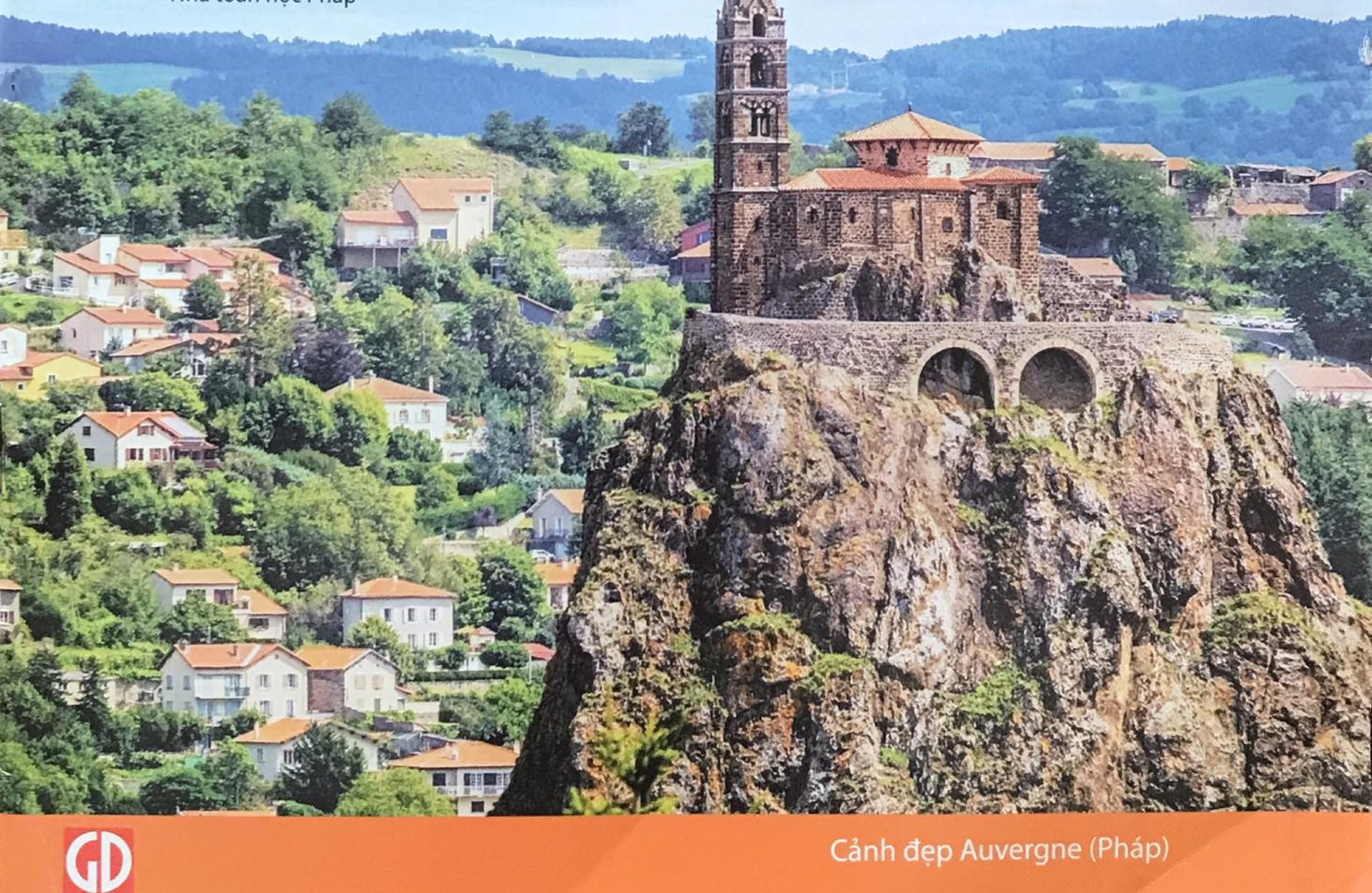
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 555
Tháng 9 - 2023
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 60 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

Michel Rolle
(1652-1719)
Nhà toán học Pháp



Cảnh đẹp Auvergne (Pháp)

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

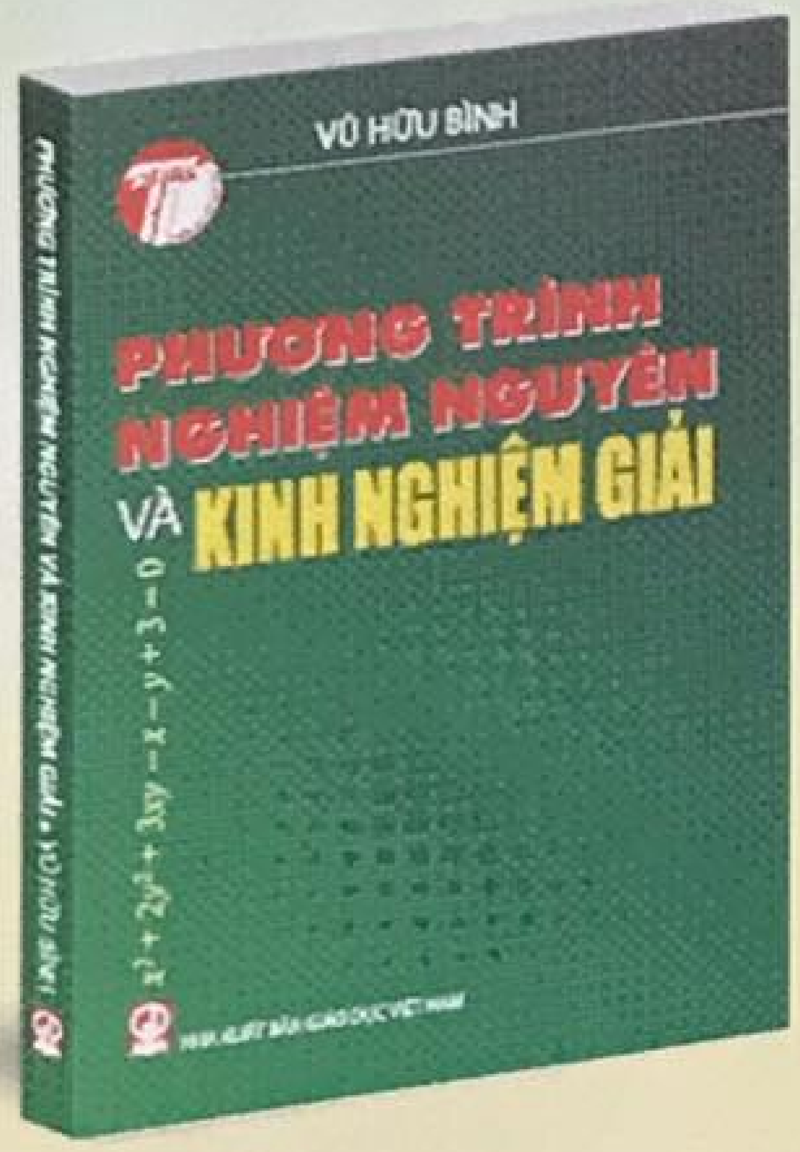
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ hai) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42.000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lí lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell*, *Pythagore*, *Fermat*, *Diophante*, …

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ dễ giải quyết hơn, cách "*đưa khó về dễ, đưa lạ về quen*", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra …tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

BẠN ĐỌC CÓ THỂ MUA ẤN PHẨM TRÊN TẠI:

TÒA SOẠN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

ĐỊA CHỈ: 187B, GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

ĐIỆN THOẠI PHÁT HÀNH: 024.35142649 - 024.35682701

MỐI LIÊN HỆ GIỮA HỆ SỐ VÀ NGHIỆM CHUNG CỦA CÁC PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

BÙI MINH TRUNG
(GV THCS Mỹ Long Nam, Cầu Ngang, Trà Vinh)

Nhắc đến phương trình bậc hai một ẩn cấp THCS chúng ta nghĩ ngay đến công thức nghiệm, hệ thức Viète nhưng có một dạng toán hay và lạ là mối liên hệ giữa hệ số và nghiệm chung của hai hay nhiều phương trình bậc hai một ẩn. Sau đây tác giả xin giới thiệu dạng toán này giúp các bạn học sinh và giáo viên có thêm tài liệu tham khảo chuẩn bị cho kỳ thi tuyển sinh lớp 10 sắp tới.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng trong các phương trình (ẩn x) sau có ít nhất một phương trình có nghiệm:* $x^2+2ax+bc=0$ (1);

$$x^2+2bx+ca=0 \quad (2);$$

$$x^2+2cx+ab=0 \quad (3).$$

Hướng dẫn. Ta có:

$$\Delta_1'=a^2-bc;\ \Delta_2'=b^2-ca;\ \Delta_3'=c^2-ab.$$

Khi đó:

$$\Delta_1'+\Delta_2'+\Delta_3'=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\geq 0.$$

Vậy trong ba số $\Delta_1'; \Delta_2'; \Delta_3'$ có ít nhất một số không âm hay trong ba phương trình trên có ít nhất một phương trình có nghiệm.

Thí dụ 2. *Chứng minh rằng nếu $a+b\geq 2$ thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm:*

$$x^2+2ax+b=0 \ (1),\ x^2+2bx+a=0 \ (2).$$

Hướng dẫn. Ta có: $\Delta_1'=a^2-b;\ \Delta_2'=b^2-a.$

Mà $a+b\geq 2 \Rightarrow 2-a-b\leq 0.$

Khi đó:

$$\begin{aligned}\Delta_1'+\Delta_2'&=a^2-b+b^2-a\\&\geq a^2-b+b^2-a+2-a-b\\&=(a-1)^2+(b-1)^2\geq 0.\end{aligned}$$

Vậy trong hai số Δ_1' và Δ_2' có ít nhất một số không âm hay trong hai phương trình trên có ít nhất một phương trình có nghiệm.

Thí dụ 3. *Cho a,b,c là các số thực dương phân biệt thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng trong ba phương trình:* $x^2-2ax+b=0$ (1);

$$x^2-2bx+c=0 \ (2);\ x^2-2cx+a=0 \ (3)$$

có ít nhất một phương trình có hai nghiệm phân biệt và ít nhất một phương trình vô nghiệm.

Hướng dẫn. Ta có:

$$\Delta_1'=a^2-b; \Delta_2'=b^2-c; \Delta_3'=c^2-a.$$

Do bài toán không thay đổi qua phép hoán vị vòng quanh *a*, *b*, *c* nên không mất tính tổng quát giả sử: $a=\max\{a, b, c\}$. Do *a*, *b*, *c* phân biệt nên có hai trường hợp:

TH1: $a>b>c$. Vì $a+b+c=3$ nên

$$a>1;\ 0<c<1;\ a^2>a;\ c^2<c.$$

Khi đó: $\Delta_1'=a^2-b>a-b>0,$ suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. $\Delta_3'=c^2-a<c-a<0,$ suy ra phương trình (3) vô nghiệm.

TH2: $a>c>b$. Tương tự như trường hợp 1 ta có $\Delta_1'>0, \Delta_2'<0.$ Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, phương trình (2) vô nghiệm.

Thí dụ 4. *Tìm a để hai phương trình sau đây có nghiệm chung:* $2x^2+(5-3a)x+5-a=0$ (1);

$$2x^2+3(2-a)x+7-2a=0 \quad (2).$$

Tìm nghiệm chung đó.

Hướng dẫn.

Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình, khi đó: $\begin{cases}2x_0^2+(5-3a)x_0+5-a=0 & (1')\\ 2x_0^2+3(2-a)x_0+7-2a=0 & (2')\end{cases}$.

Trừ (1') cho (2') theo vế ta được: $x_0=a-2$.

Thay $x_0=a-2$ vào (1') ta được:

$$2(a-2)^2+(5-3a)(a-2)+5-a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-1\\ a=3\end{array}\right..$$

Với $a=-1$, hai phương trình có nghiệm chung là $x=-3$.

Với $a=3$, hai phương trình có nghiệm chung là $x=1$.

Thí dụ 5. *Cho phương trình* $ax^2+bx+c=0$ (1) *có hai nghiệm dương* x_1,x_2. *Chứng minh rằng phương trình* $cx^2+bx+a=0$ (2) *cũng có hai nghiệm dương* x_3,x_4 *và ta có* $x_1+x_2+x_3+x_4\ge 4$.

Hướng dẫn.

Vì phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm dương nên: $\begin{cases}a\ne 0\\ \Delta_1=b^2-4ac\ge 0\\ P_1=\dfrac{c}{a}>0\\ S_1=-\dfrac{b}{a}>0\end{cases}$

Lúc đó phương trình $cx^2+bx+a=0$ có:

$$\begin{cases}c\ne 0\\ \Delta_2=b^2-4ac=\Delta_1\\ P_2=\dfrac{a}{c}\\ S_2=-\dfrac{b}{c}=-\dfrac{b}{a}.\dfrac{a}{c}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c\ne 0\\ \Delta_2\ge 0\\ P_2>0\\ S_2>0\end{cases}$$

nên phương trình (2) cũng có hai nghiệm dương x_3,x_4. Ta có:

$$x_1+x_2+x_3+x_4\ge 2\sqrt{x_1x_2}+2\sqrt{x_3x_4}$$
$$\ge 2\sqrt{2\sqrt{x_1x_2}.2\sqrt{x_3x_4}}$$
$$=4\sqrt{\sqrt{\frac{c}{a}}.\sqrt{\frac{a}{c}}}=4.$$

Vậy $x_1+x_2+x_3+x_4\ge 4$.

