{MK}{KH} = \frac{MB}{BH} = \frac{MK + MB}{KH + BH} = \frac{KC}{KB}.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{MP}{MP + PA} = \frac{KC}{KC + KB} \Leftrightarrow \frac{MP}{MA} = \frac{KC}{BC}.$$

Mà  $BC = 2MA$  nên  $KC = 2MP$ .

**Nhận xét.** Các bạn dưới đây có lời giải tốt.

**Nghệ An:** Nguyễn Đăng Quang, 9B, Lương Thị Hải Yến, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Cao Long, 9A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; Lưu Trọng Phúc, 9B, THCS Đội Cung, TP. Vinh; **Phú Thọ:** Hà Phương Anh; Trần Lan Anh, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Chánh Thiện, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, Q.3; **Sơn La:** Lương Hữu Bách, 9A1, THCS Nguyễn Trãi.

#### NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/549. Giải phương trình

$$(x^2 + 6x + 10)^2 + (x + 3)(3x^2 + 20x + 36) = 0.$$

**Lời giải.** Đặt  $t = x + 3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3x^2 + 20x + 36 &= 3(x + 3)^2 + 2(x + 3) + 3 \\ &= 3t^2 + 2t + 3. \end{aligned}$$

Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} (t^2 + 1)^2 + t(3t^2 + 2t + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^4 + 3t^3 + 4t^2 + 3t + 1 &= 0 \quad (*) \\ \Leftrightarrow t^2(t^2 + t + 1) + 2t(t^2 + t + 1) + t^2 + t + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t + 1)^2(t^2 + t + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow t = -1, \text{ vì } t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Ta được  $x + 3 = -1 \Leftrightarrow x = -4$ , thỏa mãn bài toán.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất  $x = -4$ .

**Nhận xét.**

1) Có thể giải bài toán bằng cách:

Đặt  $a = x^2 + 6x + 10$ ;  $b = x + 3$  khi đó

$$3x^2 + 20x + 36 = 3a + 2b, \text{ phương trình trở thành:}$$

$$a^2 + b(3a + 2b) = 0 \Leftrightarrow (a + b)(a + 2b) = 0.$$

2) Nhận thấy  $t = 0$  không thỏa mãn (\*). Với  $t \neq 0$ , chia cả hai vế của phương trình này cho  $t^2$  ta được:

$$t^2 + \frac{1}{t^2} + 3\left(t + \frac{1}{t}\right) + 4 = 0.$$

Đặt  $a = t + \frac{1}{t}$ , ta có:  $|a| \geq 2$ ;  $t^2 + \frac{1}{t^2} = a^2 - 2$ , ta

được phương trình:  $a^2 + 3a + 2 = 0$ .

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

**Hà Nội:** Trần Việt Anh, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy; Đoàn Trí Anh, 8A, THCS Đan Phượng, Đan Phượng; **Quảng Trị:** Lê Thị Ngân Tâm, 8G, THCS Phan Đình Phùng, Đông Hà; **Phú Thọ:** Trần Lan Anh, Phan Thái Tùng, Hà Phương Anh, 9A, Nguyễn Xuân Hồng, Ngô Viết Tinh, Nguyễn Bá Duy, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Chánh Thiện, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3; **Nghệ An:** Đào Văn Phước Sang, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, Nguyễn Đăng Quang, 9B, Nguyễn Công Dũng, Nguyễn Thái Triệu, Bùi Thị Thùy Linh, Nguyễn Văn Lâm, Phạm Xuân Hoàng, 8A, Nguyễn Thị Bằng Tâm, 7C, Lương Thị Hải Yến, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Trần Diệu Linh, 9A, Lưu Khánh Huy, 8H, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh; **Sơn La:** Lương Hữu Bách, 9A1, THCS Nguyễn Trãi, TP. Sơn La.

NGUYỄN ANH DŨNG

**Bài T6/549.** Cho  $a, b, c$  với  $a < b < c$  là ba nghiệm của phương trình  $x^3 - 3x + 1 = 0$ . Chứng minh rằng  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = -6$ .

**Lời giải.** Áp dụng định lý Viète đối với phương trình bậc ba một ẩn, ta có:

$$a + b + c = 0; ab + bc + ca = -3; abc = -1.$$

**Cách 1.** Đặt  $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ ;  $B = \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}$ , ta có

$$A + B = \frac{a+c}{b} + \frac{b+a}{c} + \frac{c+b}{a} = \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c} + \frac{-a}{a} = -3.$$

$$\begin{aligned} AB &= 3 + \frac{a^2}{bc} + \frac{c^2}{ab} + \frac{b^2}{ac} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ab}{c^2} + \frac{ac}{b^2} \\ &= 3 - (a^3 + b^3 + c^3) + b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3 \text{ (do } abc = -1) \end{aligned}$$

Vì  $a, b, c$  là ba nghiệm của phương trình  $x^3 - 3x + 1 = 0$  nên  $a^3 = 3a - 1$ ;  $b^3 = 3b - 1$ ;  $c^3 = 3c - 1$ . Suy ra:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3(a + b + c) - 3 = 3 \cdot 0 - 3 = -3;$$

$$a^3b^3 = 9ab - 3a - 3b + 1;$$

$$b^3c^3 = 9bc - 3b - 3c + 1;$$

$$a^3c^3 = 9ac - 3a - 3c + 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3 &= 9(ab + bc + ca) \\ &\quad - 6(a + b + c) + 3 \\ &= 9 \cdot (-3) + 3 = -24. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } AB = 3 + 3 - 24 = -18.$$

Từ  $A + B = -3$  và  $AB = -18$ , suy ra  $A$  và  $B$  là nghiệm của phương trình  $y^2 + 3y - 18 = 0$  (1). Phương trình (1) có hai nghiệm  $y_1 = -6$ ;  $y_2 = 3$ .

$$\begin{aligned} \text{Lại có: } A - B &= \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \\ &= -(a-b)(b-c)(c-a) < 0 \text{ (do } a < b < c), \\ \text{nên } A < B \text{ (2).} \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra  $A = -6$  (đpcm).

**Cách 2.** Để thấy các nghiệm của phương trình đã cho thuộc  $[-2; 2]$ . Đặt  $x = 2\cos t$  (với  $t \in [0; \pi]$ ),

$$\text{ta có: } 8\cos^3 t - 6\cos t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t - 3\cos t = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 3t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}.$$

Do  $t \in [0; \pi]$  nên có ba nghiệm:

$$t_1 = \frac{2\pi}{9}; t_2 = \frac{4\pi}{9}; t_3 = \frac{8\pi}{9}.$$

Vì  $a < b < c$  nên

$$a = 2\cos \frac{8\pi}{9}; b = 2\cos \frac{4\pi}{9}; c = 2\cos \frac{2\pi}{9}.$$

Kết hợp với công thức hạ bậc, ta có:

$$a^2 = 2 + c; b^2 = 2 + a; c^2 = 2 + b.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} &= \frac{a^2c + b^2a + c^2b}{abc} \\ &= \frac{(2+c)c + (2+a)a + (2+b)b}{abc} \\ &= \frac{2(a+b+c) + (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)}{abc} \\ &= \frac{2 \cdot 0 + 0^2 - 2 \cdot (-3)}{-1} = -6. \end{aligned}$$

**Nhận xét.** Đa số các bạn gửi bài đều giải theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải có lập luận chặt chẽ và ngắn gọn.

**Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng, 10 T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Lê Trí Đức, 10B11, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; **Đà Nẵng:** Tô Đông Hải, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** Phan Trung Trực, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Sóc Trăng:** Tiết Trọng Khiêm, 11 T2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Thừa Thiên Huế:** Trần Thị Thanh Thu, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

**Bài T7/549.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 y^3 \left( \frac{x^3 y^3 + 1}{2} \right) = \left( \frac{xy + 1}{2} \right)^9 & (1) \\ 9^x + 4^{\frac{1}{x}} = 70x - 57\sqrt{xy} & (2) \end{cases}$$

**Lời giải.** Điều kiện:  $xy \geq 0$ . Khi đó, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} x^3 y^3 \cdot \frac{x^3 y^3 + 1}{2} &= xy \cdot xy \cdot xy (x^2 y^2 - xy + 1) \cdot \frac{xy + 1}{2} \\ &\leq \left( \frac{xy + xy + xy + x^2 y^2 - xy + 1}{4} \right)^4 \cdot \frac{xy + 1}{2} \\ &= \left( \frac{(xy + 1)^2}{4} \right)^4 \cdot \frac{xy + 1}{2} = \left( \frac{xy + 1}{2} \right)^9. \end{aligned}$$

Từ phương trình (1) suy ra dấu đẳng thức trong bất đẳng thức trên phải xảy ra

$$\Leftrightarrow x^2 y^2 - xy + 1 = xy \Leftrightarrow xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}.$$

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$9^x + 4^{\frac{1}{x}} = 70x - 57 \quad (3). \text{ Dễ thấy } x > 0.$$

Xét hàm số:  $f(x) = 9^x + 4^{\frac{1}{x}} - 70x + 57$  với  $x > 0$ .

$$\text{Ta có: } f'(x) = 9^x \ln 9 - \frac{1}{x^2} 4^{\frac{1}{x}} \ln 4 - 70;$$

$$f''(x) = 9^x \ln^2 9 + \frac{2}{x^3} 4^{\frac{1}{x}} \ln 4 + \frac{1}{x^4} 4^{\frac{1}{x}} \ln^2 4 > 0, \forall x > 0.$$

Do  $f''(x) > 0, \forall x \in (0; +\infty)$  nên  $f'(x)$  là hàm đồng biến trên  $(0; +\infty)$ , suy ra phương trình  $f'(x) = 0$  có nhiều nhất một nghiệm trên  $(0; +\infty)$ . Theo định lý Rolle, phương trình  $f(x) = 0$  có nhiều nhất hai nghiệm trên  $(0; +\infty)$ . Mặt khác ta có:  $f(1) = f(2) = 0$  nên phương trình (3) chỉ có hai nghiệm là  $x = 1$  và  $x = 2$ . Vậy hệ đã cho có hai nghiệm  $(x; y)$  là  $(1; 1), \left(2; \frac{1}{2}\right)$ .

