



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ



Số 554
Tháng 8 - 2023
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 60 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;

ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoc tuoi tre vietnam@gmail.com - Website: vien nghiencuusachgd.com



Karl Zsigmondy
(1867 - 1925)

Nhà toán học người Áo
gốc Hungary



Cảnh đẹp thủ đô Viên (Áo)

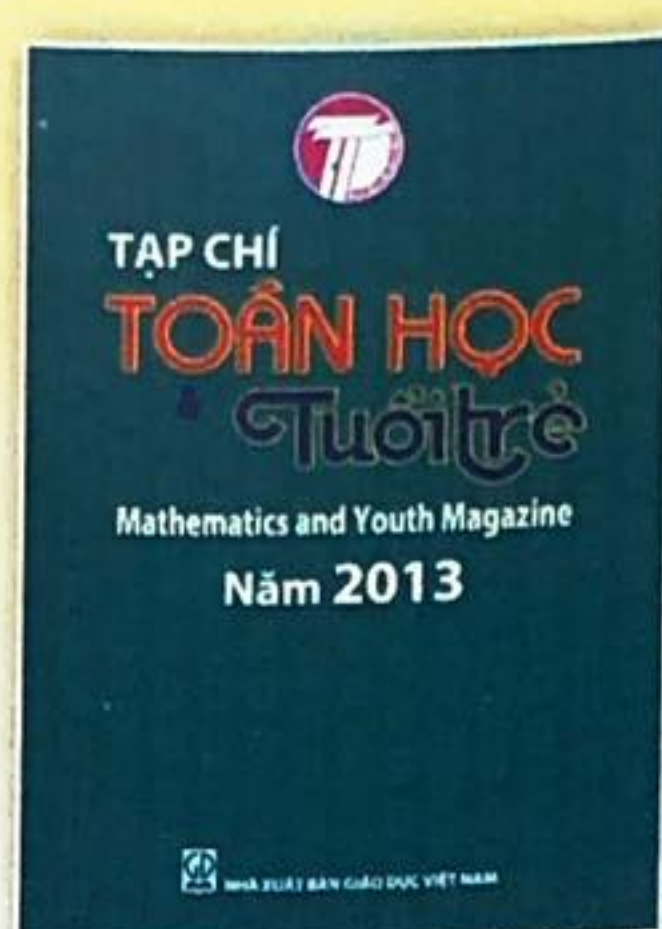
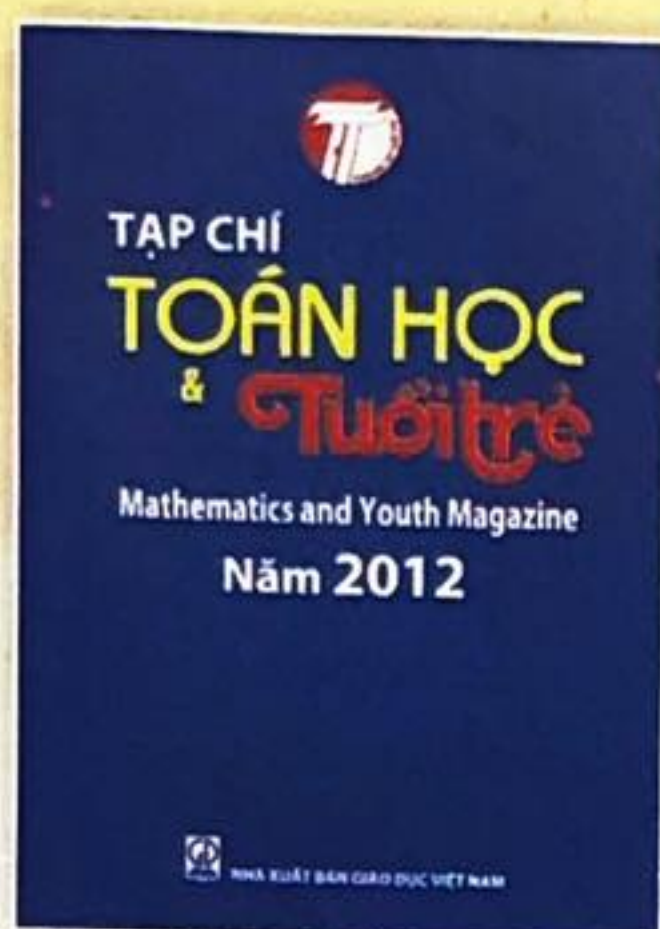
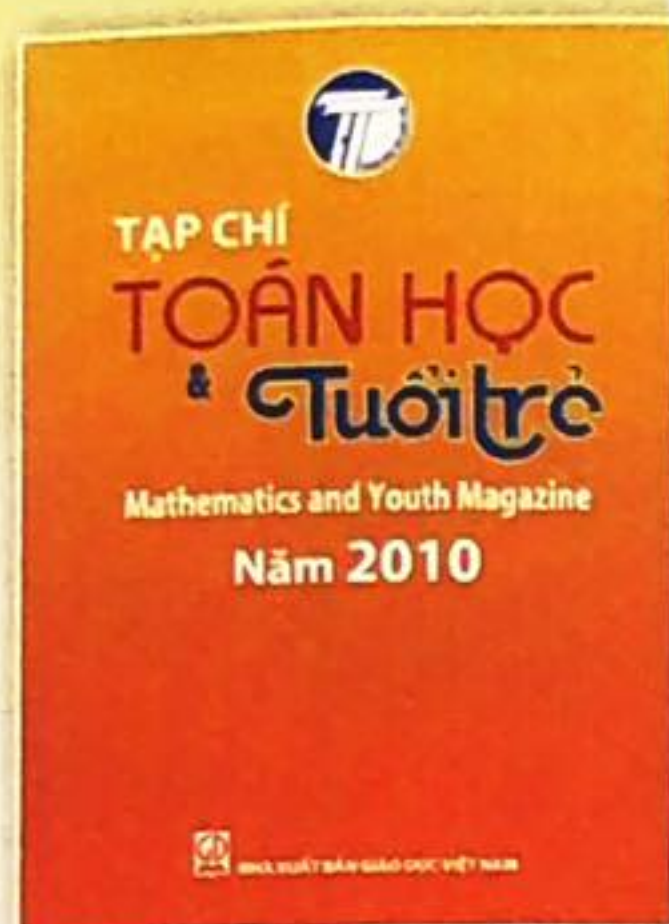


TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đông tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



Năm 2010
Khổ $19 \times 26,5$
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2012
Khổ $19 \times 26,5$
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ $19 \times 26,5$
Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014
Khổ $19 \times 26,5$
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ $19 \times 26,5$
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ $19 \times 26,5$
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ $19 \times 26,5$
Giá bìa: 199.000 đồng

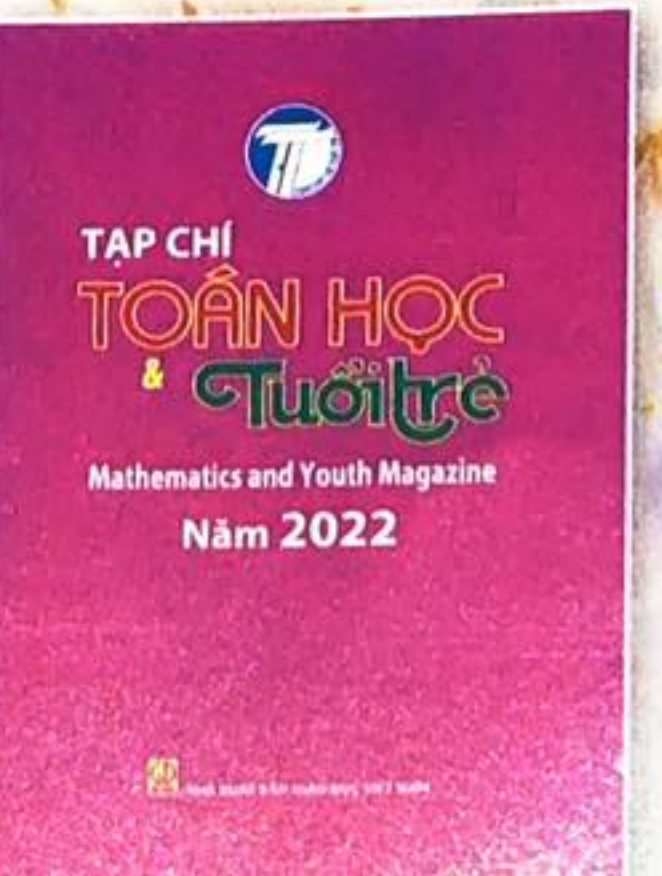
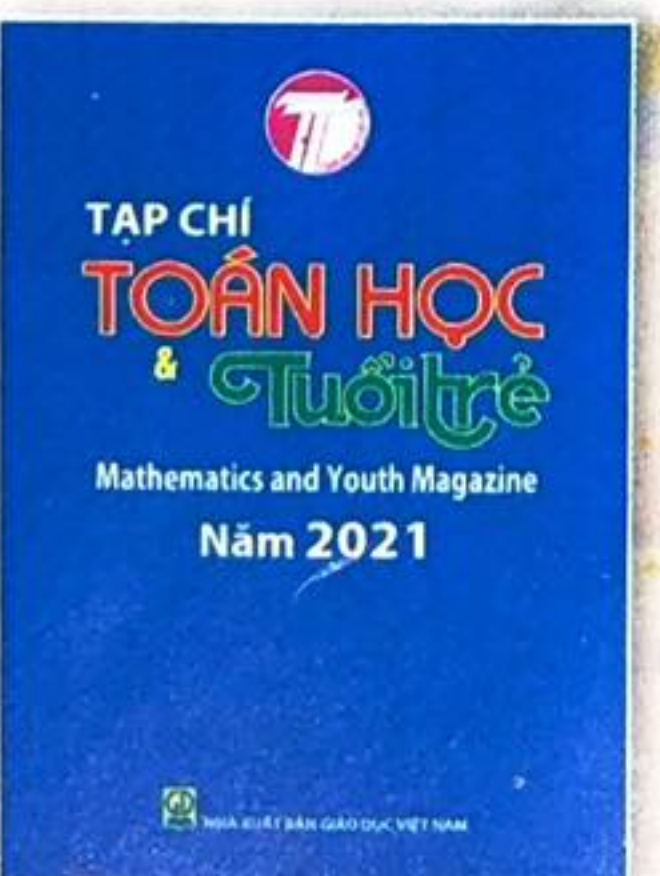
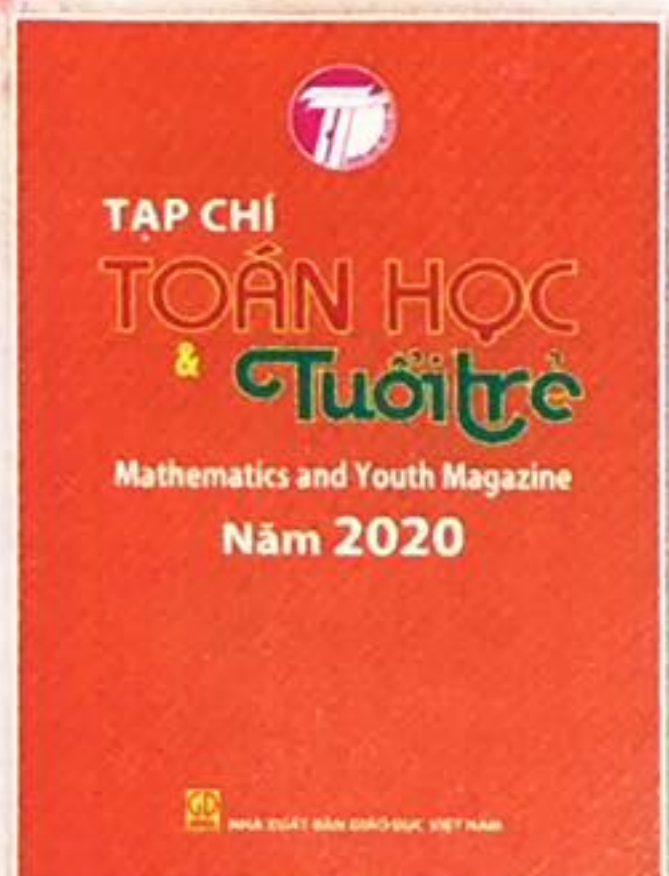
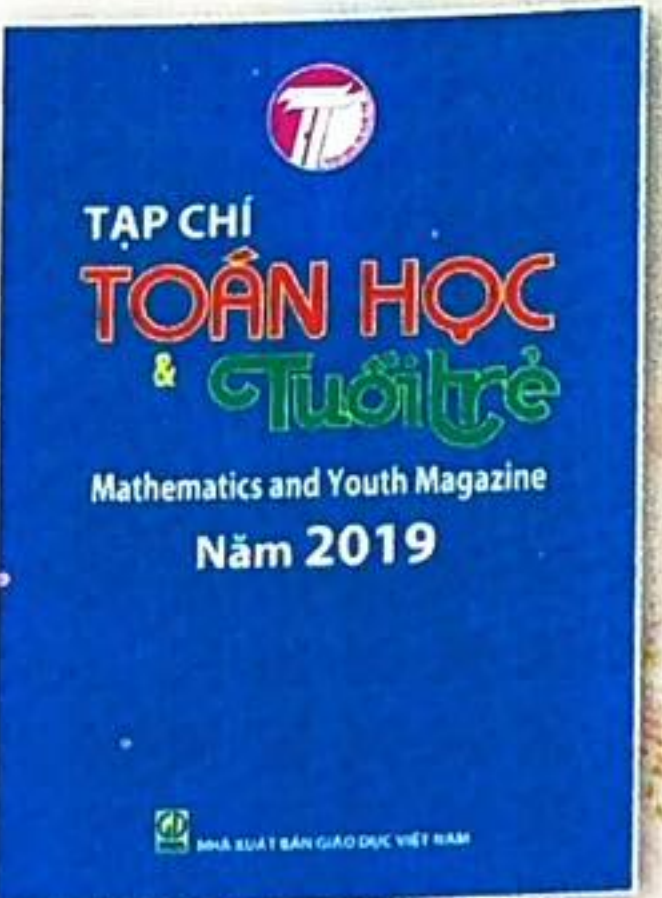
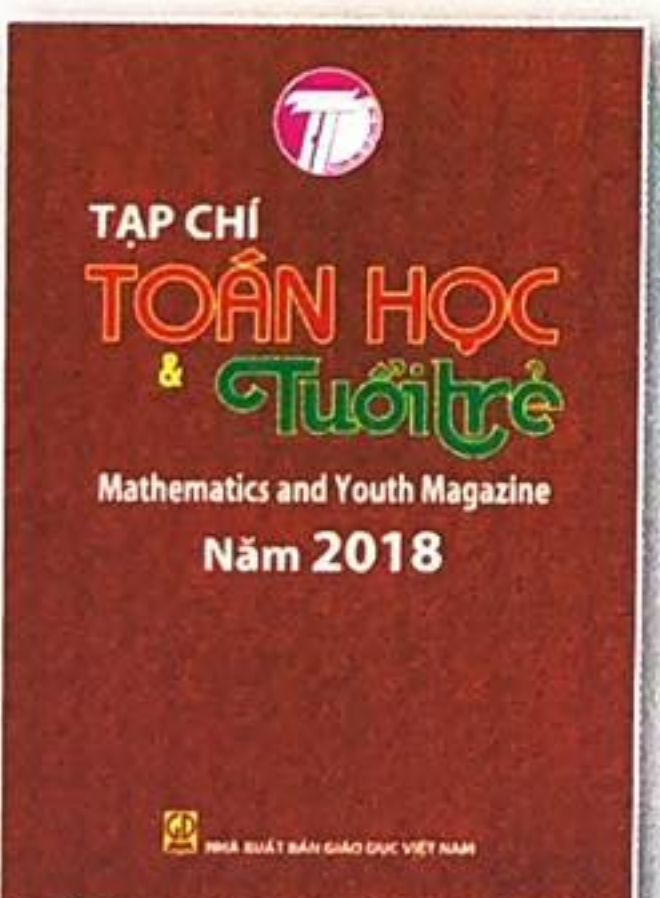
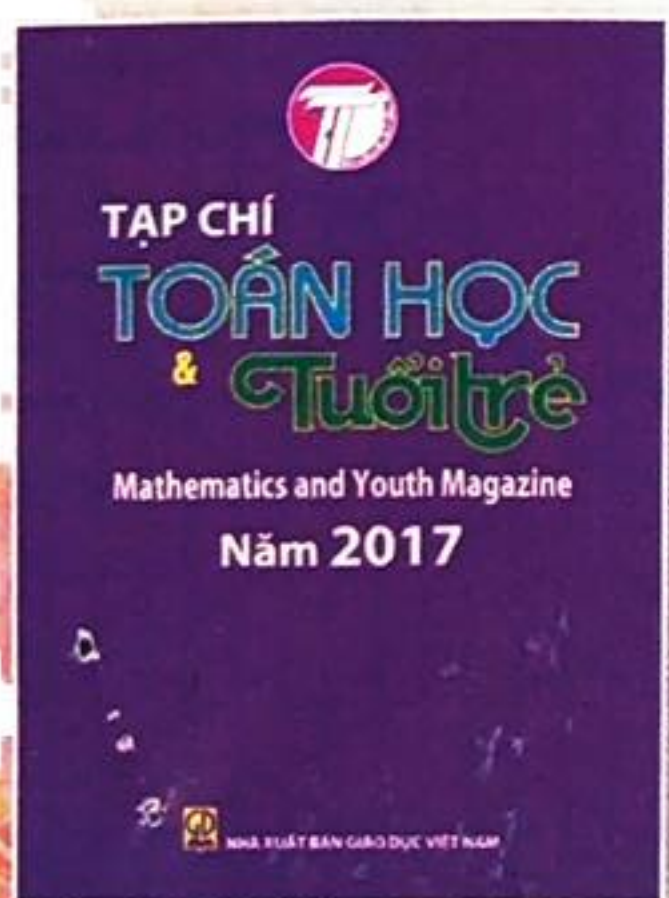
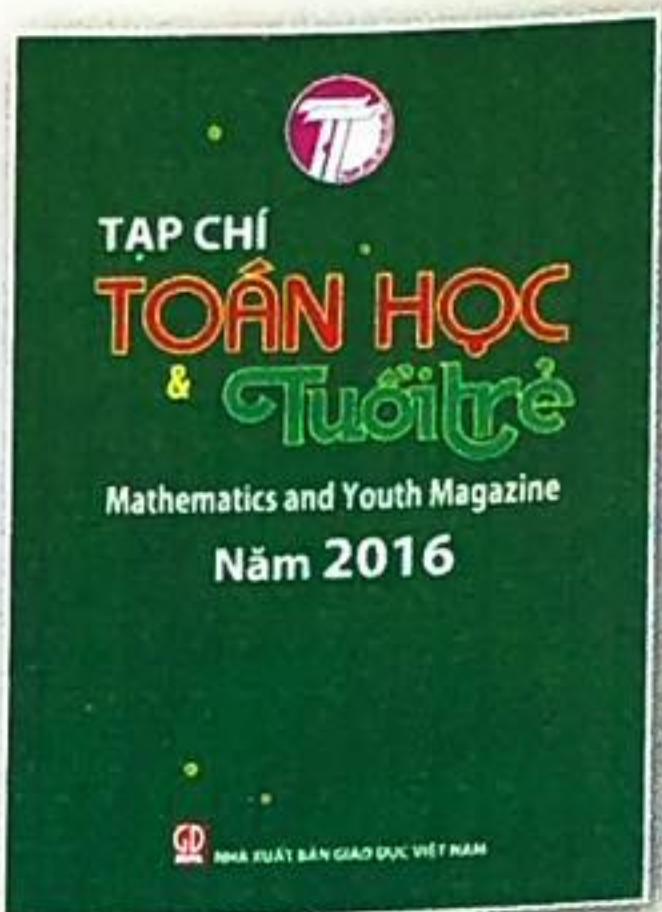
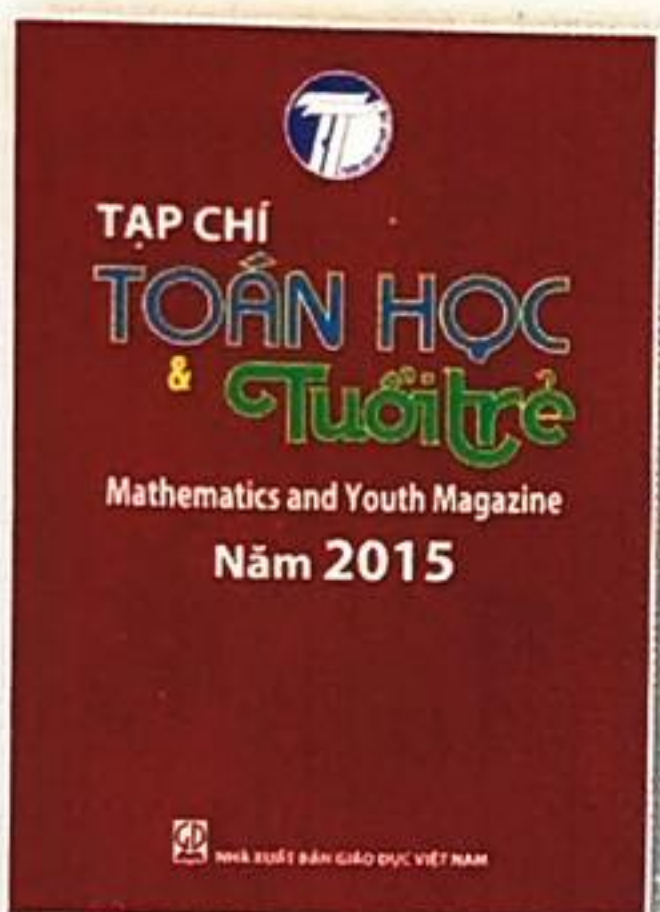
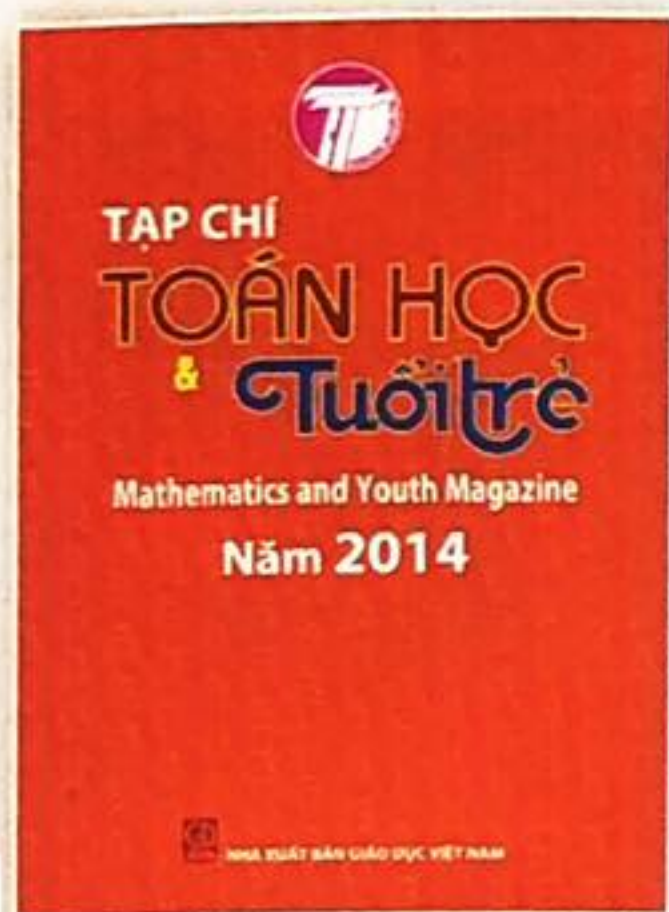
Năm 2018
Khổ $19 \times 26,5$
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ $19 \times 26,5$
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ $19 \times 26,5$
Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021
Khổ $19 \times 26,5$
Giá bìa: 240.000 đồng

Năm 2022
Khổ $19 \times 26,5$
Giá bìa: 260.000 đồng



Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
● Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
● Email: toanhocuoitrevietnam@gmail.com



MỘT SỐ BÀI TOÁN TÌM SỐ NGUYÊN TỐ

TRẦN VĂN HẠNH

(GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Bài toán tìm số nguyên tố để thỏa mãn điều kiện nào đó là một bài toán khó, giải nó phải sử dụng nhiều kiến thức của lý thuyết số như: lý thuyết chia hết, lý thuyết đồng dư, phương trình nghiệm nguyên,... Phương pháp lập luận đòi hỏi phải logic và chặt chẽ. Để giảm bớt độ khó loại toán này, trong bài viết chúng tôi phân loại và hệ thống một số dạng: Tìm số nguyên tố để biểu thức là một số chính phương, số lập phương; Tìm số nguyên tố để phân thức là một số nguyên, ...

2. MỘT SỐ KIẾN THỨC LIÊN QUAN

- Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1 chỉ chia hết cho 1 và chính nó.
- Số tự nhiên lớn hơn 1 không là số nguyên tố được gọi là hợp số.
- 2 là số nguyên tố nhỏ nhất và số nguyên tố chẵn duy nhất.
- Nếu a, b là hai số nguyên tố cùng nhau và b là ước của tích ac thì b là ước của c .
- Nếu a là số tự nhiên và p là số nguyên tố thì hoặc a nguyên tố với p hoặc a chia hết cho p .
- **Định lý (Zsigmondy)** Cho a, b là các số nguyên dương và $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó tồn tại một ước nguyên tố p của $a^n - b^n$ nhưng p không là ước của $a^k - b^k, \forall 1 \leq k < n$ trừ các trường hợp sau:

i) $2^6 - 1^6$;

ii) $a^2 - b^2$ và $a + b$ là một lũy thừa của 2.

• $\forall x, y, n \in \mathbb{N}^* : x^n < y^n < (x+2)^n \Rightarrow y^n = (x+1)^n$.

3. MỘT SỐ DẠNG TOÁN TÌM SỐ NGUYÊN TỐ

3.1. Tìm số nguyên tố để một biểu thức là số chính phương

Bài toán. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho biểu thức $f(p)$ là một số chính phương.

Phương pháp giải.

- Giả sử có số tự nhiên a thỏa mãn $f(p) = a^2$.
- Giải phương trình nghiệm nguyên $f(p) = a^2$ bằng một trong các phương pháp như: Đưa về phương trình tích, nguyên lý kẹp, phương pháp đồng dư thức, ...

Thí dụ 3.1.1. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $4p+1$ là một số chính phương.

Lời giải. Giả sử có số tự nhiên a thỏa mãn $4p+1 = a^2$. Ta có $4p+1$ là số lẻ nên a lẻ $\Rightarrow a = 2n+1, n \in \mathbb{N}^*$. Do đó:

$$4p+1 = (2n+1)^2 \Leftrightarrow 4p+1 = 4n^2 + 4n + 1$$

$$\Leftrightarrow p = n(n+1).$$

Vì p là số nguyên tố nên $n=1 \Rightarrow p=2$. Vậy $p=2$ thỏa mãn bài toán.

Thí dụ 3.1.2. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $p^2 + p + 6$ là một số chính phương.

Lời giải. Giả sử có số tự nhiên a thỏa mãn:

$$p^2 + p + 6 = a^2 \Leftrightarrow 4p^2 + 4p + 24 = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow (2a)^2 - (2p+1)^2 = 23$$

$$\Leftrightarrow (2a - 2p - 1)(2a + 2p + 1) = 23.$$

Vì 23 là số nguyên tố và $2a - 2p - 1 < 2a + 2p + 1$ nên

$$\begin{cases} 2a - 2p - 1 = 1 \\ 2a + 2p + 1 = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ p = 5 \end{cases}$$

Vậy $p = 5$ thỏa mãn bài toán.

Thí dụ 3.1.3. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $5^p + 12^p$ là một số chính phương.

Lời giải. Giả sử có số tự nhiên a thỏa $5^p + 12^p = a^2$.

- Với $p = 2 \Rightarrow 5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow 5^p + 12^p$ là số chính phương.
- Xét $p \geq 3$, ta có p là số lẻ nên $p = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}^*$. Ta có:

$$5^p + 12^p = 5^{2m+1} + 12^{2m+1} \equiv 2^{2m+1} \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 5^{2m+1} + 12^{2m+1} \equiv 2 \cdot 4^m \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 5^{2m+1} + 12^{2m+1} \equiv 2 \cdot (-1)^m \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 5^p + 12^p \equiv 2 \pmod{5} \text{ hoặc } 5^p + 12^p \equiv 3 \pmod{5}.$$

Mặt khác: $a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$. Vậy trường hợp $p \geq 3$ không thỏa mãn bài toán.

Kết luận: Vậy chỉ có $p = 2$ thỏa mãn bài toán.

Thí dụ 3.1.4. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $p^4 + p^3 + 1$ là một số chính phương.

Lời giải. Giả sử có số tự nhiên a thỏa mãn:

$$p^4 + p^3 + 1 = a^2 \Leftrightarrow 4p^4 + 4p^3 + 4 = 4a^2.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (2p^2 + p - 1)^2 &= 4p^4 + 4p^3 + 4 - (3p^2 + 2p + 3) \\ &< 4p^4 + 4p^3 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{và } (2p^2 + p + 1)^2 &= 4p^4 + 4p^3 + 4 + (5p^2 + 2p - 3) \\ &> 4p^4 + 4p^3 + 4. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$(2p^2 + p - 1)^2 < 4p^4 + 4p^3 + 4 < (2p^2 + p + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (2p^2 + p - 1)^2 < (2a)^2 < (2p^2 + p + 1)^2$$

$$\text{Do đó: } (2a)^2 = (2p^2 + p)^2$$

$$\Leftrightarrow 4p^4 + 4p^3 + 4 = (2p^2 + p)^2$$

$$\Leftrightarrow p^2 = 4 \Rightarrow p = 2.$$

Vậy $p = 2$ thỏa mãn bài toán.

Thí dụ 3.1.5. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $\frac{2^{p-1} - 1}{p}$ là một số chính phương.

Lời giải. Giả sử có số tự nhiên a thỏa mãn $2^{p-1} - 1 = pa^2$. Hiển nhiên p là số nguyên tố lẻ $\Rightarrow p = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow p - 1 = 2k$. Ta có:

$$2^{2k} - 1 = pa^2 \Leftrightarrow (2^k - 1)(2^k + 1) = pa^2.$$

Do $(2k - 1, 2k + 1) = 1$ nên tồn tại các số tự nhiên b, c thỏa mãn:

$$\begin{cases} 2^k - 1 = pb^2 \\ 2^k + 1 = c^2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2^k - 1 = b^2 \\ 2^k + 1 = pc^2 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} 2^k - 1 = pb^2 \\ 2^k + 1 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k - 1 = pb^2 \\ 2^k = (c - 1)(c + 1) \end{cases} \text{ Suy ra tồn}$$

tại $t > s$ sao cho $c - 1 = 2^s$ và $c + 1 = 2^t$ với $t + s = k$.

$$\text{Do đó: } 2 = c + 1 - (c - 1) = 2^t - 2^s = 2^s(2^{t-s} - 1)$$

$$\Rightarrow 2^s = 2 \text{ và } 2^{t-s} - 1 = 1 \Rightarrow s = 1 \text{ và } t = 2 \Rightarrow k = 3.$$

Khi đó $7 = pb^2 \Rightarrow p = 7$ vì 7 là số nguyên tố.

$$\bullet \begin{cases} 2^k - 1 = b^2 \\ 2^k + 1 = pc^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k = 1 + b^2 \\ 2^k + 1 = pc^2 \end{cases} \text{ Vì } b \text{ là số lẻ}$$

nên $b^2 \equiv 1 \pmod{4}$. Do đó $k = 1 \Rightarrow pc^2 = 3 \Rightarrow p = 3$.

Vậy $p = 3$ và $p = 7$ thỏa mãn bài toán.

Bài tập tương tự

1. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $p^2 - p + 1$ là một số chính phương.

2. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $\frac{3^{p-1}-1}{p}$ là một số chính phương.

3. Tìm tất cả các số nguyên tố có 2 chữ số $p = \overline{ab}$ sao cho $\overline{ab} + \overline{ba}$ là số chính phương.

4. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $p^4 + p^3 + p^2 + p + 1$ là một số chính phương.

3.2. Tìm số nguyên tố để một biểu thức là số lập phương

Bài toán. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho biểu thức $f(p)$ là lập phương của một số tự nhiên.

Phương pháp giải.

- Giả sử có số tự nhiên a thỏa mãn $f(p) = a^3$.
- Giải phương trình nghiệm nguyên $f(p) = a^3$ bằng một trong các phương pháp như: Đưa về phương trình tích, nguyên lý kẹp, ...

Thí dụ 3.2.1. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $13p + 1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Lời giải. Giả sử có số tự nhiên a thỏa mãn:

$$13p + 1 = a^3 \Leftrightarrow 13p = a^3 - 1$$

$$\Leftrightarrow 13p = (a-1)(a^2 + a + 1).$$

Vì 13 và p là số nguyên tố nên

$$\begin{cases} a-1=13 \\ a^2+a+1=p \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a-1=p \\ a^2+a+1=13 \end{cases}$$

• $\begin{cases} a-1=13 \\ a^2+a+1=p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=14 \\ p=211 \end{cases} \Rightarrow p=211$ là số nguyên tố.

• $\begin{cases} a-1=p \\ a^2+a+1=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=2 \\ a=3 \end{cases}$

Vậy $p=2$ và $p=211$ thỏa mãn bài toán.

Thí dụ 3.2.2. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $p^2 - 3p - 1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Lời giải. Giả sử có số tự nhiên a thỏa mãn $p^2 - 3p - 1 = a^3$.

• Nếu $p=2$ thì $a^3 = p^2 - 3p - 1 = -3$ không thỏa mãn.

• Xét $p \geq 3$. Với $p=3$ thì $a=-1$ (không thỏa mãn). Vậy $p > 3$. Ta có:

$$p^2 - 3p - 1 = a^3 \Leftrightarrow p^2 - 3p = a^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow p(p-3) = (a+1)(a^2 - a + 1) \quad (1). \text{ Vì } p > 3$$

nên a là số lẻ. Ta có: $(p, p-3)=1$;

$$a^2 - a + 1 > a - 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > 2 \end{cases}$$

Rõ ràng $a=0, a=1$ không thỏa mãn (1). Vậy từ

$$(1) \text{ suy ra: } \begin{cases} a+1=p-3 \\ a^2-a+1=p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+4=p \\ a^2-a+1=p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p=a+4 \\ a^2-2a-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=7 \\ a=3 \end{cases}$$

Vậy $p=7$ thỏa mãn bài toán.