Thí dụ 6. *Cho ba số* a,b,c *phân biệt và* $c\ne 0$. *Biết rằng hai phương trình:* $x^2+ax+bc=0$ *và* $x^2+bx+ca=0$ *có một nghiệm chung duy nhất. Chứng minh hai nghiệm còn lại của hai phương trình là nghiệm của phương trình* $x^2+cx+ab=0$.

Hướng dẫn. Xét hai phương trình:

$$x^2+ax+bc=0 \quad (1)$$

và

$$x^2+bx+ca=0 \quad (2).$$

Gọi x_0 là nghiệm chung duy nhất của phương trình (1) và phương trình (2); x_1 là nghiệm còn lại của phương trình (1); x_2 là nghiệm còn lại của phương trình (2). Ta có:

$$x_0^2+ax_0+bc=0 \text{ và } x_0^2+bx_0+ca=0$$
$$\Rightarrow (a-b)x_0-c(a-b)=0 \Rightarrow x_0=c$$
(vì $a-b\ne 0$).

Dùng định lý Viète cho phương trình (1) và (2) ta có: $\begin{cases}x_0+x_1=-a\\ x_0.x_1=bc\end{cases}$ và $\begin{cases}x_0+x_2=-b\\ x_0.x_2=ca\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases}2x_0+x_1+x_2=-a-b & (3)\\ x_0^2.x_1.x_2=abc^2 & (4).\\ x_0(x_1+x_2)=c(a+b) & (5)\end{cases}$$

Từ (4) và (5) ta có:

$$\begin{cases}P=x_1x_2=ab & (6)\\ S=x_1+x_2=a+b & (7)\end{cases} \text{ (vì } x_0=c\ne 0\text{)}.$$

Thay (7) vào (3) ta được:

$$2x_0 + a + b = -a - b \Rightarrow a + b = -x_0 = -c$$

Suy ra $S = x_1 + x_2 = -c$ (8).

Từ (6) và (8) ta thấy x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0$. Tức là x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $x^2 + cx + ab = 0$.

Thí dụ 7. *Cho hai phương trình:*

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0) \ (1);$$

$$mx^2 + nx + p = 0 \ (m \neq 0) \ (2).$$

Chứng minh rằng nếu ít nhất một trong hai phương trình trên vô nghiệm thì phương trình sau luôn luôn có nghiệm:

$$(an - bm)x^2 + 2(ap - cm)x + bp - cn = 0 \quad (3).$$

(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2003 – 2004)

Hướng dẫn. Giả sử phương trình (1) vô nghiệm, suy ra $\Delta_1 = b^2 - 4ac < 0$.

Đặt $A = an - bm; B = ap - cm; C = bp - cn$.

Ta được:

$$cA - bB + aC = acn - bcm - abp + bcm + abp - can = 0 \quad (4).$$

Phương trình (3) trở thành $Ax^2 + 2Bx + C = 0$ (5).

• Nếu $A = 0$ thì từ (4) ta có:

$$aC - bB = 0 \Leftrightarrow C = \frac{b}{a}B.$$

Phương trình (5) trở thành:

$$2Bx + C = 0 \Leftrightarrow 2Bx + \frac{b}{a}B = 0 \quad (6).$$

+ Nếu $B = 0$ thì phương trình (6) có nghiệm $x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $B \neq 0$ thì phương trình (6) có nghiệm $x = -\frac{b}{2a}$.

Vì vậy phương trình (5) (do đó phương trình (3)) luôn luôn có nghiệm.

• Nếu $A \neq 0$ thì từ (5) ta có: $\Delta' = B^2 - AC$.

+ Nếu $AC \leq 0 \Rightarrow \Delta' \geq 0$, suy ra phương trình (5) (do đó phương trình (3)) luôn luôn có nghiệm.

+ Nếu $AC > 0$, ta có: $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow b^2 < 4ac \Rightarrow b^2AC < 4acAC$.

Từ (4) ta có: $bB = cA + aC$

$$\Rightarrow b^2B^2 = (cA + aC)^2 \geq 4acAC > b^2AC$$

$$\Rightarrow b^2(B^2 - AC) > 0 \Rightarrow \begin{cases} b^2 > 0 \\ B^2 - AC > 0 \end{cases}.$$

Như thế $\Delta' > 0$, suy ra phương trình (5) (do đó phương trình (3)) luôn luôn có nghiệm.

Thí dụ 8. *Cho các phương trình $x^2 + bx + c = 0$ (1) và $x^2 + b_1x + c_1 = 0$ (2) trong đó b, c, b_1, c_1 là những số nguyên sao cho $(b - b_1)^2 + (c - c_1)^2 > 0$. Chứng minh rằng nếu cả hai phương trình có một nghiệm chung thì hai nghiệm thứ hai của hai phương trình trên là hai số nguyên phân biệt.*

(Đề thi Vô địch Toán Tây Ban Nha, năm 1988)

Hướng dẫn.

Gọi x_0 là nghiệm chung và x_1, x_2 lần lượt là hai nghiệm còn lại của phương trình (1) và phương trình (2). Theo hệ thức Viète ta có:

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = -b \\ x_0x_1 = c \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_0 + x_2 = -b_1 \\ x_0x_2 = c_1 \end{cases}.$$

Nếu $x_1 = x_2 \Rightarrow \begin{cases} b = b_1 \\ c = c_1 \end{cases}$ (trái giả thiết $(b - b_1)^2 + (c - c_1)^2 > 0$) $\Rightarrow x_1 \neq x_2; b \neq b_1$.

Vì x_0 là nghiệm chung nên $x_0 = \frac{c_1 - c}{b - b_1}$.

Xét $f(x) = x^2 + bx + c$ có hệ số x^2 là 1, hệ số nguyên nên $x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -b - x_0 \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -b_1 - x_0 \in \mathbb{Z} \end{cases}$, do $b \neq b_1 \Rightarrow x_1 \neq x_2$. Do đó x_1, x_2 là hai số nguyên phân biệt.

Thí dụ 9. *Cho phương trình $x^2-97x+a=0$ có các nghiệm là lũy thừa bậc 4 của các nghiệm của phương trình $x^2-x+b=0$. Hãy tính a.*

Hướng dẫn.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-x+b=0$.

Theo giả thiết: x_1^4, x_2^4 là hai nghiệm của phương trình $x^2-97x+a=0$.

Điều kiện để hai phương trình có nghiệm là:

$$b\le\frac{1}{4};\ a\le\frac{9409}{4}.$$

Theo hệ thức Viète ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=b\end{cases}\text{ và }\begin{cases}x_1^4+x_2^4=97\\x_1^4.x_2^4=a\end{cases}.$$

Khi đó, $x_1^2+x_2^2=1-2b; x_1^4+x_2^4=(1-2b)^2-2b^2$;

Suy ra: $(1-2b)^2-2b^2=97\Leftrightarrow b^2-2b-48=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}b=-6 & \text{(nhận)}\\b=8 & \text{(loại)}\end{array}\right..$$

Với $b=-6\Rightarrow x_1x_2=-6\Rightarrow a=(x_1.x_2)^4=1296$.

Thí dụ 10. *Cho a,b,c là các số thực phân biệt sao cho các phương trình: $x^2+ax+1=0$ và $x^2+bx+c=0$ có nghiệm chung, đồng thời các phương trình $x^2+x+a=0$ và $x^2+cx+b=0$ cũng có nghiệm chung. Hãy tính tổng $a+b+c$.*

(Đề thi vào lớp 10 THPT Năng khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm 2001)

Hướng dẫn.

Gọi x_0 là nghiệm chung của các phương trình $x^2+ax+1=0$ và $x^2+bx+c=0$.

Khi đó: $\begin{cases}x_0^2+ax_0+1=0\\x_0^2+bx_0+c=0\end{cases}\Rightarrow x_0=\frac{c-1}{a-b}$ (do $a\ne b$)

Tương tự, gọi x_1 là nghiệm chung của các phương trình $x^2+x+a=0$ và $x^2+cx+b=0$, ta có:

$$\begin{cases}x_1^2+x_1+a=0\\x_1^2+cx_1+b=0\end{cases}\Rightarrow x_1=\frac{a-b}{c-1}.$$

Vậy $x_1=\frac{1}{x_0}\ne0$.

Thay $x_1=\frac{1}{x_0}$ vào phương trình $x^2+x+a=0$, ta được: $\left(\frac{1}{x_0}\right)^2+\frac{1}{x_0}+a=0\Leftrightarrow ax_0^2+x_0+1=0$ (1).

Ta lại có: $x_0^2+ax_0+1=0$ (2).

Lấy (1) trừ (2) ta được: $(a-1)(x_0^2-x_0)=0$

$$\Leftrightarrow(a-1)(x_0-1)=0\ \text{(vì } x_0\ne0).$$

Nếu $a=1$ thì phương trình $x^2+ax+1=0$ vô nghiệm (trái giả thiết). Vậy $a\ne1$, do đó: $x_0=1$.

Suy ra: $x_1=\frac{1}{x_0}=1$ và do x_1 là nghiệm của phương trình $x^2+x+a=0$ nên: $a=-x_1^2-x_1=-2$.

Ta lại có: $x_0^2+bx_0+c=0$. Suy ra: $b+c=-1$.

Do đó $a+b+c=-2+(-1)=-3$.

Thí dụ 11. *Cho bốn số a,b,c,d thỏa mãn $ab+2(b+c+d)=c(a+b)$. Chứng minh rằng trong ba phương trình sau đây có ít nhất một phương trình có nghiệm:*

$$x^2-ax+b=0\quad(1);$$
$$x^2-bx+c=0\quad(2);$$
$$x^2-cx+d=0\quad(3).$$

Hướng dẫn.

Ta có: $\Delta_1=a^2-4b; \Delta_2=b^2-4c; \Delta_3=c^2-4d$.

Giả sử cả ba phương trình trên đều vô nghiệm khi đó: $a^2+b^2+c^2<4(b+c+d)$. Suy ra:

$$ab+2(b+c+d)>ab+\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$
$$=\frac{(a+b)^2+c^2}{2}$$
$$\overset{Cauchy}{\geq} c(a+b),$$

trái với giả thiết $ab+2(b+c+d)=c(a+b)$. Vậy trong ba phương trình trên phải có ít nhất một phương trình có nghiệm.

Thí dụ 12. *Cho phương trình $x^2+ax+b=0$ có hai nghiệm c và d, phương trình $x^2+cx+d=0$ có hai nghiệm a và b. Tính a, b, c, d (biết rằng các số đó đều khác 0).*

Hướng dẫn. Áp dụng hệ thức Viète vào các phương trình đã cho ta được:

$$\begin{cases} c+d=-a & (1) \\ cd=b & (2) \end{cases} \text{ và } \begin{cases} a+b=-c & (3) \\ ab=d & (4) \end{cases}.$$

Từ (1) suy ra: $a+c=-d$. Từ (3) suy ra $a+c=-b$. Do đó $b=d$.

Từ (2), do $b=d\neq 0$, ta có $c=1$.

Từ (4) do $b=d\neq 0$, ta có $a=1$.

Thay $a=c=1$ vào (1), ta được $d=-2$, suy ra $b=-2$.

Thí dụ 13. *Giả sử bốn số thực a,b,c,d đôi một khác nhau và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:*

i) *Phương trình $x^2-2cx-5d=0$ có hai nghiệm là a và b.*

ii) *Phương trình $x^2-2ax-5b=0$ có hai nghiệm là c và d.*

Chứng minh rằng:

a) $a-c=c-b=d-a$;

b) $a+b+c+d=30$.

(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2010-2011)

Hướng dẫn.

a) Theo hệ thức Viète ta có:

$$\begin{cases} a+b=2c & (1) \\ ab=-5d & (2) \\ c+d=2a & (3) \\ cd=-5b & (4) \end{cases}.$$

Từ (1) và (3) suy ra: $a-c=c-b=d-a$.

b) Đặt $a-c=c-b=d-a=x$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=a-x \\ b=c-x \\ d=a+x \end{cases} \Rightarrow a+b+c+d=4a-2x.$$

Từ (2) suy ra:

$$a(a-2x)=-5(a+x)\Rightarrow a^2-2ax=-5a-5x \ (5).$$

Từ (4) suy ra: $(a-x)(a+x)=-5(a-2x)$

$$\Rightarrow a^2-x^2=-5a+10x \quad (6).$$

Từ (5) và (6) suy ra: $x^2-2ax=-15x$.

Theo giả thiết $a\neq c$ nên $x\neq 0$, suy ra:

$$x-2a=-15\Rightarrow x=2a-15$$
$$\Rightarrow a+b+c+d=30.$$

Thí dụ 14. *Cho các phương trình:*

$$x^2+ax+1=0 \ (1);\quad x^2+bx+1=0 \ (2);$$
$$x^2+cx+1=0 \ (3).$$

Biết rằng tích một nghiệm của phương trình (1) và một nghiệm của phương trình (2) là nghiệm của phương trình (3).

Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+abc=4$.