**Nhận xét.** Các bạn tham gia đều giải đúng với cách giải tương tự như trên. Các bạn sau có lời giải tốt:

**Hà Nội:** Trần Việt Anh, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy, Nguyễn Trung Hiếu, Nguyễn Nam Anh, Ngô Minh Chấn, Nguyễn Vũ Minh Khôi, 8A5, THCS Archimedes Đông Anh; Bùi Minh Phong, 8A1, THCS Lômônôxốp Hà Đông; **Quảng Bình:** Phạm Thị Mỹ Hạnh, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Bình Định:** Phan Trung Trực, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bạc Liêu:** Đỗ Văn Dương, 11CA, THPT Trần Văn Bày, Phước Long.

**TRẦN HỮU NAM**

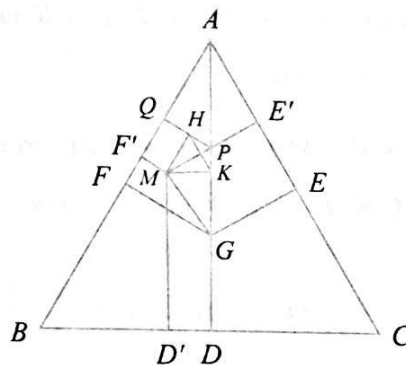
**Bài T8/549.** Cho tam giác đều  $ABC$  với tâm  $G$ ,  $M$  là điểm tùy ý nằm trong tam giác. Gọi  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$  và  $D', E', F'$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên các cạnh  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng trong ba tứ giác  $MGEE', MGFF', MGDD'$  sẽ có một tứ giác có diện tích bằng tổng diện tích hai tứ giác còn lại.

**Lời giải.** (Của bạn La Đại Cương, tác giả đề toán).

Không mất tính tổng quát, giả sử  $M$  nằm trong (hoặc trên biên tam giác  $AGF$ ).

**Bổ đề:** Khi  $M$  nằm trong (hoặc trên biên tam giác  $AGF$ ) ta có:  $EE' = FF' + DD'$ .

**Chứng minh:**



Gọi  $G$  là tâm của tam giác đều  $ABC$ ;  $P$  là giao điểm của  $ME'$  và  $GA$ ;  $Q$  là hình chiếu vuông góc





**Bài T9/549.** Cho các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 - (ab+bc+ca)$ .

**Lời giải.** (Của Trần Minh Hoàng và Ngô Văn Trường) Trước tiên ta có Bổ đề:

Nếu  $x + y + z = 0$  thì  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ .

**Chứng minh:**

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) + z^3 \\ &= -z((x+y)^2 - 3xy) + z^3 \\ &= -z((-z)^2 - 3xy) + z^3 = 3xyz. \end{aligned}$$

**Áp dụng:** Vì  $(a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$  nên

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

Vậy  $P = 3(a-b)(b-c)(c-a) - (ab+bc+ca)$ .

Không giảm tổng quát, có thể coi  $a = \max\{a, b, c\}$ .

Trường hợp 1:  $a \geq c \geq b$ . Khi đó

$$(a-b)(b-c)(c-a) \geq 0$$

và  $ab+bc+ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 2$  nên  $P \geq -2$ .

Trường hợp 2:  $a \geq b \geq c$ . Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân ta có

$$(a-b)(b-c) \leq \left( \frac{(a-b) + (b-c)}{2} \right)^2 = \left( \frac{a-c}{2} \right)^2.$$

Vì  $c-a \leq 0$  nên  $(a-b)(b-c)(c-a) \geq \frac{(c-a)^3}{4}$ .

Mặt khác:  $2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$$\begin{aligned} &= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \\ &\geq \frac{((a-b) + (b-c))^2}{2} + (c-a)^2 = \frac{3}{2}(a-c)^2 \end{aligned}$$

hay  $2(2 - ab - bc - ca) \geq \frac{3}{2}(a-c)^2$ .

Vậy  $P \geq -\frac{3}{4}(a-c)^3 + \frac{3}{4}(a-c)^2 - 2$ .

Đặt  $t = a-c \geq 0$ . Khi ấy

$$t^2 = (a-c)^2 \leq 2(a^2 + c^2) \leq 2(a^2 + b^2 + c^2) = 4.$$

Suy ra  $t \leq 2$ . Do đó:

$$t^2 - t^3 = (2-t)(2+t+t^2) - 4 \geq -4.$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} P &\geq -\frac{3}{4}(a-c)^3 + \frac{3}{4}(a-c)^2 - 2 = -\frac{3}{4}t^3 + \frac{3}{4}t^2 - 2 \\ &= \frac{3}{4}(t^2 - t^3) - 2 \geq \frac{3}{4}(-4) - 2 = -5. \end{aligned}$$

Kết hợp cả hai trường hợp ta có  $P \geq -5$ .

Đẳng thức xảy ra khi  $a-c=t=2$ ,  $a-b=b-c$

và  $a^2 + b^2 + c^2 = 2 \Leftrightarrow a=1, b=0, c=-1$ .

Thay đổi vai trò của  $a, b, c$  ta đi đến

**Kết luận:**  $P$  nhỏ nhất  $= -5$  khi  $(a, b, c) = (1, 0, -1)$  và hoán vị của chúng.

**Nhận xét.** Bạn Chu Đức Bảo và Nguyễn Trọng Việt đã có ý tưởng khá hay là đặt  $P := P(a, b, c)$  và chứng minh được  $P(a, b, c) \geq P(t, t, c) \geq -2$  với  $t$  là nghiệm của phương trình

$$t^2 + 2tc = ab + bc + ca.$$

Tuy nhiên, xét  $P(t, t, c)$  là không đạt yêu cầu vì nghiệm không xảy ra khi  $t = a = b$  (theo cách giải trên).

Các bạn dưới đây đã gửi bài và có lời giải tốt:

**Bạc Liêu:** Đỗ Văn Dương, 11CA, THPT Trần Văn Bãy, Phước Long; **Hà Nội:** Nguyễn Nam Anh, Ngô Minh Chấn, Nguyễn Trung Hiếu, Nguyễn Vũ Minh Khôi, 8A5, THCS Archimedes Đông Anh; Trần Việt Anh, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy; Bùi Mai Phong, 8A1, THCS Lô môn xôp Hà Đông; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Hoàng 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** Chu Đức Bảo, Nguyễn Trọng Việt, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** Ngô Văn Trường, 9A, THCS Mai Hùng, TX. Hoàng Mai; **Quảng Bình:** Phạm Thị Mỹ Hạnh, 11

Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** *Tiết Trọng Khiêm, Vũ Hoàng Tuấn*, 11A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Sơn La:** *Lương Hữu Bách*, 9 A1, THCS Nguyễn Trãi, TP. Sơn La.

### TẠ DUY PHƯƠNG

**Bài T10/549.** Cho dãy số thực  $(x_n)$  thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 = 0; x_2 = 3 \\ x_{n+2} = \frac{1}{3} \left( 3^{-\frac{x_n}{2} + 1} + 5 \right), \forall n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Tìm giới hạn  $\lim x_n$ .

**Lời giải.** (Của bạn *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**)

Để thấy  $x_n > 0$  với  $n > 1$ . Ta có:

$$x_{n+2} - 2 = \frac{1}{3} \left( 3^{-\frac{x_n}{2} + 1} - 1 \right) = 3^{-\frac{x_n}{2}} - \frac{1}{3}, \forall n = 1, 2, \dots \quad (1).$$

Xét hàm số  $f(x) = 3^{-\frac{x}{2}}$ . Rõ ràng  $f(x)$  liên tục và có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Vì  $f(2) = \frac{1}{3}$  nên từ (1) ta có:

$$|x_{n+2} - 2| = |f(x_n) - f(2)| \quad (2).$$

Theo định lý Lagrange tồn tại  $c_n$  nằm giữa  $x_n$  và

$$2 \text{ sao cho: } f(x_n) - f(2) = f'(c_n)(x_n - 2) \quad (3).$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = -\frac{\ln 3}{2} 3^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{\ln 3}{2}, \forall x \geq 0 \quad (4).$$

Đặt  $q = \frac{\ln 3}{2} < 1$ . Từ (2), (3) và (4) suy ra:

$$|x_{n+2} - 2| \leq q |x_n - 2|.$$

Từ đó bằng quy nạp dễ thấy với mọi  $n$  ta có:

$$|x_{2n} - 2| \leq q^{n-1} |x_2 - 2|$$

$$\text{và } |x_{2n-1} - 2| \leq q^{n-1} |x_1 - 2| \quad (5).$$

Vì  $q < 1$  nên  $\lim q^{n-1} = 0$ . Từ đó và (5) suy ra:

$$\lim x_{2n} = 2 \text{ và } \lim x_{2n-1} = 2.$$

Thành thử  $\lim x_n = 2$ .

**Nhận xét.** Bài này được các bạn tham gia giải với nhiều cách khác nhau. Lời giải nêu trên của bạn *Hoàng* là lời giải ngắn gọn và hay nhất. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Sóc Trăng:** *Tiết Trọng Khiêm*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên Huế:** *Hồ Trần Quốc Thắng*, 10 Toán, THPT chuyên Quốc học Huế; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Quảng Bình:** *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

### ĐẶNG HÙNG THẮNG

**Bài T11/549.** Tìm các hàm liên tục  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

thỏa mãn:  $f(f(y)) + 2f(x) = f(f(x+y)), \forall x, y \quad (1).$

**Lời giải.** (Theo ý của đa số các bạn).

Giải sử  $f(x)$  thỏa mãn điều kiện (1). Thay  $x = 0$  vào (1) ta thu được:

$$f(f(y)) + 2f(0) = f(f(y)), \forall y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Thay  $y = 0$  vào (1), ta được:

$$2f(x) = f(f(x)), \forall x \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$2f(y) + 2f(x) = 2f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{hay } f(y) + f(x) = f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3).$$

Nhận xét rằng (3) là phương trình hàm Cauchy trong lớp hàm liên tục nên  $f(x) = ax$  với  $a \in \mathbb{R}$ .

Tiếp tục thay  $f(x) = ax$  vào (1), ta thu được:

$$a^2 y + 2ax = a^2(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a(2-a) = 0.$$

Suy ra  $a = 0$  hoặc  $a = 2$ .