Thí dụ 3.2.3. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $p^3 - 9p^2 + 28p - 30$ là lập phương của một số tự nhiên.

Lời giải. Giả sử có số tự nhiên a thỏa mãn $p^3 - 9p^2 + 28p - 30 = a^3$. Ta có:

$$p^3 - 9p^2 + 28p - 30 = (p-4)^3 + (3p^2 - 20p + 34) > (p-4)^3$$

(vì $3p^2 - 20p + 34 > 0, \forall p \geq 2$) và

$$p^3 - 9p^2 + 28p - 30 = (p-2)^3 - (3p^2 - 16p + 22) < (p-2)^3;$$

(vì $3p^2 - 16p + 22 > 0, \forall p \geq 2$).

Do đó: $(p-4)^3 < p^3 - 9p^2 + 28p - 30 < (p-2)^3$

$$\Leftrightarrow (p-4)^3 < a^3 < (p-2)^3.$$

Suy ra: $a^3 = (p-3)^3$

$$\Leftrightarrow p^3 - 9p^2 + 28p - 30 = p^3 - 9p^2 + 27p - 27$$

$$\Leftrightarrow p = 3. \text{ Vậy } p = 3 \text{ thỏa mãn bài toán.}$$

Bài tập tương tự

1. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $2p + 1$ là lập phương của một số tự nhiên.
2. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $p^2 - p + 1$ là lập phương của một số tự nhiên.
3. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $p^3 - 14p^2 + 66p - 104$ là lập phương của một số tự nhiên.

3.3. Tìm số nguyên tố để một phân thức là số nguyên

Bài toán. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho phân thức $f(p)$ là một số nguyên.

Phương pháp giải. Dùng lý thuyết chia hết, tìm điều kiện để tử số chia hết cho mẫu số.

Thí dụ 3.3.1. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $\frac{5p-1}{p^2-p+1}$ là số nguyên.

Lời giải. Để $\frac{5p-1}{p^2-p+1}$ là số nguyên thì

$$\begin{aligned} p^2 - p + 1 &| 5p - 1 \quad (1) \\ \Rightarrow p^2 - p + 1 &| (5p - 1)(5p + 1) \\ \Rightarrow p^2 - p + 1 &| 25p^2 - 1 \quad (2). \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } 25p^2 - 1 = 25(p^2 - p + 1) + 5(5p - 1) - 21.$$

Từ (1) và (2) suy ra $p^2 - p + 1 | 21$. Do p là số nguyên tố nên:

$$p^2 - p + 1 \geq 3 \Rightarrow p^2 - p + 1 \in \{3, 7\}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Với } p^2 - p + 1 = 3, \text{ suy ra: } p^2 - p - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= -1 \text{ (loại)}, p = 2. \end{aligned}$$

$$\text{Thử lại: } p = 2 \text{ thì } \frac{5 \cdot 2 - 1}{2^2 - 2 + 1} = 3 \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Với } p^2 - p + 1 = 7, \text{ suy ra: } p^2 - p - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= -2 \text{ (loại)}, p = 3. \end{aligned}$$

$$\text{Thử lại: } p = 3 \text{ thì } \frac{5 \cdot 3 - 1}{3^2 - 3 + 1} = 2 \in \mathbb{Z}.$$

Vậy $p = 2$ và $p = 3$ thỏa mãn bài toán.

Thí dụ 3.3.2. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $\frac{a^2 + p}{ap^2 - 2}$ là số nguyên trong đó a là số nguyên dương.

Lời giải. • Xét $p = 2$, ta có $4a - 2$ là ước của $a^2 + 2 \Rightarrow 4a - 2 | 16a^2 + 32$.

$$\text{Mà } 16a^2 - 32 = (4a - 2)(4a + 2) + 36 \Rightarrow 4a - 2 | 36.$$

Do $4a - 2 > 0$, là số chẵn và không chia hết cho 4 nên: $4a - 2 \in \{2, 6, 8\} \Rightarrow a \in \{1, 2, 5\}$.

$$\text{Thử lại: Với } p = 2 \text{ và } a = 2 \text{ thì } \frac{2^2 + 2}{2 \cdot 2^2 - 2} = 1 \in \mathbb{Z};$$

Với $p = 2$ và $a = 1$ hoặc $a = 5$ không thỏa mãn.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Xét } p = 3, \text{ ta có } 9a - 2 \text{ là ước của } a^2 + 3 \\ \Rightarrow 9a - 2 | 81a^2 + 243. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } 81a^2 + 243 = (9a - 2)(9a + 2) + 247$$

$$\Rightarrow 9a - 2 | 247.$$

Do $247 = 13 \cdot 19$ nên 247 không có ước dạng $9k - 2$. Trường hợp này vô nghiệm.

• Xét $p \geq 5$, khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho $a^2 + p = k(ap^2 - 2) \Leftrightarrow a^2 - kp^2a + 2k + p = 0$.

Suy ra a là nghiệm nguyên dương của phương trình: $x^2 - kp^2x + 2k + p = 0$ (*).

$$\text{Ta có: } \Delta = (kp^2)^2 - 4(2k + p) < (kp^2)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có: } \Delta - (kp^2 - 1)^2 &= -4(2k + p) + 2kp^2 - 1 \\ &= 2k(p^2 - 4) - 4p - 1 \\ &\geq 2(p^2 - 4) - 4p - 1 = 2p(p - 2) - 9 > 0. \end{aligned}$$

Suy ra $(kp^2 - 1)^2 < \Delta < (kp^2)^2 \Rightarrow \Delta$ không thể số chính phương nên phương trình (*) không có

nghiệm nguyên dương. Trường hợp này vô nghiệm.

Vậy $p = 2$ thỏa mãn bài toán

Thí dụ 3.3.3. Tìm tất cả các số nguyên tố $p > 2$

sao cho $\frac{(p+2)^{p+2}(p-2)^{p-2}-1}{(p+2)^{p-2}(p-2)^{p+2}-1}$ là số nguyên.

Lời giải. Đặt $M = (p+2)^{p-2}(p-2)^{p+2} - 1$ (1).

Ta có: $(p+2)^{p+2}(p-2)^{p-2} - 1 - M$

$$= (p+2)^{p+2}(p-2)^{p-2} - (p+2)^{p-2}(p-2)^{p+2}$$

$$= (p+2)^{p-2}(p-2)^{p-2}[(p+2)^4 - (p-2)^4].$$

Giả sử $p > 2$ là số nguyên tố thỏa mãn bài toán.

Khi đó ta có:

$$(p+2)^{p-2}(p-2)^{p-2}[(p+2)^4 - (p-2)^4]$$

chia hết cho M (2).

Vì mọi ước của $(p+2)^{p-2}(p-2)^{p-2}$ cũng là ước của $(p+2)^{p-2}(p-2)^{p+2}$ nên nếu gọi d là ƯCLN của $(p+2)^{p-2}(p-2)^{p-2}$ và M thì từ (1) suy ra $d \mid 1 \Rightarrow d = 1$. Từ (2) suy ra:

$$(p+2)^4 - (p-2)^4 \mid M.$$

$$\text{Do đó: } M \leq (p+2)^4 - (p-2)^4 \leq (p+2)^4 - 1$$

$$\Rightarrow (p+2)^{p-2}(p-2)^{p+2} - 1 \leq (p+2)^4 - 1$$

$$\Rightarrow (p+2)^{p-6}(p-2)^{p+2} \leq 1.$$

$$\text{Suy ra: } p - 6 < 0 \Rightarrow p < 6$$

$$(\text{vì } p \geq 7 \text{ thì } (p+2)^{p-6}(p-2)^{p+2} > 1).$$

$$\bullet \text{ Với } p = 5 \text{ ta có: } (p+2)^{p-6}(p-2)^{p+2} = 7^{-1}3^7 > 1.$$

$$\bullet \text{ Với } p = 3 \text{ ta có:}$$

$$\frac{(p+2)^{p+2}(p-2)^{p-2}-1}{(p+2)^{p-2}(p-2)^{p+2}-1} = \frac{5^5-1}{5-1} = 781 \in \mathbb{Z}$$

Vậy chỉ có $p = 3$ thỏa mãn bài toán.

3.4. Tìm số nguyên tố p để $f(p)$ biểu diễn được dưới dạng nào đó

Bài toán. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho p hoặc biểu thức $f(p)$ biểu diễn được dưới dạng phân tích tiêu chuẩn.

Phương pháp giải.

- Xét các trường hợp $p = 2, p = 3, \dots$

- Giới hạn miền nghiệm và sử dụng phương pháp chia hết.

Thí dụ 3.4.1. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $p^2 + 2p - 8$ có thể biểu diễn được dưới dạng 3^a trong đó a là các số nguyên dương.

Lời giải. Ta có:

$$p^2 + 2p - 8 = 3^a \Leftrightarrow (p+4)(p-2) = 3^a.$$

Đặt $p+4 = 3^x$ và $p-2 = 3^y$ thì do p nguyên tố nên $x > y$. Ta có: $x + y = a$ và

$$3^x - 3^y = 6 \Leftrightarrow 3^y(3^{x-y} - 1) = 6 = 2 \cdot 3.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 3^y = 3 \\ 3^{x-y} - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } a = x + y = 3 \text{ và } p = 2 + 3^y = 2 + 3 = 5.$$

Thử lại $p = 5$ và $a = 3$ thỏa mãn bài toán

Vậy $p = 5$ là số nguyên tố cần tìm.

Thí dụ 3.4.1. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho 17^p biểu diễn được dưới dạng $2^a \cdot 3^b + 1$ trong đó a, b là các số nguyên dương.

Lời giải. Xét $b \geq 3$ khi đó:

$$2^a \cdot 3^b + 1 \equiv 1 \pmod{27} \Rightarrow 17^p \equiv 1 \pmod{27}.$$

$$\text{Ta có: } 17^3 = 4913 \equiv -1 \pmod{27} \Rightarrow 17^6 \equiv 1 \pmod{27}.$$

Suy ra $p \vdots 6$, vô lí vì p là số nguyên tố.

Do đó $b \leq 2$.

• Xét $a \geq 6$ khi đó:

$$2^a \cdot 3^b + 1 \equiv 1 \pmod{64} \Rightarrow 17^p \equiv 1 \pmod{64}.$$

Ta có $17^4 \equiv 1 \pmod{64}$. Suy ra $p \nmid 4$, vô lí vì p là số nguyên tố. Do đó $a \leq 5$.

Thử trực tiếp ta được: $b = 2, a = 5, p = 2$.

Vậy $p = 2$ là số nguyên tố cần tìm.

Thí dụ 3.4.2. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $3p^2 + 2p - 1$ có thể biểu diễn được dưới dạng $3^a \cdot 5^b$ trong đó a, b là các số nguyên dương.

Lời giải. • Với $p = 2$ thỏa mãn bài toán vì $3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 3^1 \cdot 5^1$.

• Xét $p \geq 3$. Ta có: $(3p - 1)(p + 1) = 3^a \cdot 5^b$ (1)

$$\Rightarrow 3^a \mid (3p - 1)(p + 1).$$

Do $(3^a, 3p - 1) = 1$ nên $3^a \mid (p + 1)$ (2)

$$\text{và } 5^b \mid (3p - 1)(p + 1).$$

Ta có: $(3p - 1) + 2(p + 1) = 5p + 1$ không chia hết cho 5^b , suy ra trong hai số $3p - 1$ và $p + 1$ có một số chia hết cho 5^b .

- Nếu $p + 1 \vdots 5^b$, kết hợp với (2) thì $p + 1 \vdots 3^a \cdot 5^b$.

Theo (1) thì $3^a \cdot 5^b \vdots p + 1$. Suy ra: $p + 1 = 3^a \cdot 5^b$

$\Rightarrow 3p - 1 = 1$, vô lí. Do đó $3p - 1 \vdots 5^b$, kết hợp với

(2) suy ra: $p + 1 \vdots 3^a$. Theo (1) thì

$$3^a \cdot 5^b \vdots 3p - 1 \Rightarrow 5^b \vdots 3p - 1 \Rightarrow 3p - 1 = 5^b$$

và $p + 1 = 3^a$. Hai phương trình này vô nghiệm vì

$3p - 1$ và $p + 1$ là số chẵn còn 3^a và 5^b là số lẻ.

Vậy chỉ có $p = 2$ thỏa mãn bài toán.

Thí dụ 3.4.3. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho p có thể biểu diễn được dưới dạng $\sqrt{\frac{a^2 - 4}{b^2 - 1}}$ trong đó a, b là các số nguyên dương.

Lời giải. • $p = 2$ thỏa mãn bài toán vì $2 = \sqrt{\frac{4^2 - 4}{2^2 - 1}}$.

• Xét $p \geq 3$, ta có:

$$p = \sqrt{\frac{a^2 - 4}{b^2 - 1}} \Rightarrow p^2(b^2 - 1) = a^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow p^2(b^2 - 1) = (a - 2)(a + 2) \quad (1)$$

$$\Rightarrow p^2 \mid (a - 2)(a + 2) \quad (2).$$

p không thể đồng thời là ước của hai số $a - 2$ và $a + 2$ vì khi đó: $p \mid (a + 2) - (a - 2) = 4$, vô lí.

Từ (2), do p nguyên tố, suy ra:

$$p^2 \mid (a - 2) \text{ hoặc } p^2 \mid (a + 2).$$

Với điều kiện bài toán $a > 2$ ta được:

$$a - 2 \geq p^2 \text{ hoặc } a + 2 \geq p^2$$

hay $a \geq p^2 + 2$ hoặc $a \geq p^2 - 2$.

Do đó $2a + 1 > p^2 - 4$ (3).

Từ (1) ta được $p^2 b^2 = a^2 + p^2 - 4$ (4), do $p \geq 3$ nên $p^2 b^2 > a^2$ (5).

Hơn nữa từ (3) và (4) ta có:

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 > a^2 + p^2 - 4 = p^2 b^2 \quad (6).$$

Từ (5) và (6) ta được $a^2 < p^2 b^2 < (a + 1)^2$, vô lí. Do đó không tồn tại số nguyên tố $p \geq 3$.

Vậy $p = 2$ thỏa mãn bài toán.

3.5. Một số dạng khác

Thí dụ 3.5.1. Tìm tất cả số nguyên tố p có dạng $p = a^2 + b^2 + c^2$ trong đó a, b, c là các số nguyên dương thỏa $a^4 + b^4 + c^4$ chia hết cho p .

Lời giải. Do vai trò a, b, c như nhau nên giả sử $a \geq b \geq c$ ta có:

$$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2).$$

Vì p nguyên tố và theo giả thiết nên $p \geq 3$ suy ra: $a^4 + b^4 + c^4 \div p \Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \div p$
 $\Rightarrow a^2b^2 + c^2(b^2 + a^2) \div p \Rightarrow a^2b^2 + c^2(p - c^2) \div p$
 $\Rightarrow a^2b^2 - c^4 \div p \Rightarrow (ab - c^2)(ab + c^2) \div p$.
 Do $p = a^2 + b^2 + c^2 > ab + c^2 > ab - c^2 \geq 0$ và p nguyên tố nên $ab - c^2 = 0 \Rightarrow a = b = c \Rightarrow p = 3a^2$ và cũng vì p nguyên tố nên $a = b = c = 1$.
 Vậy $p = 3$ thỏa mãn bài toán.

Thí dụ 3.5.2. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (p, q) sao cho $p^2 + 15pq + q^2$ là một lũy thừa của 17.

Lời giải. Giả sử (p, q) là cặp số nguyên tố sao cho $p^2 + 15pq + q^2 = 17^n$, trong đó n là số nguyên dương. Vì $p, q > 1$ nên

$$17^n = p^2 + 15pq + q^2 > 17 \Rightarrow n \geq 2.$$

Do đó: $p^2 + 15pq + q^2 \equiv 0 \pmod{17^2}$

$$\Leftrightarrow (p - q)^2 + 17pq \equiv 0 \pmod{17^2} \quad (1).$$

Suy ra $(p - q)^2 \equiv 0 \pmod{17} \quad (2).$

Từ (2) vì 17 là số nguyên tố nên $(p - q)^2 \equiv 0 \pmod{17^2} \quad (3).$

Từ (1) và (3) suy ra: $pq \equiv 0 \pmod{17}$. Lại vì 17, p, q là các số nguyên tố nên $p = 17$ hoặc $q = 17$. Do vai trò p, q như nhau nên không mất tổng quát, giả sử $p = 17$.

Khi đó từ (2) suy ra: $q^2 \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow q = 17$.

Ngược lại với $p = q = 17$ ta có:

$$p^2 + 15pq + q^2 = 17^2 + 15 \cdot 17^2 + 17^2 = 17^3.$$

Vậy có duy nhất cặp số nguyên tố $(17, 17)$ thỏa mãn bài toán.

Thí dụ 3.5.3. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $p^a = 19^b - 2^b$ trong đó a, b là các số nguyên dương.

Lời giải. Ta có:

$$19^b - 2^b = (19 - 2)(19^{b-1} + 19^{b-2} \cdot 2 + \dots + 19 \cdot 2^{b-2} + 2^{b-1}) = 17M$$

$$\Rightarrow p^a = 17M \Rightarrow 17 \mid p^a \Rightarrow 17 \mid p \Rightarrow p = 17.$$

Nếu $b > 2$ theo định lý Zsigmondy $19^b - 2^b$ có ước nguyên tố $q \neq 17$ vô lí. Từ đó $b = 2$ hoặc $b = 1$.

Kiểm tra lại $b = 1$ và $a = 1$ thỏa mãn bài toán.

Vậy $p = 17$ thỏa mãn bài toán.

Thí dụ 3.5.4. Tìm tất cả số nguyên tố p sao cho $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Lời giải. • Với $p = 2 \Rightarrow 2^2 + 2^2 = 8 \div 2 \Rightarrow 2^p + p^2$ là hợp số.

• Với $p = 3 \Rightarrow 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

• Xét $p > 3$, ta có:

$$2 \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow 2^p \equiv -1 \pmod{3}$$

và $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Suy ra $2^p + p^2 \equiv 0 \pmod{3}$ hay $2^p + p^2$ chia hết cho 3.

Vậy $p = 3$ thỏa mãn bài toán.

4. KẾT LUẬN

- Sự phân loại các dạng bài toán trong bài viết là theo ý chủ quan của tác giả.
- Một số thí dụ trong bài viết có thể có những cách tiếp cận khác nhau do đó có những cách giải khác ngắn gọn và hay hơn.
- Tác giả bài viết mong độc giả tiếp tục phát hiện những dạng mới để bài toán tìm số nguyên tố được phong phú hơn.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH BẮC NINH NĂM HỌC 2022-2023

Câu 1. 1) Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$$

với $x > 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$. Rút gọn biểu thức P và tìm giá trị của x để $P = \frac{7}{3}$.

2) Gọi A và B là giao điểm của đường thẳng $d: y = -x + 2$ với parabol $(P): y = x^2$. Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

Lời giải.

1) $P = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ nên $P = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x \in \left\{ 9; \frac{1}{9} \right\}$.

2) Tìm được $A(1;1), B(-2;4)$, sử dụng công thức tính diện tích tam giác vuông và diện tích hình thang vuông ta tìm được $S_{\triangle OAB} = 3$.

Câu 2. 1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5(2x - y) = 0 \\ x^2 - 2xy - 3y^2 + 15 = 0 \end{cases}$$

2) Giải phương trình

$$3\sqrt{4x+1} + 4x\sqrt{3x-2} = 3x^2 + 4x + 5.$$

Lời giải. 1) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5(2x - y) = 0 \\ x^2 - 2xy - 3y^2 + 15 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 5 - 2y \\ x^2 - 2xy - 3y^2 + 15 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x; y) \in \{(1;2), (-3;4), (-1;-2)\}.$$

2) Giải phương trình

$$3\sqrt{4x+1} + 4x\sqrt{3x-2} = 3x^2 + 4x + 5 \quad (1).$$

Điều kiện: $x \geq \frac{2}{3}$. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 3\sqrt{4x+1} + 4x\sqrt{3x-2} = 3x^2 + 4x + 5$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{4x+1} + 8x\sqrt{3x-2} = 6x^2 + 8x + 10$$

$$\Leftrightarrow (3 - \sqrt{4x+1})^2 + 2x(2 - \sqrt{3x-2})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{4x+1} = 0 \\ 2 - \sqrt{3x-2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Câu 3. 1) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$y(x-1) = x^2 + 2.$$

2) Với mỗi số nguyên a , gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2ax - 1 = 0$. Chứng minh $(x_1^{2n} - x_2^{2n})(x_1^{4n} - x_2^{4n})$ chia hết cho 48 với mọi số tự nhiên n .

Lời giải. 1) Dễ thấy $y(x-1) = x^2 + 2$

$$\Leftrightarrow y = x + 1 + \frac{3}{x-1}.$$

Từ đó tìm được các cặp nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình là: $(-2; -2), (0; -2), (2; 6), (4; 6)$.

2) Với mọi a phương trình $x^2 + 2ax - 1 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2a \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

Đặt $S_n = x_1^{2n} + x_2^{2n}$. Ta có:

$$M = \frac{1}{8}(x_1^{2n} - x_2^{2n})(x_1^{4n} - x_2^{4n})$$

$$= \frac{1}{8}(x_1^{2n} - x_2^{2n})^2 (x_1^{2n} + x_2^{2n})$$

$$= \frac{1}{8}[(x_1^{2n} + x_2^{2n})^2 - 4x_1^{2n}x_2^{2n}](x_1^{2n} + x_2^{2n})$$

$$= \frac{1}{8}(S_n^2 - 4) \cdot S_n = \frac{(S_n - 2)(S_n + 2)S_n}{8}$$

$$= \left(\frac{S_n}{2} - 1\right) \cdot \frac{S_n}{2} \cdot \left(\frac{S_n}{2} + 1\right).$$

Ta chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $S_n = x_1^{2n} + x_2^{2n}$ luôn là số nguyên dương chẵn (*).

Thật vậy: Với $n = 0$ thì $S_0 = 2$ là số nguyên dương chẵn.

Với $n = 1$ thì $S_1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$$= 4a^2 + 2 = 2(2a^2 + 1)$$

là số nguyên dương chẵn (do a là số nguyên).

Giả sử (*) đúng đến $n = k$, tức là S_{k-1} và S_k là các số nguyên dương chẵn. Ta có:

$$S_{k+1} = x_1^{2(k+1)} + x_2^{2(k+1)}$$

$$= (x_1^2 + x_2^2)(x_1^{2k} + x_2^{2k}) -$$

$$- x_1^2 x_2^2 [x_1^{2(k-1)} + x_2^{2(k-1)}]$$

$$= S_1 \cdot S_k - S_{k-1}$$

là một số nguyên dương chẵn.

Chúng tỏ $S_n = x_1^{2n} + x_2^{2n}$ là số nguyên dương chẵn với mọi số tự nhiên n .

Vì $M = \left(\frac{S_n}{2} - 1\right) \cdot \frac{S_n}{2} \cdot \left(\frac{S_n}{2} + 1\right)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên M chia hết cho 6.

Vậy $(x_1^{2n} - x_2^{2n})(x_1^{4n} - x_2^{4n}) = 8M : 48$.

Câu 4. 1) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , D là điểm bất kì thuộc cạnh BC (D khác B và C). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC . Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại P, Q sao cho M nằm giữa P và N . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP cắt AB tại I (khác B). Các đường thẳng DI và AC cắt nhau tại K .

a) Chứng minh $\widehat{PID} = \widehat{PAC}$. Từ đó suy ra 4 điểm A, I, P, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $\triangle PBD$ đồng dạng với $\triangle PAK$ và $\frac{QA}{QB} = \frac{PD}{PK}$.

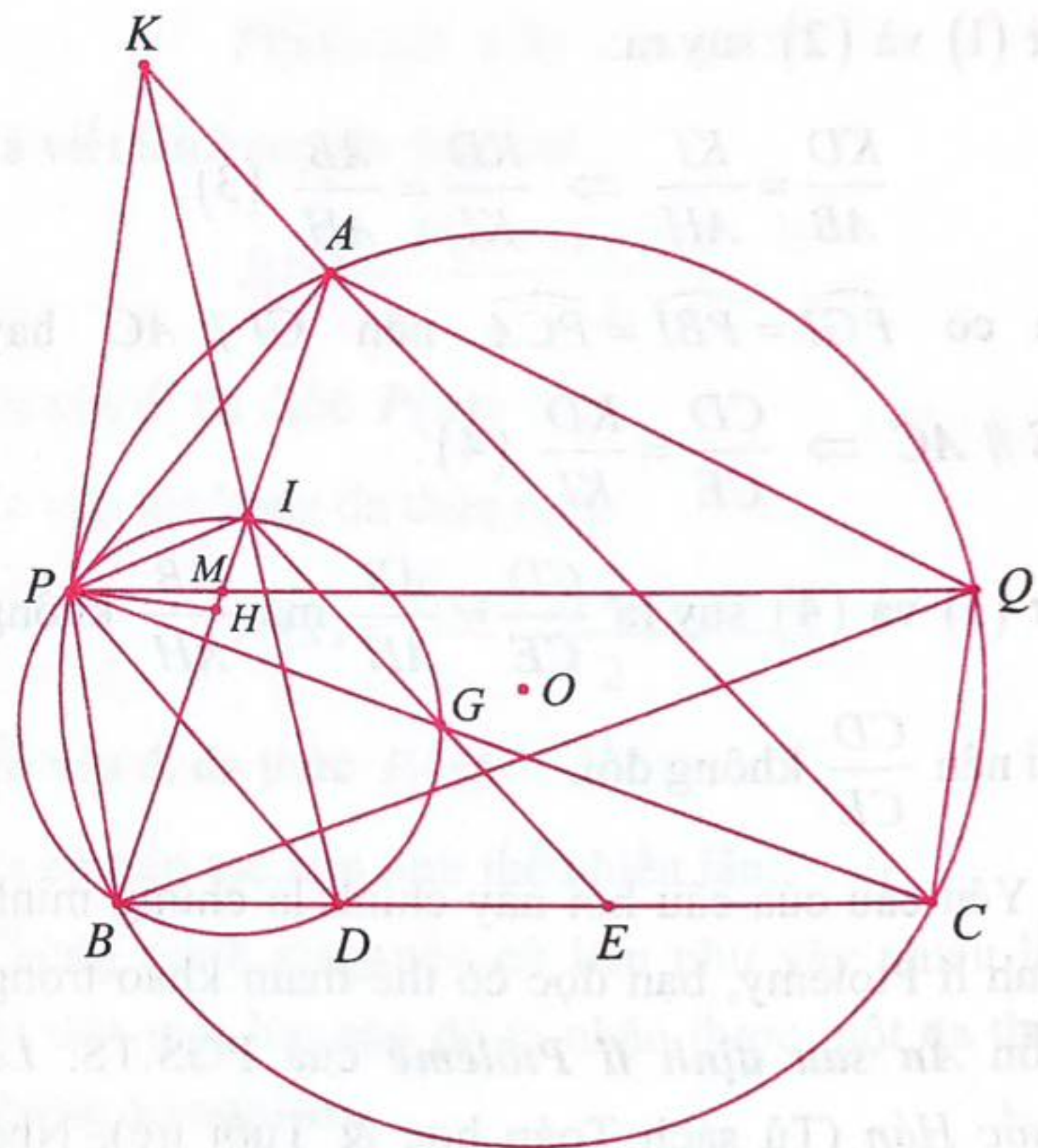
c) Đường thẳng CP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP tại G (khác P). Đường thẳng IG cắt đường thẳng BC tại E . Chứng minh khi D di chuyển trên đoạn BC thì tỉ số $\frac{CD}{CE}$ không đổi.

2) Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$. Chứng minh $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

Lời giải.

1.a) Vì $\widehat{PAC} + \widehat{PBC} = 180^\circ$, $\widehat{PID} + \widehat{PBC} = 180^\circ$ nên $\widehat{PID} = \widehat{PAC}$.

Lại có $\widehat{PID} + \widehat{PIK} = 180^\circ$; $\widehat{PAC} + \widehat{PAK} = 180^\circ$. Do đó $\widehat{PIK} = \widehat{PAK}$; mà hai góc này cùng nhìn cạnh $PK \Rightarrow$ tứ giác $AIPK$ nội tiếp hay 4 điểm A, I, P, K nằm trên cùng một đường tròn.



b) Ta có $\widehat{APK} = \widehat{AIK} = \widehat{BID} = \widehat{BPD}$ và $\widehat{PBD} = 180^\circ - \widehat{PID} = 180^\circ - \widehat{PAC} = \widehat{PAK}$.

Suy ra $\triangle PBD$ đồng dạng với $\triangle PAK$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{PB}{PA} = \frac{PD}{PK}.$$

Vì tứ giác $APBQ$ nội tiếp nên tam giác PMB đồng dạng với tam giác AMQ (g.g) và tam giác QBM đồng dạng với tam giác APM (g.g). Do đó

$$\begin{cases} \frac{PB}{QA} = \frac{MP}{MA} \\ \frac{QB}{PA} = \frac{MB}{MP} \end{cases} \Rightarrow \frac{PB}{QA} \cdot \frac{QB}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{PB}{PA} = \frac{QA}{QB}.$$

Vậy $\frac{QA}{QB} = \frac{PD}{PK}.$

c) Trên đoạn AB xác định điểm H sao cho $\widehat{APH} = \widehat{KPI}$. Vì tứ giác $AIPK$ nội tiếp, nên $\widehat{KPI} = \widehat{BAC}$. Lại có A, P cố định và $\widehat{BAC}$ không đổi nên H là điểm cố định. Đề ý rằng:

• $\Delta KPI \sim \Delta APH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{KI}{AH} = \frac{KP}{AP}$ (1);

• $\Delta PKD \sim \Delta PAB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{KP}{AP} = \frac{KD}{AB}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{KD}{AB} = \frac{KI}{AH} \Rightarrow \frac{KD}{KI} = \frac{AB}{AH} \quad (3).$$

Ta có $\widehat{PGI} = \widehat{PBI} = \widehat{PCA}$ nên $GI \parallel AC$ hay

$$IE \parallel AC \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{KD}{KI} \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{CD}{CE} = \frac{AB}{AH}$ mà $\frac{AB}{AH}$ không đổi nên $\frac{CD}{CE}$ không đổi.

2) Yêu cầu của câu hỏi này chính là chứng minh Định lí Ptolemy, bạn đọc có thể tham khảo trong cuốn **Ấn sau định lí Ptolômê** của PGS.TS. Lê Quốc Hán (Tủ sách Toán học & Tuổi trẻ), Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2006, trang 65.

Câu 5. 1) Cho 3 số thực a, b, c thỏa mãn $1 \leq a \leq 3; 1 \leq b \leq 3; 1 \leq c \leq 3$ và $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = a^2 + b^2 + c^2$.

2) Cho đa giác lồi $A_1 A_2 \dots A_{2024}$. Tại mỗi đỉnh A_k ($k = 1, 2, \dots, 2024$), người ta ghi một số thực a_k

sao cho giá trị tuyệt đối của hiệu hai số trên hai đỉnh kề nhau bằng một số nguyên dương không lớn hơn 3. Tìm giá trị lớn nhất có thể được của giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số ghi trên mỗi cặp đỉnh của đa giác đã cho, biết rằng các số ghi tại các đỉnh đã cho đôi một khác nhau.

Lời giải. 1) Ta có:

$$\begin{aligned} F &= a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) \\ &= 36 - 2(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Vì $1 \leq a \leq 3; 1 \leq b \leq 3; 1 \leq c \leq 3$ nên ta có:

$$(a - 3)(b - 3)(c - 3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow abc - 3(ab + bc + ca) + 9(a + b + c) - 27 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow abc \leq 3(ab + bc + ca) - 27 \quad (1).$$

Và $(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow abc \geq (ab + bc + ca) - 5 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$(ab + bc + ca) - 5 \leq abc \leq 3(ab + bc + ca) - 27$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca \geq 11$$

$$\Rightarrow F = 36 - 2(ab + bc + ca) \leq 14.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 1; b = 2; c = 3$ và các hoán vị. Vậy giá trị lớn nhất của F bằng 14.

2) Xét đa giác lồi $A_1 A_2 \dots A_{2024}$. Khi đó $|a_k - a_{k+1}| \in \{1; 2; 3\}$, ($k = 1, 2, \dots, 2023$). Không mất tính tổng quát, coi a_1 là nhỏ nhất, a_n là lớn nhất (dễ thấy $n \geq 2$). Đặt $d = \max_{i \neq j} |a_i - a_j|$ khi đó $d = a_n - a_1$ và là một số nguyên dương.

Giả sử theo chiều kim đồng hồ có $n - 2$ đỉnh nằm giữa A_1, A_n . Suy ra theo chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ có $2024 - n$ đỉnh nằm giữa A_1, A_n . Hơn nữa giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số kề nhau không vượt quá 3. Do đó:

$$\begin{aligned} d &= |a_1 - a_n| \leq |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n| \\ &\leq 3(n - 1). \end{aligned}$$

(Tiếp theo trang 12)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN, ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI NĂM HỌC 2023 - 2024 VÒNG 1

(Thời gian làm bài: 90 phút, dành cho mọi thí sinh thi vào trường chuyên)

Bài 1. (2,5 điểm)

a) Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{x^2 + 8\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 4} + \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{16 - 4x}{\sqrt{x} + 2}, \text{ với } x > 0.$$

b) Một khay nước có nhiệt độ 125°F khi bắt đầu cho vào tủ đá. Ở trong tủ đá, cứ sau mỗi giờ, nhiệt độ của khay nước lại giảm đi 20%. Hỏi sau bao nhiêu giờ, nhiệt độ của khay nước chỉ còn là 64°F ?