Hướng dẫn. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình (1), (2) sao cho tích x_1x_2 là nghiệm của phương trình (3). Khi đó:

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{1}{x_1}=-a & (4) \\ x_2+\dfrac{1}{x_2}=-b & (5) \\ x_1x_2+\dfrac{1}{x_1x_2}=-c & (6) \end{cases}.$$

Nhân (4) và (5) vế theo vế và kết hợp với (6) ta được: $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=ab+c.$

Từ (4) và (5) suy ra: $\begin{cases} x_1^2+\frac{1}{x_1^2}=a^2-2 \\ x_2^2+\frac{1}{x_2^2}=b^2-2 \end{cases}$

$$\Rightarrow (a^2-2)(b^2-2)=\left(x_1^2+\frac{1}{x_1^2}\right)\left(x_2^2+\frac{1}{x_2^2}\right)$$

$$=\left(x_1x_2+\frac{1}{x_1x_2}\right)^2+\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)^2-4$$

hay

$$(a^2-2)(b^2-2)=c^2+(ab+c)^2-4$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+abc=4.$$

Thí dụ 15. *Chứng minh rằng nếu phương trình $ax^2+bx+c=x$ $(a\neq 0)$ vô nghiệm thì phương trình $a\left(ax^2+bx+c\right)^2+b\left(ax^2+bx+c\right)+c=x$ cũng vô nghiệm.*

(Trích Sách Bài tập Toán 9 – tập 2)

Hướng dẫn. Đặt $f(x)=ax^2+bx+c$. Vì phương trình $ax^2+(b-1)x+c=0$ vô nghiệm nên $\Delta=(b-1)^2-4ac<0.$

Khi đó: $f(x)-x=ax^2+(b-1)x+c$

$$=a\left[x^2+2\frac{b-1}{2a}x+\frac{(b-1)^2}{4a^2}+\frac{4ac-(b-1)^2}{4a^2}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b-1}{2a}\right)^2+\frac{4ac-(b-1)^2}{4a^2}\right]$$

Ta thấy $f(x)-x$ luôn cùng dấu với a vì biểu thức trong móc vuông luôn dương (do $4ac-(b-1)^2>0$).

+ Nếu $a>0$ thì $f(x)-x>0$ hay $f(x)>x$ với mọi giá trị của x.

Từ đó suy ra $a[f(x)]^2+bf(x)+c>f(x)>x$ với mọi giá trị của x.

Vậy không thể có giá trị nào của x để

$$a[f(x)]^2+bf(x)+c=x$$

+ Lập luận tương tự cho trường hợp $a<0$.

Thí dụ 16. *Chứng minh rằng hai phương trình bậc hai*

$$ax^2+bx+c=0 \text{ và } cx^2+bx+a=0 \quad (a\neq \pm c)$$

có một nghiệm chung duy nhất khi và chỉ khi $|b|=|a+c|$.

Hướng dẫn. *• Nếu hai phương trình bậc hai*

$$ax^2+bx+c=0 \text{ (1) và } cx^2+bx+a=0 \text{ (2)}$$

có một nghiệm chung duy nhất thì $|b|=|a+c|$.

Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình, ta có: $ax_0^2+bx_0+c=cx_0^2+bx_0+a$

$$\Leftrightarrow x_0^2=\frac{a-c}{a-c}=1 \Rightarrow x_0=\pm 1.$$

+ Nếu $x_0=1$, ta có $a+b+c=0\Rightarrow b=-(a+c).$

+ Nếu $x_0=-1$, ta có $a-b+c=0\Rightarrow b=a+c.$

Do đó: $|b|=|a+c|$.

• Nếu $|b|=|a+c|$ thì hai phương trình bậc hai

$$ax^2+bx+c=0 \text{ (1) và } cx^2+bx+a=0 \text{ (2)}$$

có một nghiệm chung duy nhất.

Thật vậy, nếu $b=-(a+c)$ thì phương trình (1) và (2) có dạng:

$ax^2-(a+c)x+c=0$ có nghiệm $x_1=1; x_2'=\frac{c}{a}.$

$cx^2-(a+c)x+a=0$ có nghiệm $x_1=1; x_2=\frac{a}{c}.$

Vậy hai phương trình có một nghiệm chung duy nhất là $x=1$ ($x_2\neq x_2'$ vì $a\neq\pm c$).

Lập luận tương tự cho trường hợp $b=a+c$.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN, ĐHSP HÀ NỘI NĂM HỌC 2023-2024

VÒNG 1

Bài 1. a) *Rút gọn biểu thức:*

$$A=\frac{x^2+8\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4}+\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{16-4x}{\sqrt{x}+2},\ \text{với } x>0.$$

b) *Một khay nước có nhiệt độ 125°F khi bắt đầu cho vào tủ đá. Ở trong tủ đá, cứ sau mỗi giờ, nhiệt độ của khay nước lại giảm đi 20%. Hỏi sau bao nhiêu giờ, nhiệt độ của khay nước chỉ còn là 64°F ?*

Lời giải. a) Điều kiện: $x>0$.

$$A=\frac{x^2+8\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4}+\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{16-4x}{\sqrt{x}+2}$$

$$=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3}+8)}{\sqrt{x}^2-2\sqrt{x}+4}+\frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}+\frac{4(2-\sqrt{x})\cdot(2+\sqrt{x})}{\sqrt{x}+2}$$

$$=\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)+2\sqrt{x}+1+8-4\sqrt{x}=x+9.$$

b) ***Cách 1.*** Sau một giờ, nhiệt độ của khay nước là: $125-20\%.125=80\%.125=100\ (°F)$.

Sau hai giờ, nhiệt độ của khay nước là:

$$100-20\%.100=80\%.100=80\ (°F).$$

Sau ba giờ, nhiệt độ của khay nước là:

$$80-20\%.80=80\%.80=64\ (°F).$$

Dễ thấy sau x giờ, với $x>3$ thì nhiệt độ của khay nước là nhỏ hơn 64 (°F) (không thỏa mãn). Vậy sau 3 giờ, nhiệt độ nước trong khay chi còn là 64 (°F)..

Cách 2. Gọi t ($t>0$, đơn vị: giờ) là thời gian để sau t giờ đó nhiệt độ nước trong khay chỉ còn 64^0F. Giả sử x (^{0}F) là nhiệt độ của khay nước khi bắt đầu cho vào tủ đá. Ở trong tủ đá, cứ sau mỗi giờ, nhiệt độ của khay nước giảm đi 20%, do đó sau 1 giờ nhiệt độ của khay nước là:

$$x-20\%x=80\%x.$$

Sau 2 giờ nhiệt độ của khay nước là:

$$80\%x-20\%.80\%x=80\%x(1-20\%)=(80\%)^2x.$$

Sau t giờ nhiệt độ của khay nước là: $(80\%)^t x$.

Với $x=125^0$F và sau t giờ nhiệt độ khay nước là 64^0F, ta có:

$$(80\%)^t.125=64 \text{ hay } \left(\frac{4}{5}\right)^t=\left(\frac{4}{5}\right)^3,\ \text{do đó } t=3.$$

Vậy sau 3 giờ, nhiệt độ nước trong khay chỉ còn 64^0F.

Bài 2. a) *Cho phương trình (m là tham số):*

$$x^2-(2m-1)x-(m^2+1)=0\ \ (1).$$

Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 sao cho hệ thức đó không phụ thuộc vào m.

b) *Cho parabol (P): $y=ax^2\ (a\neq 0)$ đi qua điểm $A\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. Tìm tọa độ của điểm M trên parabol (P) sao cho khoảng cách từ điểm M đến trục tung gấp hai lần khoảng cách từ điểm M đến trục hoành.*

Lời giải. a) Ta có $\Delta=(2m-1)^2+4m^2+4>0$ với mọi m. Vậy phương trình $x^2-(2m-1)x-(m^2+1)=0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 với mọi m. Theo định lí Viète, ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2=2m-1\\x_1,x_2=-m^2-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{x_1+x_2+1}{2}\\x_1,x_2=-m^2-1\end{cases}.$$

Thay $m = \dfrac{x_1 + x_2 + 1}{2}$ vào $x_1x_2 = -\left(m^2 + 1\right)$, ta có:

$$x_1x_2 = -\frac{\left(x_1 + x_2 + 1\right)^2}{4} - 1.$$

Vậy hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 sao cho hệ thức đó không phụ thuộc vào m là:

$$x_1x_2 + \frac{\left(x_1 + x_2 + 1\right)^2}{4} + 1 = 0.$$

b) Parabol $(P): y = ax^2 (a \neq 0)$ đi qua $A\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$ nên $a = \dfrac{1}{2}$, do đó PT $(P): y = \dfrac{1}{2}x^2$.

Gọi hoành độ và tung độ của M tương ứng là: x_M, y_M. Ta có: $y_M = \dfrac{1}{2}x_M^2$ và $|x_M| = 2|y_M|$, do đó $2y_M = 4y_M^2$ (*).

Từ (*) ta có: $y_M = 0, y_M = \dfrac{1}{2}$.

+) $y_M = 0 : x_M = 0$.

+) $y_M = \dfrac{1}{2} : x_M^2 = 1 \Leftrightarrow x_M = -1$ hoặc $x_M = 1$.

Đáp số: $M_1(0;0), M_2\left(-1; \dfrac{1}{2}\right), M_3\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 3. *Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{ABC} = 120°$ và $BC = 2AB$. Dựng đường tròn (O) có đường kính AC. Gọi E, F lần lượt là các giao điểm thứ hai của AB, AD với đường tròn (O). Đường thẳng EF lần lượt cắt các đường thẳng BC, BD tại H, S. Chứng minh*

a) Tam giác ABD là tam giác vuông.

b) Tứ giác OBEH là tứ giác nội tiếp.

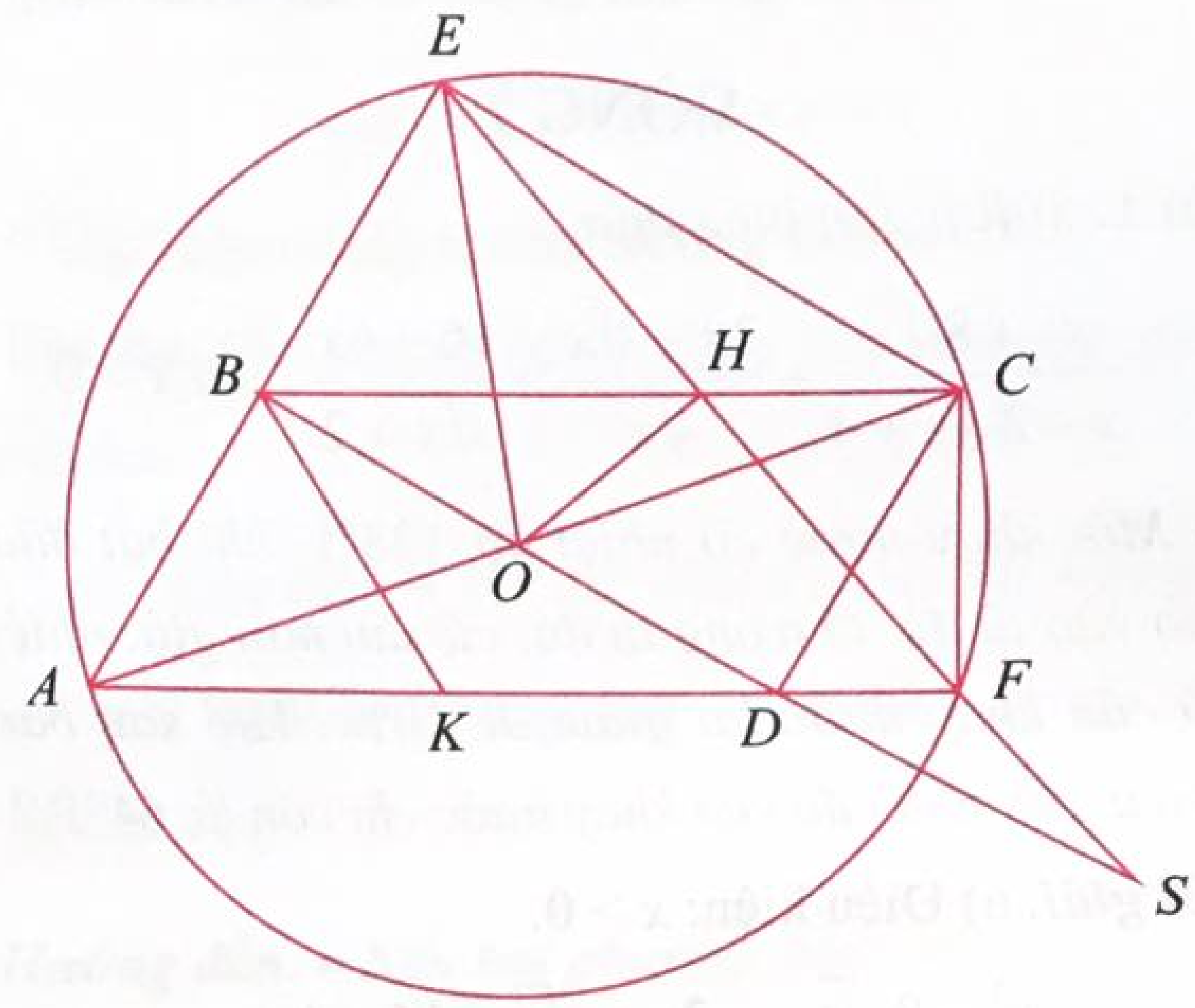
c) SC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải.

a) Gọi K là trung điểm của đoạn AD. Ta có ΔABK đều, suy ra $\widehat{ABK} = 60°$ (1).