**Kết luận:** Phương trình hàm đã cho có 2 nghiệm  $f(x) = 0$  và  $f(x) = 2x$ .

**Nhận xét.** Đây là dạng toán tương đối đơn giản về lớp phương trình hàm với hàm hợp trong lớp hàm

một biến với cặp biến tự do nên có nhiều bạn tham gia giải và đều nhận được kết quả đúng.

**Bình Định:** Nguyễn Huy Hoàng, 12T, Phan Trung Trục, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hưng Yên:** Chu Đức Bảo, Nguyễn Văn Khiêm, Nguyễn Trọng Việt, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Long:** Nguyễn Tuấn Kiệt, Nguyễn Lâm Thảo Trang, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Phú Thọ:** Nguyễn Phúc Hưng, 10T, THPT chuyên Hùng Vương; **Sóc Trăng:** Lê Huỳnh Duy Khang, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Quảng Nam:** Ngô Gia Tường, Phạm Trần Minh Đạt, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Thừa Thiên Huế:** Nguyễn Như Thuật, Phùng Hoàng Hữu Phú, 10T, THPT chuyên Quốc học Huế; **Nghệ An:** Phan Đại Hoàng, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Lê Hữu Mạnh Tiến, Trần Minh Hoàng, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh.

#### NGUYỄN VĂN MẬU

**Bài T12/549.** Cho tam giác  $ABC$ ,  $(O)$  là đường tròn ngoại tiếp,  $M$  là điểm chính giữa cung  $\widehat{BC}$  không chứa  $A$ .  $K$  là điểm bất kỳ thuộc  $AM$  ( $K$  không là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ ).  $U, V$  theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $ABK, ACK$ ;  $P, Q$  theo thứ tự là giao điểm thứ hai của  $BK, CK$  và  $(O)$ .  $N$  là giao điểm của  $UQ$  và  $VP$ .  $S$  là giao điểm của  $PQ$  và  $UV$ . Chứng minh

- 1)  $N$  là điểm chính giữa cung  $\widehat{BC}$  chứa  $A$ .
- 2)  $SK$  song song với  $BC$ .

**Lời giải.** (Theo bạn Trần Minh Hoàng, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, Hà Tĩnh).

a) Gọi  $N'$  là điểm chính giữa của cung  $\widehat{BC}$  chứa  $A$  của  $(O)$ .

Dễ thấy:

$$\begin{aligned}(\overline{UB}, \overline{UK}) &\equiv 2(AB, AK) \equiv 2(AB, AM) \\ &\equiv 2(N'B, N'M) \equiv (\overline{N'B}, \overline{N'C}) \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

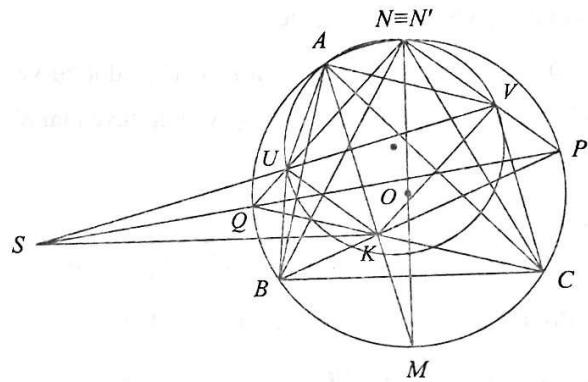
Từ đó, chú ý rằng  $\frac{UB}{UK} = 1 = \frac{N'B}{N'C}$ , suy ra các tam giác  $UBK, N'BC$  đồng dạng cùng hướng. Do đó:

$$\begin{aligned}(N'B, N'U) &\equiv (CB, CK) \equiv (CB, CQ) \\ &\equiv (N'B, N'Q) \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Điều đó có nghĩa là  $N', U, Q$  thẳng hàng.

Tương tự  $N', V, P$  thẳng hàng.

Vậy  $N' = UQ \cap VP = N$ . Nói cách khác  $N$  là điểm chính giữa của cung  $\widehat{BC}$  chứa  $A$  của  $(O)$ .



b) Chú ý rằng  $UA = UB$ ;  $AM \perp UV$ ;  $NM \perp BC$ ; các tam giác  $BKU, BCN$  đồng dạng cùng hướng, ta có:

$$\begin{aligned}(UA, UV) &\equiv (UA, BA) + (AB, AM) + (AM, UV) \pmod{\pi} \\ &\equiv (BA, BU) + (NB, NM) + (NM, BC) \pmod{\pi} \\ &\equiv (BA, BP) + (BK, BU) + (NB, BC) \pmod{\pi} \\ &\equiv (NA, NP) + (BC, BN) + (NB, BC) \\ &\equiv (NA, NU) \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Do đó  $A, N, U, V$  cùng thuộc một đường tròn.

Từ đó, chú ý rằng  $A, N, P, Q$  cùng thuộc một đường tròn, suy ra  $A$  là điểm Miquel của tứ giác toàn phần xác định bởi các đường thẳng  $UV, PQ, UQ, VP$ . Do đó  $A, U, Q, S$  cùng thuộc một đường tròn. Từ đó, chú ý rằng  $A, K$  đối xứng với nhau qua  $UV$ , suy ra:

$$(SK, SU) \equiv (SU, SA) \equiv (QU, QA) \equiv (QU, QA) \\ \equiv (QN, QA) \equiv (MN, MA) \pmod{\pi}.$$

Kết hợp với  $SU \equiv UV \perp AM$ , suy ra  $SK \perp MN$ .

Điều đó có nghĩa là  $SK \parallel BC$ .

**Nhận xét.** 1) Giả thiết  $K$  không phải là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  khẳng định rằng  $U \neq Q; V \neq P$ .

2) Khá nhiều bạn tham gia giải bài toán này nhưng lời giải của tất cả các bạn hoặc phụ thuộc hình vẽ hoặc không hoàn chỉnh (kể cả bạn Hoàng) bởi: Hoặc không sử dụng góc định hướng hoặc sử dụng góc định hướng không đúng cách.

3) Có thể giải phần b theo cách khác (bạn đọc tự vẽ hình): Gọi  $S'$  là giao điểm của  $PQ$  và tiếp tuyến tại  $K$  của đường tròn  $(KPQ)$ . Dễ thấy:

$$\frac{S'P}{S'Q} = \frac{KP^2}{KQ^2} = \frac{KP^2}{KM^2} \cdot \frac{KM^2}{KQ^2} = \frac{AP^2}{BM^2} \cdot \frac{CM^2}{AQ^2} = \frac{AP^2}{AQ^2}.$$

Do đó  $AS'$  tiếp xúc tại  $A$  với đường tròn  $(APQ)$ .

Vậy  $S'A = \sqrt{SP \cdot SQ} = SK$ . Từ đó, chú ý rằng  $UV$  là trung trực của  $AK$  suy ra  $S' \in UV$ .

Điều đó có nghĩa là  $S' = PQ \cap UV = S$ .

Do đó  $SK$  tiếp xúc tại  $K$  với đường tròn  $(KPQ)$ .

Vậy  $(SK, BC) \equiv (SK, PK) + (BP, BC)$

$$\equiv (QK, QP) + (QP, QC) \equiv (QK, QC) \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Nói cách khác  $SK \parallel BC$ .

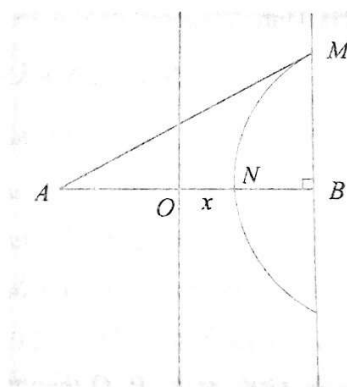
5) Xin nêu tên tất cả các bạn: **Hưng Yên:** Nguyễn Văn Khiêm, 11T1, Chu Đức Bảo, Nguyễn Trọng Việt, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** Nguyễn Đăng Quang, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Phan Đại Hoàng, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Thừa Thiên Huế:** Đoàn Văn Hoàng Lân, Phan Quốc Thắng, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đà Nẵng:** Tô Đông Hải, 10T2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Nam:** Phạm Trần

Minh Đạt, 10/1; Ngô Gia Tường, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Phú Yên:** Nguyễn Tấn Nguyên Chương, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

## NGUYỄN MINH HÀ

**Bài L1/549.** Trên bề mặt chất lỏng có hai nguồn phát sóng kết hợp  $A, B$  ( $AB = 16$  cm) dao động cùng biên độ, cùng tần số 25 Hz, cùng pha, coi biên độ sóng không đổi. Biết tốc độ truyền sóng là 80 cm/s. Xét các điểm ở mặt chất lỏng nằm trên đường thẳng vuông góc với  $AB$  tại  $B$ , dao động với biên độ cực tiểu. Điểm cách  $B$  xa nhất, gần nhất bằng bao nhiêu?

**Lời giải.** Gọi  $M$  là điểm ở mặt chất lỏng nằm trên đường thẳng vuông góc với  $AB$  tại  $B$ , dao động với biên độ cực tiểu như hình dưới.



$$\text{Bước sóng: } \lambda = \frac{v}{f} = \frac{80}{25} = 3,2 \text{ cm.}$$

Với hai nguồn cùng pha:

- Cực tiểu xa  $B$  nhất (gần  $O$  nhất) ứng với:

$$x_{\min} = \frac{\lambda}{4} \text{ nên } \sqrt{z^2 + AB^2} - z = 2,0,25\lambda$$

$$\Rightarrow \sqrt{z^2 + 16^2} - z = 2,0,25 \cdot 3,2 \Rightarrow z = 79,2 \text{ cm.}$$

- Cực tiểu gần  $B$  nhất (xa  $O$  nhất) ứng với:

$$x_{\max} = \frac{n\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

nên  $\sqrt{z^2 + AB^2} - z = n\lambda + 0,5\lambda$  với  $n$  là số nguyên lớn nhất thoả mãn:

$$n < \frac{OB - x_{\min}}{0,5\lambda} = \frac{8 - 0,8}{0,5 \cdot 3,2} = 4,5 \Rightarrow n = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{z^2 + 16^2} - z = 4 \cdot 3,2 + 1,6 \Rightarrow z = 1,69 \text{ cm.}$$

**Nhận xét.** Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Phạm Văn Anh*, 11 Lý, Trung tâm giáo dục nghề nghiệp – Giáo dục thường xuyên, Quận Ô Môn, *Cần Thơ*; *Đỗ Văn Dương*, 11A1, *Thái Thông Minh*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Trần Thị Thanh Thu*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**; *Ngô Huỳnh Thiên Vinh*, 11 Lý, THPT chuyên Tiền Giang, **Tiền Giang**.