Bài 2. (3 điểm)

a) Cho phương trình:

$$x^2 - (2m - 1)x - (m^2 + 1) = 0 \quad (1) \quad (m \text{ là tham số}).$$

Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 . Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 sao cho hệ thức đó không phụ thuộc vào m .

b) Cho parabol $(P): y = ax^2 (a \neq 0)$ đi qua điểm $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. Tìm tọa độ của điểm M trên parabol (P) sao cho khoảng cách từ điểm M đến trục tung gấp hai lần khoảng cách từ điểm M đến trục hoành.

Bài 3. (2,5 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{ABC} = 120^\circ$ và $BC = 2AB$. Vẽ đường tròn (O) có đường kính

AC . Gọi E, F lần lượt là các giao điểm thứ hai của AB, AD với đường tròn (O) . Đường thẳng EF lần lượt cắt các đường thẳng BC, BD tại H, S . Chứng minh

a) Tam giác ABD là tam giác vuông.

b) Tứ giác $OBEH$ là tứ giác nội tiếp.

c) SC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Bài 4. (1 điểm) Có hay không các số nguyên a, b sao cho

$$(a + b\sqrt{2023})^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}?$$

Bài 5. (1 điểm) Trên bảng ta viết đa thức

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$$

Ta viết lên bảng đa thức mới

$$P_1(x) = \frac{P(x+1) + P(x-1)}{2}$$

rồi xóa đi đa thức $P(x)$.

Ta viết lên bảng đa thức mới

$$P_2(x) = \frac{P_1(x+1) + P_1(x-1)}{2}$$

rồi xóa đi đa thức $P_1(x)$.

Ta cứ tiếp tục làm như thế nhiều lần.

Chứng minh rằng nếu cứ làm như vậy nhiều lần thì đến một lúc nào đó ta nhận được một đa thức không có nghiệm.

VÒNG 2

(Thời gian làm bài: 120 phút, dành riêng cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin)

Bài 1. (2,5 điểm) a) Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên liên tiếp cộng với 1 là bình phương của một số nguyên.

b) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2xy - x = 10 \\ x + y + xy = 11. \end{cases}$$

Bài 2. (3 điểm) a) Cho a, b là các số thực không âm, c là số thực dương thỏa mãn đẳng thức: $\sqrt{a} - \sqrt{a+b-c} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{a+b-c}$.

b) Tìm các số nguyên dương a và b sao cho

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{a}}{\sqrt{5} + \sqrt{b}} \text{ là số hữu tỉ.}$$

Bài 3. (2,5 điểm) Cho tam giác ABC . Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC lần lượt tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại các điểm D, E, G . Hai đường thẳng DE, DG lần lượt cắt đường phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$ tại M, N . Hai đường thẳng MG, NE cắt nhau tại điểm P . Chứng minh:

a) EG song song với MN .

b) Điểm P thuộc đường tròn (I) .

Bài 4. (1 điểm) Bảy lục giác đều được sắp xếp và tô màu bằng hai màu trắng, đen như ở Hình 1.



Hình 1



Hình 2

Mỗi lần cho phép chọn ra một lục giác đều, đổi màu của lục giác đó và của tất cả các lục giác đều có chung cạnh với lục giác đó (trắng thành đen hoặc đen thành trắng). Chứng minh rằng dù có thực hiện cách làm trên bao nhiêu lần đi nữa, cũng không thể nhận được các lục giác đều được tô màu như ở Hình 2.

Bài 5. (1 điểm) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương $n > 10^{2023}$ sao cho tổng tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn n là một số nguyên tố cùng nhau với n

NGUYỄN THANH HỒNG

(GV THPT chuyên, ĐHSPT Hà Nội)

Giới thiệu

HƯỚNG DẪN GIẢI ... (Tiếp theo trang 10)

Tương tự ta có: $d \leq 3(2024 - n + 1)$.

$$\text{Suy ra: } d \leq \frac{3(n-1) + 3(2024 - n + 1)}{2} = 3036.$$

Nếu $d = 3036$ thì hiệu giữa hai số ghi trên hai đỉnh kề nhau đúng bằng 3 hay ta có:

$$|a_i - a_{i+1}| = 3, \quad i = 1, 2, \dots, 2023$$

$$\Rightarrow |a_i - a_{i+1}| = |a_{i+1} - a_{i+2}|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_i - a_{i+1} = a_{i+1} - a_{i+2} \\ a_i = a_{i+2} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, 2022)$$

$$\Rightarrow a_i - a_{i+1} = a_{i+1} - a_{i+2}$$

$$\Rightarrow a_1 - a_{2024} = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2023} - a_{2024} = 2023(a_1 - a_2)$$

$$\Rightarrow |a_1 - a_{2024}| = |2023(a_1 - a_2)| \Rightarrow 3 = 2023 \times 3.$$

Điều này không xảy ra. Suy ra $d \leq 3035$.

Ta xây dựng một trường hợp cho $d = 3035$ như sau: $a_1 = 0, a_2 = 2, a_k = a_{k-1} + 3 = 3k - 4$

với $k = 3, 4, \dots, 1013$;

$$a_{1014} = a_{1013} - 2 = 3033, a_k = a_{k-1} - 3 = 6075 - 3k$$

với $k = 1015, 1016, \dots, 2024$.

Khi đó hiệu lớn nhất là $a_{1013} - a_1 = 3035$.

Các số $a_2, a_3, \dots, a_{1013}$ là các số nguyên dương tăng dần có dạng $3t - 4$ chia cho 3 dư 2. Các số $a_{1014}, a_{1015}, \dots, a_{2024}$ là các số nguyên dương giảm dần có dạng $6075 - 3h$ chia hết cho 3. Suy ra các số $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$ đôi một khác nhau.

Vậy giá trị lớn nhất của giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số ghi trên mỗi cặp đỉnh bằng 3035.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Yên Phong, Bắc Ninh)

Giới thiệu



MỘT SỐ BIỆN PHÁP RÈN LUYỆN TƯ DUY CHO HỌC SINH KHI GIẢI BÀI TẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

TRẦN NHƯ NGỌC

(GV THCS Thuận An, TX. Long Mỹ, Hậu Giang)

MAI HOÀN HẢO

(GV THPT Long Mỹ, TX. Long Mỹ, Hậu Giang)

Dạy học phát triển tư duy cho học sinh (HS) là một trong những mục tiêu của chương trình 2018. Trong thực tế, nội dung dạy học hệ phương trình chứa đựng nhiều tình huống có thể khai thác nhằm phát triển tư duy toán học cho HS. Do đó, giáo viên (GV) cần chú ý thiết kế nội dung và hình thức dạy học thích hợp để vừa hoàn thành mục tiêu về kiến thức, kỹ năng, ... vừa đạt được mục tiêu phát triển tư duy toán học cho các em. Bài viết này giới thiệu với bạn đọc một số biện pháp phát triển tư duy toán học cho HS khi giải bài tập về hệ phương trình.

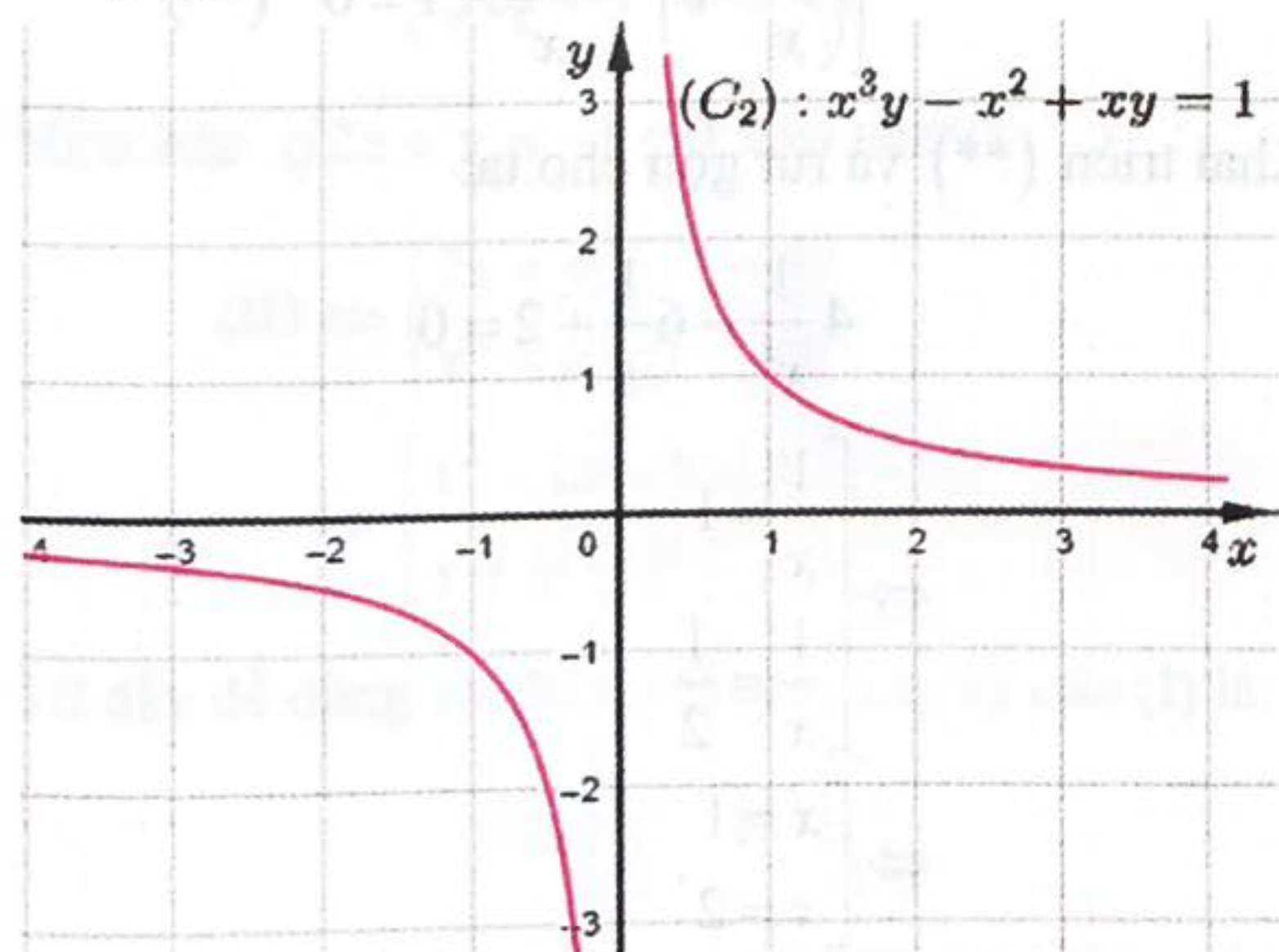
1.1 Biện pháp 1: Quan tâm đúng mức đến việc sử dụng hình học

Thí dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = 1 \end{cases} \quad (*) \quad (I).$$

Định hướng và lược giải.

Để hỗ trợ HS định hướng cách giải, GV dùng phần mềm vẽ đồ thị của đường cong $(C_2): x^3y - x^2 + xy = 1$ như sau (ở đây chúng tôi sử dụng GeoGebra 5):



Điều GV mong muốn là từ đồ thị trên, HS phát hiện được phương trình thứ hai của hệ luôn có dạng hypebol quen thuộc $y = \frac{1}{x}$. Tức là, HS nảy sinh suy nghĩ rằng phải chăng $(*)$ luôn có nhân tử chung $xy - 1$?

Sau đó, GV cho HS kiểm tra dự đoán nói trên. Cụ thể:

$$(*) \Leftrightarrow x^3y - x^2 + xy = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2(xy - 1) + xy - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy - 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow xy - 1 = 0$$

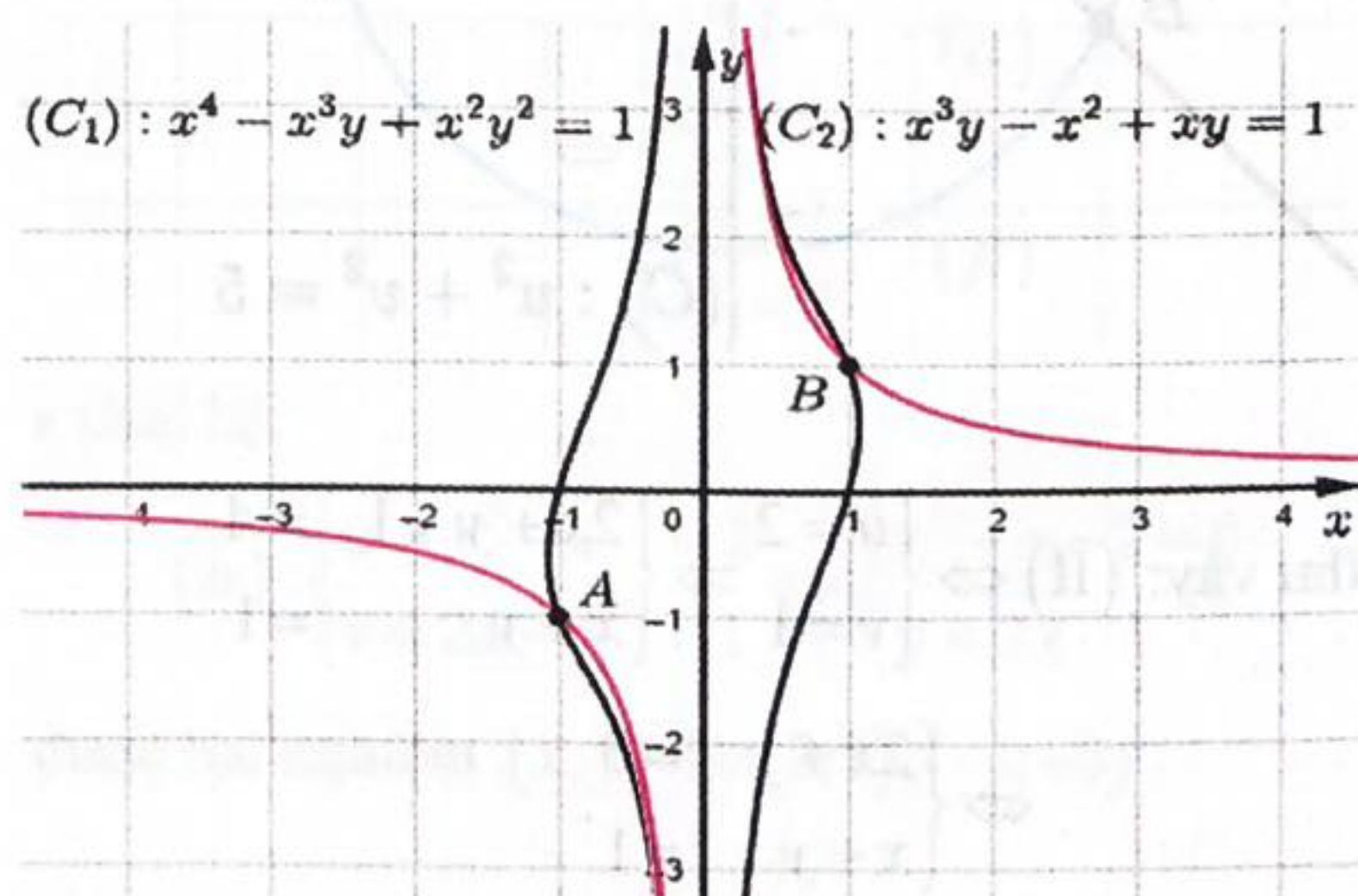
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$$

(vì $x = y = 0$ không là nghiệm của (I)).

Từ đó, thay $y = \frac{1}{x}$ vào phương trình thứ nhất của

hệ và giải ta được nghiệm $(x; y)$ của (I) là $(\pm 1; \pm 1)$.

Cuối cùng, GV có thể sử dụng phần mềm vẽ đồ thị để minh họa cũng như giúp HS kiểm tra kết quả vừa tìm được:



Thí dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ 3x+2y = 4 \end{cases} \quad (I).$$

Định hướng và lược giải.

Hệ phương trình chứa căn bậc hai nên GV có thể hướng HS nghĩ ngay đến bình phương để làm mất căn. Mặt khác do

$$(\sqrt{2x+y+1})^2 + (\sqrt{x+y})^2 = 3x+2y+1 \stackrel{(*)}{=} 4+1=5$$

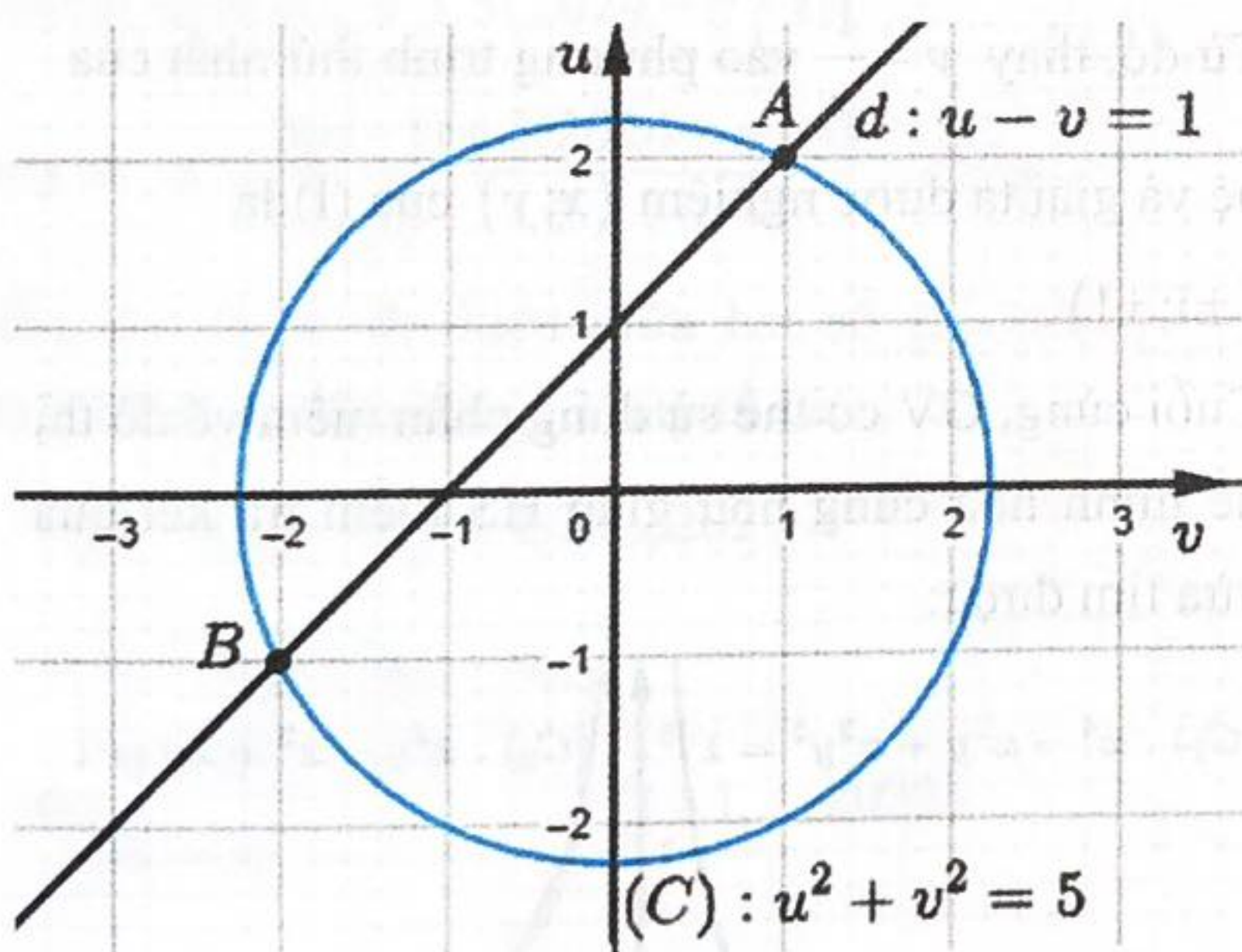
nên GV có thể hướng HS đến cách đặt

$$\begin{cases} u = \sqrt{2x+y+1} \\ v = \sqrt{x+y} \end{cases}$$

Khi đó, (I) trở thành:

$$\begin{cases} u \geq 0 \\ v \geq 0 \\ u - v = 1 \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases} \quad (II).$$

Đến đây, GV cho HS vẽ đồ thị của đường thẳng $d: u-v=1$ và đường tròn $(C): u^2+v^2=5$ trên cùng mặt phẳng tọa độ Ouv thì sẽ có ngay kết quả d cắt (C) trong góc phần tư thứ nhất tại $A(1;2)$.



$$\begin{aligned} \text{Nhu vậy: } (II) &\Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+1 = 4 \\ x+y = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = 3 \\ x+y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó, ta dễ dàng giải được nghiệm $(x; y)$ của hệ (I) là $(2; -1)$.

1.2. Biện pháp 2: Rèn luyện kỹ năng nhận biết điểm đặc biệt ở giả thiết**Thí dụ 1. Giải hệ phương trình**

$$\begin{cases} x(x+y+1) - 3 = 0 & (1) \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 & (2) \end{cases} \quad (I).$$

Định hướng và lược giải.

Phương trình (2) có x^2 ở dưới mẫu, đó là điều đặc biệt, cho nên mách bảo ta cần biến đổi (1) theo hướng này (hơn nữa, trong (1) có $x(x+y+1)$ chứa nhân tử x).

Với điều kiện $x \neq 0$, ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 = \frac{3}{x} \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases} \quad (II).$$

Đến đây, HS nhận ra ngay chỉ cần giải theo phương pháp thế thông thường. Thật vậy,

$$\begin{aligned} (II) &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{3}{x} - 1 \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{3}{x} - 1 & (*) \\ \left(\frac{3}{x} - 1\right)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 & (**) \end{cases} \end{aligned}$$

Khai triển $(**)$ và rút gọn cho ta:

$$4\frac{1}{x^2} - 6\frac{1}{x} + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Thay $x=1$ vào (*) ta được $y=1$.

Thay $x=2$ vào (*) ta được $y=-\frac{3}{2}$.

Vậy nghiệm (x, y) của (I) là:

$$(1; 1), \left(2; -\frac{3}{2}\right).$$

Thí dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x+y} = 3-2x-y \\ x^2-2xy-y^2 = 2 \end{cases} \quad (I).$$

Định hướng và lược giải.

Trừ $\sqrt{2x+y}$ ra, các phần còn lại của hệ đều là đa thức thông thường, do đó $\sqrt{2x+y}$ là điểm cần chú ý đồng thời hướng ta vào việc phân tích theo $2x+y$.

Với điều kiện $0 \leq 2x+y \leq 3$, ta có:

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2x+y} = 3-(2x+y) \\ x^2-y(2x+y) = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y)+2\sqrt{2x+y}-3 = 0 & (1) \\ x^2-(2x+y)y-2 = 0 & (2) \end{cases} \quad (II). \end{aligned}$$

Đến đây, HS thấy ngay (1) là phương trình bậc hai theo $t = \sqrt{2x+y} \geq 0$. Hơn nữa, chỉ cần giải (1) thì ta có thể tiếp tục giải (2) theo phương pháp thế thông thường. Thật vậy:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+y} = +1 \geq 0 \\ \sqrt{2x+y} = -3 < 0 \end{cases}$$

Vì ta loại $\sqrt{2x+y} = -3 < 0$ cho nên

$$\begin{aligned} (II) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = 1 \\ x^2-y-2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-3 = 0 \\ y = x^2-2 \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đây dễ dàng có được nghiệm (x, y) của (I) là:

$$(1; -1), (-3; 7).$$

Thí dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^3 - (y+2)x^2 + xy = 2 & (1) \\ x^2 + x - y = 3 & (2) \end{cases} \quad (I).$$

Định hướng và lược giải.

Nhận thấy ở (1) có thể rút x làm nhân tử chung, đây là điều đặc biệt. Hơn nữa, nếu biến đổi (1) theo hướng này:

$$(1) \Leftrightarrow x[2x^2 - (y+2)x + y] = 2$$

thì ta thấy phương trình $2x^2 - (y+2)x + y = 0$ có

$$a+b+c = 2-y-2+y = 0$$

nên có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{y}{2}$.

Tổng hợp các nhận định trên ta được:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2x(x-1)\left(x-\frac{y}{2}\right) = 2 \\ &\Leftrightarrow x(x-1)(2x-y) = 2. \end{aligned}$$

Mặt khác, biến đổi (2) theo những nhân tử thành phần của (1) ta có:

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow x^2 - x + 2x - y = 3 \\ &\Leftrightarrow x(x-1) + (2x-y) = 3. \end{aligned} \quad (7)$$

Đến đây, HS nhận ra ngay phương pháp đặt

$$\begin{cases} u = x(x-1) \\ v = 2x-y \end{cases}$$

để giải hệ đã cho.

Khi ấy, (I) trở thành: $\begin{cases} uv = 2 \\ u+v = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \quad (\alpha) \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \quad (\beta)$$

• Giải hệ:

$$(\alpha): \begin{cases} u = x^2 - x = 2 \\ v = 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

được hai nghiệm (x, y) là $(2; 3), (-1; -3)$.

• Giải hệ: $(\beta): \begin{cases} u = x^2 - x = 1 \\ v = 2x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$

được hai nghiệm (x, y) là

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; -1+\sqrt{5}\right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; -1-\sqrt{5}\right).$$

Tóm lại, hệ (I) có bốn nghiệm (x, y) như sau

$$(2; 3), (-1; -3),$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; -1+\sqrt{5}\right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; -1-\sqrt{5}\right).$$

Thí dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 y = 4 & (1) \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x + y)^2 & (2) \end{cases} \quad (I).$$

Định hướng và lược giải.

Nhận thấy (2) có tính đối xứng, đây là điều đặc biệt mà ta quan tâm để cố gắng phân tích (2) thành nhân tử. Thật vậy, ta có:

$$(2) \Leftrightarrow xy(x^2 + y^2) + 2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(xy - 1) + 2(1 - xy) = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy - 1)(x^2 + y^2 - 2) = 0.$$

Với $xy = 1$, kết hợp cùng (1): $x^2 y = 4$ ta được

$$\text{nghiệm } (x, y) = \left(4; \frac{1}{4}\right).$$

Tuy nhiên, trong trường hợp $x^2 + y^2 = 2$, việc kết

hợp với (1) cho ta hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 y = 4 \end{cases}$ vô nghiệm.

Vậy, hệ (I) đã cho chỉ có nghiệm (x, y) duy nhất

$$\text{là } \left(4; \frac{1}{4}\right).$$

1.3. Biện pháp 3: Định hướng lời giải trên cơ sở kết nối kiến thức cũ

Thí dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy + x + 1 = 7y & (1) \\ x^2 y^2 + xy + 1 = 13y^2 & (2) \end{cases} \quad (I).$$

Định hướng và lược giải.

Nhận thấy (2) có vế trái giống hằng đẳng thức bình phương của một tổng nên GV có thể hướng dẫn HS biến đổi theo hướng này, cụ thể:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} xy + 1 + x = 7y \\ x^2 y^2 + 2xy + 1 - xy = 13y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (xy + 1) + x = 7y & (*) \\ (xy + 1)^2 - xy = 13y^2 & (**) \end{cases} \quad (II).$$

Vì (*) có x và (**) có $-xy$ nên theo lẽ thường

HS sẽ nghĩ cần nhân (*) cho y rồi cộng hai phương trình ấy theo vế để làm mất số hạng xy .

Hơn nữa, nếu thực hiện như vậy thì vế phải ở (*)

sẽ có $7y^2$ là đa thức đồng dạng với vế phải của

(**), điều này càng củng cố thêm rằng cách giải

này là phù hợp.

Dễ thấy $x = y = 0$ không là nghiệm của (I) nên

$y \neq 0$. Khi đó:

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} (xy + 1)y + xy = 7y^2 \\ (xy + 1)^2 - xy = 13y^2 \end{cases}$$

Suy ra:

$$(xy + 1)^2 + y(xy + 1) - 20y^2 = 0 \quad (3).$$

GV gợi ý cho HS nhận thấy (3) là phương trình

bậc hai theo $t = xy + 1$ và nếu hướng giải trên là

hợp lý thì Δ sẽ là số chính phương.

Xét (3), ta có:

$$\begin{aligned} \Delta &= y^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20y^2) = y^2 + 80y^2 = 81y^2 \\ &= (9y)^2. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} xy + 1 = \frac{-y - 9y}{2} = -5y \\ xy + 1 = \frac{-y + 9y}{2} = 4y \end{cases}$$

Kéo theo:

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 7y = xy + 1 \\ xy + 1 = -5y \\ xy + 1 = 4y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -x + 7y = -5y \\ xy + 1 = -5y \end{cases} & (\alpha) \\ \begin{cases} -x + 7y = 4y \\ xy + 1 = 4y \end{cases} & (\beta) \end{cases}$$

$$\text{Hệ } (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12y \\ 12y^2 + 5y + 1 = 0 \end{cases} : \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{Giải hệ } (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 3y^2 - 4y + 1 = 0 \end{cases} \text{ ta được hai}$$

$$\text{nghiệm } (x, y) \text{ là } (3; 1), \left(1; \frac{1}{3}\right).$$

Hơn nữa, đây cũng chính là hai nghiệm của hệ (I) đã cho.

Thí dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 & (1) \\ x|x| + y|y| = -2 & (2) \end{cases} \quad (I).$$

Định hướng và lược giải.

Trực giác giúp HS nhận ra ngay (1) có vẻ trái giống hằng đẳng thức bình phương của một tổng nên GV có thể gợi ý cho HS biến đổi theo hướng này, cụ thể:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 4y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 = 4y^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2y \\ x + y = -2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -3y \end{cases}$$

Với $x = y$, phương trình (2) trở thành

$y|y| = -1 < 0$, điều này kéo theo $y < 0$. Và từ đó,

$$y|y| = -1 \stackrel{y < 0}{\Leftrightarrow} -y^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 1 \stackrel{y < 0}{\Leftrightarrow} y = -1 = x.$$

Tương tự, trong trường hợp $x = -3y$, thay biểu thức này vào (2) rồi giải ta được $y > 0$ mà cụ thể hơn là $y = \frac{1}{2}$. Khi đó, $x = -\frac{3}{2}$ tương ứng.

Vậy hệ (I) có hai nghiệm (x, y) là:

$$(-1; -1), \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

1.4. Biện pháp 4: Rèn luyện tư duy biện chứng, tư duy phê phán

Thí dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x - y) \left(1 - \frac{1}{xy}\right) = 1 \\ (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{x^2 y^2}\right) = 21 \end{cases} \quad (I).$$

$$(*)$$

Định hướng và lược giải.

Phương trình (*) của hệ (I) làm của HS nghĩ đến việc đặt $S = x + y$, $P = xy$. Hơn nữa, nếu các em dùng ẩn phụ $z = -y$ thì hệ (I) trở thành:

$$\begin{cases} (x + z) \left(1 + \frac{1}{xz}\right) = 1 \\ (x^2 + z^2) \left(1 + \frac{1}{x^2 z^2}\right) = 21 \end{cases}$$

là dạng quá quen thuộc mà HS thường xuyên giải quyết bằng cách đặt $S' = x + z$, $P' = xz$.

Tuy nhiên, nếu giải theo cách đặt ẩn phụ tổng, tích như trên thì lời giải có thể sẽ dài. Ở đây, GV cần cho HS thấy đôi khi ta cần những hướng giải khác biệt với định hướng thông thường, rồi từ đó mới có thể tìm được phương án tối ưu. Cụ thể đối với bài tập này, các em nên nhân vào rồi căn cứ tình hình cụ thể mà đặt ẩn phụ cho thích hợp.

Với điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$, ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y) - \frac{x - y}{xy} = 1 \\ (x^2 + y^2) + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = 1 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(y + \frac{1}{y}\right) = 1 \\ \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) = 21 \end{cases} \quad (II).$$

$$\text{Đặt } a = x + \frac{1}{x} \Rightarrow a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2;$$

$$b = y + \frac{1}{y} \Rightarrow y^2 + \frac{1}{y^2} = b^2 - 2.$$

$$\text{Khi đó (II) có dạng: } \begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 - 2 + b^2 - 2 = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 1 \\ a^2 + b^2 - 25 = 0 \quad (**). \end{cases}$$

Thay $b = a - 1$ vào (**) ta được:

$$a^2 + (a - 1)^2 - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 2a - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \Rightarrow b = 3 \\ a = -3 \Rightarrow b = -4 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Trường hợp: } \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 4 \\ y + \frac{1}{y} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 = 0 \\ y^2 - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{3} \neq 0 \\ y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{hay } \left(2 + \sqrt{3}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right), \left(2 - \sqrt{3}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \text{ là bốn}$$

nghiệm của hệ (I).

$$\bullet \text{ Trường hợp: } \begin{cases} a = -3 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = -3 \\ y + \frac{1}{y} = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 1 = 0 \\ y^2 + 4y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \neq 0 \\ y = -2 \pm \sqrt{3} \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{hay } \left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}; -2 \pm \sqrt{3}\right), \left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}; -2 \pm \sqrt{3}\right) \text{ là}$$

bốn nghiệm của (I).

Vậy hệ (I) có tám nghiệm:

$$\left(2 + \sqrt{3}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right), \left(2 - \sqrt{3}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right),$$

$$\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}; -2 \pm \sqrt{3}\right), \left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}; -2 \pm \sqrt{3}\right).$$

Thí dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 2 \\ y \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 3 \end{cases} \quad (I).$$

Định hướng và lược giải.

Nhiều HS thấy bài tập này khá giống Thí dụ 1 của mục 1.4 ở trên nên sẽ nhân vào. Song, thực tế không phải vậy, khi nhân vào hệ phương trình càng phức tạp hơn. Tuy nhiên, nếu quan sát tinh

một chút, sự xuất hiện của thành phần $1 \pm \frac{1}{x^2 + y^2}$

làm ta liên tưởng đến việc giải quyết bằng quy tắc cộng đại số.