Tam giác KBD cân tại K và $\widehat{BKD} = 120°$, suy ra $\widehat{KBD} = 30°$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ABD} = 90°$.

Vậy tam giác ABD là tam giác vuông tại B.



b) Có $OB \perp AE$ và $OA = OE$, suy ra B là trung điểm của AE.

Xét tam giác EAF có B là trung điểm của AE và $BH // AF$ nên H là trung điểm của EF.

Suy ra $OH \perp EF$.

Tứ giác $OBEH$ có $\widehat{OBE} = \widehat{OHE} = 90°$ nên tứ giác $OBEH$ là tứ giác nội tiếp.

c) Ta có: $\widehat{CHS} = \widehat{BHE}$. Do tứ giác $BEHO$ nội tiếp nên $\widehat{CHS} = \widehat{BHE} = \widehat{BOE} = \widehat{BOA} = \widehat{COS}$ nên tứ giác $CHOS$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{SCO} = \widehat{SHO} = 90°$. Vậy SC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 4. *Có hay không các số nguyên a, b sao cho* $(a + b\sqrt{2023})^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}$?

Lời giải. Giả sử tồn tại các số nguyên a, b sao cho

$$(a + b\sqrt{2023})^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}.$$

Ta có:

$$(a + b\sqrt{2023})^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2023b^2 - 2024 = (2023 - 2ab)\sqrt{2023}.$$

Nếu $2023 - 2ab \neq 0$ thì

$$\frac{a^2+2023b^2-2024}{2023-2ab}=\sqrt{2023} \qquad (*)$$

(loại vì vế trái (*) là số hữu tỉ và $\sqrt{2023}$ là số vô tỉ). Do đó $2023-2ab=0 \Leftrightarrow 2023=2ab$, lại suy ra vô lí vì 2023 là số lẻ, $2ab$ là số chẵn.

Vậy không có các số nguyên a, b nào thỏa mãn

$$(a+b\sqrt{2023})^2=2024+2023\sqrt{2023}.$$

Bài 5. *Trên bảng ta viết đa thức*

$$P(x)=ax^2+bx+c \ (a\neq 0).$$

Ta viết lên bảng đa thức mới

$$P_1(x)=\frac{P(x+1)+P(x-1)}{2}$$

rồi xóa đi đa thức $P(x)$.

Ta viết lên bảng đa thức mới

$$P_2(x)=\frac{P_1(x+1)+P_1(x-1)}{2}$$

rồi xóa đi đa thức $P_1(x)$. Ta cứ tiếp tục làm như thế nhiều lần.

Chứng minh rằng nếu cứ làm như vậy nhiều lần thì đến một lúc nào đó ta nhận được một đa thức không có nghiệm.

Lời giải. Ta tính được:

$$P_1(x)=ax^2+bx+c+a.$$

$$P_2(x)=ax^2+bx+c+2a.$$

....

$$P_n(x)=ax^2+bx+c+na, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Xét phương trình $ax^2+bx+c+na=0$, ta có:

$$\Delta=b^2-4a(c+na).$$

Chọn n nguyên dương và $n>\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, khi đó $\Delta<0$, do đó PT $ax^2+bx+c+na=0$ vô nghiệm.

Vậy nếu cứ làm như vậy nhiều lần thì đến một lúc nào đó ta nhận được một đa thức không có nghiệm.

VÒNG 2

Bài 1. a) *Chứng minh rằng tích của bốn số nguyên liên tiếp cộng với 1 là bình phương của một số nguyên.*

b) *Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình:* $\begin{cases}2xy-x=10\\ x+y+xy=11\end{cases}.$

Lời giải. a) Gọi 4 số nguyên liên tiếp là $a, a+1, a+2, a+3$. Ta có:

$$P=a(a+1)(a+2)(a+3)+1$$
$$=\left(a^2+3a\right)\left(a^2+3a+2\right)+1.$$

Đặt $t=a^2+3a+1\ (t\in\mathbb{Z})$. Suy ra:

$$P=\left(a^2+3a\right)\left(a^2+3a+2\right)+1$$
$$=(t-1)(t+1)+1=t^2.$$

Vậy P là bình phương của một số nguyên.

b) Từ hệ phương trình ta suy ra:

$$(2xy-x)-(x+y+xy)=10-11$$
$$\Leftrightarrow xy-2x-y=-1 \Leftrightarrow (x-1)(y-2)=1 \ (*).$$

Do x, y là số nguyên nên

$$(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=1\\ y-2=1\end{cases}\\ \begin{cases}x-1=-1\\ y-2=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}\end{array}\right..$$

Thay cặp số $(x;y)=(2;3)$ vào hệ ban đầu, ta thấy cặp số $(x;y)=(2;3)$ là nghiệm của hệ đã cho.

Thay cặp số $(x;y)=(0;1)$ vào hệ ban đầu, ta thấy cặp số $(x;y)=(0;1)$ không là nghiệm của hệ đã cho.

Vậy hệ PT đã cho có nghiệm nguyên duy nhất là $(x;y)=(2;3)$.

Bài 2. a) *Cho a, b là các số thực không âm, c là số thực dương thỏa mãn đẳng thức:*

$$\sqrt{a}-\sqrt{a+b-c}=\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Chứng minh rằng $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{a+b-c}.$

b) *Tìm các số nguyên dương a và b sao cho*

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}$$

là số hữu tỉ.

Lời giải. a) Giả sử $a \neq c$. Suy ra:

$$\sqrt{a+b-c}-\sqrt{b} \neq 0.$$

Ta thấy: $\sqrt{a}-\sqrt{a+b-c}=\sqrt{b}+\sqrt{c}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a+b-c}+\sqrt{c} \ (*).$$

Suy ra $a > b$, ta có:

$$(*) \Leftrightarrow -2\sqrt{ab}=2\sqrt{c(a+b-c)}.$$

Từ đó, do $c > 0$ nên $ab = 0$ và $a + b = c$.

Nếu $a = 0$ thì $b = c$; nếu $b = 0$ thì $a = c$. Cả hai trường hợp ta đều dễ dàng nhận được

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{a+b-c}.$$

b) Đặt $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}=r \in \mathbb{Q}$. Suy ra $r > 0$ và

$$r(\sqrt{5}+\sqrt{b})=\sqrt{3}+\sqrt{a}$$
$$\Leftrightarrow r\sqrt{5}-\sqrt{3}=\sqrt{a}-r\sqrt{b}.$$

Bình phương hai vế ta có:

$$5r^2-2r\sqrt{15}+3=a-2r\sqrt{ab}+br^2$$
$$\Leftrightarrow 2r(\sqrt{ab}-\sqrt{15})=a-3+(b-5)r^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{ab}-\sqrt{15}=\frac{a-3+(b-5)r^2}{2r}.$$

Đặt $\frac{a-3+(b-5)r^2}{2r}=s \in \mathbb{Q}$. Ta có:

$$\sqrt{ab}-\sqrt{15}=s \Leftrightarrow \sqrt{ab}=s+\sqrt{15}.$$

Bình phương hai vế ta có:

$$ab=s^2+15+2s\sqrt{15} \Leftrightarrow ab-s^2-15=2s\sqrt{15}.$$

Vì $\sqrt{15} \notin \mathbb{Q}$ và $ab-s^2-15 \in \mathbb{Q}$ nên $s = 0$ và $ab-s^2-15=0$, tức là $s = 0$ và $ab = 15$.

Suy ra $(a;b) \in \{(1;15);(15;1);(3;5);(5;3)\}$.

- Xét $(a;b)=(1;15)$:

Ta có:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}+\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{1}{5}} \notin \mathbb{Q} \text{ Loại.}$$

- Xét $(a;b)=(15;1)$:

Ta có: $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\sqrt{5}+1}=\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ Loại.

- Xét $(a;b)=(3;5)$:

Ta có: $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3}{5}} \notin \mathbb{Q}$ Loại.

- Xét $(a;b)=(5;3)$:

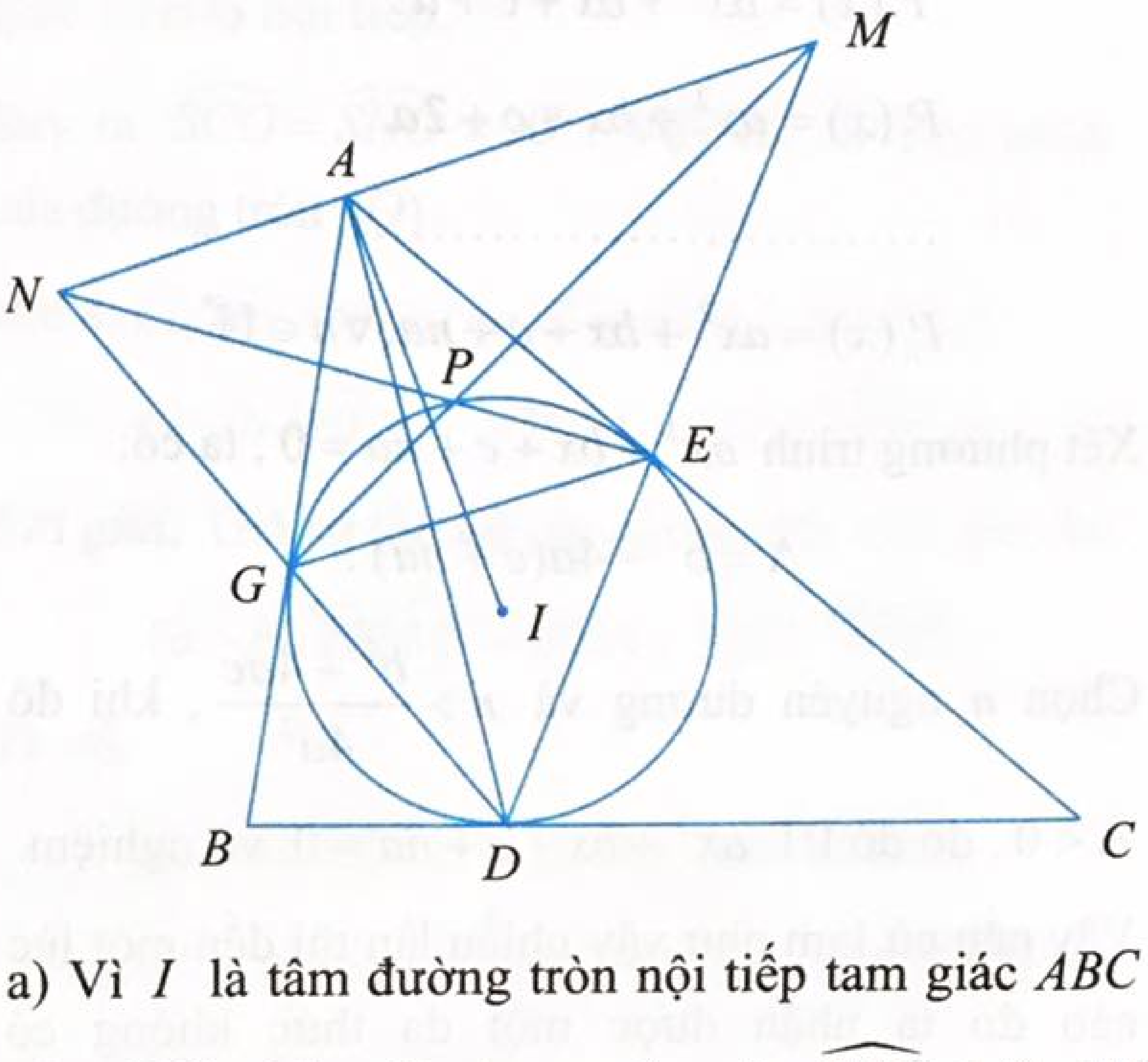
Ta có: $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=1 \in \mathbb{Q}$ Thỏa mãn.

Bài 3. *Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC lần lượt tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại các điểm D, E, G. Hai đường thẳng DE, DG lần lượt cắt đường phân giác ngoài của góc BAC tại M, N. Hai đường thẳng MG, NE cắt nhau tại điểm P. Chứng minh:*

a) EG song song với MN.

b) Điểm P thuộc đường tròn (I).

Lời giải.



a) Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên AI là phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$. Mà AM là phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$ nên $MN \perp AI$.

Do AE, AG là hai tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $EG \perp AI$. Vậy $EG // MN$.

b) Ta có: $\widehat{GDE} = \widehat{GEA}$ (góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến với dây cung cùng chắn một cung).

Mà $\widehat{GEA} = \widehat{EAM}$ (so le trong), suy ra $\widehat{GDE} = \widehat{EAM}$. Do đó tứ giác $AEDN$ là nội tiếp. Vì thế $\widehat{NED} = \widehat{NAD}$.

Chứng minh tương tự ta có tứ giác $AGDM$ là nội tiếp. Suy ra $\widehat{MAD} = \widehat{MGD}$.