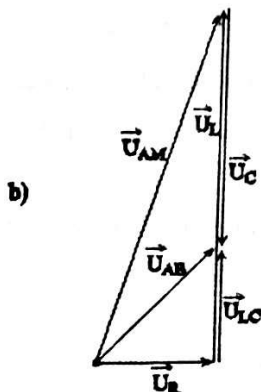
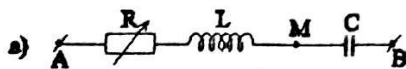
### ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

**Bài L2/549.** Đoạn mạch điện  $AB$  gồm đoạn mạch  $AM$  mắc nối tiếp với đoạn mạch  $MB$ . Trên đoạn  $AM$  chứa biến trở và cuộn dây thuần cảm, trên đoạn  $MB$  chứa tụ điện. Mắc vào hai đầu đoạn mạch điện áp xoay chiều có tần số góc  $\omega$  (với  $2\omega^2 LC = 3$ ). Khi  $R = R_0$  thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch đạt cực đại, và điện áp giữa hai đầu đoạn mạch  $AM$  có biểu thức là:

$$u_{AM} = 240\sqrt{2} \cos \omega t \text{ (V).}$$

Viết biểu thức điện áp giữa hai đầu của đoạn mạch  $AB$ .

**Lời giải.** Sơ đồ mạch điện được biểu diễn như hình a, từ đó ta có giản đồ vectơ như hình b.



$$\text{Với } 2\omega^2 LC = 3 \Rightarrow Z_L = 1,5Z_C \text{ (1).}$$

Khi công suất trên mạch  $AB$  cực đại:

$$R_0 = Z_L - Z_C = 0,5Z_C.$$

Từ (1) và (2) ta có quan hệ:

$$Z_L = 3R_0;$$

$$Z_L = 1,5Z_C = 3R_0.$$

Theo giản đồ vectơ, độ lệch pha giữa  $u_{AM}$  và  $u_R$  là

$$\varphi_{AM}: \tan \varphi_{AM} = \frac{Z_L}{R} = 3$$

$$\Rightarrow \varphi_{AM} \approx 72^\circ.$$

Độ lệch pha giữa  $u_{AB}$  và  $u_R$  là  $\varphi_{AB}$ :

$$\tan \varphi_{AB} = \frac{Z_L - Z_C}{R} = 1$$

$$\Rightarrow \varphi_{AB} = 45^\circ.$$

$$\text{Vậy } u_{AB} \text{ trễ pha hơn } u_{AM} \text{ góc } 27^\circ = \frac{3\pi}{20} \text{ (rad)}$$

$\Rightarrow$  pha của  $u_{AB}$  là  $\varphi_{AB}$ :

$$\varphi_{AB} = \varphi_{AM} - \frac{3\pi}{20} = \omega t - \frac{3\pi}{20} \text{ (rad).}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{U_{AB}}{U_{AM}} &= \sqrt{\frac{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R^2 + Z_L^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U_{0AB} &= U_{0AM} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 240 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ &= 48\sqrt{10} \text{ (V).} \end{aligned}$$

Vậy điện áp giữa hai đầu của đoạn mạch  $AB$  là:

$$u_{AB} = 48\sqrt{10} \cos \left( \omega t - \frac{3\pi}{20} \right) \text{ (V).}$$

**Nhận xét.** Hoan nghênh các bạn: *Trương Phúc Vinh*, *Thái Thông Minh*, *Phạm Văn Anh*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp** có lời giải đúng.

NGUYỄN XUÂN QUANG



# KALMAN - NGƯỜI TIÊN PHONG TRONG LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN

**ĐẶNG THỊ KIỂM HỒNG**

(Đại học Tài chính Kế toán Quảng Ngãi)

Nhân dịp kỷ niệm 133 năm ngày sinh của Chủ tịch *Hồ Chí Minh*, tôi xin giới thiệu về cuộc đời và sự nghiệp của một kỹ sư điện, nhà toán học, nhà phát minh người Mỹ gốc Hungary **Rudolf Emil Kalman** (tiếng Hungary: *Kálmán Rudolf Emil*) có cùng ngày sinh với Bác Hồ kính yêu. Ông được xem là đồng phát minh và phát triển của *bộ lọc Kalman*, một thuật toán toán học cung cấp một cách tiếp cận đệ quy cho vấn đề lọc, được sử dụng rộng rãi trong *xử lý tín hiệu*, hệ thống điều khiển và dẫn đường, hoa tiêu và điều khiển. Lý thuyết Kalman, được thiết lập vào đầu những năm 1960, đã mang lại một cái cách cơ bản cho kỹ thuật điều khiển và từ đó đặt nền móng cho sự phát triển nhanh chóng của lý thuyết điều khiển hiện đại. Để ghi nhận đóng góp này, Tổng thống Hoa Kỳ *Barack Obama* đã trao cho ông *Huân chương Khoa học Quốc gia* ngày 7 tháng 10 năm 2009.



*Rudolf Emil Kalman*  
(1930- 2016)

*Rudolf Emil Kalman* sinh ngày 19 tháng 5 năm 1930 tại Budapest, thủ đô của Hungary, là con trai của *Otto* và *Ursula Kalman (née Grundmann)* - một kỹ sư điện. Gia đình di cư

từ Hungary đến Hoa Kỳ trong Thế chiến thứ hai. Năm 1943, khi chiến tranh ở Địa Trung Hải về cơ bản đã kết thúc, họ di cư qua Thổ Nhĩ Kỳ, Châu Phi và cuối cùng đưa họ đến Youngstown, Ohio,

vào năm 1944. *Rudolf* theo học trường Cao đẳng Youngstown ở đó trong 3 năm trước khi vào Viện Công nghệ Massachusetts (MIT), Hoa Kỳ. *Kalman* lần lượt nhận bằng cử nhân và thạc sĩ về kỹ thuật điện tại MIT vào năm 1953 và 1954. *Kalman* hoàn tất bằng tiến sĩ vào năm 1957 tại Đại học Columbia ở thành phố New York.

Mối quan tâm ban đầu của ông đối với các hệ thống điều khiển được thể hiện rõ ràng qua nghiên cứu của ông tại MIT và đặc biệt là ở Đại học Columbia. Nghiên cứu ban đầu của ông dựa trên khái niệm về các biểu diễn biến trạng thái, được nâng cao về mặt toán học nhưng được thúc đẩy bởi các vấn đề thực tế. Ông cũng đã cho thấy, ngay từ những năm đầu tiên này, cách tiếp cận nghiên cứu mang tính cá nhân cao đã tiếp tục trong suốt phần còn lại cho sự nghiệp rực rỡ của ông. Từ năm 1957 đến năm 1958, *Kalman* được tuyển dụng với tư cách là kỹ sư nhân viên tại Phòng thí nghiệm nghiên cứu của IBM ở Poughkeepsie, New York. Trong thời gian đó, ông đã có những đóng góp quan trọng trong việc thiết kế các hệ thống kiểm soát dữ liệu lấy mẫu tuyến tính bằng cách sử dụng tiêu chí hiệu suất bậc hai, cũng như trong việc sử dụng Lý thuyết Lyapunov để phân tích và thiết kế các hệ thống điều khiển. Vào thời điểm đó, ông đã thấy trước tầm quan trọng của máy tính kỹ thuật số đối với các hệ thống quy mô lớn. Năm 1958, *Kalman* gia nhập Viện Nghiên cứu Cao cấp (RIAS) do *Solomon*



*Lefschetz* quá cố thành lập. Ông bắt đầu với tư cách là một nhà nghiên cứu toán học và sau đó được thăng chức Phó Giám đốc Nghiên cứu. Năm 1958, Văn phòng Nghiên cứu Khoa học Không quân (AFOSR) đã tài trợ cho *Kalman* và *Bucy* để thực hiện nghiên cứu nâng cao về ước lượng và kiểm soát tại RIAS. Cuối tháng 11 năm 1958, không lâu sau khi đến RIAS, *Kalman* bắt chuyến tàu trở về Baltimore sau chuyến thăm Princeton. Vào khoảng 11 giờ tối, đoàn tàu đã dừng lại khoảng một giờ ngay bên ngoài Baltimore. Đã muộn, ông mệt mỏi và đau đầu. Trong khi bị mắc kẹt trên tàu trong giờ đó, một ý tưởng nảy ra trong đầu ông: Tại sao không áp dụng khái niệm biến trạng thái cho bài toán bộ lọc Wiener-Kolmogorov. Ông đã quá mệt mỏi để nghĩ nhiều hơn về điều đó vào buổi tối hôm đó, nhưng nó đánh dấu sự khởi đầu của một số đóng góp tiên phong thực sự cho lý thuyết điều khiển hiện đại.

Ý tưởng của *Kalman* đã được phản hồi với một số sự hoài nghi giữa các đồng nghiệp của mình và ông ấy đã chọn một tạp chí kỹ thuật cơ khí (chứ không phải là một tạp chí kỹ thuật điện) để xuất bản. Bài báo thứ hai của ông, về trường hợp thời gian liên tục và đồng tác giả với *Bucy*, đã từng bị từ chối bởi vì - như một phản biện đã nói - một bước trong chứng minh “không thể là sự thật” (trong khi đó là sự thật). Ông kiên trì trình bày bộ lọc của mình và ngay lập tức có nhiều sự chấp nhận hơn ở những nơi khác. Nó nhanh chóng trở thành cơ sở cho các đề tài nghiên cứu tại nhiều trường đại học và là chủ đề của hàng trăm luận án tiến sĩ về kỹ thuật điện trong khoảng một thập kỷ sau đó.