Thật vậy, với điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$, ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{2}{x} \quad (1) \\ 1 - \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{3}{y} \quad (2) \end{cases}$$

Lấy (1) + (2) và (1) - (2) ta được hệ:

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2 \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = \frac{2}{x^2 + y^2} \quad (4) \end{cases}$$

Nhân (3) và (4) về theo về ta có:

$$\begin{aligned}\frac{4}{x^2} - \frac{9}{y^2} &= \frac{4}{x^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow 4y^2(x^2 + y^2) - 9x^2(x^2 + y^2) &= 4x^2y^2 \\ \Leftrightarrow 4y^4 - 9x^2y^2 - 9x^4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\left(\frac{y}{x}\right)^4 - 9\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 3 &\Leftrightarrow y^2 = 3x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{3}x.\end{aligned}$$

Thay lần lượt $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$ vào (3) ta

$$\begin{aligned}\text{được: } \frac{2}{x} + \frac{3}{\sqrt{3}x} &= 2 \Leftrightarrow x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow y &= \sqrt{3}x = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2}; \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{\sqrt{3}x} &= 2 \Leftrightarrow x = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow y &= -\sqrt{3}x = \frac{-2\sqrt{3} + 3}{2}.\end{aligned}$$

Thử lại, ta nhận

$$\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}; \frac{2\sqrt{3} + 3}{2}\right), \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}; \frac{-2\sqrt{3} + 3}{2}\right)$$

là hai nghiệm của (I).

Thí dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - xy + y = 0 & (1) \\ 4x^2 - y^2 - 8x + 4y + 4 = 0 & (2) \end{cases} \quad (I).$$

Định hướng và lược giải.

Từ (1) ta có ngay $y = \frac{x^2}{x-1}$. Nhưng nếu để nguyên biểu thức của y như thế mà thay vào (2) thì sau khi rút gọn, ta sẽ thất vọng do nhận được phương trình bậc bốn:

$$3x^4 - 12x^3 + 20x^2 - 16x + 4 = 0$$

mà việc giải nó rất khó khăn.

Do đó, muốn giải được hệ (I), ta cần tìm được hướng biến đổi thích hợp.

Dễ thấy $\begin{cases} x = 1 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$ không là nghiệm của (I). Suy ra

$x \neq 1$. Khi đó ta có:

$$(1) \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} \quad (*).$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow (4x^2 - 8x + 4) + 4 = y^2 - 4y + 4 \\ &\Leftrightarrow (2x - 2)^2 + 4 = (y - 2)^2 \\ (*) &\Leftrightarrow (2x - 2)^2 + 4 = \left(x - 1 + \frac{1}{x-1}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow 4(x-1)^2 + 4 = (x-1)^2 + 2 + \frac{1}{(x-1)^2} \\ &\Leftrightarrow 3(x-1)^2 + 2 - \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(x-1)^4 + 2(x-1)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{3} > 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

Thay lần lượt $x = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$, $x = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$ vào (*):

$$y = \frac{x^2}{x-1} \text{ ta được: } y = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{3}, y = \frac{6 - 4\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy hệ (I) có hai nghiệm (x, y) là:

$$\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{3}; \frac{6 + 4\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}; \frac{6 - 4\sqrt{3}}{3}\right).$$

Kết luận.

Rèn luyện tư duy cho HS là rất quan trọng trong quá trình dạy Toán, GV có thể tạo điều kiện thuận lợi cho các em rèn luyện và phát triển tư duy bằng cách phân chia những bước lớn trong quy trình giải thành những bước nhỏ hơn mà ở những bước đó HS có thể hiểu, rèn luyện được kỹ năng, phát triển được sự sáng tạo của mình. Sau khi được rèn luyện nhiều lần, các em sẽ tích lũy được kinh nghiệm, có sự nhạy cảm để phát hiện, đề xuất các phương pháp giải phù hợp, vượt qua những thách thức do đề bài đặt ra.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/554 (Lớp 6). Tìm tất cả các cặp số nguyên $(m; n)$ sao cho

$$n^4 + 2n^3 + 16n^2 + 30n + 15 = m^2.$$

NGUYỄN ĐỨC TUỞNG
(Pleiku, Gia Lai)

Bài T2/554 (Lớp 7). Tìm số x sao cho

$$|x - 2021| + |x - 2022| + |x - 2023| = 2(2022x + 1) - (x^2 + 2022^2).$$

CAO NGỌC TOÀN
(GV THCS Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T3/554. Xét số nguyên dương $a = 2^n p$ với n là số nguyên dương và p là số nguyên tố lẻ. Gọi S là tổng các ước số dương của a mà các ước số này nhỏ hơn a . Hãy so sánh giá trị của S và a .

NGUYỄN VIỆT HẢI (Hà Nội)

Bài T4/554. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$,

$\frac{CD}{2} < AB < CD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các đường chéo AC, BD . Qua E vẽ đường thẳng d_1 vuông góc với AD , qua F vẽ đường thẳng d_2 vuông góc với BC . Hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại O . Chứng minh $OA = OB$.

BÙI VĂN CHI
(Nhà 21/2 đường Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T5/554. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng ta luôn có

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq 1.$$

NGUYỄN HÙNG CƯỜNG
(GV THCS Nhơn An, TX. An Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/554. Với x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn $13x^2 + y^2 + 36x + y \leq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = y(y + 4x - 9)$.

CHÂU HÒA NHÂN
(HV Cao học khóa 29, Toán ứng dụng, ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T7/554. Giải phương trình

$$x^3(x^6 - 27) = (9x^4 + x + 2)\sqrt{x + 2}.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/554. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm E . Gọi F là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AE . Tia BF cắt AD tại G , CG cắt DF tại H . Chứng minh $HE \parallel AB$.

LỤC BÌNH
(GV Trường Trưng Vương, TP. Đông Hà, Quảng Trị)

Bài T9/554. Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{|ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)|}{abc}.$$

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/554. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E = a^2 + b^2$ trong đó a, b là các số nguyên dương sao cho $a^2 + b^2$ chia hết cho 2023.

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(5/7/136 Phan Đình Phùng, TP. Nam Định, Nam Định)

Bài T11/554. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn $f(1) = 3$ và

$$f(xy) + 2f(x+y) = f(x)f(y) + 2, \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

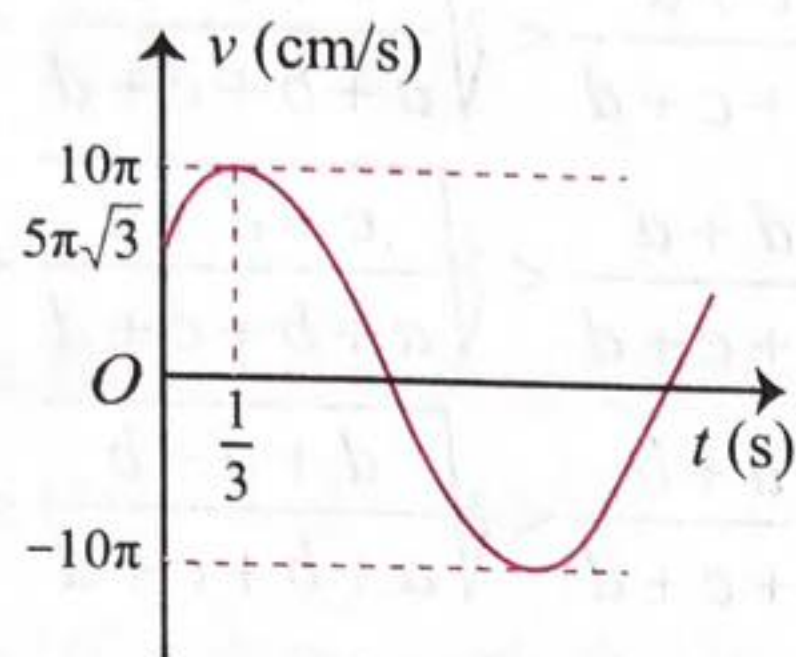
HỒ THANH LAI
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

Bài T12/554. Cho tam giác nhọn không cân ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB . P là hình chiếu

vuông góc của D trên EF . DP cắt (I) tại điểm thứ hai K , L là hình chiếu vuông góc của A trên IK . Đường tròn ngoại tiếp các tam giác LEC , LFB cắt (I) lần thứ hai tương ứng tại M , N . Chứng minh rằng M , N , P thẳng hàng.

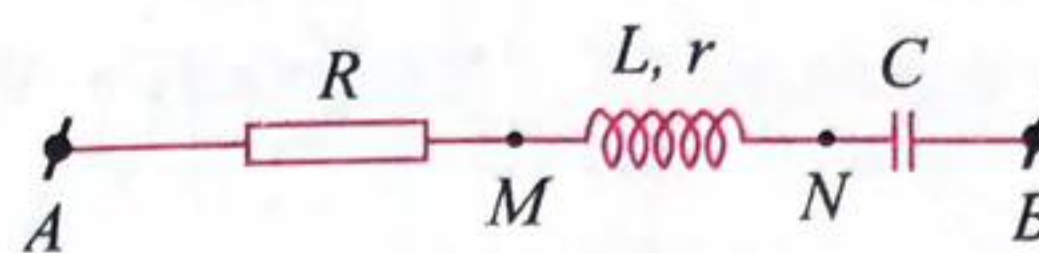
LƯU CÔNG ĐÔNG
(GV THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội)

Bài L1/554. Một vật dao động điều hoà có đồ thị của vận tốc theo thời gian như hình dưới. Hãy viết phương trình của gia tốc của vật.



VIỆT CƯỜNG (Hà Nội)

Bài L2/554. Cho mạch điện xoay chiều như hình dưới.



Biết điện trở thuần $R = 120\sqrt{3} \Omega$, điện trở thuần của cuộn dây $r = 30\sqrt{3} \Omega$. Điện áp hai đầu đoạn mạch có biểu thức: $U_{AB} = U_0 \cos 100\pi t$ (V), hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai điểm A , N là $U_{AN} = 300$ V, và giữa hai điểm M , B là $U_{MB} = 60\sqrt{3}$ V. Điện áp tức thời U_{AN} lệch pha $\frac{\pi}{2}$ so với U_{MB} . Viết biểu thức điện áp giữa hai đầu mạch.

THANH LÂM (Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/554 (For 6th grade). Find all pairs of integers $(m; n)$ so that

$$n^4 + 2n^3 + 16n^2 + 30n + 15 = m^2.$$

Problem T2/554 (For 7th grade). Find numbers x so that

$$|x - 2021| + |x - 2022| + |x - 2023| = 2(2022x + 1) - (x^2 + 2022^2).$$

Problem T3/554. Consider the number $a = 2^n p$ where n is a positive number and p is an odd prime number. Let S be the sum of all positive factors, which are less than a , of a . Compare S and a .

Problem T4/554. Given a trapezium $ABCD$ with $AB \parallel CD$, $\frac{CD}{2} < AB < CD$. Let E and F

respectively be the midpoints of AC and BD . Through E draw the line d_1 perpendicular to AD , through F draw the line d_2 perpendicular to BC . The lines d_1 and d_2 meet at O . Show that $OA = OB$.

Problem T5/554. Given positive numbers a, b, c . Show that

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq 1.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/554. Consider the real numbers x, y satisfying $13x^2 + y^2 + 36x + y \leq 0$. Find the minimum value of the expression $P = y(y + 4x - 9)$.

Problem T7/554. Solve the equation

$$x^3(x^6 - 27) = (9x^4 + x + 2)\sqrt{x + 2}.$$

(Xem tiếp trang 30)



Bài T1/550. Tìm các số nguyên dương a, b sao cho: $a^b + b^a = 2020$.

Lời giải. Giả sử rằng $b \geq a \geq 1$ (nếu $a \geq b \geq 1$ thì đổi số a cho số b trong giả thiết). Từ giả thiết có

$$2020 = a^b + b^a \geq a^a + a^a = 2a^a$$

nên $a^a \leq 1010 < 5^5 = 3125$, suy ra $a \leq 4$.

• Nếu $a = 1$ thì $1^b + b^1 = 2020$, suy ra $b = 2019$ (thỏa mãn).

• Nếu $a = 2$ thì $2^b + b^2 = 2020$ mà $2^{10} + 10^2 = 1124 < 2020 < 2^{11} + 11^2 = 2169$, suy ra $10 < b < 11$ (không thỏa mãn).

• Nếu $a = 3$ thì $3^b + b^3 = 2020$ mà $3^6 + 6^3 = 945 < 2020 < 3^7 + 7^3 = 2530$, suy ra $6 < b < 7$ (không thỏa mãn).

• Nếu $a = 4$ thì $4^b + b^4 = 2020$ mà $4^5 + 5^4 = 1649 < 2020 < 4^6 + 6^4 = 5392$, suy ra $5 < b < 6$ (không thỏa mãn).

Vậy chỉ có các số $(a; b)$ bằng $(1; 2019)$ và $(2019; 1)$ thỏa mãn đề bài toán.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng. **Nghệ An:** Hoàng Văn Duy, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** Lương Thanh Nhã, 6B, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành.

Có một bạn nữa giải đúng nhưng không ghi tên trên bài làm.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/550. Cho a, b, c, d là bốn số dương thỏa mãn $a + b + c + d = 16$. Chứng minh rằng:

$$6\sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{a+b+c} + \sqrt[3]{b+c+d} + \sqrt[3]{c+d+a} + \sqrt[3]{d+a+b} < 8\sqrt[3]{2}.$$

Lời giải. Vì a, b, c, d là các số dương, cho nên ta có: $a + b + c < a + b + c + d$;
 $b + c + d < a + b + c + d$;

$$c + b + a < a + b + c + d;$$

$$d + a + b < a + b + c + d.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{a+b+c}{a+b+c+d} < 1; \frac{b+c+d}{a+b+c+d} < 1;$$

$$\frac{c+d+a}{a+b+c+d} < 1; \frac{d+a+b}{a+b+c+d} < 1$$

và do đó ta có :

$$\frac{a+b+c}{a+b+c+d} < \sqrt[3]{\frac{a+b+c}{a+b+c+d}} < 1;$$

$$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} < \sqrt[3]{\frac{b+c+d}{a+b+c+d}} < 1;$$

$$\frac{c+d+a}{a+b+c+d} < \sqrt[3]{\frac{c+d+a}{a+b+c+d}} < 1;$$

$$\frac{d+a+b}{a+b+c+d} < \sqrt[3]{\frac{d+a+b}{a+b+c+d}} < 1.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có:

$$3 < \frac{\sqrt[3]{a+b+c} + \sqrt[3]{b+c+d} + \sqrt[3]{c+d+a} + \sqrt[3]{d+a+b}}{\sqrt[3]{a+b+c+d}} < 4.$$

Thay $a + b + c + d = 16$, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh:

$$6\sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{a+b+c} + \sqrt[3]{b+c+d} + \sqrt[3]{c+d+a} + \sqrt[3]{d+a+b} < 8\sqrt[3]{2}.$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Hưng Yên: Lê Tuấn Hiệp, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Trịnh Phương Minh, 6/14, THCS Lê Quý Đôn; **Nghệ An:** Trần Quang Anh, 8C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/550. Biết số tự nhiên $\overline{abcdefghi}$ (có chín chữ số) có ước nguyên tố lớn hơn 199998. Hỏi phương trình bậc hai $ax^2 + \overline{bcde}.x + \overline{fghi} = 0$ (ẩn x) có thể có nghiệm hữu tỷ không?

Lời giải. Gọi P là ước nguyên tố lớn hơn 199998 của số $\overline{abcdefghi}$ thì $\overline{abcdefghi} = Pt$ (với $t \in \mathbb{N}^*$).

$$\text{Phương trình bậc hai } ax^2 + \overline{bcde}.x + \overline{fghi} = 0 \quad (1)$$

có $\Delta = \overline{bcde}^2 - 4a.\overline{fghi}$. Dễ thấy Δ là số nguyên.

Giả sử phương trình (1) có nghiệm hữu tỉ thì Δ phải là số chính phương, kí hiệu $\Delta = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$). Khi đó:

$$\overline{bcde}^2 - 4a.\overline{fghi} = m^2 \Leftrightarrow \overline{bcde}^2 - m^2 = 4a.\overline{fghi}.$$

Do $4a.\overline{fghi} \geq 0$ nên $\overline{bcde}^2 \geq m^2 \Leftrightarrow \overline{bcde} \geq m$.

Ta có:

$$\begin{aligned} 4a.Pt &= 4a.\overline{abcdefghi} = 4a.(a.10^8 + \overline{bcde}.10^4 + \overline{fghi}) \\ &= (2a.10^4)^2 + 2.(2a.10^4).\overline{bcde} + \overline{bcde}^2 - m^2 \\ &= (2a.10^4 + \overline{bcde})^2 - m^2. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$4a.Pt = (2a.10^4 + \overline{bcde} - m).(2a.10^4 + \overline{bcde} + m) \quad (2).$$

Do đó: $(2a.10^4 + \overline{bcde} - m) : P$

hoặc $(2a.10^4 + \overline{bcde} + m) : P \quad (3).$

Mặt khác, dễ thấy $4a.Pt$ và $2a.10^4 + \overline{bcde} + m$ là các số nguyên dương, từ (2) suy ra $2a.10^4 + \overline{bcde} - m$ cũng là số nguyên dương. Do đó:

$$\begin{aligned} 1 &\leq 2a.10^4 + \overline{bcde} - m \leq 2a.10^4 + \overline{bcde} + m \\ &\leq 2a.10^4 + \overline{bcde} + \overline{bcde} \\ &= 2(a.10^4 + \overline{bcde}) = 2.\overline{abcde} \\ &\leq 2.99999 = 199998 < P \end{aligned}$$

nên $(2a.10^4 + \overline{bcde} - m)$ và $(2a.10^4 + \overline{bcde} + m)$ đều không chia hết cho P (4).

Nhận thấy (3) và (4) mâu thuẫn với nhau. Vậy phương trình (1) không có nghiệm hữu tỉ.

Nhận xét. Đa số các bạn gửi bài đều giải cho lời giải đúng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải với lập luận chặt chẽ và ngắn gọn:

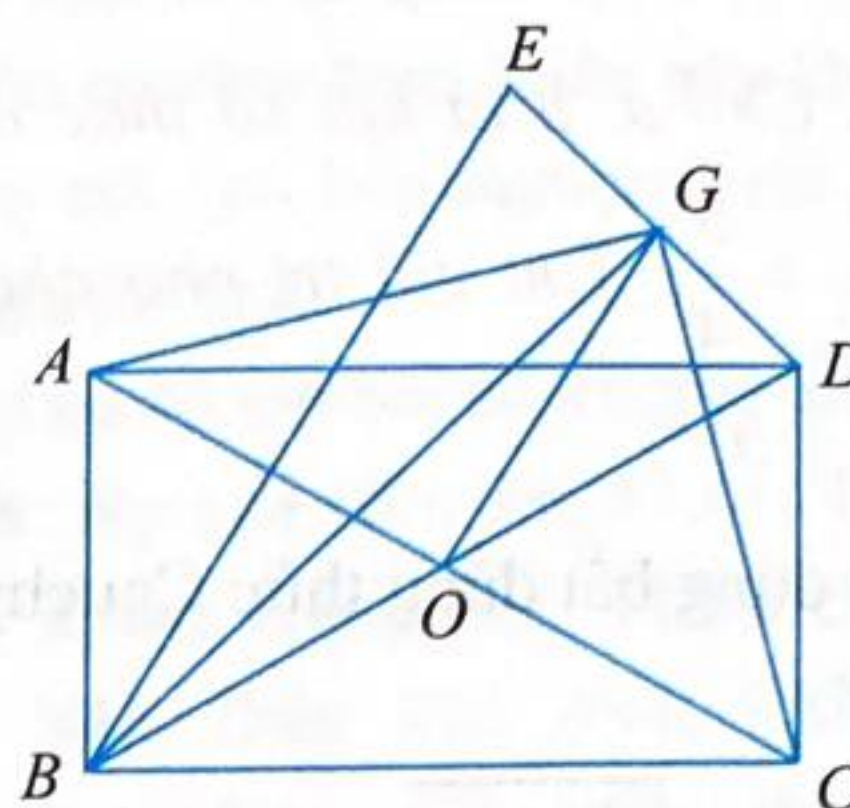
Hà Nội: Trần Việt Anh, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy; **Thanh Hoá:** Nguyễn Bảo Khánh, 8C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hoá; Nguyễn Trinh An, 9K, THCS Trần Mai Ninh; **Nghệ An:** Ngô Xuân Trường, 9A1, THCS Mai Hùng, TX. Hoàng Mai.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/550. Cho hình chữ nhật $ABCD$ ($AB < BC$). Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với

AC và lấy trên đó điểm E sao cho $BE = AC$. Tính số đo góc $\widehat{EDC}$.

Lời giải. • Trường hợp E, B khác phía so với AC .



Gọi G là trung điểm của DE , O là tâm hình chữ nhật $ABCD$. Ta có $BE = AC = BD$ nên tam giác EBD cân. Suy ra $BG \perp DE$. Từ đó suy ra G thuộc đường tròn tâm O đường kính AC .

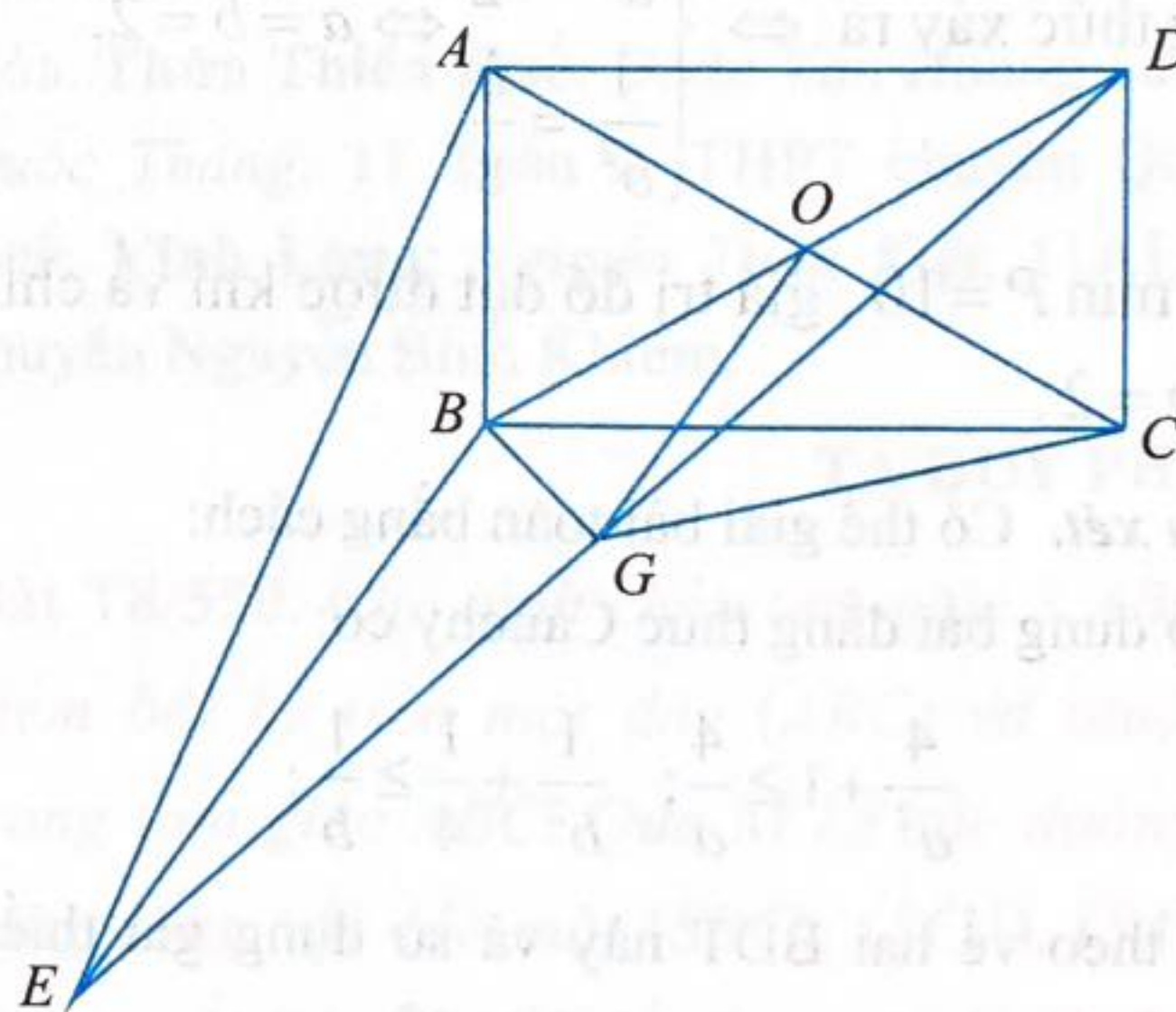
Mặt khác, $GO \parallel BE$ (tính chất đường trung bình) suy ra $GO \perp AC$, nên tam giác AGC vuông cân.

Xét đường tròn $(ABCDG)$ có

$$\widehat{GDC} = 180^\circ - \widehat{GAC} = 135^\circ.$$

Do đó $\widehat{EDC} = 135^\circ$.

• Trường hợp B, E cùng phía so với AC , làm hoàn toàn tương tự, ta tính được $\widehat{EDC} = 45^\circ$.



Nhận xét. Một số bạn không chia hai trường hợp của bài toán. Các bạn dưới đây có lời giải tốt.

Phú Thọ: Hà Phương Anh, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Lâm, Phạm Xuân Hoàng, 8A, Lương Thị Hải Yến, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Chánh Thiện, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, Q.3; **Hà Tĩnh:**

Lưu Khánh Huy, 8H, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh;

Sơn La: Lương Hữu Bách, 9A1, THCS Nguyễn Trãi.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/550. Cho a, b là hai số thực dương thỏa

mãn $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = 4a + b$.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương, ta có:

$$\frac{4}{a^2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \geq 3 \cdot \sqrt{\frac{4}{a^2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = 3 \Rightarrow \frac{4}{a^2} + a \geq 3 \quad (1)$$

$$\frac{1}{b^2} + \frac{b}{8} + \frac{b}{8} \geq 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{b^2} \cdot \frac{b}{8} \cdot \frac{b}{8}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{b}{4} \geq \frac{3}{4} \quad (2)$$

Cộng theo vế của (1) và (2) ta được:

$$\begin{aligned} \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} + a + \frac{b}{4} &\geq \frac{15}{4} \\ \Rightarrow \frac{5}{4} + \frac{4a+b}{4} &\geq \frac{15}{4} \\ \Rightarrow \frac{P}{4} = \frac{4a+b}{4} &\geq \frac{10}{4} \Rightarrow P \geq 10. \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{a^2} = \frac{a}{2} \\ \frac{1}{b^2} = \frac{b}{8} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2.$$

Vậy $\min P = 10$, giá trị đó đạt được khi và chỉ khi $a = b = 2$.

Nhận xét. Có thể giải bài toán bằng cách:

1) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy có:

$$\frac{4}{a^2} + 1 \geq \frac{4}{a}; \quad \frac{1}{b^2} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{b};$$

cộng theo vế hai BĐT này và sử dụng giả thiết, ta

$$\text{được: } \frac{5}{2} \geq \frac{4}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4^2}{4a} + \frac{1^2}{b} \geq \frac{(4+1)^2}{4a+b} = \frac{25}{P} \Rightarrow P \geq 10.$$

2) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 5 số dương, ta

$$\begin{aligned} \text{có: } \frac{5}{4} &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 5 \sqrt{\frac{1}{a^8 b^2}} \\ &\Rightarrow a^8 b^2 \geq 1024; \end{aligned}$$

$$P = a + a + a + a + b \geq 5 \sqrt[5]{a^4 b} \Rightarrow P \geq 10.$$

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Sơn La: Lương Hữu Bách, 9A1, THCS Nguyễn Trãi, TP. Sơn La; Hà Tĩnh: Lưu Khánh Huy, 8H, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh; Nghệ An: Trần Quang Anh, 8C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Ngô Văn Trường, 9A, THCS Mai Hùng, TX. Hoàng Mai, Phạm Xuân Hoàng, Nguyễn Văn Lâm, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; Thanh Hóa: Nguyễn Trinh An, 9K, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, Nguyễn Bảo Khánh, 8C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; Hà Nội: Trần Việt Anh, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy, Đoàn Trí Anh, 8A, THCS Đan Phượng, Đan Phượng; Phú Thọ: Hà Phương Anh, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; TP. Hồ Chí Minh: Nguyễn Chánh Thiện, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/550. Giải phương trình

$$x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0 \quad (1).$$

Lời giải. Trước hết ta giải phương trình trên đoạn $[-2; 2]$. Đặt $x = 2 \cos t, t \in [0; \pi]$. Khi đó (1) trở thành:

$$16 \cos^4 t - 8 \cos^3 t - 16 \cos^2 t + 6 \cos t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4t = \cos 3t \Leftrightarrow \begin{cases} t = k2\pi \\ t = \frac{k2\pi}{7} \end{cases}$$

Do $t \in [0; \pi]$ nên $t \in \left\{0; \frac{2\pi}{7}; \frac{4\pi}{7}; \frac{6\pi}{7}\right\}$. Vậy trên đoạn $[-2; 2]$ phương trình (1) có 4 nghiệm, mặt khác (1) là phương trình bậc 4 nên có tối đa là 4 nghiệm. Vậy (1) có tập nghiệm S là:

$$S = \left\{2; \cos \frac{2\pi}{7}; \cos \frac{4\pi}{7}; \cos \frac{6\pi}{7}\right\}.$$

Nhận xét. Đây là một cách giải ngắn gọn và hay (của tác giả đề toán). Có nhiều bạn tham gia giải bài này. Hướng giải của các bạn chủ yếu là biến đổi: (1) $\Leftrightarrow (x-2)(x^3 + x^2 - 2x - 1) = 0$ dẫn đến giải PT bậc ba: $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ (2). PT(2) được các bạn giải theo một số cách khác nhau, Tuy nhiên lời giải của một số bạn còn dài. Bạn Nguyễn Tuấn Kiệt sử dụng công cụ số phức cũng cho lời giải ngắn gọn. Xin nêu

tên các bạn có lời giải đúng: **Vĩnh Long:** Nguyễn Tuấn Kiệt, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Quảng Bình:** Phạm Thị Mỹ Hạnh, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** Phan Quốc Thắng, 11 Toán 2, Đoàn Văn Hoàng Lân, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Vĩnh Phúc:** Bạch Thái Sơn, 10A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/550. Cho hàm số $f(x) = x^2 + m$. Tìm m để phương trình $f(f(x)) = x$ có bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho biểu thức

$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2x_3x_4$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải. (Của bạn Nguyễn Tuấn Kiệt và nhiều bạn khác) Vì $f(x) = x^2 + m$ nên

$$f(f(x)) = (f(x))^2 + m = (x^2 + m)^2 + m.$$

Phương trình $f(f(x)) = x$ trở thành

$$(x^2 + m)^2 + m = x$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + m)^2 - x^2 + x^2 + m - x = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + m + x)(x^2 + m - x) + x^2 + m - x = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + m - x)(x^2 + m + x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + m = 0 & (1) \\ x^2 + x + 1 + m = 0 & (2) \end{cases}$$

Để phương trình $f(f(x)) = x$ có bốn nghiệm thực thì cả hai phương trình (1) và (2) đều phải có hai nghiệm thực, tức là

$$\begin{cases} \Delta_1 = 1 - 4m \geq 0 \\ \Delta_2 = 1 - 4(1 + m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{4} \\ m \leq -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{4} (*).$$

Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của (1), x_3, x_4 là nghiệm của (2), với điều kiện (*) ta có:

$$\begin{aligned} Q(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2x_3x_4 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + (x_3 + x_4)^2 - 2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4 \\ &= 1^2 - 2m + 1^2 - 2(1 + m) - m(1 + m) \\ &= -m^2 - 5m = -\left(m + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \leq \frac{25}{4}. \end{aligned}$$

Vậy $\min Q(x) = \frac{25}{4}$ khi $m = -\frac{5}{2}$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Nhận xét. Một số bạn quên đặt điều kiện để phương trình có bốn nghiệm thực. Điều này không hẳn sai vì đầu bài chỉ nói “có bốn nghiệm” mà không đòi hỏi “có bốn nghiệm thực”.

Tất cả các bạn đã gửi bài có lời giải tốt:

Bình Định: Nguyễn Hữu Trí, 11A1, THPT số 2 Phù Cát; Phan Trung Trực, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Hà Nội:** Trần Việt Anh, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy. **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thanh Bảo, Hoàng Bá Hữu, Phan Như Minh Quân, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh. **Hưng Yên:** Chu Đức Bảo, Nguyễn Trọng Việt, 10T, THPT chuyên Hưng Yên. **Nghệ An:** Phan Đại Hoàng 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; Ngô Văn Trường, 9A, THCS Mai Hùng, TX. Hoàng Mai. **Phú Thọ:** Hà Phương Anh, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông. **Quảng Bình:** Phạm Thị Mỹ Hạnh, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Sóc Trăng:** Tiết Trọng Khiêm, 11A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai. **Sơn La:** Lương Hữu Bách, 9A1, THCS Nguyễn Trãi, TP. Sơn La. **Thanh Hóa:** Nguyễn Trinh An, 9K, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa. **Thừa Thiên Huế:** Đoàn Văn Hoàng Lân, Phan Quốc Thắng, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế. **Vĩnh Long:** Nguyễn Tuấn Kiệt, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm.

TẠ DUY PHƯƠNG

Bài T8/550. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$. M là điểm bất kỳ trên mặt đáy (ABC) và thuộc miền trong tam giác ABC . Qua M kẻ các đường thẳng song song với các mặt (SBC) , (SCA) , (SAB) theo thứ tự cắt SA , SB , SC lần lượt tại X , Y , Z . Chứng

minh rằng $V_{M.XYZ} \leq \frac{2}{27} V_{S.ABC}$, trong đó ký hiệu

V_{MXYZ} , $V_{S.ABC}$ tương ứng là thể tích khối chóp $M.XYZ$ và $S.ABC$. Tìm vị trí của M để đẳng thức xảy ra.

Lời giải.



Do 3 ô bất kỳ được đánh dấu đều có chung cạnh với tất cả các ô không được đánh dấu nên năm lô hàng đầu tiên sẽ được đóng gói vào 5 ô được đánh dấu. Số cách đóng gói năm lô hàng vào 5 ô được đánh dấu là $5!$. Lúc này, các ô không được đánh dấu đều chung cạnh với ít nhất một trong các ô được đánh dấu nên Robot sẽ đóng gói nốt bốn lô hàng còn lại vào 4 ô không được đánh dấu và do đó có $4!$ cách.