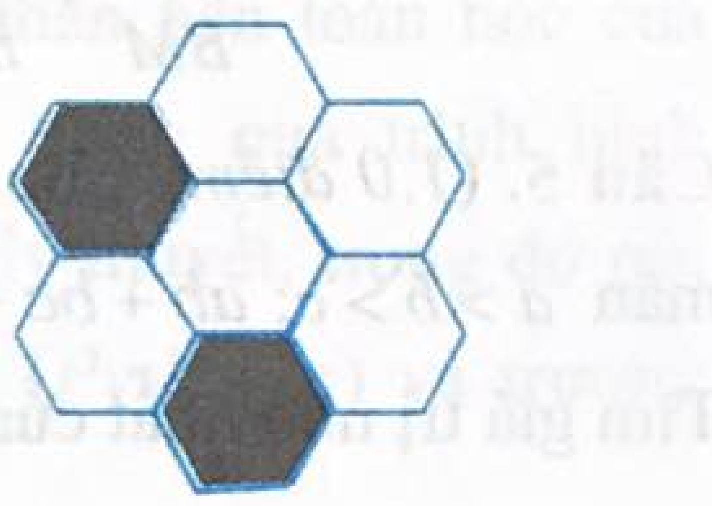
Ta có: $\widehat{DEP} + \widehat{DGP} = \widehat{DEN} + \widehat{MGD}$

$$= \widehat{NAD} + \widehat{MAD} = 180^\circ.$$

Suy ra tứ giác $DEPG$ là nội tiếp. Vậy điểm P nằm trên đường tròn (I).

Bài 4. *Bảy lục giác đều được sắp xếp và tô màu bằng hai màu trắng, đen như ở Hình 1.*

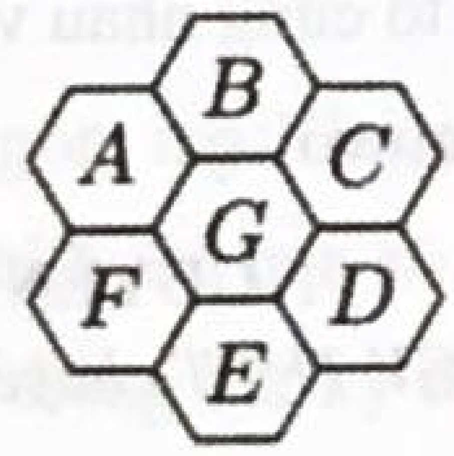
Hình 1



Hình 2

Mỗi lần cho phép chọn ra một lục giác đều, đổi màu của lục giác đó và của tất cả các lục giác đều có chung cạnh với lục giác đó (trắng thành đen hoặc đen thành trắng). Chứng minh rằng dù có thực hiện cách làm trên bao nhiêu lần đi nữa, cũng không thể nhận được các lục giác đều được tô màu như ở Hình 2.

Lời giải. Nếu lục giác đều được tô màu trắng ta đánh số +1, nếu tô màu đen ta đánh số -1.

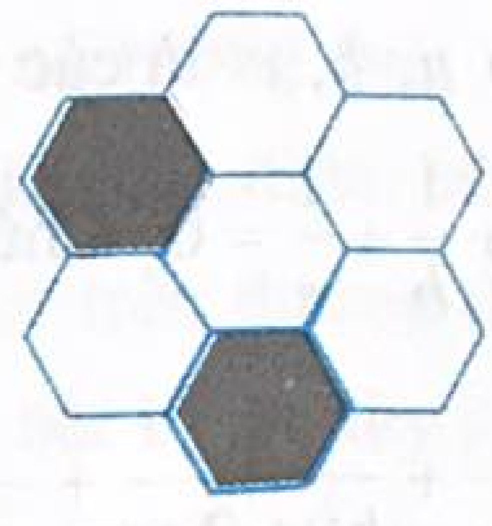


Ở mỗi trạng thái, ta xét tích P các số trong các lục giác đều A, C, D, F.

Nhận xét: Mỗi lần thực hiện thuật toán chỉ có một số chẵn số trong tích P là bị đổi dấu. Vì thế, tích P không thay đổi qua mỗi lần thực hiện thuật toán.

Ở trạng thái ban đầu (Hình 1), ta có $P = 1$. Trong khi ở trạng thái Hình 2, ta có: $P = -1$. Vậy ta không bao giờ có thể nhận được trạng thái ở Hình 2.

Hình 1



Hình 2

Bài 5. *Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương $n > 10^{2023}$ sao cho tổng tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn n là một số nguyên tố cùng nhau với n*

Lời giải. Với mỗi số nguyên dương $n > 1$, ta kí hiệu $S(n)$ là tổng của tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn n. Chẳng hạn, $S(7) = 10, S(8) = 17, \ldots$

Thế thì:

$$S(n) < 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} < n(n-1) \ (*)$$

Xét p là số nguyên tố tùy ý lớn hơn 10^{2023}.

Gọi q là số nguyên tố nhỏ nhất sao cho $q > p$.

Suy ra $S(q) = S(p) + p$.

Giả sử $S(p)$ không nguyên tố cùng nhau với p và $S(q)$ không nguyên tố cùng nhau với q.

Suy ra $S(p) \vdots p; S(q) \vdots q$.

Đặt $S(p) = pk \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$.

Từ (*) ta suy ra $k < p - 1$. Mặt khác, ta có:

$$S(q) = S(p) + p = pk + p = p(k+1) \vdots q.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN, TỈNH HÀ TĨNH

NĂM HỌC 2023 - 2024

(Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(2,0 điểm)*

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn

$$4x^2+5y^2-4xy+2(2x+3y)+4\le 0.$$

b) Cho a, b, c là các số thực khác không thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}=0.$$

Câu 2. *(2,5 điểm)*

a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+2)(2-y)=8\\ \sqrt{11-4(x-y)}+x^2y^2+1=3xy\end{cases}.$$

b) Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+3x+11}-\sqrt{x+2}=2x-2.$$

Câu 3. *(1,5 điểm)*

a) Tìm tất cả các số thực x để $p=\frac{5}{x-\sqrt{x}+2}$ là số nguyên.

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 thì $A=n^{2024}+n^{2023}+n^4-n+1$ không phải là số nguyên tố.

Câu 4. *(2,5 điểm)* Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định, C là một điểm chạy trên đường tròn (O) không trùng với A và B. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và C cắt nhau tại điểm M. Đường thẳng MB cắt AC tại F và cắt đường tròn (O) tại E (E khác B).

a) Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AC. Chứng minh tam giác OEM đồng dạng với tam giác BHM.

b) Gọi K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB. Hai đường thẳng MB và CK cắt nhau tại I. Tính tỷ số $\frac{FI}{AB}$ khi tổng diện tích hai tam giác IAC và IBC lớn nhất.

c) Chứng minh rằng

$$\frac{1}{BM}+\frac{1}{BF}=\frac{2}{BE}.$$

Câu 5. *(1,0 điểm)* Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a>b>c$; $ab+bc+ca>0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-c}+\frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

Câu 6. *(0,5 điểm)* Cho x, y, z là các số chính phương. Chứng minh rằng $(x+1)(y+1)(z+1)$ luôn viết được dưới dạng tổng của hai số chính phương.

LÊ BÁ HOÀNG

(Phòng GD&ĐT TX. Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Giới thiệu

****

☞Do $(p, q)=1$ nên $k+1 \vdots q \Rightarrow k+1\ge q \Rightarrow k\ge q-1$

Nhưng ta lại có: $k<p-1<q-1$. Ta nhận được mâu thuẫn.

Vậy $S(p)$ nguyên tố cùng nhau với p hoặc $S(q)$ nguyên tố cùng nhau với q.

NGUYỄN THANH HỒNG

(GV THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội)

Giới thiệu

BA CUỘC KHỦNG HOẢNG CƠ BẢN TRONG CƠ SỞ VÀ CĂN CỨ CỦA TOÁN HỌC

NGUYỄN THỦY THANH
(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Trên suốt chiều dài lịch sử, Toán học đã có những giai đoạn chao đảo - rối loạn do có những mâu thuẫn không được hoặc chưa được giải quyết về căn cứ lôgic. Các nhà lịch sử toán học (LSTH) gọi những giai đoạn chao đảo đó là các cuộc khủng hoảng và theo họ toán học đã phải trải qua ba cuộc khủng hoảng chính.

I. Cuộc khủng hoảng thứ nhất

Cuộc khủng hoảng căn cứ toán học lần I đã xảy ra vào khoảng thế kỷ V trước Công Nguyên ở Hy Lạp Cổ đại khi bản thân nền toán học của quốc gia này còn đang trong quá trình hình thành như một khoa học lý thuyết, trong đó nổi tiếng nhất là *Pythagoras* (*Pythagor*) và trường phái của ông.

Pythagor
(khoảng 570-495 TCN)

Là một triết gia và là một nhà toán học, *Pythagor* quan tâm nhiều đến bản chất và khởi nguyên của thế giới mà theo ông thì: *"Các con số (tự nhiên và hữu tỷ) tạo nên toàn bộ vũ trụ"*.

Theo phái Pythagor, mọi thứ trên thế gian này đều là hiện thân của các con số. Trong hình học, theo họ hai đoạn thẳng bất kỳ đều *thông ước* với nhau, tức là có *phân ước chung*. Vì vậy tỷ số giữa hai đoạn thẳng bất kỳ đều biểu thị được bởi một số hữu tỷ và do đó nó tương ứng với một điểm gọi là *điểm hữu tỷ*. Do các điểm hữu tỷ *rất nhiều* và *trù mật khắp nơi* trên đường thẳng số (tức là trong một khoảng bất kỳ bé tùy ý đều có những điểm hữu tỷ) nên phái Pythagor lại *ngỡ rằng các điểm hữu tỷ choán hết toàn bộ trục số* và do vậy mọi đoạn thẳng đều thông ước với đoạn thẳng đơn vị.

Nhưng, có một môn sinh là *Hippasus* lại khám phá ra rằng: *Không phải mọi điểm của đường thẳng đều tương ứng với số hữu tỷ*. Điều đó cũng có nghĩa là *tồn tại đoạn thẳng vô ước với đơn vị đo*. Do đó trên đường thẳng số ngoài điểm hữu tỷ còn có những điểm không hữu tỷ. Chẳng hạn, một điểm cách gốc tọa độ một đoạn bằng đường chéo hình vuông với cạnh dài bằng đoạn tỷ lệ xích (tức là đoạn thẳng đơn vị) là một điểm như *Hippasus* đã nêu. Ngày nay ta biết đó là *điểm vô tỷ* $x=\sqrt{2}$.

Rõ ràng việc *phát hiện ra sự tồn tại đoạn thẳng vô ước là nguyên nhân đầu tiên* đưa đến cuộc khủng hoảng trong toán học và Triết học Hy Lạp cổ đại, nhất là nó đã giáng một đòn nặng nề lên triết học và toán học của phái Pythagor. Nó chứng tỏ rằng bản chất và khởi nguyên *của thế giới không phải chỉ có các số nguyên và số hữu tỷ* như họ tưởng tượng.

Đáng tiếc là phái Pythagor lại xem *Hippasus* là phản đồ vì theo họ *Hippasus* đã gieo vào vũ trụ phần tử đối nghịch với tín ngưỡng mà họ tôn thờ. Người ta đã xử tử *Hippasus* bằng cách ném xuống biển nhà toán học tài ba nhưng bạc mệnh này!

Theo *R.Courant* và *H.Robbins* thì *phát minh ra sự tồn tại đoạn thẳng vô ước là một trong những phát minh sáng chói nhất trong toán học ngay từ thời cổ đại.*

Vì vậy ta không ngạc nhiên khi *Platon* (426 - 348, TCN) nhà triết học vĩ đại nhất thời đó đã viết rằng: *khi chưa biết có những đoạn thẳng vô ước thì ông cũng giống như một con vật không có trí khôn* [(1)].

Nguyên nhân thứ hai góp phần làm xuất hiện cuộc khủng hoảng là sự lan truyền các *nghịch lý Zenon*[(2)] có hàm chứa một số quan điểm đối nghịch với một số quan điểm triết học và toán học của phái Pythagor.

Trên đây là nguyên nhân nảy sinh cuộc khủng hoảng. Tiếp theo ta sẽ nêu những thành tựu đã đưa toán học thoát khỏi cuộc khủng hoảng lần I.

1⁺. Việc phát minh ra các đoạn thẳng vô ước là nguyên nhân nhưng đồng thời cũng là thắng lợi rực rỡ của phương pháp toán học mới: *Phương pháp quy nạp và phương pháp suy diễn* (từ định lý này đến định lý khác). Các nhà toán học trước đó đều xuất phát từ những phép đo trực tiếp nên không thể phát hiện ra các đoạn thẳng vô ước. Người ta đánh giá phát minh tuyệt vời này đã ảnh hưởng sâu sắc đến toàn bộ nền toán học từ xưa đến nay.

2⁺. Nhờ phát minh nói trên mà người ta nhận ra rằng kho các đại lượng hình học đầy đủ hơn kho số hữu tỷ. Do đó việc xây dựng toán học dưới dạng hình học được xem là hợp lý. Trong LSTH nền toán học mới này có tên gọi là Đại số - Hình học. Hình học đã trở thành ngôn ngữ của toán học. thậm chí Số học và Đại số cũng diễn đạt bằng ngôn ngữ hình học. Đặc biệt, trước cổng Viện Hàn lâm của mình nhà triết học vĩ đại *Platon* đã cho treo bảng: "*Người nào không thông suốt hình học thì chớ vào đây*".

Euclid
(khoảng 330 TCN)

3⁺. Sau cùng, bộ sách giáo khoa bất hủ "*Các nguyên lý*" của *Euclid* ra đời như ánh hào quang của toán học Cổ Hy Lạp tỏa sáng đến tận ngày nay ...