Các bài giảng và ấn phẩm của ông trong khoảng thời gian đó cho thấy khả năng sáng tạo to lớn của ông và việc ông tìm kiếm một lý thuyết điều khiển thống nhất. Nghiên cứu của ông về các khái niệm

hệ thống cơ bản, chẳng hạn như khả năng kiểm soát và khả năng quan sát, đã giúp đặt nền tảng lý thuyết vững chắc cho một số khía cạnh cấu trúc hệ thống kỹ thuật quan trọng nhất. Ông đã thống nhất, trong cả trường hợp thời gian rời rạc và thời gian liên tục, lý thuyết và thiết kế của các hệ thống tuyến tính đối với các tiêu chí bậc hai. Ông đã có công giới thiệu công trình của *Caratheodory* trong lý thuyết điều khiển tối ưu và làm rõ mối tương quan giữa nguyên lý cực đại của *Pontryagin* và phương trình Hamilton-Jacobi-Bellman, cũng như phép tính biến phân nói chung. Nghiên cứu của ông không chỉ nhấn mạnh tính tổng quát của toán học mà còn được hướng dẫn bởi việc sử dụng máy tính kỹ thuật số như một phần không thể thiếu trong quá trình thiết kế và triển khai hệ thống điều khiển.

Năm 1964, *Kalman* đến Đại học Stanford, nơi ông được liên kết với các khoa Kỹ thuật Điện, Cơ học và hoạt động nghiên cứu. Trong thời kỳ đó, những nỗ lực nghiên cứu của ông chuyển hướng sang các vấn đề cơ bản liên quan đến lý thuyết thực chứng và lý thuyết hệ thống đại số. Một lần nữa, ông đã mở ra những con đường nghiên cứu mới trong một lĩnh vực mới và những đóng góp của ông đã giúp định hình một lĩnh vực nghiên cứu mới trong lý thuyết hệ thống hiện đại. *Kalman* không chỉ định hình lĩnh vực lý thuyết điều khiển hiện đại mà còn thúc đẩy việc sử dụng rộng rãi nó. Với cách trình bày cuốn hút, các bài giảng của ông tại các trường đại học, hội nghị và ngành công nghiệp đã thu hút vô số nhà nghiên cứu chịu ảnh hưởng lớn từ ý tưởng của ông.

Năm 1971, *Kalman* được bổ nhiệm làm giáo sư nghiên cứu sau đại học tại Khoa Toán học, Kỹ thuật điện, Kỹ thuật công nghiệp và Hệ thống, Đại học Florida ở Gainesville. Ông cũng trở thành Giám đốc của Trung tâm lý thuyết hệ thống toán học, các hoạt động giáo dục và nghiên cứu của

ông liên quan đến các khoa kỹ thuật điện, kỹ thuật công nghiệp và toán học. Hai năm sau, trong khi tiếp tục giữ các vị trí này tại Đại học Florida, ông cũng trở thành Giáo sư tại Eidgenössische Technische Hochschule ở Zürich, Thụy Sĩ. *Kalman* thôi giữ chức vụ tại Đại học Florida năm 1992 và tại Eidgenössische Technische Hochschule ở Zürich năm 1997. Ông cũng đóng vai trò cố vấn khoa học cho các trung tâm nghiên cứu ở Ecole des Mines de Paris, Pháp.

*Kalman* đã xuất bản hơn 50 bài báo kỹ thuật, đồng tác giả cuốn sách "*Chủ đề trong lý thuyết hệ thống toán học*" (McGraw-Hill, 1969) với *Peter L Falb*, *Michael A Arbib* và có nhiều bài giảng. Ông là thành viên của nhiều hội nghề nghiệp và ông phục vụ trong ban biên tập của nhiều tạp chí. Năm 1962, ông được Viện Hàn lâm Khoa học Maryland vinh danh là Nhà khoa học trẻ xuất sắc của năm. Ông trở thành thành viên của IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) năm 1964. Năm 1974, ông nhận Huân chương Danh dự của IEEE, "Vì đã đi tiên phong trong các phương pháp hiện đại trong lý thuyết hệ thống, bao gồm các khái niệm về khả năng kiểm soát, khả năng quan sát, lọc và cấu trúc đại số." Ông cũng nhận được Huy chương Thế kỷ của IEEE năm 1984, giải thưởng Steele của Hiệp hội Toán học Hoa Kỳ năm 1987 và giải thưởng Bellman của Hội đồng Điều khiển Tự động Hoa Kỳ năm 1997.

Năm 1985, năm đầu tiên Quỹ Inamori trao giải thưởng Kyoto, *Kalman* được trao giải thưởng Kyoto về Công nghệ tiên tiến. Trong chuyến thăm Nhật Bản để nhận giải thưởng Kyoto, ông đã nói với báo chí về một biểu tượng mà ông đã nhìn thấy lần đầu tiên trong một quán rượu ở Colorado

Springs vào năm 1962 và nó đã gây ấn tượng với ông. Nó nói rằng:

*Người nhỏ bé bàn luận về người khác.*

*Người bình thường thảo luận về các sự kiện.*

*Người lớn thảo luận về ý tưởng.*

Ông cảm thấy công việc của mình liên quan đến các ý tưởng. *Kalman* là thành viên của Viện Hàn lâm Khoa học Quốc gia Hoa Kỳ, Viện Hàn lâm Kỹ thuật Quốc gia Hoa Kỳ, Viện Hàn lâm Khoa học và Nghệ thuật Hoa Kỳ, đồng thời là thành viên nước ngoài của Viện Hàn lâm Khoa học Pháp, Hungary và Nga. Năm 1990, nhân dịp sinh nhật lần thứ sáu mươi của *Kalman*, một hội nghị chuyên đề quốc tế đặc biệt đã được triệu tập với mục đích tôn vinh những thành tựu tiên phong của ông trong lý thuyết hệ thống toán học. Vào ngày 19 tháng 2 năm 2008, Học viện Kỹ thuật Quốc gia Hoa Kỳ đã trao cho *Kalman* Giải thưởng Draper, giải thưởng uy tín nhất của Quốc gia về kỹ thuật, vào một buổi tối buổi lễ tại Washington, DC. Trong một buổi lễ tại Nhà Trắng vào ngày 7 tháng 10 năm 2009, *Kalman* đã được Tổng thống Hoa Kỳ *Barak Obama* trao tặng Huân chương Khoa học Quốc gia. Ông đã được trao nhiều bằng tiến sĩ danh dự từ các trường đại học khác. Năm 2012, ông trở thành một thành viên của Hội Toán học Hoa Kỳ. Ông mất vào một buổi sáng ngày 2 tháng 7 năm 2016 tại nhà riêng ở Gainesville, Florida. *Kalman* qua đời vài tuần trước khi trao bằng tiến sĩ danh dự của Politecnico di Milano, vì vậy vợ ông là *Dina* đã thay mặt ông tham dự buổi lễ được tổ chức tại Politecnico di Milano vào ngày 12 tháng 9 năm 2016.

Có thể nói *Kalman* là người đi đầu trong việc phát triển một lý thuyết chặt chẽ về các hệ thống điều khiển. Trong số nhiều đóng góp nổi bật của ông là việc xây dựng và nghiên cứu hầu hết các khái niệm không gian trạng thái cơ bản (bao gồm khả năng điều khiển, khả năng quan sát, tính tối thiểu,

khả năng thực hiện được từ dữ liệu đầu vào/đầu ra, phương trình Riccati, điều khiển bậc hai tuyến tính và nguyên tắc phân tách) phổ biến ngày nay trong kiểm soát. Mặc dù một số khái niệm này cũng gặp phải trong các bối cảnh khác, chẳng hạn như lý thuyết điều khiển tối ưu, nhưng chính *Kalman* đã nhận ra vai trò trung tâm của chúng trong phân tích hệ thống. Các mô hình do *Kalman* xây dựng và các kết quả cơ bản mà ông thiết lập đã trở thành một phần nội tại của nền tảng của lý thuyết điều khiển và hệ thống và là công cụ tiêu chuẩn trong nghiên cứu cũng như trong mọi trình bày về lĩnh vực này, từ sách giáo khoa kỹ thuật đại học đến nghiên cứu toán học cấp sau đại học, sách chuyên khảo. Cách tiếp cận của *Kalman*, dựa trên việc sử dụng các kỹ thuật không gian trạng thái và thuật toán bình phương nhỏ nhất đệ quy, đã mở ra nhiều khả năng lý thuyết và thực tiễn mới. Tác động của bộ lọc *Kalman* đối với tất cả các lĩnh vực toán học, kỹ thuật và khoa học ứng dụng là rất lớn. Thậm chí không thể bắt đầu liệt kê các ứng dụng thực tế của nó. Cũng giống như các ví dụ về sự đa dạng của chúng, người ta có thể đề cập đến hướng dẫn của tàu vũ trụ Apollo và máy bay thương mại, sử dụng trong xử lý dữ liệu địa chấn, thiết bị nhà máy điện hạt nhân và mô hình nhân khẩu học, cũng như các ứng dụng trong kinh tế lượng.