Trong trường hợp này, số cách đóng gói là $5! \cdot 4!$

TH2: Ba lô hàng đầu tiên không được đóng gói vào 3 ô nào trong 5 ô được đánh dấu.

Do ba ô bất kỳ không được đánh dấu đều có chung cạnh với ít nhất một trong các ô được đánh dấu nên bốn lô hàng đầu tiên sẽ được đóng gói vào cả 4 ô không được đánh dấu và có $4!$ cách đóng gói như thế.

Lúc này, các ô không được đánh dấu đều có chung cạnh với ít nhất một ô được đánh dấu nên năm lô hàng còn lại sẽ được đóng gói vào 5 ô được đánh dấu và do đó có $5!$ cách đóng gói năm lô hàng còn lại. Trong trường hợp này, số cách đóng gói cũng là $4! \cdot 5!$

TH3: Ba lô hàng đầu tiên được đặt vào cả những ô được đánh dấu và những ô không được đánh dấu.

Thế thì có hai khả năng để đặt ba lô hàng này vào 3 ô (chứa chữ o) trong các hình dưới đây và ảnh của chúng qua các phép quay góc $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$.

Khả năng 1

o		
		o
	o	

Khả năng 2

o		o
	o	

Ở cả hai khả năng thì các ô chưa đóng gói đều chung cạnh với ít nhất một ô đã được đóng gói nên ba lô hàng đầu tiên sẽ có $3!$ cách đóng gói và sáu lô hàng còn lại được xếp vào 6 ô còn lại nên có $6!$ cách đóng gói. Mỗi khả năng lại có 4 hoán vị là các ảnh của các hình vuông nói trên qua các

phép quay góc $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ nên số cách đóng gói trong trường hợp này là $2 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 6!$

Vậy, số cách đóng gói thỏa mãn bài toán là:

$$5! \cdot 4! + 4! \cdot 5! + 8 \cdot 3! \cdot 6! = 40320.$$

Nhận xét. Đây là bài toán đếm cơ bản, không quá khó nhưng chỉ có hai bạn tham gia giải và cả hai bạn này đều cho lời giải đúng: **Hà Tĩnh:** Nguyễn Xuân Minh Đức, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Phạm Thị Mỹ Hạnh, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T10/550. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 13 \\ u_{n+1} = u_n + 6(n+1), \forall n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng không có số hạng nào của dãy số là lập phương của một số nguyên.

Lời giải (Dựa theo lời giải của bạn Phan Như Minh Châu, 10T, THPT chuyên Hà Tĩnh, Hà Tĩnh) Ta có: $u_n = u_{n-1} + 6n$

$$u_{n-1} = u_{n-2} + 6(n-1)$$

.....

$$u_3 = u_2 + 6 \cdot 3$$

$$u_2 = u_1 + 6 \cdot 2.$$

Cộng về theo về ta thu được:

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + 6 \cdot \frac{(n+2)(n-1)}{2} = 13 + 3(n^2 + n - 2) \\ &= 3n^2 + 3n + 7. \end{aligned}$$

Nhận xét. Với mọi số nguyên a , a^3 đồng dư với hoặc 0 hoặc ± 1 theo modulo 9.

Thật vậy: Với $a \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow a^3 \equiv 0 \pmod{9}$.

Với $a \equiv \pm 1 \pmod{3}$ thì $a = 3k \pm 1$, suy ra:

$$a^3 = (3k \pm 1)^3 = 27k^3 \pm 27k^2 + 9k \pm 1 \equiv \pm 1 \pmod{9}.$$

Nhận xét được chứng minh.

Nếu $n \equiv 0 \pmod{3}$ hoặc $n \equiv -1 \pmod{3}$ thì

$$u_n = 3n^2 + 3n + 7 = 3n(n+1) + 7 \equiv 7 \pmod{9}.$$

Nếu $n \equiv 1 \pmod{3}$ thì $n = 3k + 1$, suy ra:

$$\begin{aligned} u_n &= 3(3k+1)(3k+2) + 7 \equiv 27k^2 + 27k + 13 \\ &\equiv 4 \pmod{9}. \end{aligned}$$

Từ nhận xét trên suy ra không có số hạng nào của dãy số là lập phương của một số nguyên.

Nhận xét. Bài này được các bạn tham gia giải với nhiều cách khác nhau. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Bình Định:** Phan Trung Trực, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Bình:** Phạm Thị Mỹ Hạnh, 11T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** Lê Hồ Trọng Tín, 11T, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Phú Thọ:** Hà Phương Anh, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, H. Tam Nông; **Thừa Thiên Huế:** Đoàn Văn Hoàng Lân, 11T, THPT chuyên Quốc học Huế.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/550. Tìm các hàm $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên $[0; 1]$ và thỏa mãn: $f(x) \geq 2xf(x^2)$ (1).

Lời giải. (Theo ý của đa số các bạn)

Giả sử $f(x)$ thỏa mãn điều kiện (1). Từ (1) ta có:

$$f(0) \geq 0 \text{ và } xf(x) \geq 2x^2 f(x^2), \forall x \in [0, 1]$$

$$\text{hay } g(x) \geq 2g(x^2), \forall x \in [0, 1]$$

$$\Leftrightarrow g(x) \leq \frac{1}{2} g(x^{\frac{1}{2}}), \forall x \in [0, 1] \quad (2)$$

trong đó $g(x) = xf(x)$ là hàm liên tục trên $[0, 1]$ và $g(1) \leq 0$.

Từ (2) suy ra (bằng phương pháp quy nạp):

$$g(x) \leq \frac{1}{2} g(x^{\frac{1}{2}}) \leq \frac{1}{2^2} g(x^{\frac{1}{2^2}}) \leq \dots \leq \frac{1}{2^n} g(x^{\frac{1}{2^n}}),$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Sử dụng tính liên tục của hàm số $g(x)$, chuyển qua giới hạn, ta thu được:

$$g(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2^n} g(x^{\frac{1}{2^n}}) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in [0, 1] \quad (3).$$

Xét $x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right)$, ta có $f(x) \geq 2xf(x^2) \geq f(x^2)$ nên

$$\text{suy ra: } f(x) \geq f(x^2) \geq f(x^{2^2}) \geq \dots \geq f(x^{2^n}), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chuyển qua giới hạn, ta thu được:

$$f(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{2^n}) = f(0) \geq 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right).$$

Kết hợp với (3) ta thu được: $f(x) = 0$ với mọi $x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right)$. Xét $x \in \left(0, \frac{1}{2} \right)$, ta có:

$$f(x) \geq 2xf(x^2) \geq 2x \times 2x^2 f(x^{2^2}) = 2^2 x^{2^1-1} f(x^{2^2})$$

$$\geq 2^2 x^{2^2-1} \times 2x^{2^2} f(x^{2^{2^2}}) = 2^3 x^{2^3-1} f(x^{2^3}) \geq \dots$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta thu được:

$$f(x) \geq 2^n x^{2^n-1} f(x^{2^n}), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chuyển qua giới hạn, ta thu được:

$$f(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(2x)^n x^{2^n-n-1} f(x^{2^n}) \right] = 0, \forall x \in \left(0, \frac{1}{2} \right).$$

Kết hợp với (3) ta thu được $f(x) = 0$ với mọi $x \in \left(0, \frac{1}{2} \right)$. Vậy nên $f(x) = 0$ với mọi $x \in (0, 1)$.

Do $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ nên suy ra $f(x) = 0$ với mọi $x \in [0, 1]$.

Kết luận: Bất phương trình hàm đã cho có nghiệm duy nhất là hàm $f(x) \equiv 0$.

Nhận xét. Đây là dạng toán về bất phương trình hàm trong lớp hàm một biến liên tục cần đến sự vận dụng định lý kẹp trong giới hạn dãy số nên có ít bạn tham gia giải và các bạn đều nhận được kết quả đúng: **Bình Định:** Phan Trung Trực, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Vĩnh Long:** Nguyễn Tuấn Kiệt, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Quảng Bình:** Phạm Thị Mỹ Hạnh, 11T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Phúc:** Bạch Thái Sơn, 10A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/550. Cho tam giác nhọn ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O) , các tiếp tuyến với (O) tại B, C cắt nhau ở X , các đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H , EF cắt XB, XC lần lượt tại Z, Y . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh HM chia đôi cung $\widehat{YXZ}$.

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Tấn Nguyên Chương, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên). Ta cần có ba bổ đề.

Bổ đề 1. Nếu AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC thì trung điểm của BC cũng là trung điểm của cung $\widehat{EDF}$ của đường tròn (DEF) .

Bổ đề 2. Nếu các đường cao AD, BE, CF của tam giác nhọn ABC đồng quy tại H thì H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .

Bổ đề 3. Nếu các tam giác $ABC, A'B'C'$ có các cạnh tương ứng hoặc song song hoặc bằng nhau thì chúng hoặc là ảnh của nhau qua một phép vị tự hoặc là ảnh của nhau qua một phép tịnh tiến.

Phép chứng minh các bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây.

Trở lại giải bài toán trên.

Gọi D là giao điểm của BC và AH ; T là trung điểm cung $\widehat{YXZ}$; S là giao điểm của XD và YZ .

Theo bổ đề 1, M là trung điểm của cung $\widehat{EDF}$ (1). Theo bổ đề 2, H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF (2). Dễ thấy:

$$CY = EY; CM = EM; BZ = FZ; BM = FM.$$

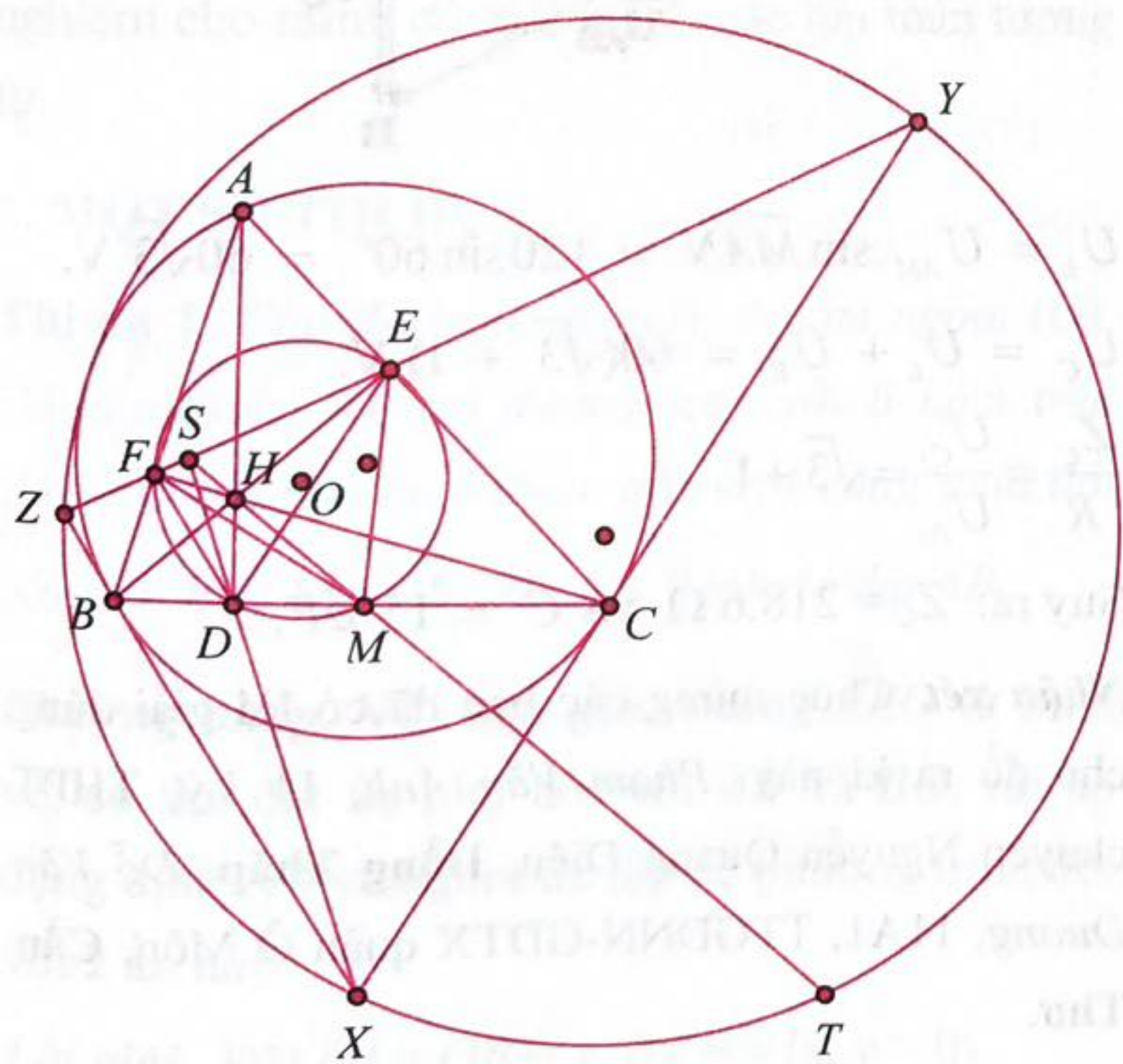
Do đó M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ (3). Dễ thấy $DE \parallel XY; DF \parallel XZ; FE \parallel ZY$.

Từ đó, chú ý rằng các tam giác DEF, XYZ không bằng nhau, theo bổ đề 3, suy ra các tam giác DEF, XYZ là ảnh của nhau qua một phép vị tự và đương nhiên S là tâm của phép vị tự đó (4).

Từ (1) và (4) suy ra S, M, T thẳng hàng.

Từ (2), (3) và (4) suy ra S, H, M thẳng hàng.

Vậy H, M, T thẳng hàng (đpcm).



Nhận xét. 1) Bài toán này không khó, nhiều bạn tham gia giải, tuy nhiên chỉ có bạn Nguyễn Tấn Nguyên Chương là có lời giải ngắn gọn như trên.

2) Dễ thấy đường tròn (O) chính là đường tròn Mixtilinear đối diện đỉnh X của tam giác XYZ .

3) Xin nêu tên tất cả các bạn: **Phú Thọ:** Hà Phương Anh, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Hà Nội:** Trần Việt Anh, 9A7, THCS Archimedes, Cầu Giấy; **Thanh Hóa:** Nguyễn Trinh An, 9K, THCS Trần Mai Ninh; **Nghệ An:** Phan Đại Hoàng, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** Phan Như Minh Châu, Nguyễn Khương Duy, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Phạm Thị Mỹ Hạnh, 11T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** Phan Quốc Thắng, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đà Nẵng:** Tô Đông Hải, 10T2, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/550. Một con lắc lò xo đặt trên mặt bàn nằm ngang. Kéo quả cầu dọc theo trục lò xo đến vị trí B rồi thả nhẹ cho con lắc dao động. Nếu không có ma sát thì tốc độ của quả cầu khi về tới vị trí O (vị trí lò xo không biến dạng) là $2,5 \text{ m/s}$. Trong thực tế, do có ma sát nên tốc độ của quả cầu khi về tới O lần đầu tiên là $2,4 \text{ m/s}$. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$; $BO = 10 \text{ cm}$. Hệ số ma sát giữa quả cầu và mặt bàn là bao nhiêu?

Lời giải. Áp dụng định lí động năng cho chuyển động từ B về O :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = A_{dh} = \frac{1}{2}k \cdot BO^2 \quad (1).$$

Khi có ma sát:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = A_{dh} + A_{ms} = \frac{1}{2}k \cdot BO^2 - \mu mg \cdot BO \quad (2).$$

Từ (1) và (2) có: $(v_0^2 - v_B^2) = 2\mu g \cdot BO$.

$$\text{Suy ra: } \mu = \frac{(v_0^2 - v_B^2)}{2g \cdot BO} = 0,245.$$

Nhận xét. Chúc mừng bạn Phạm Văn Anh, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp đã có lời giải đúng.

NGUYỄN XUÂN QUANG

PROBLEMS ...

(Tiếp theo trang 21)

Problem T8/554. Given a square $ABCD$. Let E be a point on the side BC . Let F be the perpendicular projection of D on AE . The ray BF intersects AD at G , CG intersects DF at H . Prove that $HE \parallel AB$.

Problem T9/554. Given $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Find the maximum value of the expression

$$\frac{|ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)|}{abc}.$$

Towards Mathematical Olympiad

Problem T10/554. Find the minimum value of the expression $E = a^2 + b^2$, where a, b are positive integers so that $a^2 + b^2$ is divisible by 2023.

Problem T11/554. Find all functions $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ satisfying $f(1) = 3$ and

$$f(xy) + 2f(x+y) = f(x)f(y) + 2, \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Problem T12/554. Given an acute scalene triangle ABC circumscribing the circle (I) . Let D, E, F respectively be the tangent points of (I) with BC, CA, AB . Assume that P is the perpendicular projection of D on EF . DP intersects (I) at the second point K , and L is the perpendicular projection of A on IK . The circumcircles of LEC, LFB intersect (I) at the second points M, N respectively. Show that M, N, P are collinear.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

Bài L2/550. Đoạn mạch điện AB gồm hai đoạn mạch AM và MB nối tiếp nhau. Trên đoạn AM chứa biến trở và cuộn cảm thuần, trên đoạn MB chỉ chứa tụ điện. Đặt vào hai đầu A, B một điện áp xoay chiều $u_{AB} = U\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ (V) và điều chỉnh biến trở sao cho công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB đạt cực đại $P_{\max} = 45$ W. Biết rằng khi đó điện áp trên đoạn mạch AM có biểu thức là $u_{AM} = 120\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ (V). Điện dung của tụ có giá trị là bao nhiêu?

Lời giải. Sơ đồ mạch điện được mô tả như hình a. Ta có giản đồ vector như hình b.

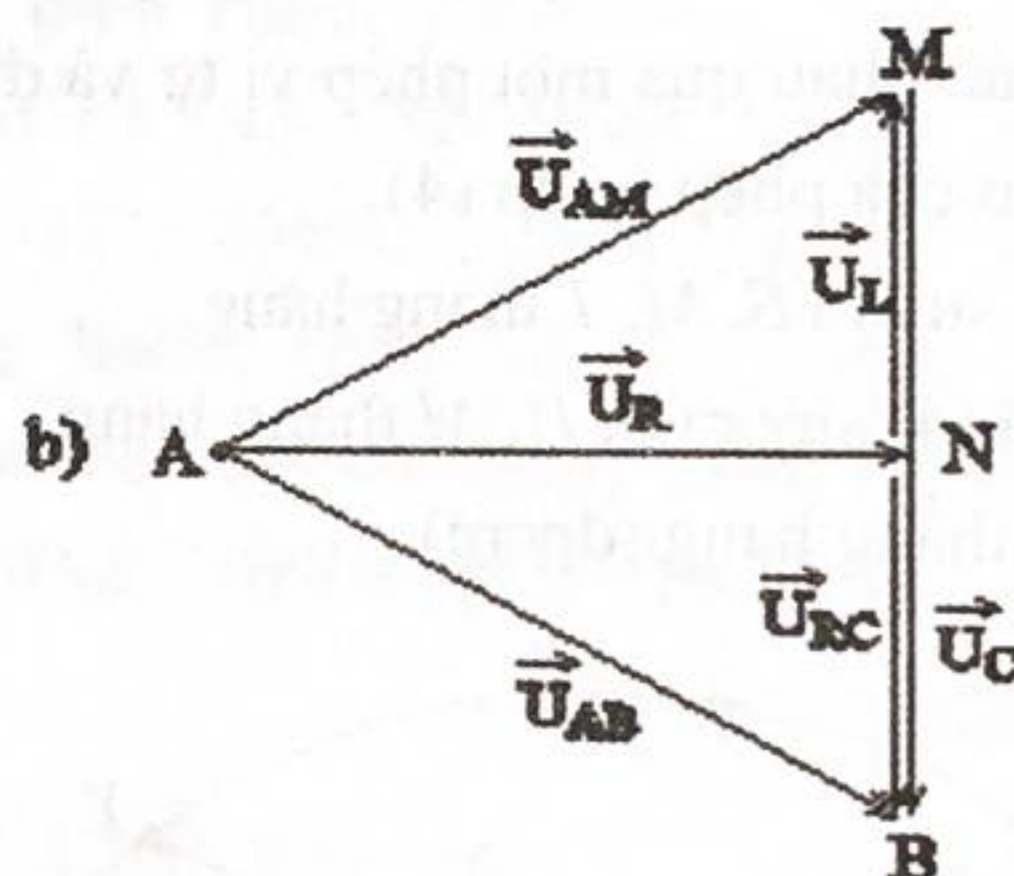
Khi công suất tiêu thụ trên AB cực đại thì:

$$R = |Z_L - Z_C|, \widehat{NAB} = 45^\circ.$$

Theo đề bài $\widehat{MAB} = 105^\circ$. Suy ra $\widehat{MAN} = 60^\circ$.

$$U_R = U_{AM} \cos \widehat{MAN} = 120 \cos 60^\circ = 60 \text{ V};$$

$$R = \frac{U_R^2}{P_{\max}} = 80 \Omega.$$



$$U_L = U_{AM} \cdot \sin \widehat{MAN} = 120 \sin 60^\circ = 60\sqrt{3} \text{ V}.$$

$$U_C = U_L + U_R = 60(\sqrt{3} + 1) \text{ V}.$$

$$\frac{Z_C}{R} = \frac{U_C}{U_R} = \sqrt{3} + 1.$$

$$\text{Suy ra: } Z_C = 218,6 \Omega \text{ và } C = 15 \mu F.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: Phạm Văn Anh, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; Đỗ Văn Dương, 11A1, TTGDNN-GDTX quận Ô Môn, **Cần Thơ**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH



ĐẠI SỐ TRONG HÌNH HỌC

PHAN ĐẠI PHÁP

(SV Lớp K70CLC, Khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

1. MỞ ĐẦU

Các bài toán về hình học trong các đề thi tự luận hay trắc nghiệm, ngoài hướng giải hình học thông thường và phương pháp tọa độ hóa, thì một hướng giải nữa chúng ta có thể nghĩ đến là phương pháp dùng công cụ Đại số. Với phương pháp này, dựa trên cơ sở những nhận xét và đánh giá hình học, để từ đó giải quyết yêu cầu bài toán bằng các phương tiện đại số như: giải phương trình, giải hệ phương trình, chứng minh bất đẳng thức, tìm cực trị,... Đây là phương pháp rất hữu ích đối với những bạn học sinh có tư duy đại số tốt, thông qua hướng giải này, các bạn học sinh sẽ rèn luyện hài hòa giữa tư duy đại số và hình học, hỗ trợ đáng kể trong việc giải toán.

Cũng trong bài viết này, không thể đưa ra một mô hình chung để giải quyết, vì phương tiện đại số rất đa dạng và phong phú. Tuy nhiên, qua các thí dụ dưới đây, chúng ta có thể ít nhiều trang bị kinh nghiệm cho mình để giải quyết các bài toán tương tự.

2. MỘT SỐ THÍ DỤ

Thí dụ 1. Cho đường tròn (O) . A nằm ngoài (O) . Vẽ tiếp tuyến AB tới đường tròn với B nằm trên (O) . AO cắt (O) tại I thỏa mãn A, I cùng phía đối với BO . Biết $IA = \sqrt{5}$, $IB = 3$. Tính độ dài AB .

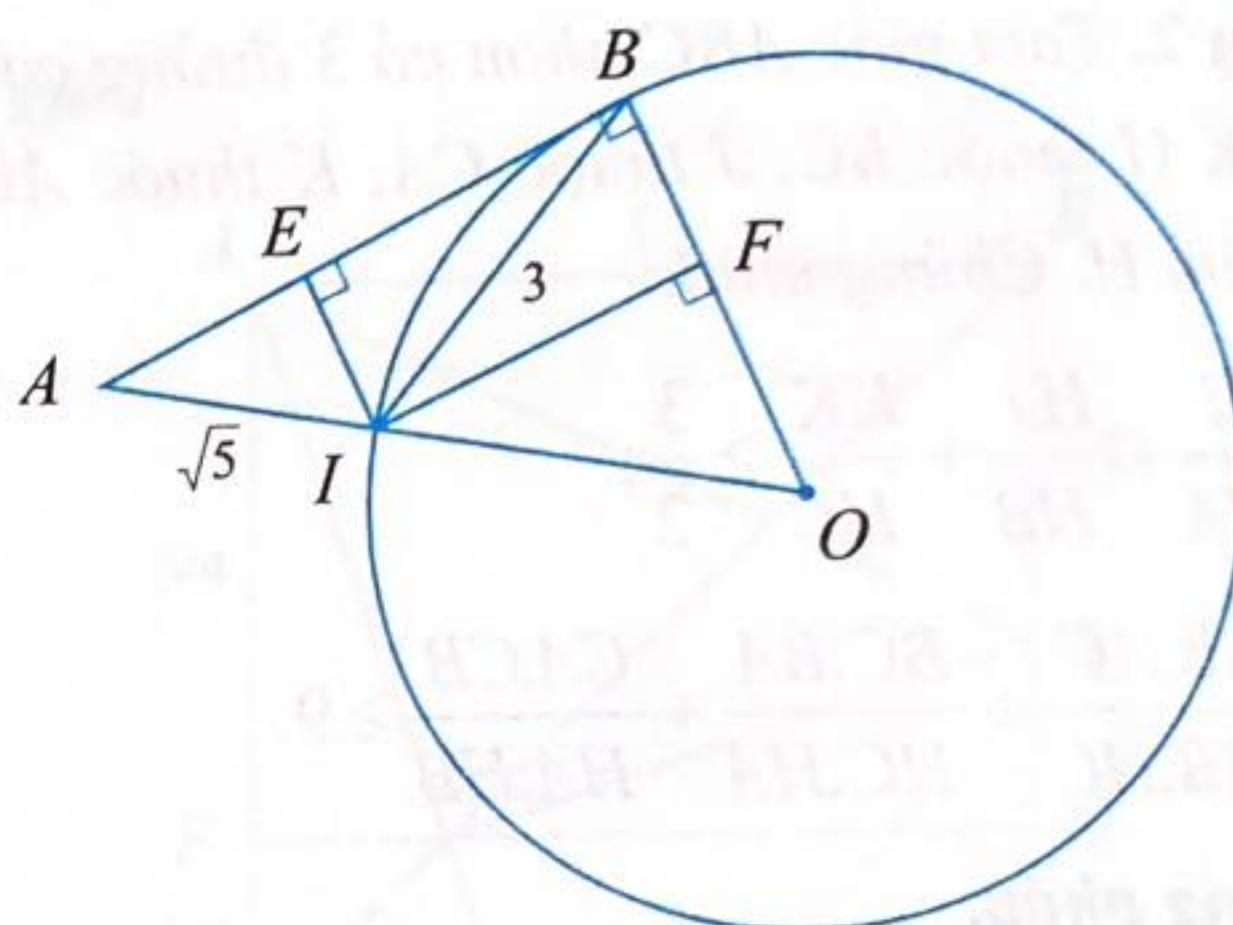
Phương pháp. Với tam giác vuông ABO từ hình vẽ, có thể đặt ẩn phụ đối với AB và BO , rồi áp dụng định lý Pythagore để lập hệ phương trình đối với 2 ẩn này.

Lời giải. Đặt $OI = OB = x$, $BA = y$ ($x, y > 0$).

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác vuông

$$OAB \text{ ta có: } OA^2 = x^2 + y^2 = (x + \sqrt{5})^2.$$

Kẻ IE vuông góc với AB tại E , IF vuông góc với BO tại F .



Áp dụng định lý Thales ta có:

$$\frac{IE}{OB} = \frac{IA}{OA} \Rightarrow \frac{IE}{x} = \frac{\sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} \Rightarrow IE = \frac{\sqrt{5}x}{x + \sqrt{5}};$$

$$\frac{IF}{AB} = \frac{IO}{AO} \Rightarrow \frac{IF}{y} = \frac{x}{x + \sqrt{5}} \Rightarrow IF = \frac{xy}{x + \sqrt{5}} = EB$$

(do tứ giác $IFBE$ là hình chữ nhật).

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác vuông

$$IEB \text{ ta có: } \frac{5x^2}{(x + \sqrt{5})^2} + \frac{x^2 y^2}{(x + \sqrt{5})^2} = 9.$$

Vậy ta có hệ phương trình 2 ẩn x, y sau

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (x + \sqrt{5})^2 & (1) \\ \frac{5x^2 + x^2 y^2}{(x + \sqrt{5})^2} = 9 & (2) \end{cases} \quad (\text{với } x, y > 0)$$

Từ (1) có: $y^2 = 2\sqrt{5}x + 5$. Thay vào (2) có:

$$\frac{5x^2 + x^2(2\sqrt{5}x + 5)}{(x + \sqrt{5})^2} = 9$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{5}x^2(x + \sqrt{5}) = 9(x + \sqrt{5})^2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{5}x^2 = 9(x + \sqrt{5}) \text{ (do } x + \sqrt{5} > 0 \text{ với } x > 0)$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\sqrt{5}}{2}. \text{ Thay vào (3) được:}$$

$$y^2 = 20 \Rightarrow y = 2\sqrt{5}. \text{ Vậy } AB = 2\sqrt{5}.$$

Nhận xét. Khi thiết lập phương trình đầu tiên, ta mới chỉ vận dụng được giả thiết $IA = \sqrt{5}$ mà chưa dùng giả thiết $IB = 3$. Để vận dụng giả thiết còn lại này ta kẻ thêm các đường song song như trên để ghép IB vào tam giác vuông, từ đó vận dụng được định lý Pythagore.

Thí dụ 2. Tam giác ABC nhọn có 3 đường cao AI , BJ , CK (I thuộc BC , J thuộc CA , K thuộc AB) và trực tâm H . Chứng minh:

$$\text{a) } \frac{HI}{HA} + \frac{HJ}{HB} + \frac{HK}{HC} \geq \frac{3}{2};$$

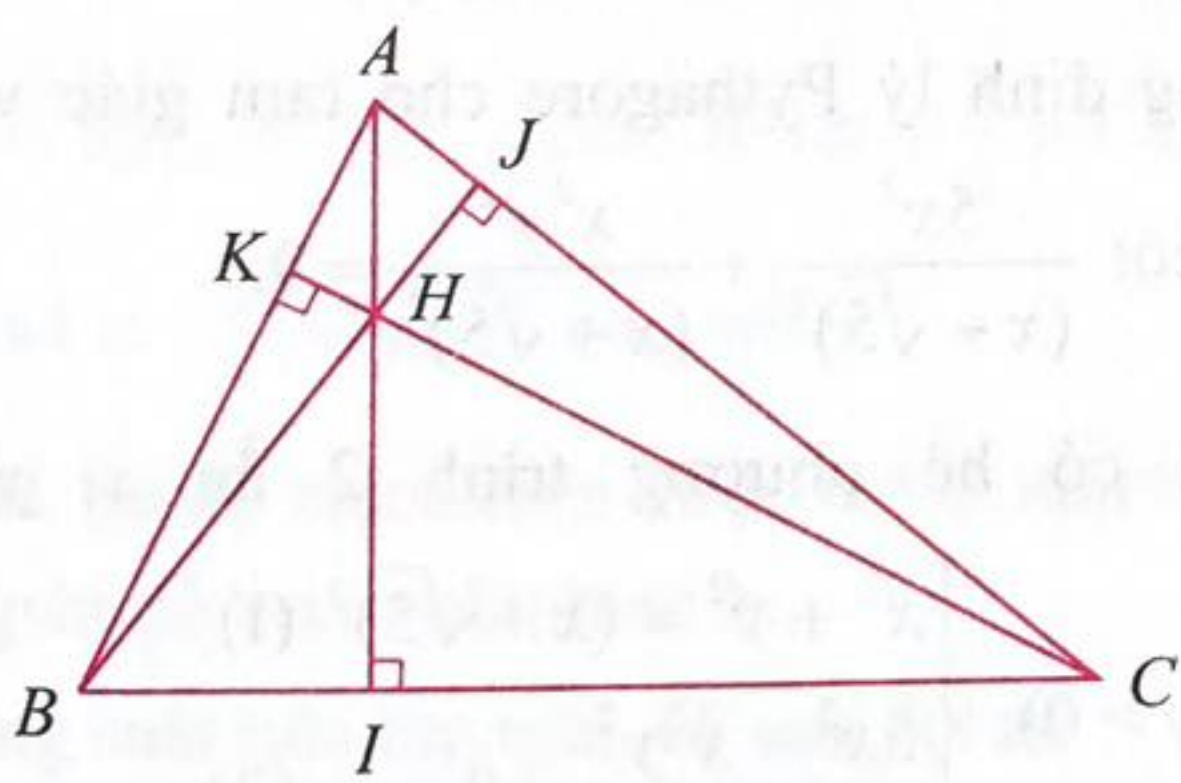
$$\text{b) } \frac{AB \cdot AC}{HB \cdot HC} + \frac{BC \cdot BA}{HC \cdot HA} + \frac{CA \cdot CB}{HA \cdot HB} \geq 9.$$

Phương pháp.

Ở câu a nhìn vào vế phải ta có thể liên tưởng tới bất đẳng thức Nesbitt.

Ở câu b rõ ràng ở mỗi phân thức, tử thức và mẫu thức gần như không có liên hệ gì nên có thể nghĩ đến 1 đại lượng trung gian để biến đổi.

Lời giải.



Đặt: diện tích tam giác $ABC = S$;

diện tích tam giác $HBC = S_1$;

diện tích tam giác $HCA = S_2$;

diện tích tam giác $HAB = S_3$.

$$\text{a) Ta có: } \frac{HI}{HA} = \frac{HI}{AI - HI} = \frac{S_1}{S - S_1} = \frac{S_1}{S_2 + S_3}.$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{HJ}{HB} = \frac{S_2}{S_3 + S_1}, \quad \frac{HK}{HC} = \frac{S_3}{S_1 + S_2}.$$

Với $S_1, S_2, S_3 > 0$, ta có:

$$\frac{S_1}{S_2 + S_3} + \frac{S_2}{S_3 + S_1} + \frac{S_3}{S_1 + S_2} \geq \frac{3}{2}$$

(áp dụng bất đẳng thức Nesbitt cho 3 số dương).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow H$ là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.

$$\text{b) } \Delta BKH \sim \Delta BJA \text{ (g.g) nên } \frac{BK}{BH} = \frac{BJ}{BA}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{BJ}{BK} \Rightarrow \frac{AB \cdot AC}{HB \cdot HC} = \frac{BJ \cdot AC}{BK \cdot HC} = \frac{S}{S_1}.$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{BC \cdot BA}{HC \cdot HA} = \frac{S}{S_2}, \quad \frac{CA \cdot CB}{HA \cdot HB} = \frac{S}{S_3}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} \frac{AB \cdot AC}{HB \cdot HC} + \frac{BC \cdot BA}{HC \cdot HA} + \frac{CA \cdot CB}{HA \cdot HB} &= S \cdot \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \right) \\ &= (S_1 + S_2 + S_3) \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \right) (*). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức:

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \text{ với } a, b, c > 0,$$

thì (*) được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow H$ là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.