II. Cuộc khủng hoảng thứ hai

Vào thế kỷ XVII - XVIII vấn đề về Đại lượng vô cùng bé (ĐLVCB) đã tạo nên một cảnh tượng thật đặc biệt. Một mặt, thành tựu mà *Phép tính các vô cùng bé* (PTVCB) đạt được thật là lớn lao, nhưng mặt khác gần như chưa có một khái niệm nào của nó được định nghĩa chính xác kể cả chính khái niệm ĐLVCB.

* * *

Nguyên nhân đầu tiên làm xuất hiện cuộc khủng hoảng lần thứ hai trong LSTH là do các nhà toán học thời bấy giờ chưa xác định được ĐLVCB là gì và do đó họ không đưa ra được bất cứ sự lý giải nào cho khái niệm đó ngoài một số lập luận lờ mờ thiếu căn cứ và rất nghèo nàn.

---

1) A.I. Mackusevic, ...; *Số và Hình*, Hà Nội - 1962, tr.50-51

2) *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, số 508 (tháng 10 năm 2019)

Phải đến đầu thế kỷ XIX vấn đề đó mới được làm sáng tỏ chủ yếu nhờ các công trình của *A. Cauchy* (1789 - 1857) về *Lý thuyết giới hạn.* Theo lý thuyết giới hạn thì: *một đại lượng có giới hạn bằng zero được gọi là ĐLVCB.* Một cách đầy đủ - điều đó được phát biểu như sau:

Định nghĩa. *Đại lượng biến thiên x được gọi là ĐLVCB nếu trong quá trình biến đổi giá trị tuyệt đối của nó trở nên bé hơn mãi mãi so với một số $\varepsilon > 0$ cho trước bất kỳ bé tùy ý, tức là với mọi số $\varepsilon > 0$ đều tồn tại giá trị $x(\varepsilon)$ của biến x sao cho mọi giá trị x tiếp theo sau $x(\varepsilon)$ đều thỏa mãn bất đẳng thức $x < \varepsilon$.*

Định nghĩa vừa nêu được cụ thể hóa cho các trường hợp khác nhau là: dãy số (hàm số của đối số tự nhiên) và hàm của đối số liên tục.

1+. Dãy (số) $x_n = x(n),\ n \in \mathbb{N}$ được gọi là dãy VCB nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước bé tùy ý tồn tại số N phụ thuộc ε ($N = N(\varepsilon)$) sao cho với mọi số $n \geq N(\varepsilon)$ thì $x_n < \varepsilon$.

2^+. Hàm $y = f(x),\ x \in \mathbb{R}$ được gọi là hàm VCB khi $x \to a$ nếu với mỗi số $\varepsilon > 0$ cho trước bé tùy ý đều có thể tìm được số $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tương ứng sao cho với mọi x mà $0 < x - a < \delta$ thì $f(x) < \varepsilon$.

Ta nêu 2 ví dụ về trình tự chứng minh một đại lượng là vô cùng bé như sau:

1) Dãy $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ là dãy VCB.

Thật vậy, giả sử $\varepsilon > 0$ là số cho trước bé tùy ý. Ta cần chỉ ra số N phụ thuộc ε ($N = N(\varepsilon)$) sao cho $\forall n > N(\varepsilon)$ thì $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2} < \varepsilon$.

Bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức $n^2 > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}$. Từ đó ta có thể lấy $N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}\right]$ trong đó $[\theta]$ là phần nguyên của số θ, là số mà $[\theta] \leq \theta < [\theta] + 1$.

Thật vậy nếu $n > N(\varepsilon)$ thì $n \geq \left[\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}\right] + 1 > \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}$

và do đó: $|a_n| = \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}\right)^2} = \varepsilon$ (đpcm).

2) Hàm $y = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$ là hàm VCB khi $x \to 0$. Thật vậy ta sẽ sử dụng bất đẳng thức $\sin x \leq x$, $\forall x$. Cho số $\varepsilon > 0$ bé tùy ý và lấy $\delta = \varepsilon$. Khi đó với $x < \delta$ thì $\sin x \leq x < \delta = \varepsilon$.

Do đó $y = \sin x$ là hàm VCB khi $x \to 0$.

Trên đây là bản chất sâu xa của các ĐLVCB. Điều đáng tiếc là một thời gian dài nó đã bị che lấp bởi một mớ những lập luận lờ mờ thiếu căn cứ và rất nghèo nàn ...

G.Leibniz
(1646-1716)

M. Rolle
(1652-1719)

Chẳng hạn: Để trả lời trước sự công kích gay gắt PTVCB và trước việc một số người xem PTVCB là "một mớ những sai lầm tai hại" [*M. Rolle* (1652 -1719)], *G. Leibniz* (1646 - 1716) đã đề nghị thay tên gọi "*những ĐLVCB*" bởi "*những đại lượng không so sánh được kiểu hạt bụi so với quả đất hay quả đất so với bầu trời ...*".

Bản thân *Leibniz* cũng ngả theo quan điểm cho rằng "*không nên xem ĐLVCB như đại lượng tồn tại thực mà chỉ là đại lượng hư ảo nào đó*". Ông còn nói rằng "những đại lượng hư ảo" này là hữu ích vì nó làm cho phép tính được ngắn gọn và chính xác".

L. Euler
(1707-1783)

Quan điểm của *L. Euler* cũng không có gì khá hơn. Theo *Euler*, việc xem ĐLVCB không bằng zero là không thể tránh khỏi dẫn đến sự không chặt chẽ.

Ông đề nghị xem ĐLVCB là đúng bằng zero (thậm chí bằng zero tuyệt đối) để khi bỏ qua nó sẽ không dẫn đến bất cứ sai lầm nào ...

Từ đó PTVCB, đặc biệt là phép tính vi phân (PTVP) liên tiếp rơi vào tình trạng nghịch lý triền miên kiểu $A + \alpha = A$, trong đó A là đại lượng hữu hạn còn α là ĐLVCB.

*

* *

J. D'alembert
(1717-1783)

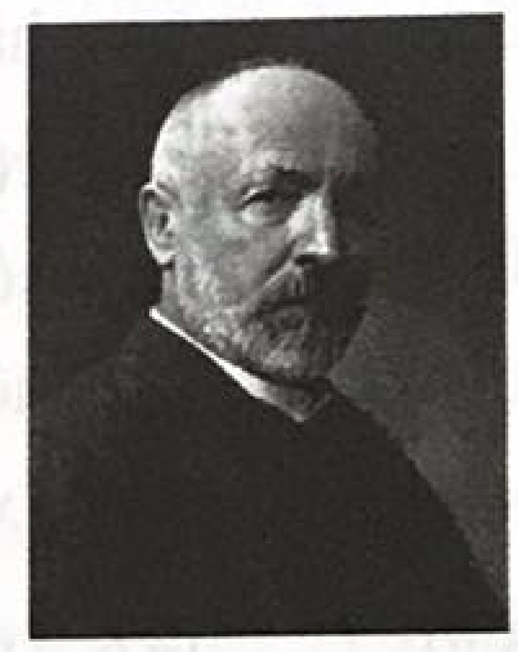
A.Cauchy
(1789-1857)

Lối thoát của cuộc khủng hoảng kéo dài gần ba trăm năm được tìm thấy ở Lý thuyết giới hạn của *J. D'alembert* và *A.Cauchy*. Lý thuyết đó được hoàn thiện một cách triệt để trong "*Giải tích đại số*" (1821) và trong các tác phẩm khác của nhà toán học Pháp nổi tiếng thời bấy giờ là *A.Cauchy*.

Những thành tựu lý thuyết và thực hành tạo nên PTVCB đã nhanh chóng đưa đến sự ra đời cuốn sách giáo khoa chuyên ngành đầu tiên với tên gọi "*Giải tích các vô cùng bé*" (1696) của nhà toán học Pháp *L'Hospital* (1661-1704) trong đó có trình bày quy tắc L'Hospital quen thuộc trong lý thuyết giới hạn. Trong số các tên gọi của sách giáo khoa hiện hành về môn toán này có lẽ tên gọi *Phép tính các vô cùng bé* (*PTVCB*) là phản ánh nội dung và đối tượng của nó tốt hơn cả...

III. Cuộc khủng hoảng thứ ba

Lý thuyết tập hợp (LTTH) được bắt đầu nghiên cứu vào cuối nửa sau của thế kỷ XIX. *G.Cantor* đã trình bày lý thuyết của mình lần đầu tiên trong tác phẩm "*Cơ sở LTTH*" (1883).



G. Cantor
(1845 - 1918)

Ngày nay nó đã trở thành nền tảng và ngôn ngữ của mọi ngành toán học quan trọng nhất. *N. Bourbaki* đánh giá rằng:

"*Ngày nay, về mặt lôgic mọi người đều thừa nhận rằng toàn bộ nền toán học hiện đại đều có thể rút từ một nguồn duy nhất là lý thuyết tập hợp*" (1).

*

* *

Đầu tiên, LTTH đã được áp dụng để tìm căn cứ cho Lý thuyết số thực là cơ sở để xây dựng một cách chặt chẽ PTVCB. Người đầu tiên "dấn thân" vào công việc gian nan này là *R. Dedekin* (1831 - 1916) là người bạn gần gũi luôn luôn đồng hành cùng *Cantor*.

Trong Đại số việc áp dụng các ý niệm mới đã đưa đến sự thay đổi tận gốc rễ *bản chất của đối tượng nghiên cứu*.

1) N. Bourbaki, *Lý thuyết tập hợp*, 1965, trang 25 (tiếng Nga).

Nếu như trước đây mục tiêu của Đại số là tìm lời giải của các phương trình và hệ phương trình đại số thì nay với sự xâm nhập sâu của các khái niệm và phương pháp LTTH người ta bắt đầu quan tâm nhiều hơn đến nghiên cứu các phép toán đại số cho trên các tập hợp với bản chất bất kỳ.

Tại Hội nghị Toán học Quốc tế năm 1900 các nhà toán học thế giới đã thể hiện niềm tin rằng LTTH là cơ sở để giải quyết vấn đề căn cứ của toán học.

Tại đây nhà toán học lỗi lạc Pháp *H. Poincare* (1854 - 1912) dõng dạc tuyên bố: Toán học đã tìm thấy cho mình một nền tảng vững chắc đầy hy vọng và nhờ sự sáng tạo của *Cantor* mà

"Hôm nay chúng ta có thể nói rằng chúng ta đã đạt được chính xác tuyệt đối".

Trong lúc tràn đầy hy vọng rằng vấn đề căn cứ của toán học sẽ được củng cố vững chắc nhờ LTTH thì một tai họa đã ụp xuống: người ta đã phát hiện ra các nghịch lý (lại nghịch lý và nghịch lý !!!...) trong cơ sở của nó [1]. Nghịch lý thứ nhất là *nghịch lý Burati - Forti* (1895); nghịch lý thứ hai là *nghịch lý Cantor* (1898) và nghịch lý thứ ba là *nghịch lý Russell* (1902, 1903) với biến thể minh họa: *"Nghịch lý người thợ cạo"* do nhà toán học Anh là *B. Russell* phát hiện ra.

Người ta cho rằng các nghịch lý này nảy sinh là do quá tùy tiện khi dùng khái niệm tập hợp cũng như sử dụng quá ư tự do các khái niệm của LTTH: chẳng hạn *tập hợp mọi tập hợp có thể có hay tập hợp không tự chứa nó như một phần tử là những tập hợp không tồn tại*.

Nỗi kinh hoàng mà những nghịch lý này mang lại cho toán học như *"một cơn giông bão mang sấm sét giáng vào bầu khí quyển toán học"*. Vì toàn bộ toán học có thể quy về trên nền tảng của LTTH nên không còn nghi ngờ gì nữa, *các nghịch lý này là nguyên nhân làm nổ ra cuộc khủng hoảng lần thứ ba* về căn cứ toán học.

Cuộc khủng hoảng nặng nề xảy ra vào lúc LTTH đạt được nhiều thành tựu to lớn và vào lúc người ta đặt niềm tin và gửi gắm vào đó nhiều hy vọng trong việc tìm căn cứ vững chắc cho toán học nói chung.

Giờ đây, trong khi đang cố tìm cách thoát khỏi khủng hoảng thì *Cantor* gặp phải sự chỉ trích nặng nề từ phía các đồng nghiệp. Do đó, ông đã chịu áp lực căng thẳng và có lúc lúng túng ...

Người ta công kích ông và gọi *"LTTH của Cantor là mây mù trong sương mù"* đã *"làm suy đồi giới trẻ"* ... Đáng tiếc là thầy của ông - nhà Toán học và nhà Triết học Đức nổi tiếng *L. Kronecker* (1823 - 1891) thì gọi *"đó không phải là toán học mà là thần bí giáo..."*. Đến như *H. Poincare* cũng bị lôi cuốn vào cuộc khi vội vàng tuyên bố tại Rôm (1908) rằng:

"Các thế hệ mai sau sẽ xem LTTH như một chứng bệnh cần phải giải cứu họ thoát khỏi".

Bị công kích và áp lực nặng nề như vậy nhưng *Cantor* vẫn khẳng định :*"Tôi tin LTTH của tôi chắc chắn như đá tảng"*.