Những ý tưởng về thống kê của *Kalman* rất kích thích tư duy và ông đã viết một số bài báo thú vị về chủ đề này kể từ khi nghỉ hưu. Ví dụ, ông đã có một bài giảng không chính thức được xuất bản dưới tên *Xác suất và khoa học* (1993), trong đó ông (trích dẫn từ một bài phê bình của *Zeno G Swijtink*) than thở về sự phát triển bùng nổ của các ứng dụng xác suất sau Thế chiến thứ hai và đặt câu hỏi liệu xác suất có tồn tại trong thế giới thực hay không. Tính ngẫu nhiên có, và để nắm bắt nó tốt hơn, ông đề xuất một định nghĩa mới: ngẫu nhiên không được xác định duy nhất bởi các quy

tắc cổ điển đơn giản. Tất cả các số vô tỷ được cho là ngẫu nhiên theo định nghĩa này. Tác giả kết luận, sự vắng mặt của sự tương tác giữa các nhà lý thuyết hỗn loạn và các nhà lý thuyết xác suất cũng cho thấy các mô hình xác suất cổ điển không liên quan đến thế giới thực như thế nào. Năm 1995, ông đã xuất bản *Tính ngẫu nhiên và xác suất*, và vào năm 2002, ông đã thảo luận về *Mô hình thống kê là gì?* Ông tin rằng khái niệm hiện được chấp nhận về một mô hình thống kê là không khoa học; đúng hơn, đó là sự phỏng đoán về những gì có thể cấu thành thực tế (khoa học) mà không có yếu tố phản hồi quan trọng, nghĩa là không kiểm tra mô hình được giả thuyết, định đề, mong muốn có về tự nhiên (nhưng trên thực tế chỉ là phỏng đoán) đối với thực tế đó. Nói thẳng ra, theo như những gì được biết đến ngày nay, không có thứ gọi là i.i.d cụ thể (i.i.d là viết tắt của independent and identically distributed, nghĩa là quá trình độc lập, phân bố giống hệt nhau), không phải vì điều này không được mong muốn mà bởi vì thiên nhiên dường như không giống như vậy. Như *Bertrand Russell* đã nói khi kết thúc cuộc đời dài cống hiến cho triết học của mình, "*Nói một cách đại khái, những gì chúng ta biết là khoa học và những gì chúng ta không biết là triết học.*" Trong bối cảnh khoa học, nhưng có lẽ không phải trong lĩnh vực ứng dụng, ông e rằng mô hình thống kê ngày nay thuộc về lĩnh vực triết học.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

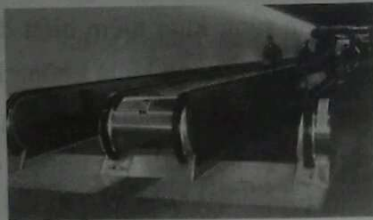
- [1.] Grewal, M. S., & Andrews, A. P. (2014). *Kalman filtering: Theory and Practice with MATLAB*. John Wiley & Sons.
- [2.] [https://en.wikipedia.org/wiki/Rudolf\\_E.\\_K%C3%A1lm%C3%A1n](https://en.wikipedia.org/wiki/Rudolf_E._K%C3%A1lm%C3%A1n)
- [3.] [https://ethw.org/Rudolf\\_E.\\_Kalman](https://ethw.org/Rudolf_E._Kalman)
- [4.] <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kalman/>
- [5.] <http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/index.html#Anchor-Rudolph-6296>



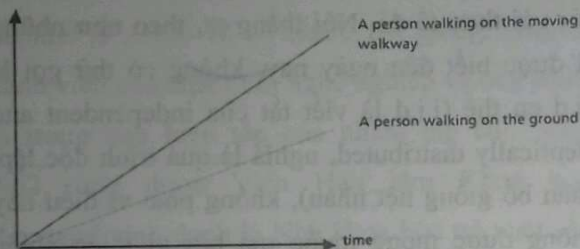
# TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

## BÀI SỐ 94

**PROBLEM.** Below is a photograph of moving walkways. The following Distance-Time graph shows a comparison between "walking on the moving walkway" and "walking on the ground next to the moving walkway."



Distance from the start of the moving walkway



Assuming that, in the above graph, the walking pace is about the same for both persons, add a line to the graph that would represent the distance versus time for a person who is standing still on the moving walkway.

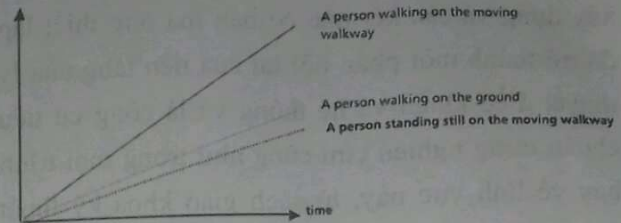
**Remark:** This problem is collected from Sample Questions from OECD's PISA Assessments.

**Đường dẫn:** Take the Test : Sample Questions from OECD's PISA Assessments | PISA | OECD iLibrary (oecd-ilibrary.org)

(PISA : Programme for International Student Assessment).

**Solution.**

Distance from the start of the moving walkway



(This figure is also collected from the same resource mentioned above)

By the given graphs we can see that the speed of people on the ground and the speed of the walkway are constant and the second is a little bit less than the first. Therefore the distance-time graph of a person stand still on the moving walkway is a dot line which is a little bit below the one of the person walking on the ground.

### TỪ VỰNG

distance-time graph : đồ thị biểu diễn khoảng cách theo thời gian

moving walkway : băng chuyền

NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

### BÀI DỊCH SỐ 92

**BÀI TOÁN.** Một bể đựng xăng rỗng được đổ đầy bể bằng một ống dạng hình trụ có đường kính đáy 8cm. Xăng chảy dọc theo đường ống đó với vận tốc 2 mét mỗi giây. Mất 24 phút để đầy bể. Tính dung tích của bể. Đưa ra câu trả lời của bạn với đơn vị lít.

**Lưu ý:** Bài toán này được sưu tầm từ một bài trước đây của kì thi IGCSE.

**Lời giải.** Trong một giây lượng xăng chảy vào bể bằng thể tích của một hình trụ có đường kính đáy 8cm và chiều cao 2 mét. Giá trị này là:

$$V = hB = 200 \times \pi \times 4^2 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Từ đó trong 24 phút, lượng xăng chảy vào bể là:

$$24 \times 60 \times 200 \times \pi \times 4^2 \approx 14476459 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Vì vậy dung tích của bể khoảng 14476.5 lít.

**Nhận xét.** Các bạn Nguyễn Quốc Hoàng Anh, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An; Trần Thị Thanh Thu, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế, Thừa Thiên Huế; Nguyễn Hùng Cường, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, Bình Định có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm. Xin hoan nghênh các bạn.

HỒ HẢI (Hà Nội)



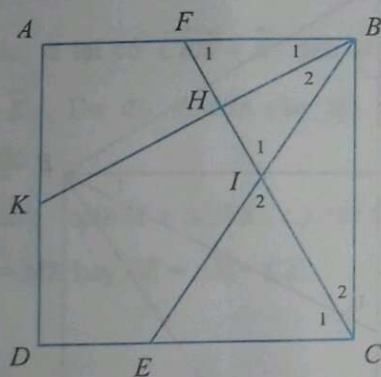
**BÀI TOÁN 73.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Gọi  $E$  là điểm nằm giữa hai điểm  $D$  và  $C$ . Tia phân giác của  $\widehat{ABE}$  cắt  $AD$  tại  $K$ . Chứng minh

$$BE = AK + CE.$$

**Phân tích, tìm lời giải.**

Từ kết luận của bài toán:  $BE = AK + CE$ , rất tự nhiên ta lấy điểm  $I$  trên đoạn  $BE$  sao cho  $EI = CE$ , rồi chứng minh  $BI = AK$  thì vấn đề được giải quyết. Do đó ta có cách giải thứ nhất như sau:

**Cách 1.**



Hình 1

Vì  $BC < BE$  nên  $DC < BE$ . Mà  $CE < DC$  nên  $EC < BE$ . Trên đoạn  $EB$  lấy điểm  $I$  sao cho  $EI = EC$ , tia  $CI$  cắt  $AB$  tại  $F$  và cắt  $BK$  tại  $H$ .

Khi đó  $\triangle IEC$  cân tại  $E \Rightarrow \widehat{I_2} = \widehat{C_1}$ . Ta lại có:

$\widehat{F_1} = \widehat{C_1}$  ( $AB \parallel CD$ ),  $\widehat{I_1} = \widehat{I_2} \Rightarrow \widehat{I_1} = \widehat{F_1} \Rightarrow \triangle FBI$  cân tại  $B$ .

Mà  $BH$  là đường phân giác nên cũng là đường cao suy ra:  $BK \perp CF \Rightarrow \triangle ABK = \triangle BCF$  (g.c.g)

$$\Rightarrow AK = BF.$$

Vì  $EI = EC < EB$  nên  $I$  nằm giữa  $E$  và  $B \Rightarrow BE = EI + BI$ .

Mà  $AK = BI (= BF)$ ,  $EI = EC$  nên  $BE = AK + CE$ .

Với cách nghĩ tương tự ta có thể tạo ra trên đoạn  $BE$  một đoạn thẳng bằng  $AK$ , rồi chứng minh phần còn lại của đoạn  $BE$  bằng  $EC$ . Do vậy ta nghĩ đến sự liên hệ giữa quan hệ bằng nhau và vuông góc trong hình vuông kết hợp với tính chất tam giác cân, ta có cách giải thứ 2 như sau:

**Cách 2.** Trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $F$  sao cho  $BF = AK$ . Gọi  $H, I$  lần lượt là giao điểm của  $CF$  với các đường thẳng  $BK$  và  $BE$ .

Khi đó,  $\triangle ABK = \triangle BCF$  (c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_2}$ .

Mà  $\widehat{C_2} + \widehat{F_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{F_1} = 90^\circ \Rightarrow BK \perp CF$ .

$\triangle BFI$  có đường cao  $BH$  cũng là đường phân giác nên tam giác  $BFI$  cân tại  $B \Rightarrow BF = BI$  và  $\widehat{F_1} = \widehat{I_1}$ .

Ta lại có:  $\widehat{F_1} = \widehat{C_1}$  ( $AB \parallel CD$ ),  $\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$ , do đó  $\widehat{C_1} = \widehat{I_2} \Rightarrow \triangle IEC$  cân tại  $E \Rightarrow EI = EC$ .

Ta có:  $AK = BI (= BF)$ ,  $EC = EI$   
 $\Rightarrow AK + EC = BI + EI = BE$ .

Vậy  $BE = AK + CE$ .

Qua cách giải này ta có ý nghĩ tạo quan hệ vuông góc trước để tạo các đoạn thẳng bằng  $AK$  và  $CE$ , cụ thể như sau:

**Cách 3.** Từ  $C$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $BK$  cắt các đường thẳng  $AB, BK, BE$  lần lượt tại  $F, H$  và  $I$ .

Khi đó,  $\triangle BFI$  có đường cao  $BH$  cũng là đường phân giác nên tam giác  $BFI$  cân tại  $B \Rightarrow BF = BI$  và  $\widehat{F_1} = \widehat{I_1}$ .