Nhận xét. Bất đẳng thức Nesbitt và bất đẳng thức

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 \text{ với } a, b, c > 0 \text{ là}$$

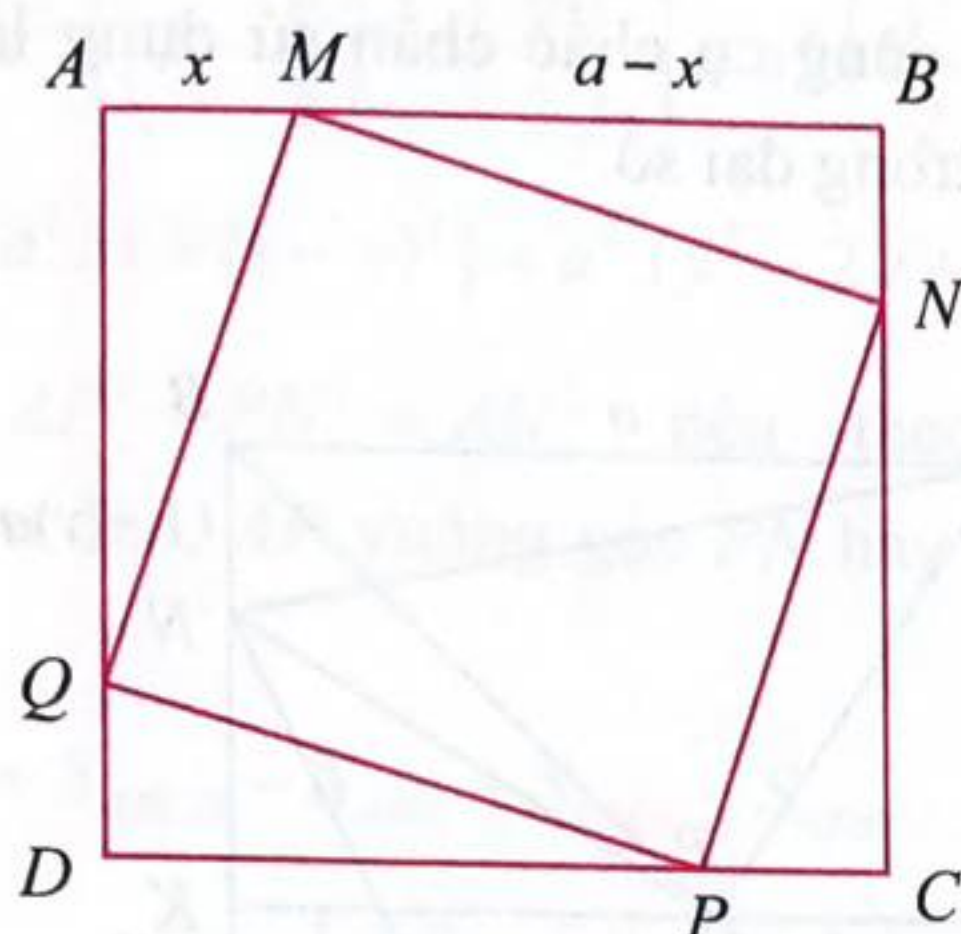
những bất đẳng thức quen thuộc trong đại số.

Thí dụ 3. Cho hình vuông $ABCD$ có $AB = a$. Lấy M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho $AM = BN = CP = DQ = x$ ($0 < x < a$).

Tìm x theo a để chu vi tứ giác $MNPQ$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Phương pháp. Chu vi của tứ giác $MNPQ$ chắc chắn sẽ được biểu thị dưới dạng biểu thức một ẩn x . Khi đó ta chỉ cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức này là giải quyết xong bài toán.

Lời giải.



Vì $AM = BN = CP = DQ = x$ nên

$$MB = NC = PD = QA = a - x.$$

Do đó: $\triangle QAM = \triangle MBN$ (c.g.c) $\Rightarrow QM = MN$.

Chứng minh tương tự: $MN = NP$ và $NP = PQ$.

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình thoi và có cạnh bằng

$$\sqrt{x^2 + (a - x)^2} \Rightarrow \text{chu vi hình thoi } MNPQ \text{ bằng}$$

$$4\sqrt{x^2 + (a - x)^2} = 4\sqrt{2x^2 - 2ax + a^2}.$$

$$\text{Ta có: } 2x^2 - 2ax + a^2 = \frac{1}{2} \cdot (4x^2 - 4ax + 2a^2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [(2x - a)^2 + a^2] \geq \frac{1}{2} \cdot a^2.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$. Vậy chu vi hình thoi

$MNPQ$ đạt giá trị nhỏ nhất là $2\sqrt{2}a$ khi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA .

Nhận xét.

- Tứ giác $MNPQ$ là hình vuông, tuy nhiên không cần thiết phải chỉ ra điều đó, do chu vi tứ giác $MNPQ$ vẫn kết quả như vậy.

- Biến đổi trong bài toán này tương đối đơn giản, do kiến thức chỉ xoay quanh giá trị nhỏ nhất của tam thức bậc 2.

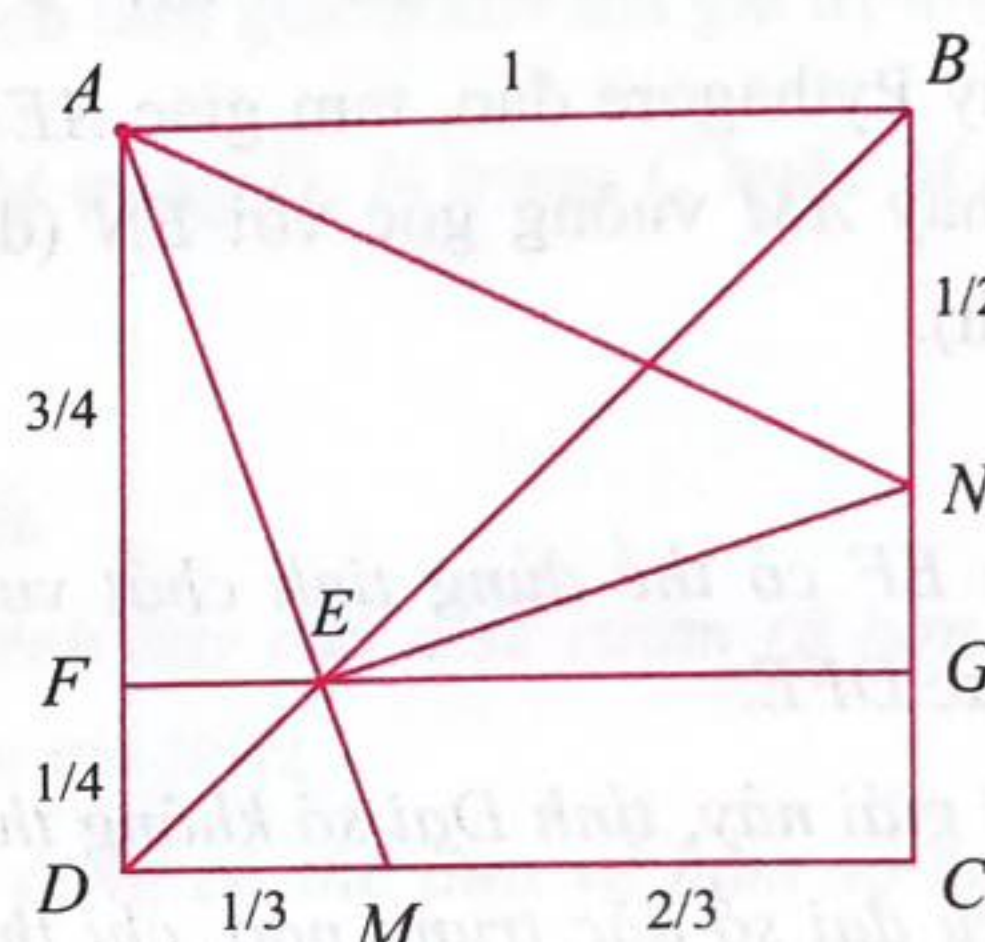
Thí dụ 4. Cho hình vuông $ABCD$. M trên cạnh CD sao cho $CM = \frac{2}{3}CD$, N là trung điểm CB . AM

cắt BD tại E . Chứng minh đường thẳng AM vuông góc với đường thẳng EN

(Tập chí TH&TT số 504, tháng 6/2019).

Phương pháp. Việc chứng minh vuông góc, nếu sử dụng các phép biến đổi đại số để giải quyết thì ta nghĩ đến áp dụng định lý Pythagore đảo, cụ thể là tính các cạnh của tam giác vuông liên quan rồi chứng minh chúng thỏa mãn định lý Pythagore đảo.

Lời giải.



Đặt cạnh hình vuông $ABCD = 1$.

Kẻ đường thẳng qua E , song song CD và AB , cắt AD tại F , cắt BC tại G .

Vì $CM = \frac{2}{3}CD$, nên $CM = \frac{2}{3}$. Suy ra $DM = \frac{1}{3}$.

Áp dụng định lý Thales, ta có:

$$\frac{DM}{BA} = \frac{ME}{AE} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{FE}{DM} = \frac{AE}{AM} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow AF = \frac{3}{4}, DF = \frac{1}{4} = GC$$

(vì tứ giác $DFGC$ là hình chữ nhật)

$$\Rightarrow FE = \frac{1}{4} \Rightarrow EG = \frac{3}{4}.$$

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác vuông AFE ta có:

$$AE = \sqrt{AF^2 + FE^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4} \quad (1).$$

Theo giả thiết: $CN = BN = \frac{1}{2}$. Mà $CG = \frac{1}{4}$
 $\Rightarrow GN = \frac{1}{4}$. Tiếp tục áp dụng định lý Pythagore cho tam giác vuông EGN :

$$EN = \sqrt{EG^2 + GN^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4} \quad (2).$$

Tiếp tục áp dụng định lý Pythagore cho tam giác vuông ABN :

$$AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Kết hợp (1), (2), (3) ta có: $AE^2 + EN^2 = AN^2$ nên theo định lý Pythagore đảo, tam giác AEN vuông cân tại E hay AM vuông góc với EN (điều phải chứng minh).

Nhận xét.

- Việc tính EF có thể dùng tính chất vuông cân của tam giác DFE .

- Trong lời giải này, tính Đại số không thể hiện ở một công cụ đại số đặc trưng nào, chỉ thông qua những tính toán đơn thuần, chỉ có điều với bài toán này, còn có nhiều cách giải mang tính hình học hơn, nên có thể tạm gọi cách giải này là cách giải kiểu "Đại số".

Thí dụ 5. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a . Lần lượt lấy M thuộc cạnh CD , N thuộc cạnh CB sao cho $CM = x.a$, $CN = y.a$ ($x, y \geq 0$) và $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2$. Cho AM cắt BD tại P .

a) Chứng minh AM vuông góc với PN .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của diện tích tam giác AMN .

Phương pháp.

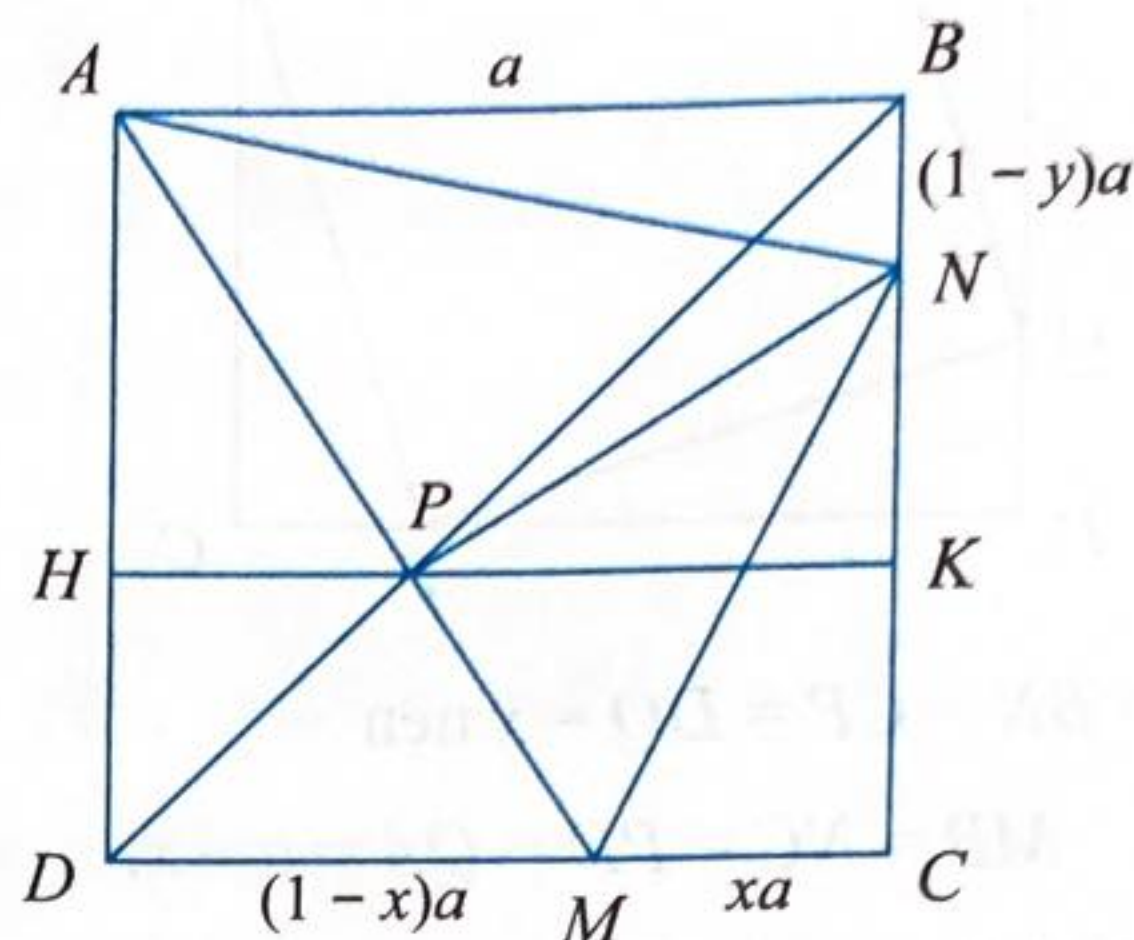
- Bài toán này chính là trường hợp tổng quát của bài toán 4 khi ở bài toán trên, $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{2}$ và

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

- Giống như thí dụ trên, cách giải câu a vẫn chỉ là những tính toán Đại số thông thường, không sử dụng công cụ đặc trưng nào cả. Tuy nhiên, để việc tính toán thuận lợi hơn thì nên có bước xử lý giả thiết đã cho.

- Ở câu b, công cụ chắc chắn sử dụng là các bất đẳng thức trong đại số.

Lời giải.



Điều kiện: $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 - x - y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 + x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2xy$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2y = xy + 2 \quad (*) \Leftrightarrow \frac{1-x}{2-x} = \frac{y}{2} \quad (**).$$

a) Kẻ đường thẳng qua P , song song với AB và CD , cắt AD tại H , cắt BC tại K .

Áp dụng định lý Thales ta có:

$$\frac{DM}{BA} = \frac{PM}{PA} = \frac{HD}{HA} = 1 - x$$

$$\Rightarrow \frac{HD}{AD} = \frac{1-x}{2-x} = \frac{y}{2} \quad (\text{theo } (**))$$

$$\Rightarrow HD = \frac{y}{2}.a = HP \quad (\text{do tam giác } DHP \text{ vuông cân tại } H)$$

$$\Rightarrow CK = \frac{y}{2}.a \quad (\text{do tứ giác } DHKC \text{ là hình}$$

$$\text{chữ nhật nên } DH = KC) \Rightarrow HA = PK = a \cdot \left(1 - \frac{y}{2}\right).$$

Theo giả thiết:

$$CN = y.a, \text{ mà } CK = \frac{y}{2}.a \text{ nên } KN = \frac{y}{2}.a.$$

Lần lượt áp dụng định lý Pythagore cho các tam giác vuông AHP , PKN , ABN ta có:

$$AP^2 = a^2 \cdot \left[\left(1 - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \right] = a^2 \cdot \left(\frac{y^2}{2} - y + 1 \right);$$

$$PN^2 = a^2 \cdot \left[\left(1 - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \right] = a^2 \cdot \left(\frac{y^2}{2} - y + 1 \right);$$

$$AN^2 = a^2 \cdot [1 + (1 - y)^2] = a^2 \cdot (y^2 - 2y + 2).$$

Do đó: $AP^2 + PN^2 = AN^2$ nên theo định lý Pythagore đảo, AP vuông góc PN hay AM vuông góc PN .

$$b) S_{AMN} = S_{ABCD} - S_{ABN} - S_{CMN} - S_{ADM}$$

$$= a^2 \cdot \left(1 - \frac{1-y}{2} - \frac{x \cdot y}{2} - \frac{1-x}{2} \right)$$

$$= a^2 \cdot \frac{x + y - xy}{2}.$$

Theo (*), $xy = 2x + 2y - 2$, và theo giả thiết,

$$x + y = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \text{ nên:}$$

$$S_{AMN} = a^2 \cdot \frac{x + y - 2x - 2y + 2}{2} = a^2 \cdot \frac{2 - x - y}{2}$$

$$= a^2 \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}.$$

Do đó để S_{AMN} đạt giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) thì $\sqrt{x^2 + y^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất (lớn nhất).

Ta có: $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2$. Áp dụng bất đẳng thức

$x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2}$ ta được:

$$2 \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{2}{\sqrt{2} + 1}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 2 - \sqrt{2}.$$

Với $x, y \geq 0$ thì $x + y \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ nên:

$$2 \geq 2\sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1.$$

Dấu bằng xảy ra:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot y = 0 \\ x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 1 \\ x = 1, y = 0 \end{cases}.$$

Vậy:

- Diện tích tam giác AMN đạt giá trị nhỏ nhất bằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{2} + 1} \text{ khi } CM = CN = (2 - \sqrt{2}) \cdot a.$$

- Diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất bằng

$\frac{a^2}{2}$ khi M trùng D , N trùng C hoặc M trùng C , N trùng B .

Nhận xét.

- Việc trình bày câu a sẽ rườm rà hơn nếu không xử lý sớm giả thiết.

- Câu b cũng có thể đưa về hàm số một ẩn y (từ giả thiết ta rút y theo x như câu a) rồi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 1]$.

- Chú ý rằng từ kết quả câu b, ta cũng suy ra được khoảng cách từ A đến MN luôn $= a$ không đổi nên với mọi M, N thỏa mãn đề ra thì MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định là đường tròn tâm A , bán kính a .

Thí dụ 6. Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh lần lượt là a, b, c . Chứng minh:

$$\frac{a}{2b + 2c - a} + \frac{b}{2c + 2a - b} + \frac{c}{2a + 2b - c} \geq 1.$$

Phương pháp. Nhìn vào đề bài thấy tam giác ABC không có gì đặc biệt cả nên chỉ có thể khai thác được bất đẳng thức tam giác. Từ đó có các số hạng của vế trái luôn dương với a, b, c dương. Khi đó, có thể áp dụng bất đẳng thức Bunykovsky bằng cách nhân thêm vào vế trái một lượng phù hợp để đưa về dạng đơn giản hơn.

Lời giải. Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác

$$\text{nên } \begin{cases} 2b + 2c - a > 0 \\ 2c + 2a - b > 0 \\ 2a + 2b - c > 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } P = \frac{a}{2b + 2c - a} + \frac{b}{2c + 2a - b} + \frac{c}{2a + 2b - c}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} &P \cdot [a(2b + 2c - a) + b(2c + 2a - b) + c(2a + 2b - c)] \\ &= \left[\frac{a}{2b + 2c - a} + \frac{b}{2c + 2a - b} + \frac{c}{2a + 2b - c} \right] \times \\ &\quad \times [a(2b + 2c - a) + b(2c + 2a - b) + c(2a + 2b - c)] \end{aligned}$$

Đặt biểu thức thu được là Q . Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho Q ta có:

$$\begin{aligned} Q &\geq \left[\sqrt{\frac{a}{2b + 2c - a}} \cdot \sqrt{a(2b + 2c - a)} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{b}{2c + 2a - b}} \cdot \sqrt{b(2c + 2a - b)} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{c}{2a + 2b - c}} \cdot \sqrt{c(2a + 2b - c)} \right]^2 \\ &= (a + b + c)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } (a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\ &\geq -a^2 - b^2 - c^2 + 4ab + 4bc + 4ca \quad (*). \end{aligned}$$

Thật vậy:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \\ &\quad (\text{bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng}). \end{aligned}$$

Do đó từ (*) ta có:

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &\geq a(2b + 2c - a) + b(2c + 2a - b) \\ &\quad + c(2a + 2b - c) \quad (**). \end{aligned}$$

Kết hợp (*) và (**) ta có:

$$\begin{aligned} Q &\geq a(2b + 2c - a) + b(2c + 2a - b) + c(2a + 2b - c) \\ &\Leftrightarrow P \geq 1 \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2b + 2c - a} = \frac{1}{2c + 2a - b} = \frac{1}{2a + 2b - c} \\ a = b = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \text{tam giác } ABC \text{ đều.}$$

Nhận xét.

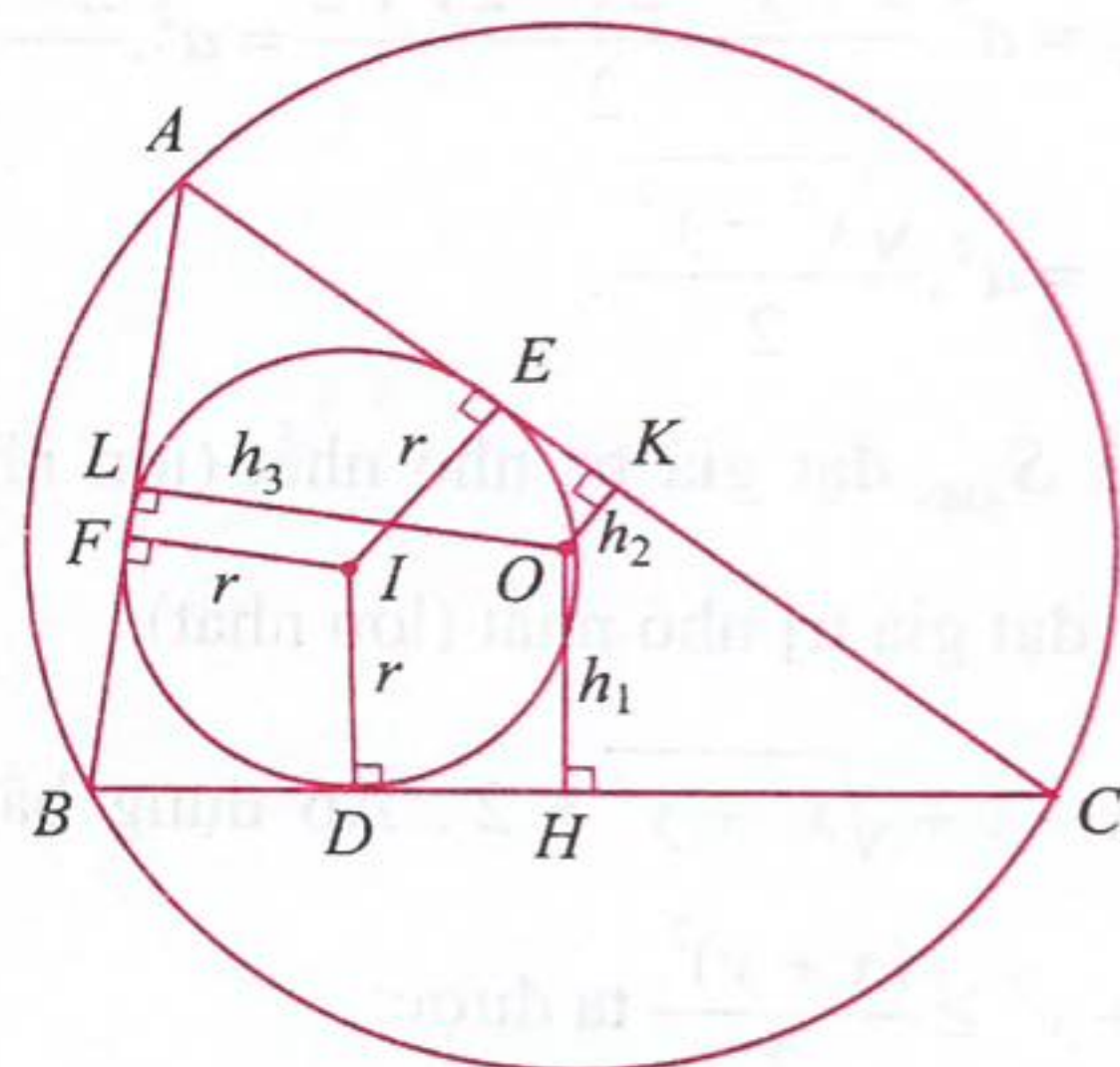
- Dạng của đề bài như vậy, không dễ để tìm ra cách sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky.

- Bài toán này, vai trò của hình học rất ít, chỉ có ở việc khai thác bất đẳng thức tam giác, còn lại đều là các biến đổi đại số và công cụ đại số đơn thuần (các bất đẳng thức đại số).

Thí dụ 7. Chứng minh rằng với một tam giác nhọn, tổng các khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác tới các cạnh của nó bằng tổng bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó.

Phân tích. Đề bài có liên quan tới bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp, do đó khi giải bài toán có thể sử dụng những hệ thức có liên quan tới 2 đại lượng này, kết hợp với các biến đổi đại số.

Lời giải.



Xét tam giác ABC nhọn có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R , ngoại tiếp đường tròn tâm I bán kính r . Lần lượt kẻ OH , OK , OL vuông góc với BC , CA , AB tại H , K , L .

Đặt $OH = h_1$, $OK = h_2$, $OL = h_3$ ($h_1, h_2, h_3 > 0$).

Ta có:

$$\begin{aligned} R + r &= h_1 + h_2 + h_3 \\ &\Leftrightarrow (R + r) \cdot (a + b + c) = (h_1 + h_2 + h_3) \cdot (a + b + c) \\ &\Leftrightarrow R \cdot (a + b + c) + r \cdot (a + b + c) \end{aligned}$$

$$= h_1.a + h_2.b + h_3.c + h_1.(b+c) + h_2.(c+a) + h_3.(a+b) (*)$$

Nhận thấy:

$$r.(a+b+c) = h_1.a + h_2.b + h_3.c = 2.S_{ABC}$$

nên:

$$(*) \Leftrightarrow R.(a+b+c) = h_1.(b+c) + h_2.(c+a) + h_3.(a+b) (**)$$

Vì $OB = OC = OA$ nên H, K, L lần lượt là trung điểm BC, CA, AB .

$$\text{Do đó: } \begin{cases} KL = \frac{a}{2} \\ LH = \frac{b}{2} \\ HK = \frac{c}{2} \end{cases}$$

Áp dụng định lý Ptolemy trong tứ giác nội tiếp $ALOK$ ta có: $AO.KL = AL.OK + AK.OL$

$$\Leftrightarrow R.\frac{a}{2} = \frac{c}{2}.h_2 + \frac{b}{2}.h_3 \Leftrightarrow R.a = h_2.c + h_3.b \quad (1).$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } \begin{cases} R.b = h_3.a + h_1.c \quad (2) \\ R.c = h_1.b + h_2.a \quad (3) \end{cases}$$

Cộng vế theo vế (1), (2), (3) ta được ngay đẳng thức (**). Khi đó đẳng thức $R+r = h_1 + h_2 + h_3$ được chứng minh.

Nhận xét.

- Cách làm trên không sử dụng công cụ đại số đặc trưng nào, chỉ là những biến đổi đại số đơn thuần, mặc dù hình thức có vẻ phức tạp, sẽ rất khó nếu không áp dụng định lý Ptolemy.

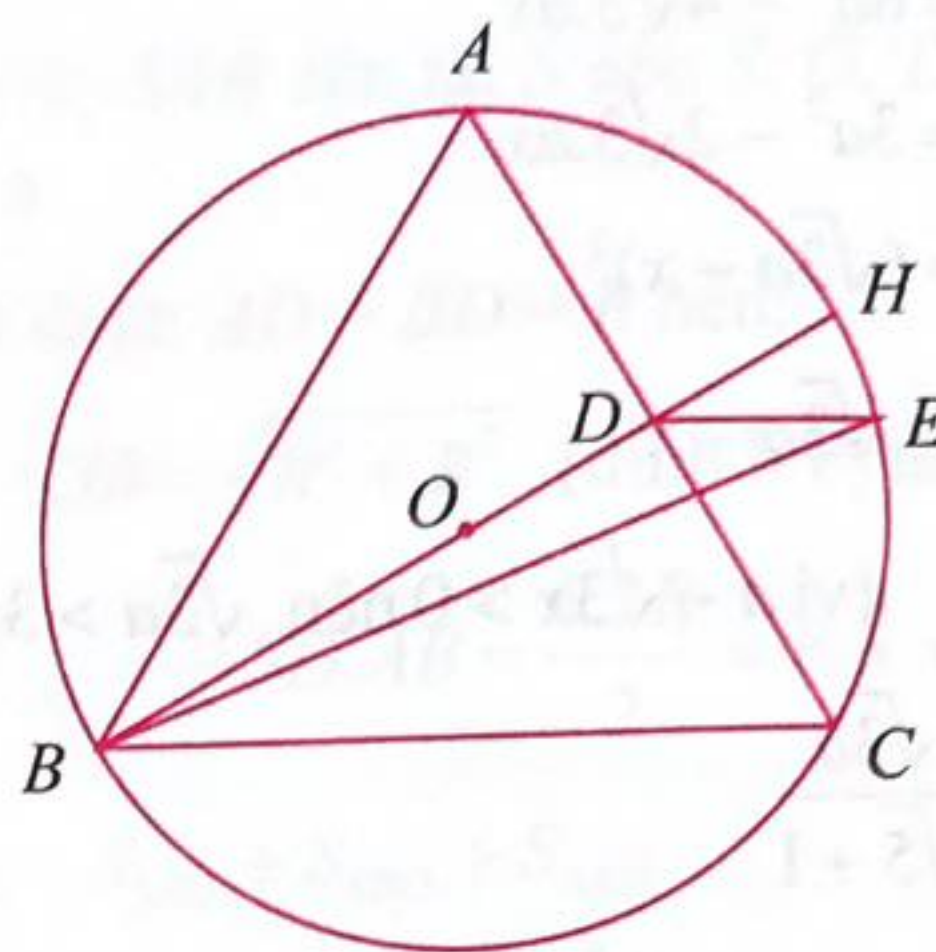
- Hệ thức liên quan tới bán kính đường tròn nội tiếp được sử dụng là $p.r = S$, với p là nửa chu vi tam giác, S là diện tích tam giác.

Thí dụ 8. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O) . D là trung điểm AC . Kẻ đường thẳng qua D , song song BC , cắt đường tròn (O) tại E (D và E cùng phía đối với AB). Tính $\frac{DE}{BC}$.

(Đề thi MYTS 9 năm 2018)

Phương pháp. BD là đoạn thẳng thuộc đường kính của đường tròn (O) , do đó ta có thể vẽ đường kính này và tạo ra tam giác vuông tại E . Sau đó có thể tính BC và DE theo một ẩn chung (làm việc với ẩn chung thông qua định lý Pythagore, là định lý hay sử dụng trong các bài toán hình học sử dụng công cụ đại số).

Lời giải.

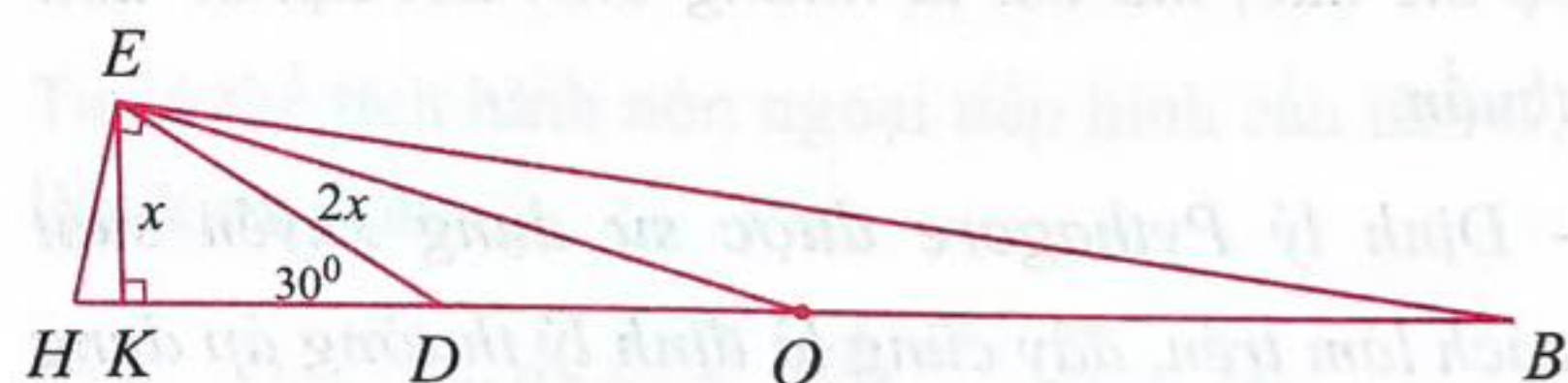


Kẻ đường kính BH của đường tròn (O) . Ta có: O, D đều nằm trên BH và $BO = \frac{1}{2}BH = \frac{2}{3}BD$ (tính chất tam giác đều) $\Rightarrow HD = \frac{1}{4}BH$.