Theo ý kiến của nhiều nhà toán học cuộc khủng hoảng lần này chưa biết lúc nào mới đến hồi kết vì đến nay vẫn chưa tìm được lối thoát nào thỏa đáng. Người ta hy vọng rằng đối với các ứng dụng thông thường *Lý thuyết tập hợp ngây thơ* là hoàn toàn đủ.

Mặc cho cuộc khủng hoảng còn lơ lửng, đầu thế kỷ XX các nhà toán học vẫn tin tưởng vào khả năng tìm được căn cứ vững bền đáng tin cậy cho cơ sở toán học nói chung.

Các nhà toán học lớn nhất thời bấy giờ như *D. Hilbert*, *B. Russell*, ... đã cùng chia sẻ niềm tin đó.

---

1) Nguyễn Thủy Thanh, *Lịch sử toán học giản yếu*, NXB Giáo dục, 2012, tr.225-228.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/555 (Lớp 6). Tìm số có bốn chữ số $\overline{abcd}$ biết $a+b+c+d=7$, $\overline{cd}-\overline{ab}=3$ và $7.\overline{abcd}$ là một số chính phương.

PHẠM TUẤN KHẢI

(Hà Nội)

Bài T2/555 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=125^0, \widehat{ABC}=25^0$. Lấy điểm D sao cho A và D nằm về hai phía của đường thẳng BC, ngoài ra $\widehat{BAD}=40^0, \widehat{CBD}=75^0$. Tính số đo của góc $\widehat{ADC}$.

HUỲNH THANH TÂM

(CB Bưu Điện TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/555. Chứng minh rằng tồn tại vô số số tự nhiên n thỏa mãn $2024^n+2 \vdots n$.

LƯƠNG THỊ VỊ

(GV THCS Quang Lịch, Kiến Xương, Thái Bình)

Bài T4/555. Cho BC là dây cung cố định của đường tròn $(O; R)$ $(BC \neq 2R)$. A là điểm chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. H là trực tâm tam giác ABC. Đường thẳng qua H vuông góc với tia phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt AB, AC lần lượt tại D, E. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE, K là trung điểm AH. Chứng minh KI luôn đi qua một điểm cố định.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T5/555. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2 \le 10 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3(x-1)+y^3(y-1)$.

NGUYỄN ANH DŨNG *(Hà Nội)*

CÁC LỚP THPT

Bài T6/555. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(m; n)$ để phương trình

$$x^4-mnx^3+(m^2+m+n+1)x^2-(m^3n+mn)x +m^3+m^2n+m+n=0$$

có nghiệm nguyên.

NGUYỄN THỊ DƯƠNG

(K55 CĐ KT2, CĐGT Thị xã Vĩnh Yên, Vĩnh Phúc)

Bài T7/555. Cho tập $X=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ gồm n số nguyên dương đầu tiên.

a) Với $n=10$, hãy chỉ ra 10 tập con của X, mỗi tập có đúng 3 phần tử và 2 tập bất kỳ trong 10 tập này có chung nhau không quá 1 phần tử.

b) Với $n=15$, chứng minh rằng tồn tại ít nhất 333 tập con của X, mỗi tập có đúng 6 phần tử và 2 tập bất kỳ trong đó có không quá 4 phần tử chung.

BÙI VĂN BÌNH

(GV THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài T8/555. Cho đường tròn (I) tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại T. Dây cung AB của (O) tiếp xúc với (I) tại E. TA cắt (I) tại điểm N khác T và TB cắt (I) tại điểm M khác T. Biết AM cắt BN tại J. Chứng minh rằng TE là phân giác của góc $\widehat{ATB}$ và EI là phân giác của góc $\widehat{TEJ}$.

LA ĐẠI CƯƠNG

(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Bài T9/555. Xét các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{1+a+b}+\dfrac{1}{1+b+c}+\dfrac{1}{1+c+a}=1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\ge a+b+c$.

DƯƠNG CHÂU DINH

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/555. Cho hai dãy số (x_n) và (y_n) thỏa mãn $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$,

$$2\sqrt{2}x_{n+1}=(\sqrt{3}+1)x_n-(\sqrt{3}-1)y_n,$$

$$2\sqrt{2}y_{n+1}=(\sqrt{3}-1)x_n+(\sqrt{3}+1)y_n.$$

Chứng minh rằng tồn tại $T \in \mathbb{N}^*$ sao cho $x_{n+T} = x_n$, $y_{n+T} = y_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

NGUYỄN HUY HOÀNG

(SV lớp ĐHSP Toán K45, ĐH Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T11/555. Tìm số thực a nhỏ nhất để

$$f_n(x) = \frac{1}{n+3}x^{n+3} + \frac{2}{n+2}x^{n+2} + \frac{1}{n+1}x^{n+1} - x + 2024$$

đồng biến trên $[a;+\infty)$ với mọi số nguyên dương n.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Bài T12/555. Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O), có AD là đường phân giác góc $\widehat{BAC}$. Điểm I thuộc AD sao cho BI cắt AC tại E, CI cắt AB tại F và $IE = IF$. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và N là giao điểm của AI và EF. Gọi G là giao điểm của EF với tiếp tuyến tại A của đường tròn (O); gọi L là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O) và (J). Chứng minh GL đi qua điểm chính giữa cung $\widehat{EAF}$.

NGUYỄN NGỌC TÚ

(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài L1/555. Một con lắc đơn có chiều dài dây treo $l = 20$ cm, được treo tại một điểm cố định. Kéo con lắc khỏi phương thẳng đứng một góc bằn 0,1 rad về phía bên phải rồi truyền cho nó một vận tốc 14 cm/s theo phương vuông góc với dây về phía vị trí cân bằng. Coi con lắc dao động điều hoà, viết phương trình dao động đối với li độ dài của con lắc. Chọn gốc tọa độ tại vị trí cân bằng, chiều dương hướng từ vị trí cân bằng sang phía bên phải, gốc thời gian là lúc con lắc đi qua vị trí cân bằng lần thứ nhất. Cho gia tốc trọng trường $g = 9{,}8$ m/s^2.

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/555. Hiệu suất truyền tải điện năng một công suất $\mathscr{P}$ từ máy phát điện đến nơi tiêu thụ là 35%. Nếu sử dụng máy biến áp lí tưởng có tỉ số giữa cuộn thứ cấp và cuộn sơ cấp là $\frac{N_2}{N_1} = 5$ để tăng điện áp truyền tải thì hiệu suất truyền tải sau khi sử dụng máy biến áp này là bao nhiêu?

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/555 (For 6th grade). Find 4-digit numbers $\overline{abcd}$ with the conditions $a + b + c + d = 7$, $\overline{cd} - \overline{ab} = 3$ and $7.\overline{abcd}$ is a perfect square.

Problem T2/555 (For 7th grade). Given a triangle ABC with $\widehat{BAC} = 125^0$, $\widehat{ABC} = 25^0$. Let D be the point so that A and D are on the different half-planes determined by the line BC, $\widehat{BAD} = 40^0$, and $\widehat{CBD} = 75^0$. Find the measurement of the angle $\widehat{ADC}$.

Problem T3/555. Prove that there exist infinitely many natural numbers n so that $2024^n + 2 \vdots n$.

Problem T4/555. Fix a chord BC on a circle $(O; R)$ ($BC \neq 2R$). Let A be a point moving on the major arc BC so that the angle $\widehat{ABC}$ is acute. Let H be the orthogonal center of ABC. The line which passes through H and is perpendicular to the bisector of $\widehat{BAC}$ intersects AB, AC at D, E respectively. Suppose that I is the circumcenter of ADE and K is the midpoint of AH. Show that KI always passes through a fixed point.

Problem T5/555. Consider the real numbers x, y satisfying $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2 \leq 10 \end{cases}$. Find the minimum value and maximum value of the expression

$$P = x^3(x-1) + y^3(y-1).$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/555. Find all pairs of natural numbers tự nhiên $(m; n)$ so that the following equation $x^4 - mnx^3 + (m^2+m+n+1)x^2 - (m^3n+mn)x + m^3 + m^2n + m + n = 0$ has integral solutions. *(Xem tiếp theo trang 28)*

Bài T1/551. *Tìm số nguyên n lớn nhất sao cho số $Q = 4^{27} + 4^{1017} + 4^n$ là số chính phương.*

Lời giải. Từ yêu cầu tìm số nguyên n lớn nhất ta có thể xét $n > 27$ xem có nghiệm không, lúc đó viết được 4^{27} thành thừa số chung dạng

$$Q = 4^{27} + 4^{1017} + 4^n = 4^{27}(1 + 4^{990} + 4^{n-27})$$
$$= (2^{27})^2(1 + 4^{990} + 4^{n-27}).$$

Để Q là số chính phương thì tổng $1 + 4^{990} + 4^{n-27}$ cần phải là số chính phương, tức là

$$1 + 4^{990} + 4^{n-27} = a^2$$

với a là số nguyên dương (do $n > 27$). Có hai cách giải gọn như sau.

Cách 1. Từ $a^2 = 1 + 4^{990} + 4^{n-27}$ thì $a^2 > (2^{n-27})^2$ nên $a^2 \geq (2^{n-27} + 1)^2$, hay là

$$1 + 4^{990} + 4^{n-27} \geq 4^{n-27} + 2 \times 2^{n-27} + 1,$$

do đó $4^{990} \geq 2^{n-26}$, suy ra $1980 \geq n - 26$, hay là $n \leq 2006$. Với $n = 2006$ thì có

$$1 + 4^{990} + 4^{1979} = 1 + 2.2^{1979} + (2^{1979})^2$$
$$= (1 + 2^{1979})^2.$$

Vậy số nguyên n lớn nhất sao cho số

$$Q = 4^{27} + 4^{1017} + 4^n$$

là số chính phương là $n = 2006$.

Cách 2. Từ

$$a^2 = 1 + 4^{990} + 4^{n-27}$$
$$= 1 + 2.2^{n-27} + (2^{n-27})^2 + 2^{1980} - 2^{n-26}$$
$$= (2^{n-27} + 1)^2 + 2^{1980} - 2^{n-26}.$$

Ta chọn $n = 2006$, tức là $1980 = n - 26$, lúc đó

$$a^2 = (2^{1979} + 1)^2.$$

Với $n \geq 2007$ thì $n - 26 \geq 1981$ nên

$$2^{1980} - 2^{n-26} < 0,$$

lúc đó $a^2 < (2^{n-27} + 1)^2$ hay $a < 2^{n-27} + 1$, nhưng $a^2 = 1 + 4^{990} + 4^{n-27} > (2^{n-27})^2$ nên $a > 2^{n-27}$, do đó với a nguyên không xảy ra $n \geq 2007$. Vậy số nguyên n lớn nhất sao cho số $Q = 4^{27} + 4^{1017} + 4^n$ là số chính phương là $n = 2006$.

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Bảo An*, 7C, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Phú Thọ** đã giải đúng bài này.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/551. *Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn:*

$$x^2 + 2021x + 2022y^2 + y = xy + 2022xy^2 + 2023.$$

Lời giải. Chuyển vế phải sang trái ta có:

$$x^2 + 2021x + 2022y^2 + y - (xy + 2022xy^2 + 2023) = 0.$$

Biến đổi, vế trái trở thành:

$$(x^2 - 1) + 2021(x-1) - y(x-1) - 2022y^2(x-1) - 1 = 0.$$

Ta có: $$(x^2 - 1) + 2021(x-1) - y(x-1) - 2022y^2(x-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[(x+1) + 2021 - y - 2022y^2\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x + 2022 - y - 2022y^2) = 1 \quad (1).$$

Do x, y là số tự nhiên, nên từ (1) ta có:

$$\begin{cases} x - 1 = 1 \\ x + 2022 - y - 2022y^2 = 1 \end{cases}$$

hoặc $$\begin{cases} x - 1 = -1 \\ x + 2022 - y - 2022y^2 = -1 \end{cases}.$$

Giải ra ta được: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Trịnh Phương Minh*, 6/14, THCS Lê Quý Đôn; **Hưng Yên:** *Lê Tuấn Hiệp*, 7C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **Nghệ An:** *Nguyễn Tất Han*, 7C, *Hoàng Văn Duy, Đặng Bá Khôi Nguyên*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Đậu Công Nhất Nam*, 7C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/551. *Cho a, b, c là các số hữu tỷ dương thỏa mãn điều kiện* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$. *Chứng minh* $A=\sqrt{\frac{abc}{(a+2bc)(b+2ca)+(c+2ab)}}$ *là một số hữu tỷ.*

Lời giải. Từ giả thiết bài toán, ta suy ra $ab+bc+ca=2abc$. Vì $a>0$ nên

$$2bc=\frac{ab+bc+ca}{a},$$

kéo theo:

$$a+2bc=a+\frac{ab+bc+ca}{a}=\frac{a^2+ab+bc+ca}{a}$$
$$=\frac{(a+b)(a+c)}{a}.$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$b+2ca=\frac{(b+c)(b+a)}{b},$$

$$c+2ab=\frac{(c+a)(c+b)}{c}.$$

Thay vào biểu thức A, ta được

$$A=\sqrt{\left(\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)^2}$$
$$=\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Vì a,b,c là các số hữu tỉ nên A cũng là một số hữu tỉ.