Ta lại có:  $\widehat{F_1} = \widehat{C_1}$  ( $AB \parallel CD$ ),  $\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$ , do đó:

$$\widehat{C_1} = \widehat{I_2} \Rightarrow \triangle IEC \text{ cân tại } E \Rightarrow EI = EC.$$



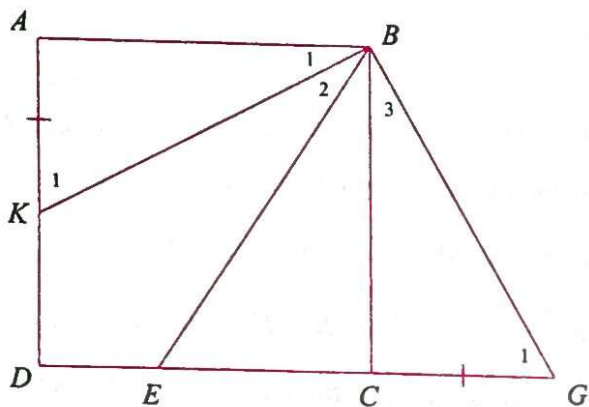
Mặt khác, vì  $BH \perp CF \Rightarrow \widehat{F}_1 + \widehat{B}_1 = 90^\circ$ . Mà tam giác  $BFC$  vuông tại  $B$  nên

$$\widehat{F}_1 + \widehat{C}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C}_2 \Rightarrow \Delta ABK = \Delta BCF \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow AK = BF. \text{ Vì } AK = BI (= BF), EC = EI$$

$$\Rightarrow AK + EC = BI + EI = BE \text{ hay } BE = AK + CE.$$

**Cách 4.** Tạo ra đoạn thẳng bằng tổng  $AK + CE$  rồi chứng minh  $BE$  bằng đoạn thẳng vừa tạo, cụ thể:



Hình 2

Trên tia đối của tia  $CD$  lấy điểm  $G$  sao cho  $CG = AK$ , khi đó  $\Delta ABK = \Delta CBG$  (c.g.c). Do đó

$$\text{ta suy ra: } \widehat{B}_3 = \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$$

$$\Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{EBC} = \widehat{B}_3 + \widehat{EBC}$$

$$\Rightarrow \widehat{KBC} = \widehat{EBG}.$$

$$\text{Ta lại có: } \widehat{B}_1 + \widehat{KBC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B}_3 + \widehat{EBG} = 90^\circ.$$

Mà  $\widehat{B}_3 + \widehat{G}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{G}_1 = \widehat{EBG} \Rightarrow \Delta EBG$  cân tại  $E$  nên  $EB = EG \Rightarrow EB = EC + AK$ .

**Cách 5.** Qua  $B$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $BK$  cắt  $DC$  tại  $G$ .

Ta có:  $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_3$  (vì cùng phụ với  $\widehat{KBC}$ ), do đó  $\Delta ABK = \Delta CBG$  (g.c.g)  $\Rightarrow AK = CG$

$$\Rightarrow EG = EC + AK.$$

$$\text{Ta lại có: } \widehat{B}_2 + \widehat{EBG} = 90^\circ, \widehat{B}_3 + \widehat{G}_1 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EBG} = \widehat{G}_1 \Rightarrow \Delta EBG \text{ cân tại } E \Rightarrow EB = EG.$$

$$\text{Mà } EG = EC + AK \text{ nên } EB = EC + AK.$$

**Cách 6.** Trên tia  $EC$  lấy điểm  $G$  sao cho  $EG = EB$ . Vì  $EC < EB$  nên  $EC < EG$  nên ba điểm  $E, C, G$  thẳng hàng theo thứ tự.

$$\text{Ta có tam giác } EBG \text{ cân tại } E \Rightarrow \widehat{G}_1 = \widehat{EBG}.$$

$$\text{Vì } \widehat{G}_1 + \widehat{B}_3 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EBG} + \widehat{B}_3 = 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{EBC} + 2\widehat{B}_3 = 90^\circ.$$

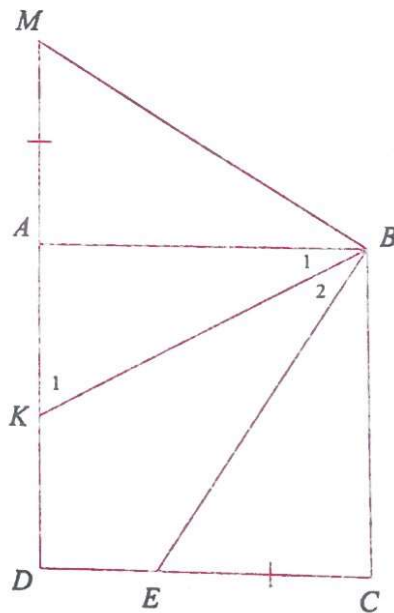
$$\text{Mà } \widehat{EBC} + \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{EBC} + 2\widehat{B}_1 = 90^\circ,$$

$$\text{do đó: } \widehat{B}_3 = \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \Rightarrow \Delta ABK = \Delta CBG \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow AK = CG \Rightarrow EG = EC + AK$$

$$\Rightarrow BE = CE + AK.$$

**Cách 7.**



Hình 3

Trên tia đối của tia  $AK$  lấy điểm  $M$  sao cho  $AM = EC$ . Khi đó:

$$\Delta ABM = \Delta CBE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{ABM}.$$

$$\text{Mà } \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \Rightarrow \widehat{EBC} + \widehat{B}_2 = \widehat{ABM} + \widehat{B}_1$$

$$\Leftrightarrow \widehat{MBK} = \widehat{CBK}.$$



Mặt khác, ta lại có  $\widehat{CBK} = \widehat{K}_1$  (so le trong) nên  $\widehat{MBK} = \widehat{K}_1$ . Do đó  $\triangle MBK$  cân tại  $M \Rightarrow MB = MK$ .

Ta lại có:  $\triangle ABM = \triangle CBE$  (c.g.c)  $\Rightarrow MB = BE$ .

Suy ra:  $BE = MK \Rightarrow BE = AM + AK$  nên

$$BE = AK + CE$$

Cách 8. Qua  $B$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $BE$  cắt tia  $KA$  tại  $M$ .

Ta có:  $\widehat{EBC} = \widehat{ABM}$  (vì cùng phụ với  $\widehat{ABE}$ )

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle CBE \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AM = EC.$$

Suy ra:

$$AK + CE = AK + AM = MK.$$

Ta lại có  $\widehat{EBC} = \widehat{ABM}$ ,  $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$

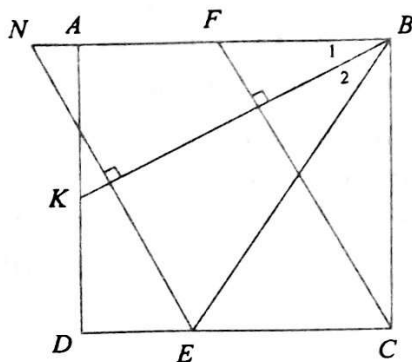
$$\Rightarrow \widehat{EBC} + \widehat{B}_2 = \widehat{ABM} + \widehat{B}_1$$

$$\Leftrightarrow \widehat{MBK} = \widehat{CBK}.$$

Mặt khác, ta lại có  $\widehat{CBK} = \widehat{K}_1$  (so le trong) nên  $\widehat{MBK} = \widehat{K}_1$ . Do đó  $\triangle MBK$  cân tại  $M$  suy ra:  $MB = MK$ .

Ta lại có:  $\triangle ABM = \triangle CBE$  (c.g.c)  $\Rightarrow MB = BE$  nên  $BE = MK$  hay  $BE = AK + CE$ .

Cách 9.



Hình 4

Từ  $C$  và  $E$  vẽ các đường thẳng vuông góc với  $BK$  cắt đường thẳng  $AB$  theo thứ tự tại  $F$  và  $N$ .

Khi đó tam giác  $BNE$  có  $BK$  vuông góc với  $NE$  và  $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$  nên tam giác  $BNE$  cân tại  $B$ , suy ra:  $BE = BN$ .

Mà tứ giác  $ECFN$  có  $NF \parallel EC$ ,  $NE \parallel CF$  nên  $ECFN$  là hình bình hành  $\Rightarrow CE = NF$ .

Mặt khác,  $\triangle ABK = \triangle BCF$  (g.c.g)

$$\Rightarrow AK = BF.$$

Do đó:  $BF + NF = AK + CE$

$$\Rightarrow BN = AK + CE,$$

mà  $BN = BE \Rightarrow BE = AK + CE$ .

## ĐÀO QUỐC CHUNG

(GV THCS Vạn Phong, Diễn Châu, Nghệ An)

**Nhận xét.** Hai bạn Nguyễn Văn Lâm, Thái Bá Nhân, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An, mỗi bạn đóng góp một cách giải tương tự như cách 4 và cách 5 ở trên; bạn Nguyễn Văn Cảnh, GV THCS Long Hậu, xã Long Hậu, huyện Cần Giuộc, Long An và bạn Nguyễn Minh Thọ, 214, Điện Biên Phủ, Q. 3, TP. Hồ Chí Minh đưa ra hai cách giải: Cách 1 tương tự cách 4 ở trên, cách 2 bạn đặt  $\widehat{ABK} = \alpha$ ,  $a$  là cạnh hình vuông, sau đó biểu diễn  $BE$ ,  $AK$ ,  $EC$  theo  $a$  và các hàm số lượng giác của góc  $\alpha$  cũng đi đến hệ thức cần chứng minh. Xin hoan nghênh các bạn.

LÊ MAI (Hà Nội)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 75 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.8.2023.

**BÀI TOÁN 75.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ , điểm  $D$  đối xứng với  $A$  qua  $B$ . Đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $DH$  cắt  $BC$  tại  $I$ . Chứng minh  $IH = IC$ .

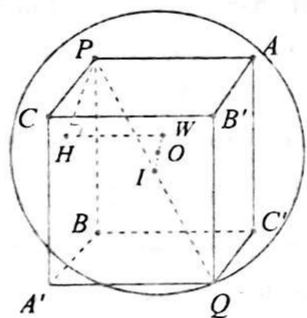
VÕ MỘNG TRINH

(GV THCS Cát Minh, Phù Cát, Bình Định)



**BÀI TOÁN 82 (IMO 1978).** Cho  $P$  là điểm cố định nằm bên trong một hình cầu cho trước. Ba đoạn thẳng  $PA, PB, PC$  vuông góc đôi một có ba đầu mút  $A, B, C$  nằm trên mặt cầu. Gọi  $Q$  là đầu mút thứ hai của đường chéo  $PQ$  của hình hộp chữ nhật mà ba cạnh là  $PA, PB, PC$ . Tìm quỹ tích của điểm  $Q$  khi ba điểm  $A, B, C$  chạy trên mặt cầu.