Đặt $HD = a \Rightarrow BD = 3a$.

Từ đó tính được $BC = 2\sqrt{3}a$ (1). Vì $DE \parallel BC$ nên $\widehat{HDE} = \widehat{HBC} = 30^\circ$ (2 góc đồng vị).

Kẻ EK vuông góc với HB tại K .



Đặt $EK = x$ ($x > 0$). Tam giác EKD vuông tại K có $\widehat{EDK} = 30^\circ$ nên $EK = \frac{1}{2}ED \Rightarrow ED = 2x$

$\Rightarrow KD = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3}x$ (định lý Pythagore).

$$\text{Do đó: } \begin{cases} HK = HD - KD = a - \sqrt{3}x \\ KB = BD + KD = 3a + \sqrt{3}x \end{cases}$$

Lần lượt áp dụng định lý Pythagore cho 2 tam giác vuông EKH và EKB ta có:

$$\begin{cases} EH^2 = EK^2 + KH^2 = 4x^2 - 2\sqrt{3}.ax + a^2 \\ EB^2 = EK^2 + KB^2 = 4x^2 + 6\sqrt{3}.ax + 9a^2 \end{cases}$$

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác vuông EHB ta có:

$$\begin{aligned} EH^2 + EB^2 &= HB^2 \\ \Leftrightarrow 8x^2 + 4\sqrt{3}.ax + 10a^2 &= 16a^2 \\ \Leftrightarrow 8x^2 &= 6a^2 - 4\sqrt{3}.ax \\ \Leftrightarrow 4x^2 &= 3a^2 - 2\sqrt{3}.ax \\ \Leftrightarrow 5x^2 &= (\sqrt{3}a - x)^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{5}x &= \sqrt{3}a - x \end{aligned}$$

$$(\text{vì } a - \sqrt{3}x > 0 \text{ nên } \sqrt{3}a > 3x > x).$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{5} + 1}.$$

$$\text{Do đó: } DE = 2x = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{5} + 1} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{DE}{BC} = \frac{1}{\sqrt{5} + 1}.$$

Nhận xét.

- Việc đặt ẩn như trên chỉ là một cách đặt ẩn, với hình vẽ trên có thể đặt ẩn cách khác, tuy nhiên giải sẽ phức tạp hơn.

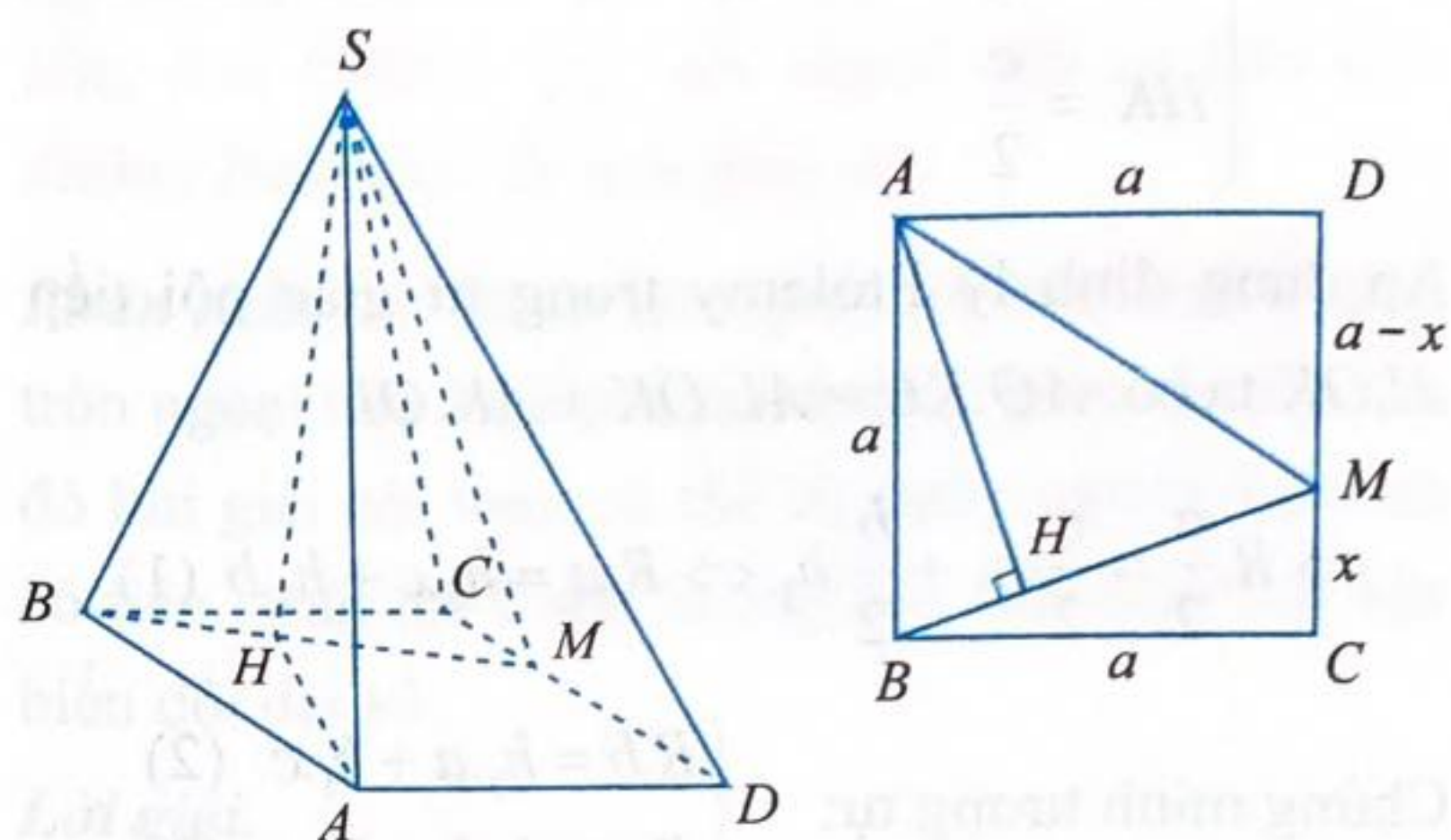
- Cách làm trên không thể hiện một công cụ đại số cụ thể nào, mà chỉ là những biến đổi đại số đơn thuần.

- Định lý Pythagore được sử dụng xuyên suốt cách làm trên, đây cũng là định lý thường áp dụng trong những bài toán hình học giải bằng phương pháp đại số, bên cạnh những hệ thức khác.

Thí dụ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , cạnh bên $SA = h$ và vuông góc mặt đáy. M di động trên cạnh CD sao cho $CM = x$ ($0 < x \leq a$). Kẻ SH vuông góc BM tại H . Tìm vị trí M trên cạnh CD để thể tích hình chóp $S.ABH$ đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

Phương pháp. Vì $V_{S.ABH} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABH}$ (SA vuông góc với đáy) nên ta chỉ cần tìm vị trí điểm M trên CD sao cho S_{ABH} đạt giá trị lớn nhất. Vấn đề là phải tìm được cách xác định điểm H dưới khía cạnh hình học phẳng, cụ thể ở đây nếu không xét trong hình học không gian thì điểm H sẽ được xác định thế nào. Sau đó ta đưa về giải hình học phẳng thuần túy, kết hợp công cụ cực trị đại số để giải quyết yêu cầu bài toán.

Lời giải.



Vì SA vuông góc với $\text{mp}(ABCD)$ và BM nằm trong $\text{mp}(ABCD)$ nên SA vuông góc BM .

Theo giả thiết, SH vuông góc BM . Do đó, BM vuông góc $\text{mp}(SAH)$ nên BM vuông góc với AH .

$$\Delta AHB \sim \Delta BCM \quad (\text{g.g})$$

$$(\text{vì } \begin{cases} \widehat{AHB} = \widehat{BCM} = 90^\circ \\ \widehat{ABH} = \widehat{BMC} = 90^\circ - \widehat{CBM} \end{cases})$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{HB}{CM} = \frac{AB}{BM} \Rightarrow \frac{AH}{a} = \frac{HB}{x} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AH = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\ HB = \frac{a.x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{ABH} = \frac{AH.HB}{2} = \frac{a^3.x}{2.(a^2 + x^2)}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}$. Ta có:

$$f'(x) = \frac{a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^2}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow a = x.$$

Với $0 < x \leq a$ thì $f'(x) > 0$ nên $f(x)$ đồng biến trên $(0, a]$. Do đó giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $(0; a]$ là $f(a) = \frac{a}{a^2 + a^2} = \frac{1}{2a}$.

Vậy thể tích $V_{\max}$ lớn nhất của hình chóp $S.ABCD$ bằng

$$V_{\max} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{a^3}{2} \cdot \frac{1}{2a} = \frac{a^2 h}{12},$$

đạt được khi M trùng D .

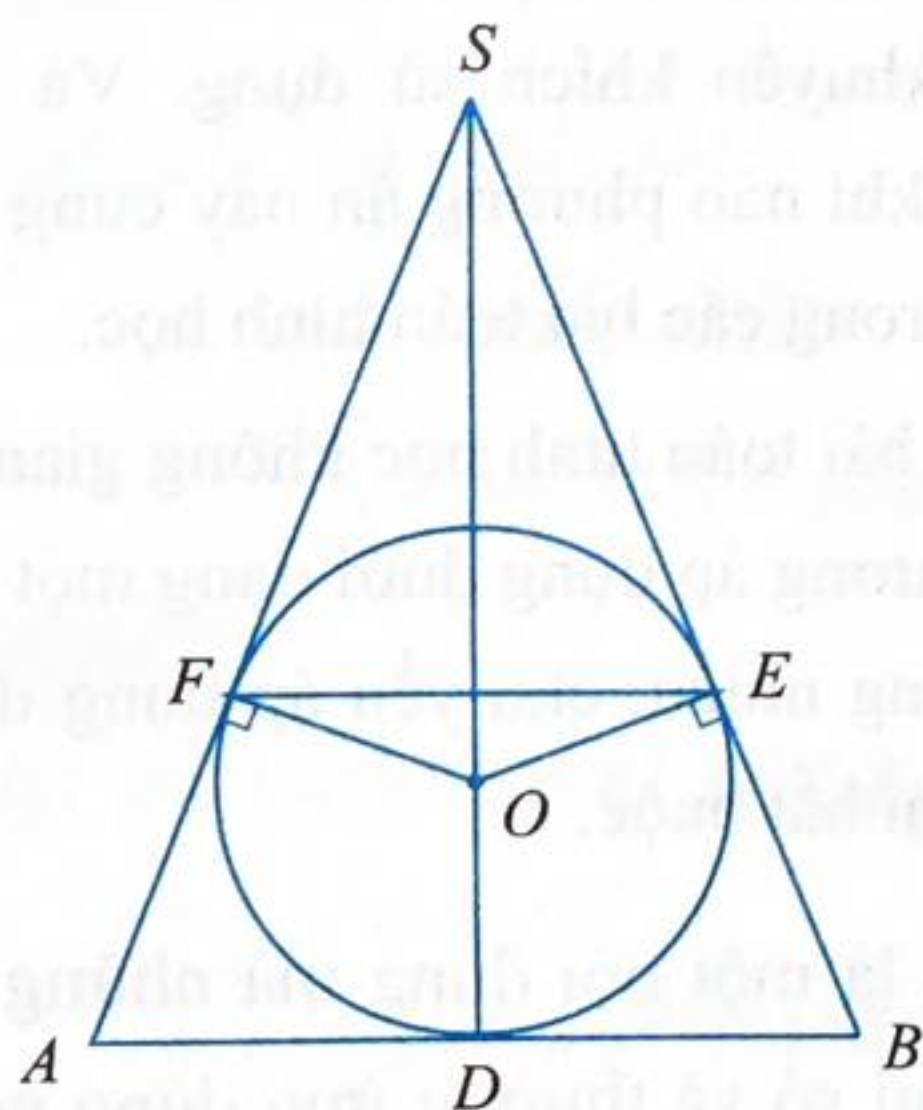
Nhận xét.

Để tìm giá trị lớn nhất của $f(x)$, nếu dùng cách làm chia cả tử cả mẫu của $f(x)$ cho x rồi dùng bất đẳng thức Cauchy dưới mẫu thì kết quả vẫn được như trên, tuy nhiên cách làm này không vận dụng giả thiết $0 < x \leq a$, nên không đúng bản chất bài toán.

Thí dụ 10. Xét hình nón ngoại tiếp hình cầu bán kính r . Khi thể tích hình nón này đạt giá trị nhỏ nhất, tính bán kính mặt đáy R và đường cao h của nó theo r .

Phương pháp. Biểu thức tính thể tích hình nón chắc chắn sẽ được biểu diễn theo hai biến h, R và đại lượng không đổi r . Do đó cần phải biểu diễn biến h theo R (hoặc R theo h) để đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức một biến.

Lời giải.



Xét hình nón đỉnh S ngoại tiếp hình cầu tâm O , bán kính r . Cắt hình nón bởi một mặt phẳng (α)

đi qua trục của hình nón. Khi đó mặt phẳng (α) sẽ cắt hình cầu tâm O theo một đường tròn tâm O bán kính r , cắt hình nón theo một tam giác cân có đỉnh cân là S , cạnh đáy AB (A, B thuộc mặt phẳng đáy).

Kẻ OD vuông góc với AB , OE vuông góc với SB , OF vuông góc với SA lần lượt tại D, E, F . Khi đó $OD = OE = OF = r$.

Vì tam giác SAB cân tại S nên S, O, D thẳng hàng và $SD = h$.

Theo giả thiết: $AD = BD = R$ nên:

$$SA = SB = \sqrt{h^2 + R^2} \quad (\text{định lý Pythagore}).$$

$$\text{Ta có: } S_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot SD \cdot AB = \frac{h \cdot 2R}{2} = R \cdot h \quad \text{và}$$

$$\begin{aligned} S_{SAB} &= S_{SAO} + S_{SBO} + S_{ABO} \\ &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + R^2} + \frac{1}{2} \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + R^2} + \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2R \\ &= (R + \sqrt{h^2 + R^2}) \cdot r. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } R \cdot h = (R + \sqrt{h^2 + R^2}) \cdot r$$

$$\Leftrightarrow R \cdot (h - r) = r \cdot \sqrt{h^2 + R^2}$$

$$\Leftrightarrow R^2 \cdot (h^2 - 2hr + r^2) = r^2 \cdot (h^2 + R^2)$$

$$\Leftrightarrow h \cdot (R^2 - r^2) = 2R^2 r$$

$$\Leftrightarrow R^2 = \frac{hr^2}{h - 2r} \quad (\text{do } h - 2r > 0) \quad (*)$$

Ta có thể tích hình nón ngoại tiếp hình cầu tâm O , bán kính r là:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi h^2 r^2}{h - 2r} \quad (\text{theo } (*)).$$

Vì $h - 2r > 0$ và $r > 0$ nên ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy như sau:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi h^2 r^2}{h - 2r} &= \frac{\pi r^2}{3} \cdot \left(h - 2r + \frac{4r^2}{h - 2r} + 4r \right) \\ &\geq \frac{\pi r^2}{3} \cdot \left[2 \cdot \sqrt{(h - 2r) \cdot \frac{4r^2}{h - 2r}} + 4r \right] \\ &= \frac{\pi r^2}{3} \cdot (2 \cdot 2r + 4r) = \frac{8\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow h - 2r = \frac{4r^2}{h - 2r}$$

$$\Leftrightarrow h - 2r = 2r \Leftrightarrow h = 4r \Leftrightarrow R^2 = \frac{4r^3}{2r} \quad (\text{theo } (*))$$

$$\Leftrightarrow R = \sqrt{2}.r.$$

Vậy khi hình nón ngoại tiếp mặt cầu tâm O , bán kính r có bán kính đáy bằng $\sqrt{2}.r$ và chiều cao bằng $4r$ thì thể tích của nó đạt giá trị nhỏ nhất và bằng $\frac{8\pi r^3}{3}$.

Nhận xét.

- Để tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{h^2 r^2}{h - 2r}$, ta cũng có thể sử dụng phương pháp hàm số như ở thí dụ 9. Ở đây phương pháp bất đẳng thức Cauchy nhanh hơn, thuận tiện hơn và hoàn toàn có thể chấp nhận sử dụng vì ở đây h không bị chặn trên.

- Ngoài ra ta cũng có thể tính h theo R rồi quy về chỉ còn một ẩn R , tuy nhiên căn cứ vào công thức tính thể tích hình nón thì việc tính R theo h cũng sẽ đơn giản và tiện lợi hơn.

3. LUYỆN TẬP

Sử dụng phương pháp và công cụ đại số để giải 1 số bài toán sau:

Bài 1. Tam giác ABC vuông cân tại A . D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC . Kẻ EH vuông góc CD tại H . Chứng minh tam giác ABH cân.

Bài 2. Tam giác đều ABC có cạnh a và nội tiếp đường tròn tâm O . M nằm trên cung nhỏ $\widehat{BC}$ của đường tròn (O) . Đặt $MA = x, MB = y, MC = z$. Chứng minh:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$;

b) $x^4 + y^4 + z^4 = 2a^4$.

Bài 3. Cho tam giác có độ dài ba cạnh lần lượt là a, b, c . Chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c-a}} + \frac{b}{\sqrt{c+a-b}} + \frac{c}{\sqrt{a+b-c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân đáy AB và CD , $AD = AB = BC = a$, $CD = 2a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm M của AB . Lấy điểm N bất kì thuộc đoạn AM . Mặt phẳng qua N , song song với SM và BC , lần lượt cắt SA, SB và SC tại P, Q, R . Tìm giá trị lớn nhất của thể tích đa diện $APQBNR$.

Bài 5. (Bất đẳng thức Weizenböck)

Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và diện tích tam giác bằng S . Xét các số $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\text{thỏa mãn: } \begin{cases} x + y \geq 0 \\ y + z \geq 0 \\ z + x \geq 0 \\ xy + yz + zx \geq 0 \end{cases} \quad \text{. Chứng minh:}$$

$$x.a^2 + y.b^2 + z.c^2 \geq 4.S.\sqrt{xy + yz + zx}.$$

Từ đó suy ra kết quả sau: Tam giác ABC có điểm M nằm trong tam giác, khi đó:

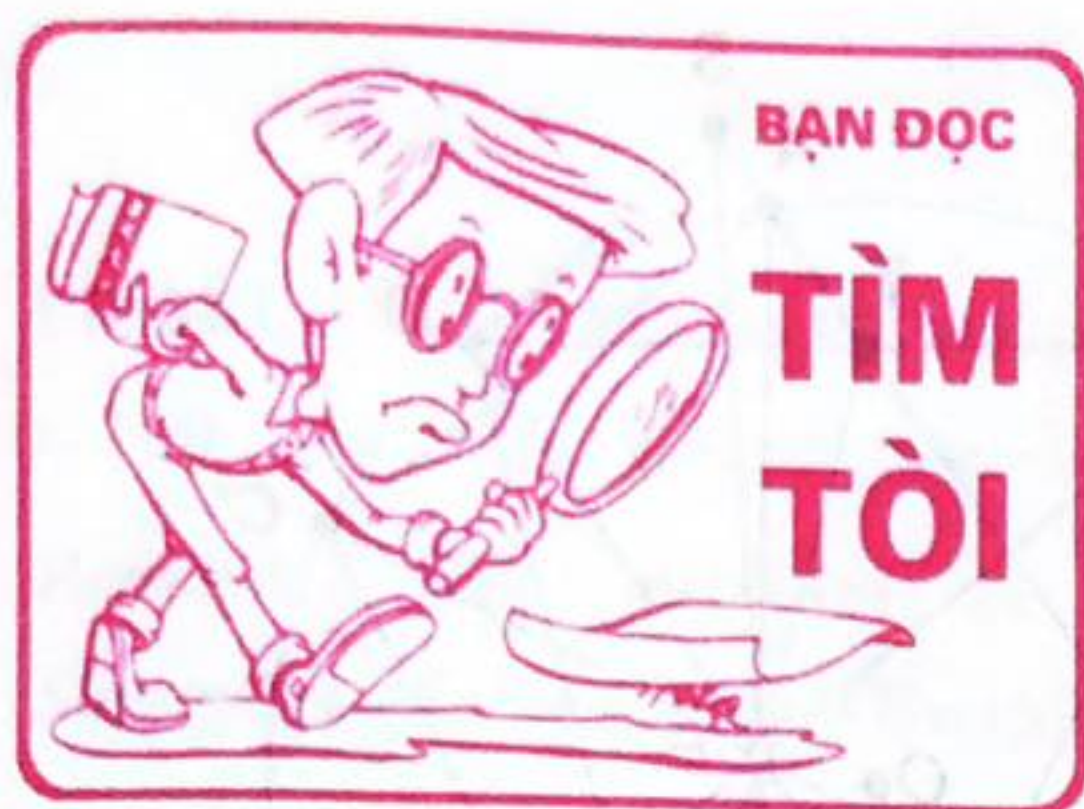
$$a.MA + b.MB + c.MC \geq 4S_{ABC}.$$

4. TẠM KẾT

- Phương pháp đại số trong hình học có thể không phải là phương án tối ưu cho một số bài toán hình học (trừ trường hợp bài toán đó bắt buộc phải sử dụng phương pháp và công cụ đại số mới có thể giải). Đối với những bài toán như vậy, phương pháp đại số chỉ có ý nghĩa cho ta biết thêm một khía cạnh nữa của lời giải bài toán, chứ không hoàn toàn khuyến khích sử dụng. Và dĩ nhiên, không phải khi nào phương án này cũng luôn đưa đến đáp số trong các bài toán hình học.

- Trong các bài toán hình học không gian, phương pháp này thường áp dụng dưới dạng một cách giải khác là không nhiều, chủ yếu áp dụng dưới dạng một cách giải bắt buộc.

- Đây cũng là một nội dung mà những bạn đọc yêu thích đại số và thường ứng dụng nó để giải toán có thể tham khảo.



HAI KẾT QUẢ ĐẸP VỀ TỈ SỐ KÉP

NGUYỄN MINH HÀ (Hà Nội)

Đó là hai kết quả về tỉ số kép, chưa được chứng minh một cách chi tiết bằng các kiến thức sơ cấp nhưng lại thường xuyên được sử dụng trong việc giải các bài toán mà lời giải của nó sử dụng tỉ số kép.

Định lí 1. Cho đường tròn (O) và các điểm A, B, C, D cố định trên (O) . Điểm M thay đổi trên (O) . Khi đó $M(ABCD)$ không đổi.

Chứng minh.

Lấy M' bất kì thuộc (O) . Gọi $X, Y, Z, T, X', Y', Z', T', H$ theo thứ tự là hình chiếu của O trên $AM, BM, CM, DM, AM', BM', CM', DM', MM'$.

Đương nhiên $MA, MB, MC, MD, M'A, M'B, M'C, M'D, MM'$ theo thứ tự vuông góc với $OX, OY, OZ, OT, OX', OY', OZ', OT', OH$ (1).

Từ (1) suy ra:

$$\begin{aligned}(OX, OX') &\equiv (AM, AM') \\ &\equiv \frac{1}{2}(\overline{OM}, \overline{OM'}) \\ &\equiv (OM, OH) \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Tương tự, ta có:

$$\begin{aligned}(OX, OX') &\equiv (OY, OY') \equiv (OZ, OZ') \\ &\equiv (OT, OT') \\ &\equiv (OM, OH) \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Do đó, qua phép quay tâm O và biến đường

thẳng OM thành đường thẳng OH (về phương diện hình học có hai phép quay như vậy), các đường thẳng OX, OY, OZ, OT theo thứ tự biến thành các đường thẳng OX', OY', OZ', OT' (2).

Từ (1) và (2), chú ý rằng phép quay bảo toàn tỉ số kép, suy ra:

$$\begin{aligned}M(ABCD) &= O(XYZT) \\ &= O(X'Y'Z'T') \\ &= M'(ABCD).\end{aligned}$$

Điều đó có nghĩa là $M(ABCD)$ không đổi khi M thay đổi trên (O) .

Nhờ định lí 1 mà ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa. Nếu bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn (O) thì số $M(ABCD)$ với M thuộc (O) được gọi là tỉ số kép của bốn điểm A, B, C, D (chú ý đến thứ tự) và được kí hiệu là $(ABCD)$.

Định lí 1 có hệ quả quan trọng sau.

Hệ quả 1. Cho đường tròn (O) và các điểm A, B, C, D, M thuộc (O) . M' là điểm bất kỳ. Khi đó M' thuộc (O) khi và chỉ khi

$$M'(ABCD) = M(ABCD).$$

Phép chứng minh hệ quả 1 xin dành cho bạn đọc

Định lí 2. Cho đường tròn (O) và bốn điểm A, B, C, D thuộc (O) . Điểm E không thuộc (O) . A', B', C', D' theo thứ tự là giao điểm thứ hai của EA, EB, EC, ED và (O) . Khi đó

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Chứng minh.

Trong phép chứng minh này kí hiệu WW chỉ tiếp tuyến với (O) tại điểm W thuộc (O) .

Gọi $S = DD' \cap AC$; $S' = D'D' \cap A'C'$;

$$T = AC \cap BD$$
; $T' = A'C' \cap B'D'$;

$$K = CD' \cap DA'; L = CD' \cap BA'.$$

Áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix} ADD' \\ DCA' \end{pmatrix}$,

suy ra S, E, K thẳng hàng.

Áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix} A'D'C \\ D'C'D \end{pmatrix}$,

suy ra S', E, K thẳng hàng.

Vậy S, E, S' thẳng hàng (1).

Áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix} ABD' \\ DCA' \end{pmatrix}$,

suy ra T, E, L thẳng hàng.

Áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix} A'B'C \\ D'C'B \end{pmatrix}$,

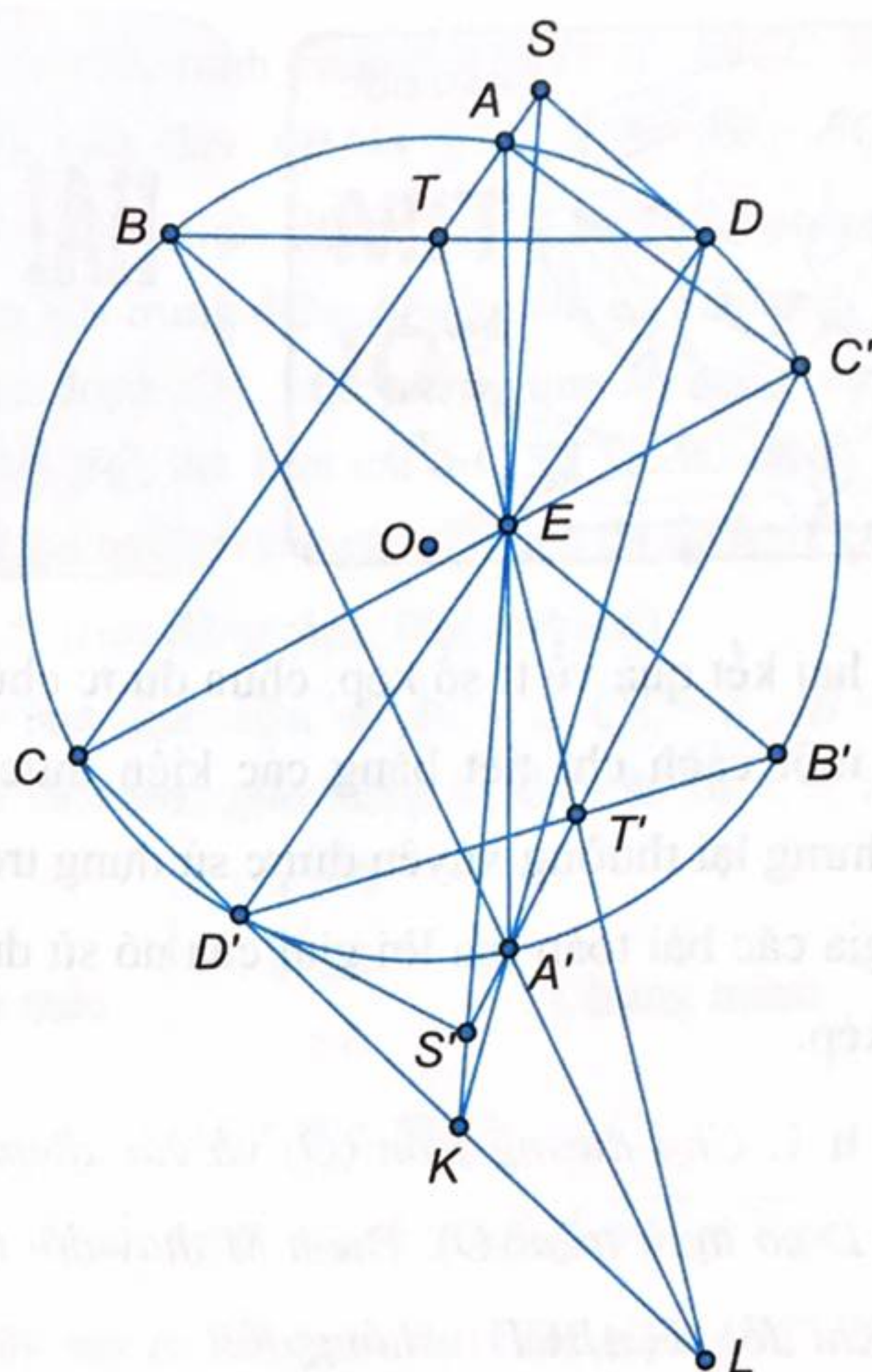
suy ra T', E, L thẳng hàng.

Vậy T, E, T' thẳng hàng (2).

Từ (1) và (2), sử dụng phép chiếu xuyên tâm E , ta thu được:

$$\begin{aligned} (ABCD) &= D(ABCD) = D(ATCS) \\ &= (ATCS) = (A'T'C'S') \\ &= D'(A'T'C'S') = D'(A'B'C'D') \\ &= (A'B'C'D'). \end{aligned}$$

Định lí 2 có hệ quả quan trọng sau.



Hệ quả 2. Nếu qua phép nghịch đảo N_O^k (cực O , phương tích k) các điểm A, B, C, D (cùng thuộc một đường thẳng hoặc cùng thuộc một đường tròn) theo thứ tự biến thành các điểm A', B', C', D' thì

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Chú ý.

+ Các điểm A', B', C', D' cùng thuộc một đường thẳng hoặc thuộc một đường tròn.

+ A, B, C, D có thể trùng O hay trùng ∞ (điểm vô cùng thuộc mặt phẳng phức mở rộng, xem

Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 10, hình học, tr 163 - 171).

Phép chứng minh hệ quả 2 xin dành cho bạn đọc.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 95

PROBLEM. If the sum of two diagonals of a kite is 100, what is the largest possible area of the kite?

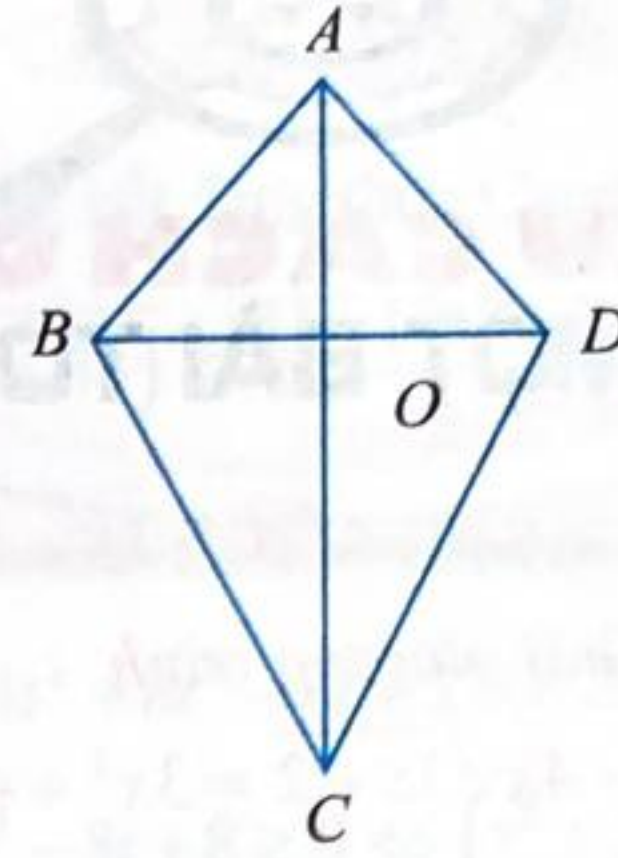
Remark: This problem is collected from Singapore Mathematical Olympiad.

Solution: The area of the kite is

$$\begin{aligned} S &= S_{ABD} + S_{CBD} = \frac{1}{2} AO \times BD + \frac{1}{2} CO \times BD \\ &= \frac{1}{2} (AO + CO) \times BD = \frac{1}{2} AC \times BD. \end{aligned}$$

We have: $(AC + BD)^2 \geq 4AC \times BD$.

But $AC + BD = 100$ and hence the largest possible area of the kite is $\frac{1}{2} \times \frac{100^2}{4} = 1250$. And the equality happens when $AC = BD = 50$.



TỪ VỰNG

kite : tứ giác hình con diều

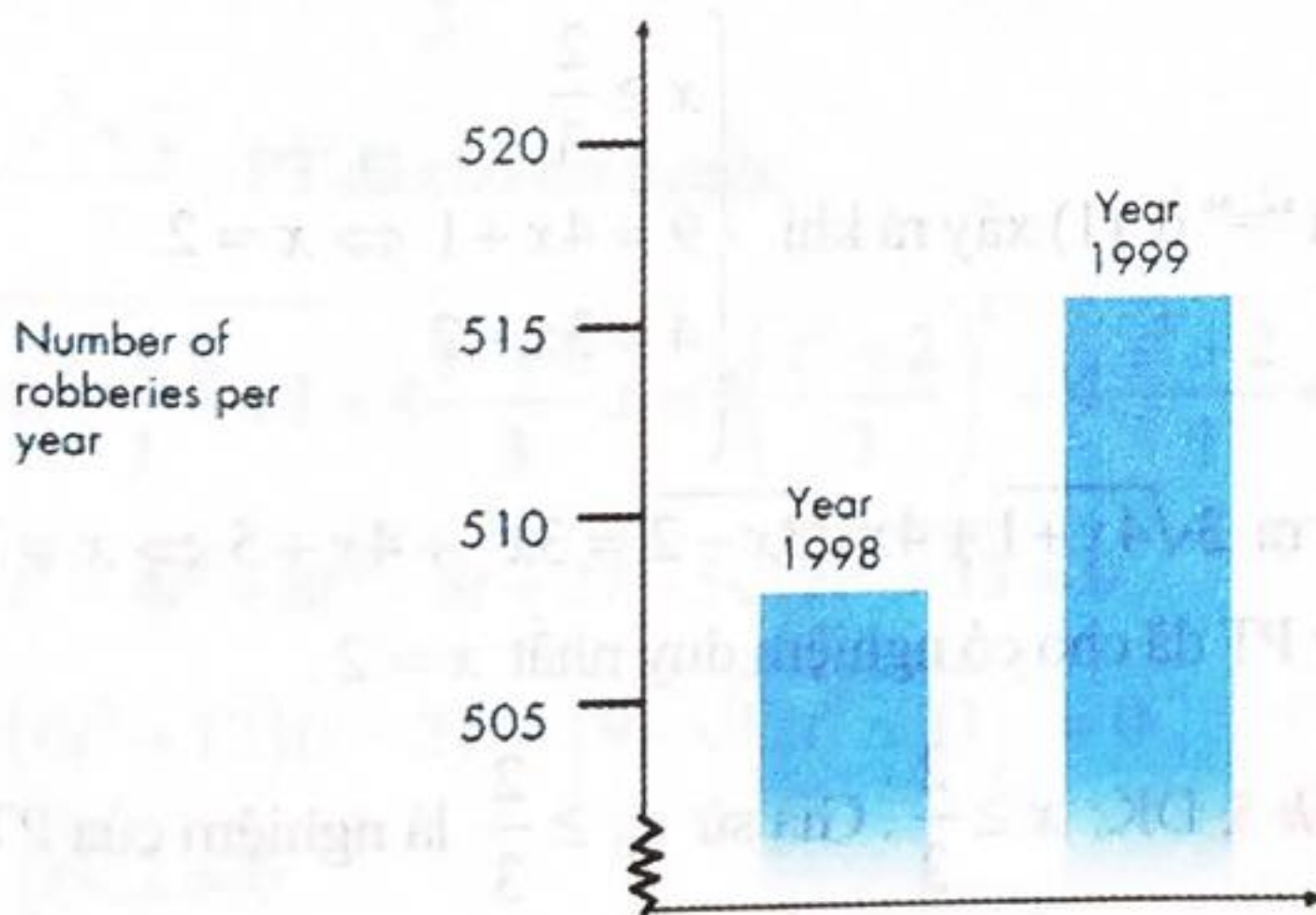
diagonal : đường chéo

area : diện tích

NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science–Vietnam National University, Hanoi)

BÀI TOÁN 93. Một phóng viên truyền hình nhìn vào biểu đồ này và nói: “Biểu đồ cho thấy rằng có sự gia tăng rất lớn của số vụ cướp từ năm 1998 đến năm 1999”.



Bạn có thể xem xét về tính hợp lý lời diễn giải của phóng viên đối với biểu đồ trên? Đưa ra câu giải trình để khẳng định câu trả lời của bạn.

Lưu ý: Bài toán này được sưu tầm từ một số câu hỏi mẫu từ chương trình đánh giá OECD's PISA

(PISA: Chương trình đánh giá học sinh Quốc tế).

Lời giải. Câu nói của phóng viên là một sự diễn giải không hợp lý, vì sự gia tăng số những vụ cướp từ năm 1998 đến năm 1999 chỉ là một phần nhỏ xét từ biểu đồ đã cho. Trên thực tế số vụ cướp từ năm 1998 đến năm 1999 tăng lên chỉ vào khoảng:

$$516 - 507 = 9 \text{ hoặc } \frac{516 - 507}{507} \approx 1,8\%.$$

Phóng viên đã đưa ra ý tưởng sai, bởi vì phóng viên đó đã dựa vào biểu đồ đã cho và xem rằng số những vụ cướp năm 1999 gần như gấp đôi những vụ cướp năm 1998.

Nhận xét. Kỳ này bạn Nguyễn Hùng Cường, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, Bình Định có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm. Xin hoan nghênh bạn.

HỒ HẢI (Hà Nội)



BÀI TOÁN 74. Giải phương trình

$$3\sqrt{4x+1} + 4x\sqrt{3x-2} = 3x^2 + 4x + 5.$$

Lời giải. Cách 1. ĐK: $x \geq \frac{2}{3}$. Với $x \geq \frac{2}{3}$ thì

$$A = 3\sqrt{4x+1} + (2x+5) > 0,$$

$$B = 4\sqrt{3x-2} + (3x+2) > 0, \quad \frac{4}{A} + \frac{9x}{B} > 0. \text{ Lúc này}$$

$$3\sqrt{4x+1} + 4x\sqrt{3x-2} = 3x^2 + 4x + 5$$

$$\Leftrightarrow [3\sqrt{4x+1} - (2x+5)] + x[4\sqrt{3x-2} - (3x+2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9(4x+1) - (2x+5)^2}{A} + \frac{x[16(3x-2) - (3x+2)^2]}{B} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x^2 + 16x - 16}{A} + \frac{x(-9x^2 + 36x - 36)}{B} = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-2)^2 \left(\frac{4}{A} + \frac{9x}{B} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Do đó PT đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Cách 2. ĐK: $x \geq \frac{2}{3}$. Với $x \geq \frac{2}{3}$ thì

$$3\sqrt{4x+1} + 4x\sqrt{3x-2} = 3x^2 + 4x + 5$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{12}{\sqrt{4x+1}+3} + \frac{12x}{\sqrt{3x-2}+2} - 3x-2 \right) = 0.$$

$$\bullet (x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\bullet \frac{12}{\sqrt{4x+1}+3} + \frac{12x}{\sqrt{3x-2}+2} - 3x-2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6-2\sqrt{4x+1}}{\sqrt{4x+1}+3} + 3x \cdot \frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}+2} = 0 \quad (1).$$

Dễ thấy $x = 2$ là nghiệm của (1). Nếu $x > 2$ thì

$$\sqrt{4x+1} > 3, \sqrt{3x-2} > 2$$

$$\Rightarrow \frac{6-2\sqrt{4x+1}}{\sqrt{4x+1}+3} + 3x \cdot \frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}+2} < 0.$$

$$\text{Nếu } \frac{2}{3} \leq x < 2 \text{ thì } 0 < \sqrt{4x+1} < 3, 0 \leq \sqrt{3x-2} < 2$$

$$\Rightarrow \frac{6-2\sqrt{4x+1}}{\sqrt{4x+1}+3} + 3x \cdot \frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x-2}+2} > 0.$$

Do đó (1) có nghiệm duy nhất $x = 2$. Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Cách 3. ĐK: $x \geq \frac{2}{3}$. Với $x \geq \frac{2}{3}$ ta có:

$$3\sqrt{4x+1} + 4x\sqrt{3x-2} = 3x^2 + 4x + 5$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{4x+1} + 8x\sqrt{3x-2} = 6x^2 + 8x + 10$$

$$\Leftrightarrow (3-\sqrt{4x+1})^2 + 2x(2-\sqrt{3x-2})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-\sqrt{4x+1} = 0 \\ 2-\sqrt{3x-2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Cách 4. ĐK: $x \geq \frac{2}{3}$. Với $x \geq \frac{2}{3}$ áp dụng bất đẳng thức

Cauchy ta có:

$$3\sqrt{4x+1} = \sqrt{9(4x+1)} \leq \frac{9+(4x+1)}{2} = 2x+5;$$

$$2\sqrt{3x-2} = \sqrt{4(3x-2)} \leq \frac{4+(3x-2)}{2} = \frac{3x+2}{2}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{4x+1} + 4x\sqrt{3x-2} \leq 2x+5 + 2x \cdot \frac{3x+2}{2} = 3x^2 + 4x + 5 \quad (1).$$

$$\text{Dấu "=" ở (1) xảy ra khi } \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ 9 = 4x+1 \Leftrightarrow x = 2. \\ 4 = 3x-2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 3\sqrt{4x+1} + 4x\sqrt{3x-2} = 3x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Cách 5. ĐK: $x \geq \frac{2}{3}$. Giả sử $x_0 \geq \frac{2}{3}$ là nghiệm của PT:

$$3\sqrt{4x_0+1} + 4x_0\sqrt{3x_0-2} = 3x_0^2 + 4x_0 + 5. \text{ Khi đó}$$

$$3\sqrt{4x_0+1} + 4x_0\sqrt{3x_0-2} = 3x_0^2 + 4x_0 + 5 \quad (1).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$3\sqrt{4x_0+1} = \sqrt{9(4x_0+1)} \leq \frac{9+(4x_0+1)}{2} = 2x_0+5;$$

$$x_0\sqrt{3x_0-2} = \sqrt{x_0^2(3x_0-2)} \leq \frac{x_0^2 + (3x_0-2)}{2}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{4x_0+1} + 4x_0\sqrt{3x_0-2} \leq 2x_0+5 + 4 \cdot \frac{x_0^2+(3x_0-2)}{2}$$

$$= 2x_0^2+8x_0+1 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $3x_0^2+4x_0+5 \leq 2x_0^2+8x_0+1$

$$\Leftrightarrow x_0^2-4x_0+4 \leq 0 \Leftrightarrow (x_0-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x_0=2.$$

Thử lại thấy $x=2$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Cách 6. ĐK: $x \geq \frac{2}{3}$. Giả sử $x_0 \geq \frac{2}{3}$ là nghiệm của PT:

$$3\sqrt{4x_0+1} + 4x_0\sqrt{3x_0-2} = 3x_0^2+4x_0+5. \text{ Ta có:}$$

$$3\sqrt{4x_0+1} + 4x_0\sqrt{3x_0-2} = 3x_0^2+4x_0+5 \quad (1).$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$(3\sqrt{4x_0+1} + 2x_0 \cdot 2\sqrt{3x_0-2})^2 \leq (9+4x_0^2)(4x_0+1+12x_0-8)$$

$$= 64x_0^3-28x_0^2+144x_0-63 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$(3x_0^2+4x_0+5)^2 \leq 64x_0^3-28x_0^2+144x_0-63$$

$$\Leftrightarrow 9x_0^4+16x_0^2+25+24x_0^3+30x_0^2+40x_0 \leq 64x_0^3-28x_0^2+144x_0-63$$

$$\Leftrightarrow 9x_0^4-40x_0^3+74x_0^2-144x_0+88 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0-2)^2 \cdot [5x_0^2+(2x_0-1)^2+21] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x_0=2. \text{ Thử lại thấy } x=2 \text{ thỏa mãn PT đã cho.}$$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Cách 7. ĐK: $x \geq \frac{2}{3}$. Ta đặt $t = \sqrt{3x-2}$ thì $t \geq 0$ và

$$x = \frac{t^2+2}{3}. \text{ PT đã cho trở thành:}$$

$$3\sqrt{4 \cdot \frac{t^2+2}{3}+1} + 4 \cdot \frac{t^2+2}{3} \cdot t = 3\left(\frac{t^2+2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{t^2+2}{3} + 5$$

$$\Leftrightarrow t^4-4t^3+8t^2-8t+27-3\sqrt{12t^2+33}=0$$

$$\Leftrightarrow (6t^2+12)(t-2)^2 + (9-\sqrt{12t^2+33})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-2=0 \\ 9-\sqrt{12t^2+33}=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=2.$$

Với $t=2$ thì $x=2$.

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Cách 8. ĐK: $x \geq \frac{2}{3}$. Ta đặt $t = \sqrt{3x-2}$ thì $t \geq 0$ và

$$x = \frac{t^2+2}{3}. \text{ PT đã cho trở thành:}$$

$$3\sqrt{4 \cdot \frac{t^2+2}{3}+1} + 4 \cdot \frac{t^2+2}{3} \cdot t = 3\left(\frac{t^2+2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{t^2+2}{3} + 5$$

$$\Leftrightarrow t^4-4t^3+8t^2-8t+27=3\sqrt{12t^2+33} \quad (1).$$

Do $t \geq 0$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt{81(12t^2+33)} \leq \frac{81+12t^2+33}{2} = 6t^2+57$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{12t^2+33} \leq 2t^2+19 \quad (2).$$

Ta lại có: $t^4-4t^3+8t^2-8t+27 \geq 2t^2+19 \quad (3)$

$$\Leftrightarrow t^4-4t^3+6t^2-8t+8 \geq 0 \Leftrightarrow (t^2+2)(t-2)^2 \geq 0 \quad (4).$$

Vì (4) luôn đúng nên (3) luôn đúng. Từ (2) và (3) suy ra:

$$t^4-4t^3+8t^2-8t+27 \geq 3\sqrt{12t^2+33} \quad (5), \forall t \geq 0.$$

$$\text{Dấu "=" ở (5) xảy ra khi } \begin{cases} 81 = (12t^2+33) \\ (t-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t=2.$$

Do vậy (1) $\Leftrightarrow t=2$. Với $t=2$ thì $x=2$.

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Nhận xét. Bạn Nguyễn Văn Cảnh, GV THCS Long Hậu, xã Long Hậu, huyện Cần Giuộc, Long An đóng góp 3 cách giải; Bạn Nguyễn Minh Thọ, 214, Điện Biên Phủ, Q. 3, TP. Hồ Chí Minh đóng góp 2 cách giải; Bạn Nguyễn Hùng Cường, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, Bình Định đóng góp 2 cách giải tương tự như các cách giải trên của bạn Nguyễn Văn Xá. Xin hoan nghênh các bạn.

LÊ MAI (Hà Nội)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 76 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.9.2023.

BÀI TOÁN 76. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và $AB' \perp BC'$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

HOÀNG NGỌC HÙNG

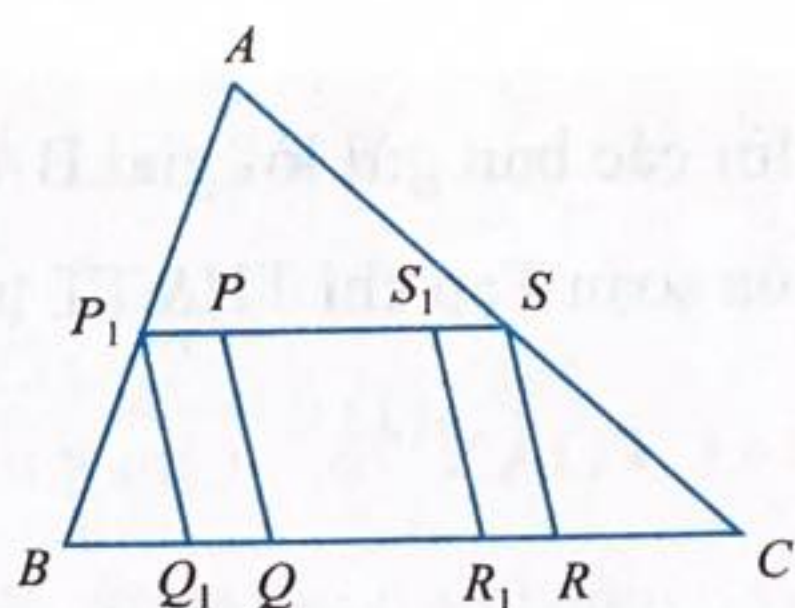
(GV THPT Kỳ Anh, Hà Tĩnh)



BÀI TOÁN 83 (RMO 1998). Cho tứ giác lồi $PQRS$ nằm bên trong tam giác ABC mà diện tích tam giác này là 1. Chứng minh rằng ba trong số bốn đỉnh của tứ giác tạo thành một tam giác có diện tích bé hơn hoặc bằng $\frac{1}{4}$.

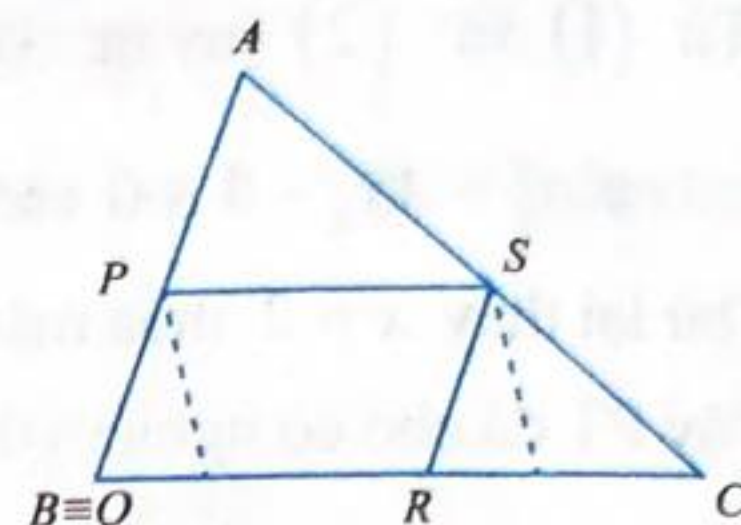
Lời giải. • Trước tiên ta chứng minh rằng: Nếu $PQRS$ là hình bình hành nằm bên trong tam giác ABC thì diện tích lớn nhất của nó là $\frac{1}{2}$ (*).

Thật vậy, giả thiết rằng hình bình hành đó có diện tích lớn nhất. Nếu hình bình hành đó có ít hơn 2 đỉnh nằm trên các cạnh của tam giác thì ta có thể mở rộng nó cho tới khi được 2 đỉnh nằm trên cạnh của tam giác (nếu đã có 1 đỉnh nằm trên cạnh thì kéo dài một trong hai cạnh chứa đỉnh đó cho tới khi gặp cạnh kia của tam giác; nếu chưa có đỉnh nào thì có thể trượt một trong hai đường chéo). Việc này sẽ làm tăng diện tích của hình bình hành, mâu thuẫn với giả thiết. Vì vậy, phải có ít nhất 2 đỉnh nằm trên cạnh của tam giác. Nếu chỉ có đúng 2 đỉnh, ta có thể dịch cạnh chứa 2 đỉnh đó ra một tí, khi đó hình bình hành sẽ không còn đỉnh nào nằm trên cạnh tam giác, mà diện tích không thay đổi, nghĩa là vẫn lớn nhất. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Như vậy phải có ít nhất 3 đỉnh của hình bình hành nằm trên cạnh của tam giác. Giả sử có đúng 3 đỉnh nằm trên cạnh tam giác, chẳng hạn: Q, R thuộc BC , S thuộc AC , P không nằm trên cạnh tam giác (xem hình vẽ). Ta dịch hai điểm P, Q (tương ứng S, R) dọc theo các tia SP, CQ sao cho $PQ \parallel SR$ và vẫn giữ nguyên khoảng cách giữa PQ và RS , cho đến khi P nằm trên một cạnh ($P \equiv P_1$), ta được hình bình hành $S_1P_1Q_1R_1$ có diện tích bằng diện tích hình bình hành $SPQR$. Ta thấy cho



tăng khoảng cách giữa hai cạnh P_1Q_1 và S_1R_1 thì diện tích hình bình hành $S_1P_1Q_1R_1$ sẽ hơn diện tích hình bình hành $SPQR$, điều này mâu thuẫn. Vì vậy cả 4 đỉnh của hình bình hành đều nằm trên các cạnh tam giác. Giả sử Q, R thuộc BC , S thuộc AC , P thuộc AB . Lúc này ta dịch cạnh RQ dọc theo CB sao cho $Q \equiv B$. Điều này không làm thay đổi diện tích hình bình hành $PQRS$. Lúc đó ta có:

tăng khoảng cách giữa hai cạnh P_1Q_1 và S_1R_1 thì diện tích hình bình hành $S_1P_1Q_1R_1$ sẽ hơn diện tích hình bình hành $SPQR$, điều này mâu thuẫn. Vì vậy cả 4 đỉnh của hình bình hành đều nằm trên các cạnh tam giác. Giả sử Q, R thuộc BC , S thuộc AC , P thuộc AB . Lúc này ta dịch cạnh RQ dọc theo CB sao cho $Q \equiv B$. Điều này không làm thay đổi diện tích hình bình hành $PQRS$. Lúc đó ta có:



$$\Delta APS \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_{APS}}{S_{ABC}} = \frac{AS^2}{AC^2} \Rightarrow S_{APS} = \frac{AS^2}{AC^2}.$$

$$\Delta CRS \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{S_{CRS}}{S_{ABC}} = \frac{CS^2}{AC^2} \Rightarrow S_{CRS} = \frac{CS^2}{AC^2}.$$

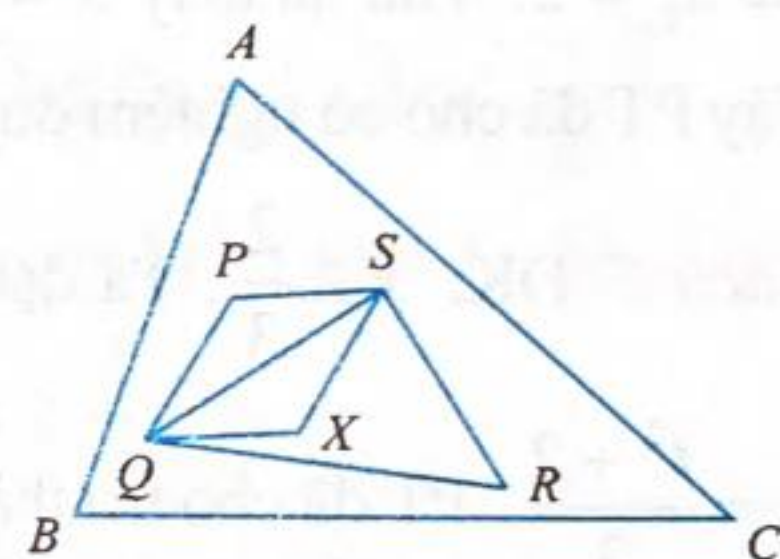
Do đó: S_{PQRS} lớn nhất $\Leftrightarrow S_{APS} + S_{CRS}$ nhỏ nhất. Điều này nghĩa là ta cần tìm vị trí của S trên AC sao cho $AS^2 + CS^2$ nhỏ nhất. Ta có:

$$AS^2 + CS^2 = AS^2 + (AC - AS)^2 = 2AS^2 - 2AC \cdot AS + AC^2 = 2\left(AS - \frac{AC}{2}\right)^2 + \frac{AC^2}{2} \geq \frac{AC^2}{2}.$$

Suy ra S phải là trung điểm của AC và $\max S_{PQRS} = \frac{1}{2}$.

Khẳng định (*) được chứng minh.

• Bây giờ xét tứ giác lồi $PQRS$ bất kỳ như hình vẽ. Dễ thấy rằng tứ giác lồi này luôn chứa điểm X để ba đỉnh của nó cùng với điểm X tạo thành hình bình hành, chẳng hạn như hình bình hành $PQXS$. Kết hợp với (*) ta có:



$$S_{PQS} = \frac{1}{2}S_{PQXS} < \frac{1}{2}S_{PQRS} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét. Chỉ có bạn Nguyễn Văn Cảnh, GV THCS Long Hậu, H. Cần Giuộc, Long An có lời giải đúng với cách giải tương tự như trên. Xin hoan nghênh bạn.

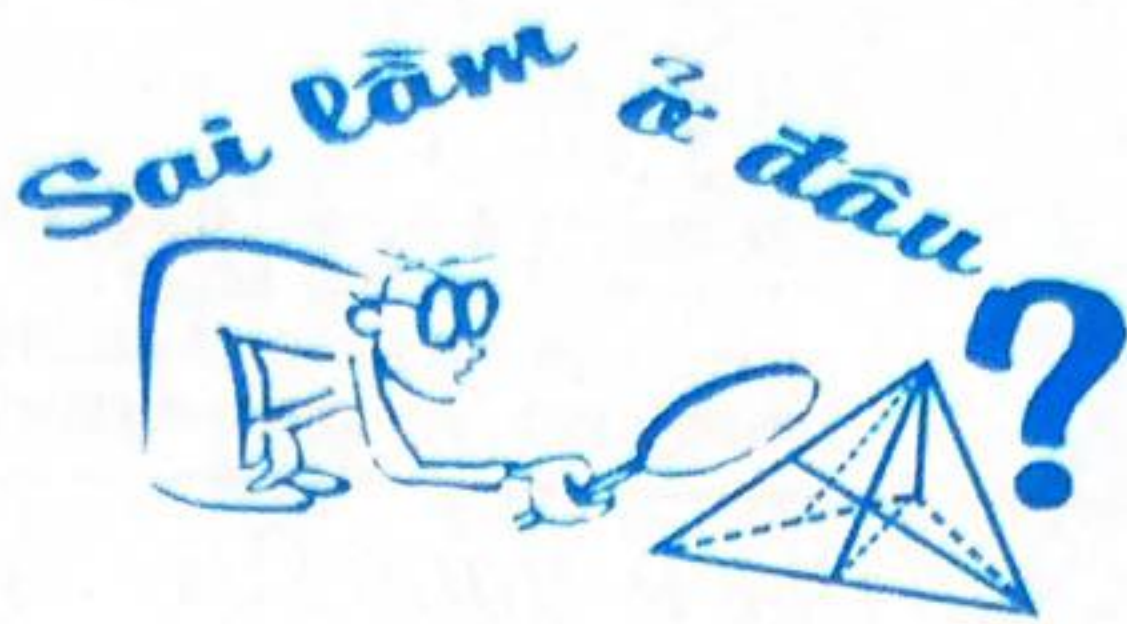
NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30/9/2023.

BÀI TOÁN 85. Tìm tất cả các số nguyên $n > 1$

sao cho $\frac{2^n + 1}{n^2}$ là một số nguyên.

KHÁNH HỮU (Hà Nội)



(Đề đăng trên TH&TT số 550, tháng 4 năm 2023)

Phân tích sai lầm. Khi tính số phần tử của biến cố bù $\bar{A}$ trường hợp 2: 6 học sinh thuộc hai khối lời giải chưa trừ đi số cách chọn có học sinh của một khối (đã xét ở trường hợp 1) do đó bài toán cho kết quả sai.

Lời giải đúng khi xét trường hợp 2 như sau:

Số cách chọn được 6 học sinh thuộc khối 12 và khối 11 là $C_9^6 - 7$ (trừ 7 cách chọn được 6 học sinh cùng khối 11).

Số cách chọn được 6 học sinh thuộc khối 12 và khối 10 là $C_8^6 - 1$ (trừ 1 cách chọn được 6 học sinh cùng khối 10).

Số cách chọn được 6 học sinh thuộc khối 11 và khối 10 là $C_{13}^6 - 8$ (trừ 7 cách chọn được 6 học sinh cùng khối 11 và 1 cách chọn được 6 học sinh cùng khối 10).

Khi đó số phần tử của $\bar{A}$ là:

$$n(\bar{A}) = 8 + (C_9^6 - 7) + (C_8^6 - 1) + (C_{13}^6 - 8) = 1820.$$

$$\text{Do đó } P(\bar{A}) = \frac{1820}{5005} = \frac{364}{1001}.$$

Vậy xác suất cần tìm là:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{364}{1001} = \frac{637}{1001} = \frac{7}{11}.$$

Nhận xét. Các bạn: Nguyễn Hữu Đức Nam, 10A1, THPT Cẩm Xuyên, Hà Tĩnh và bạn Nguyễn Hùng Cường, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, Bình Định đã phát hiện đúng sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Xin hoan nghênh hai bạn.

KIHI VI

SAO LẠI THẾ NHỈ ?



Trong đề kiểm tra có bài toán:

Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x} = 2\sqrt{x^2} \quad (1).$$

Bạn Hưng giải như sau:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x = 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Nếu $x = 0$ thì (1) luôn đúng.

Nếu $x \geq 2$ thì

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x(x-2)} = 2\sqrt{x.x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 + 2\sqrt{(x+1)(x-2)} = 4x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - x - 2} = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - x - 2) = (2x + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-9}{8} \quad (\text{loại}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$.

Sau khi thầy giáo thu bài, bạn Hà nói với Hưng:

$x = \frac{-9}{8}$ cũng là nghiệm của phương trình. Hưng

thay $x = \frac{-9}{8}$ vào phương trình (1) thấy thỏa

mãn. Hưng bần khoăn “Sao lại thế nhỉ?”.

Theo bạn sao lại thế nhỉ ?

NGUYỄN THANH GIANG

(GV THPT chuyên Hưng Yên)



Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 554 (8.2023)

Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội

ĐT Biên tập: 024.35121607,

ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701

Email: loanhocuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam

HOÀNG LÊ BÁCH

Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam

PHẠM VĂN THÁI

Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD

PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

Phó tổng biên tập : CN. TRẦN THỊ KIM CƯƠNG

TS. LÊ HỒNG MAI

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. TẠ DUY PHƯƠNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 Dành cho Trung học Cơ sở

For Lower Secondary School

Trần Văn Hạnh – Một số bài toán tìm số nguyên tố.

8 Hướng dẫn giải đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Bắc Ninh, năm học 2022 - 2023.

11 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội, năm học 2023 - 2024.

13 Diễn đàn dạy học toán

Trần Như Ngọc, Mai Hoàn Hảo – Một số biện pháp rèn luyện tư duy cho học sinh khi giải bài tập hệ phương trình.

20 Đề ra kỳ này

T1/554, ..., T12/554, L1/554, L2/554

21 Problems in This Issue

22 Giải bài kì trước

T1/550, ..., T12/550, L1/550, L2/550.

Solutions to Previous Problems

31 Phương pháp giải toán

Phan Đại Pháp – Đại số trong hình học.

41 Bạn đọc tìm tòi

Nguyễn Minh Hà – Hai kết quả đẹp về tỷ số kép.

43 Tiếng Anh qua các bài toán – Bài số 95 – Bài dịch số 93.

44 Nhiều cách giải cho một bài toán – Giải bài toán 74 – Đề bài toán 76.

46 Du lịch thế giới qua các bài toán hay – Giải bài toán 83. Đề bài toán 85.

47 Sai lầm ở đâu?

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG

Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯƠNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN

Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG

Thiết kế, chế bản: MINH HÒA



TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Quyển sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ hai) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42.000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lý lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell*, *Pythagore*, *Fermat*, *Diophante*, ...

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài

toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ để giải quyết hơn, cách "đưa khó về dễ, đưa lạ về quen", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ... tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND Vũ Hữu Bình sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

T

BẠN ĐỌC CÓ THỂ MUA SẢN PHẨM TRÊN TẠI:
TÒA SOẠN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

ĐỊA CHỈ: 187B, GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

ĐIỆN THOẠI PHÁT HÀNH: 024.35142649 - 024.35682701

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM TRIỂN KHAI CHƯƠNG TRÌNH TẶNG SÁCH CÙNG TIẾP BƯỚC EM TỚI TRƯỜNG

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đang triển khai đồng bộ Chương trình tặng sách *Cùng tiếp bước em tới trường* năm 2023 tại 63 tỉnh/thành phố trên cả nước.

Thực hiện chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo về việc đảm bảo đủ sách giáo khoa (SGK) phục vụ năm học 2023-2024 cho học sinh cả nước, với mục tiêu góp phần hỗ trợ cho các em học sinh có hoàn cảnh khó khăn có đủ SGK theo Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 khi bước vào năm học mới, NXBGDVN tiếp tục triển khai chương trình *Cùng tiếp bước em tới trường* năm 2023.

Trong các năm 2021 và 2022, NXBGDVN đã thực hiện chương trình này với tổng số sách trao tặng mỗi năm là 50.000 bộ cho học sinh có hoàn cảnh khó khăn tại 63 tỉnh/thành phố trên cả nước.

Năm 2023, NXBGDVN tiếp tục trao tặng SGK các lớp 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11 với tổng số trên 100.000 bộ. Tính đến ngày 26/7/2023, chương trình Cùng tiếp bước em tới trường đã đến với học sinh các tỉnh Cần Thơ, Đồng Tháp, Bình Phước, Lai Châu, Quảng Ngãi và Đà Nẵng với tổng số sách tặng là 11.675 bộ, trị giá trên 2,8 tỉ đồng. Chương trình sẽ được NXBGDVN triển khai đồng bộ tại các tỉnh, thành trên toàn quốc, hoàn thành trước ngày 15/8 với mục tiêu giúp các em học sinh nghèo, học sinh có hoàn cảnh khó khăn có đủ sách trước ngày khai giảng năm học mới.

Ngoài chương trình tặng sách cho các em học sinh có hoàn cảnh khó khăn, NXBGDVN triển khai chương trình tặng Tủ sách giáo khoa dùng chung cho các trường/điểm trường tiểu học tại các vùng khó khăn, vùng sâu, vùng xa, biên giới, hải đảo... trên toàn quốc với tổng số tủ sách dự kiến trao tặng là 1.000 tủ.

Trong nhiều năm qua, với tâm nguyện đẹp đẽ, mong muốn được chia sẻ, hỗ trợ, giúp đỡ những hoàn cảnh khó khăn, NXBGDVN đã thực hiện nhiều chương trình xã hội như: Chăm sóc các bà mẹ Việt Nam anh hùng; xây dựng hàng trăm căn nhà tình nghĩa; tặng SGK cho con thương binh, liệt sĩ; tặng sách và học bổng cho học sinh có hoàn cảnh khó khăn... trong cả nước.

Một số hình ảnh trao biển tặng sách tại các địa phương:



Ông Ông Thừa Phú - Giám đốc NXBGD tại Đà Nẵng (bên trái) trao biển tặng SGK cho đại diện Sở GD&ĐT TP. Đà Nẵng



Ông Nguyễn Thái An - Giám đốc NXBGD tại TP. Cần Thơ (thứ tư từ trái qua) trao biển tặng SGK cho đại diện Sở GD&ĐT TP. Cần Thơ



Ông Trần Văn Hưng - Phó Giám đốc NXBGD tại TP. Hồ Chí Minh (bên trái) trao biển tặng SGK cho bà Ngô Thuý Anh - Trưởng phòng Phòng Giáo dục Mầm non - Tiểu học, Sở GD&ĐT tỉnh Đồng Tháp