**Lời giải.** • **Phần thuận.** Gọi  $O$  là tâm hình cầu đã cho. Đặt  $OP = d$ . Gọi  $(S)$  là mặt cầu  $(O; R)$  đã cho (hình vẽ).



Ta có:  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ . Do  $PA, PB, PC$  đôi một vuông góc nên  $PQ^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2$ .

$$\begin{aligned} \text{Như vậy } OQ^2 &= \overline{OQ}^2 = (\overline{PQ} - \overline{PO})^2 \\ &= PQ^2 + PO^2 - 2\overline{PO}(\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}) \\ &= PQ^2 + PO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 \\ &\quad - (PA^2 + PB^2 + PC^2) - 3PO^2 \end{aligned}$$

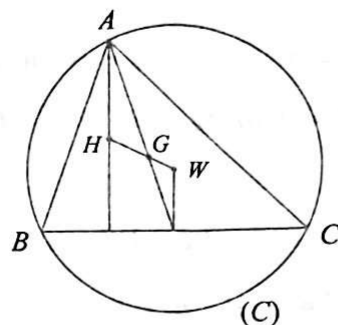
hay  $OQ^2 = 3R^2 - 2d^2$  (1). Vậy  $Q$  nằm trên mặt cầu tâm  $O$ , bán kính bằng  $\sqrt{3R^2 - 2d^2} > R$ .

• **Phần đảo.** Lấy điểm  $Q$  bất kỳ trên mặt cầu tâm  $O$  bán kính  $\sqrt{3R^2 - 2d^2} > R$ . Ta phải chứng minh tồn tại một hình hộp chữ nhật nhận  $PQ$  làm một

đường chéo và có ba cạnh là  $PA, PB, PC$  với  $A, B, C$  nằm trên mặt cầu  $(S)$  đã cho.

Thật vậy trong trường hợp tổng quát  $O$  không nằm trên  $PQ$  và  $(PQ, O)$  xác định một mặt phẳng  $(\alpha)$  nào đấy. Nối  $O$  với trung điểm  $I$  của  $PQ$ , rồi qua điểm  $G$  trên  $PQ$  được xác định bởi  $\overline{PG} = \frac{1}{3}\overline{PQ}$ ,

dựng mặt phẳng  $(\beta) \perp OI$ ,  $(\beta)$  cắt mặt cầu  $(S)$  theo một đường tròn  $(C)$  nào đấy (xem hình vẽ).



Kẻ  $PH \perp (\beta)$  và  $OW \perp (\beta)$ . Dễ thấy rằng ba điểm  $H, G, W$  thẳng hàng và  $\overline{HG} = 2\overline{GW}$ .

Trong mặt phẳng  $(\beta)$  dựng tam giác  $ABC$  nội tiếp  $(C)$  nhận  $G$  và  $H$  theo thứ tự là trọng tâm và trực tâm (chỉ việc lấy  $A$  tùy ý thuộc  $(C)$  rồi dựng  $BC$  tiếp theo). Nối  $PA, PB, PC$  ta được  $PABC$  là tứ diện trực tâm (các cạnh đôi một vuông góc) (2).

Từ (1) suy ra:  $PQ^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2$ .

Từ (2) suy ra:  $AA' = BB' = CC'$ .

Như vậy  $AA' = BB' = CC' = PQ$ . Suy ra

$PA \perp PB, PA \perp PC, PB \perp PC$  và hình hộp  $PAB'C.BC'QA'$  là hình hộp chữ nhật.

**Nhận xét.** Lời giải của một số bạn không đúng, một số bạn khác chỉ làm phần thuận mà “quên” không làm phần đảo nên lời giải cũng không chặt chẽ.

**NHƯ HOÀNG**

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31/8/2023.

**BÀI TOÁN 84.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  $(a; b)$  thỏa mãn  $a^{b^2} = b^a$ .

**KHÁNH HỮU (Hà Nội)**

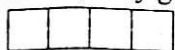


(Đề đăng trên TH&TT số 549, tháng 3 năm 2023)

**Phân tích sai lầm.**

Bạn Mai sai ở bước 2. Cách lập của bạn Mai không đảm bảo số lập được chứa 2 chữ số lẻ đứng cạnh nhau (chẳng hạn, theo cách lập của bạn Mai có thể lập được số 2460 nhưng số này không thỏa mãn yêu cầu của bài toán).

**Lời giải đúng.** Ta xét một dãy gồm 4 ô như sau



Mỗi số cần lập ứng với một cách chọn ra 4 phần tử của tập  $\{0; 2; 4; 6; a\}$  và hoán vị 4 phần tử vừa chọn vào 4 ô trên sao cho ô đầu tiên không phải chữ số 0, ô cuối cùng phải là chữ số chẵn, với  $a \in \{13; 31; 15; 51; 35; 53\}$ .

**Bước 1:** Chọn  $a \in \{13; 31; 15; 51; 35; 53\}$ , có 6 cách chọn.

**Bước 2:** Trường hợp 1, chọn ô đầu tiên để điền  $a$ . Sau đó, chọn 3 trong số các chữ số 0; 2; 4; 6 và xếp vào 3 ô còn lại, có  $A_3^3$  cách.

Trường hợp 2, chọn ô thứ 2 hoặc ô thứ 3 để điền  $a$ , có 2 cách. Chọn 1 trong số các chữ số 2; 4; 6 để điền vào ô đầu tiên, có 3 cách chọn. Sau đó, chọn 2 trong số các chữ số 0; 2; 4; 6 (trừ chữ số đã xếp vào ô đầu tiên) và xếp vào 2 ô còn lại, có  $A_3^2$  cách. Số cách hoàn thành bước 2 là:

$$1.A_3^3 + 2.3.A_3^2 = 24 + 36 = 60 \text{ cách.}$$

Vậy lập được tất cả  $6.60 = 360$  số theo yêu cầu của bài toán. Chọn C.

**Nhận xét.** Các bạn: Nguyễn Hữu Đức Nam, 10A1, THPT Cẩm Xuyên, Hà Tĩnh, Nguyễn Như Dương Long, 10B1, THPTCS&THPT Lê Thánh Tông, TX. Phú Mỹ, Bà Rịa-Vũng Tàu, Phạm Xuân Khánh, 10A2, THPT Tam Phước, TP. Biên Hòa, Đồng Nai, Nguyễn Hùng Cường, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, Bình Định đã phát hiện đúng sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Xin hoan nghênh các bạn.

KIHI VI

**ĐÚNG HAY SAI?**



**Đề bài.** Trong các cặp số thực  $(a, b)$  để bất phương trình

$$(x-1)(x-a)(x^2+x+b) \geq 0$$

nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ , tích  $a \cdot b$  có giá trị nhỏ nhất bằng

- A.  $-\frac{1}{4}$     B.  $-2$     C.  $\frac{1}{4}$     D.  $0$ .

**Lời giải của bạn Tùng.**

Đề  $(x-1)(x-a)(x^2+x+b) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  ta xét hai trường hợp sau đây:

- Trường hợp 1:

$$\begin{cases} (x-1)(x-a) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ (x^2+x+b) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 1-4b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Do đó  $a \cdot b \geq \frac{1}{4}$ .

- Trường hợp 2:  $x=1, x=a$  đều là nghiệm của tam thức bậc hai  $x^2+x+b$ , tức là

$$\begin{cases} 2+b=0 \\ a^2+a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a^2+a-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases}$$

Dẫn tới  $a \cdot b = -2$  hoặc  $a \cdot b = 4$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $a \cdot b$  bằng  $-2$ . Chọn đáp án B.

**Các bạn có nhận xét gì về lời giải của bạn Tùng không?**

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Yên Phong, Bắc Ninh)



**BAN CỐ VẤN KHOA HỌC**

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

**CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN**

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam

HOÀNG LÊ BÁCH

Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam

PHẠM VĨNH THÁI

Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD

PHAN XUÂN THÀNH

**HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP**

**Tổng biên tập: TS. TRẦN HỮU NAM**

**Phó tổng biên tập: CN. TRẦN THỊ KIM CƯƠNG**

**Thư kí Tòa soạn: ThS. HỒ QUANG VINH**

**TS. LÊ HỒNG MAI**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHÁC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

**TRONG SỐ NÀY**



**Dành cho Trung học Cơ sở**

*For Lower Secondary School*

Nguyễn Anh Tuấn – Chứng minh hai đường thẳng vuông góc.



Hướng dẫn giải đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Nam Định, năm học 2022 - 2023.



Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Bắc Ninh, năm học 2022 - 2023.



**Diễn đàn dạy học toán**

Phan Thế Hải – Một ứng dụng của phép tính tích phân.



**Phương pháp giải toán**

Nguyễn Văn Mến – Toàn ánh, đơn ánh, song ánh với bài toán phương trình hàm chứa tham số.



**Đề ra kỳ này**

T1/553, ..., T12/553, L1/553, L2/553



**Problems in This Issue**



**Giải bài kì trước**

T1/549, ..., T12/549, L1/549, L2/549.

*Solutions to Previous Problems*



**Lịch sử toán học**

Đặng Thị Kiêm Hồng – Kalman, người tiên phong trong lý thuyết điều khiển.



Tiếng Anh qua các bài toán – Bài số 94 – Bài dịch số 92.



Nhiều cách giải cho một bài toán – Giải bài toán 73 – Đề bài toán 75.



Du lịch thế giới qua các bài toán hay – Giải bài toán 82. Đề bài toán 84.



**Sai lầm ở đâu?**

**Biên tập:** LÊ MAI, NHƯ HOANG

**Trị sự, phát hành:** HOANG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN

**Mĩ thuật:** QUỐC HIỆP, THANH LONG

**Thiết kế, chế bản:** MINH HÒA