Nhận xét. Đây là bài toán biến đổi đại số có điều kiện, thuộc loại dễ. Các bạn khi giải toán cũng lưu ý một số kinh nghiệm sau

+) Nếu $ab+bc+ca=k$ thì

$$k+a^2=ab+bc+ca+a^2=(a+b)(a+c),$$

+) Nếu $ab+bc+ca=k$ thì

$$\sqrt{(k+a^2)(k+b^2)(k+c^2)}=|(a+b)(b+c)(c+a)|,$$

+) Nếu $a+b+c=k$ thì

$$ka+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c).$$

+) Nếu $ab+bc+ca=kabc$ thì

$$a+kbc=a+\frac{ab+bc+ca}{a}=\frac{(a+b)(a+c)}{a}$$

với giả thiết $a,b,c\neq 0$.

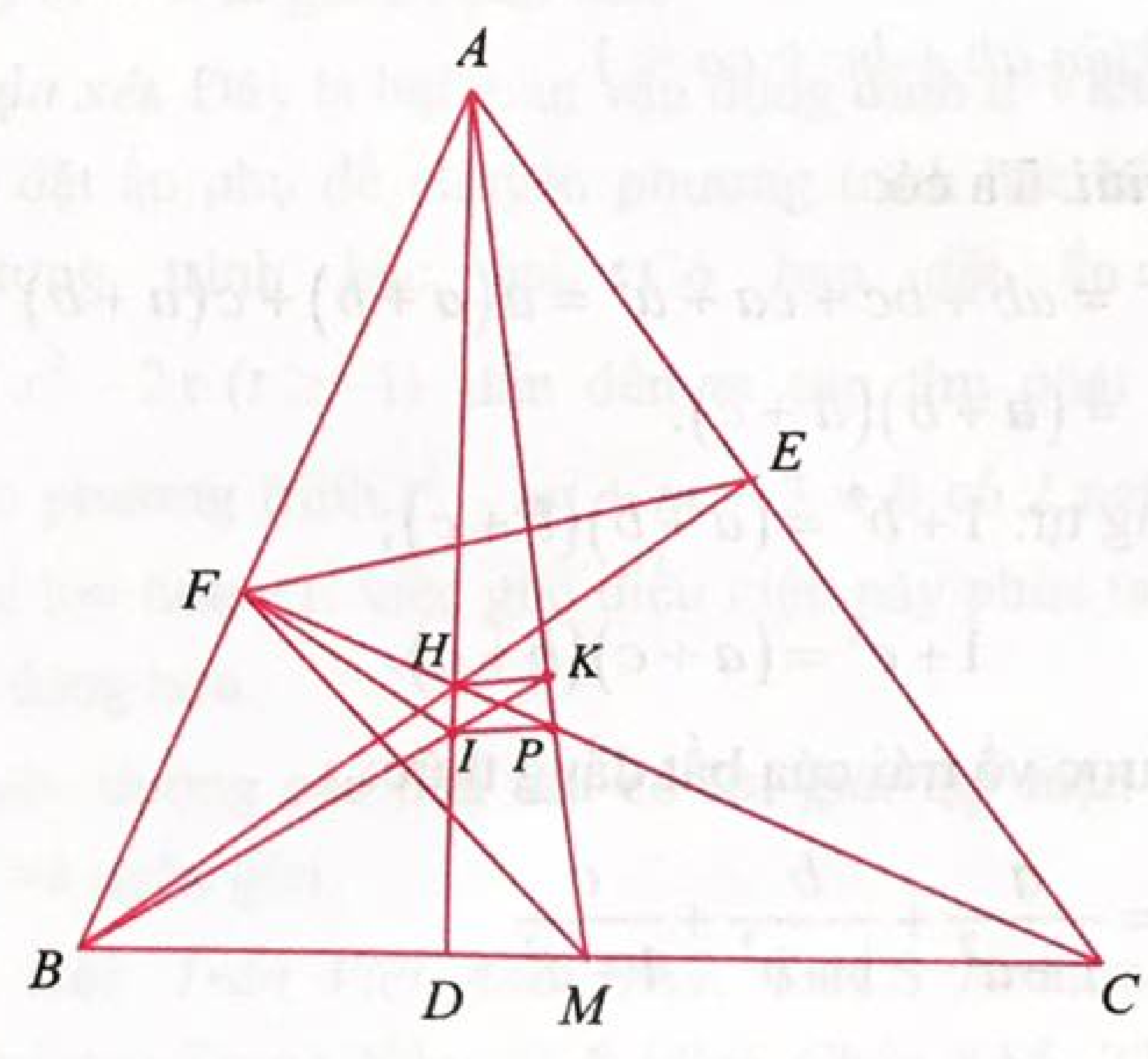
Bài toán này dễ nên có nhiều bạn tham gia giải. Các bạn sau có lời giải đúng

TP. Hồ Chí Minh: *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, *Nguyễn Trịnh Phương Minh*, 6/14, THCS Lê Quý Đôn, Q. 3; **Nghệ An:** *Thái Bá Nhân*, *Nguyễn Văn Lâm*, 8A, *Nguyễn Tất Han*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Cao Long*, 9A, *Đậu Công Nhất Nam*, 7C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Trịnh Bá Hiếu*, 9A, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; *Lưu Trọng Phúc*, 9B, THCS Đội Cung, TP. Vinh; **Hà Nội:** *Ngô Minh Chấn*, 8A5, THCS Archimedes, Đông Anh, *Trần Việt Anh*, 9A7, Archimedes Academy, Trung Yên, Cầu Giấy; **Phú Thọ:** *Trần Lan Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Sơn La:** *Lương Hữu Bách*, 9A1, THCS Nguyễn Trãi; **Quảng Ngãi:** *Lương Thanh Nhã*, 8B, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành.

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T4/551. *Cho tam giác nhọn ABC không cân có hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H; M là trung điểm của BC. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên AM, hai đường thẳng AH và BK cắt nhau tại I. Chứng minh rằng tia IH là phân giác của góc* $\widehat{KIF}$.

Lời giải.



Không giảm tính tổng quát, giả sử $AB<AC$.

Gọi D là giao điểm của AH và BC, P là giao điểm của CF và AM. Các tứ giác $BFHD$, $DHKM$ nội tiếp, suy ra: $AF.AB = AH.AD = AK.AM$.

Từ đó suy ra tứ giác $BFKM$ nội tiếp, do đó:

$$\widehat{IKP} = \widehat{BFM}.$$

Vì tam giác BFC vuông nên $\widehat{BFM} = \widehat{FBM}$, hơn nữa, tứ giác $BFHD$ nội tiếp ta có $\widehat{FBD} = \widehat{DHP}$.

Do đó $\widehat{IKP} = \widehat{IHP}$, suy ra tứ giác $HIPK$ nội tiếp.

Từ đó, $\widehat{HIP} = 90°$, dẫn tới tứ giác $AFIP$ nội tiếp.

Áp dụng tính chất của hai tứ giác nội tiếp $AFIP$ và $HIPK$ ta có: $\widehat{FIA} = \widehat{FPA} = \widehat{HPK} = \widehat{HIK}$.

Vậy IH là tia phân giác của góc $\widehat{KIF}$.

Nhận xét. Các bạn tham gia giải đều có lời giải tương đối dài dòng. Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

Thanh Hóa: *Nguyễn Trinh An*, 9K, THCS Trần Mai Ninh; **Quảng Bình:** *Trương Duy Thái*, 9A, THCS An Ninh; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Lâm*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Ngô Văn Trường*, 9A, THCS Mai Hùng, Hoàng Mai; *Cao Long*, 9A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/551. *Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện ab + bc + ca = 1.

Lời giải. Ta có:

$$1+a^2 = ab+bc+ca+a^2 = a(a+b)+c(a+b) = (a+b)(a+c).$$

Tương tự: $1+b^2=(a+b)(b+c)$;

$$1+c^2=(a+c)(b+c).$$

Ta được vế trái của bất đẳng thức:

$$\mathrm{VT}=\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}$$

$$=\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(a+b)(b+c)}+\frac{c}{(a+c)(b+c)}$$

$$=\frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{2}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc}$$

$$=\frac{2}{a+b+c-abc}.$$

Do đó bất đẳng thức phải chứng minh tương tương với: $\dfrac{2}{a+b+c-abc}\le\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$$\Leftrightarrow a+b+c-abc\ge\frac{8}{3\sqrt{3}}\quad(1).$$

Áp dụng bất các đẳng thức quen thuộc, ta có:

$$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)=3$$

$$\Rightarrow a+b+c\ge\sqrt{3}\quad(2).$$

$$1=ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}$$

$$\Rightarrow abc\le\frac{1}{3\sqrt{3}}\Rightarrow -abc\ge-\frac{1}{3\sqrt{3}}\quad(3).$$

Cộng theo vế của (2) và (3), ta được:

$$a+b+c-abc\ge\sqrt{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Vậy bất đẳng thức trong đầu bài được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a=b=c\\ ab=bc=ca=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nhận xét. 1) Bất đẳng thức

$$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\ge 0$$

(luôn đúng). Dễ thấy hai vế của đồng nhất thức

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$$

bằng $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc$.

2) Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 3\sqrt{3}\left(a+b+c\right) \geq 8+3\sqrt{3}abc \quad (4).$$

Có thể chứng minh (4) như sau:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương, ta có: $a+b+c=\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right) \geq 9abc$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a+b+c\right) \geq 3\sqrt{3}abc \quad (5).$$

Từ (2) suy ra: $\frac{8}{\sqrt{3}}\left(a+b+c\right) \geq 8 \quad (6)$.

Cộng theo vế của (5) và (6) ta được (4).

Ngoài ra, các bạn có thể chứng minh

$$\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right) \geq \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

để suy ra: $\text{VT} = \frac{2}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Các bạn sau đây có bài giải tốt :

Phú Thọ: *Trần Lan Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Quảng Trị:** *Lê Thị Ngân Tâm*, 8G, THCS Phan Đình Phùng, TP. Đông Hà; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Trình An*, 9C, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Trịnh Bá Hiếu*, 8A, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Đỗ Tiến Dũng*, 9A, THCS Huỳnh Tịnh Của, Long Điền; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3; **Sơn La:** *Lương Hữu Bách*, 9A1, THCS Nguyễn Trãi, TP. Sơn La .

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/551. *Cho phương trình*

$$(x-1)^2(x^2-2x)-(m+1)(x^2-2x-1)-4=0 \ (1).$$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình trên có 4 nghiệm phân biệt, trong đó có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1x_2+1=x_1+x_2+\sqrt{2}.$$

Lời giải. Đặt $t=(x-1)^2$, $(t \geq 0)$, phương trình (1) viết lại thành: $t(t-1)-(m+1)(t-2)-4=0$

$$\Leftrightarrow t^2-(m+2)t+2m-2=0 \ (2).$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt. Gọi 2 nghiệm đó là t_1, t_2 với $0 < t_1 < t_2$. Theo định lí Viète, ta có:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1+t_2 > 0 \\ t_1t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2+8 > 0 \\ m+2 > 0 \\ 2m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Khi $m > 1$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt là: $1-\sqrt{t_2}, 1-\sqrt{t_1}, 1+\sqrt{t_1}, 1+\sqrt{t_2}$.

Lại có: $x_1x_2+1=x_1+x_2+\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)=\sqrt{2}.$$

Suy ra x_1-1 và x_2-1 cùng dấu. Từ đó suy ra

$$x_1=1-\sqrt{t_1},\ x_2=1-\sqrt{t_2}$$

hoặc $x_1=1+\sqrt{t_1},\ x_2=1+\sqrt{t_2}$.

Do đó: $(x_1-1)(x_2-1)=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{t_1t_2}=\sqrt{2}$

hay $2m-2=2 \Leftrightarrow m=2$

(thoả mãn điều kiện $m > 1$).

Thử lại với $m = 2$, ta thấy phương trình (2) là $t^2-4t+2=0$ có 2 nghiệm phân biệt dương: $t_1=2-\sqrt{2}, t_2=2+\sqrt{2}$. Do đó phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt là:

$$1-\sqrt{2-\sqrt{2}};\ 1-\sqrt{2+\sqrt{2}};\ 1+\sqrt{2-\sqrt{2}};\ 1+\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

thoả mãn điều kiện đã cho.

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét. Đây là bài toán vận dụng định lí Viète sau khi đặt ẩn phụ để chuyển phương trình bậc bốn về phương trình bậc hai. Có bạn đặt ẩn phụ $t=x^2-2x \ (t \geq -1)$ dẫn đến m cần tìm phải thoả mãn phương trình $t^2-mt+m-3=0$ có 2 nghiệm phải lớn hơn -1, việc giải điều kiện này phức tạp và dài dòng hơn.

Tuyên dương các bạn sau có lời giải lập luận chặt chẽ và ngắn gọn.

Hà Nội: *Trần Việt Anh*, 9A7, THCS Archimedes Academy Trung Yên; *Ngô Minh Chấn* 8A5, THCS Archimedes Academy Đông Anh; **Thanh Hoá:**

Nguyễn Trinh An, 9K, THCS Trần Mai Ninh; **Hà Tĩnh:** *Trần Minh Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn; **Bình Định:** *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/551. *Chứng minh rằng*

$$\frac{36a^4+29b^4}{b^3+4a^2b}+\frac{36b^4+29c^4}{c^3+4b^2c}+\frac{36c^4+29a^4}{a^3+4c^2a}\geq 2023$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{117}{2023}.$$

Lời giải. (của đa số các bạn).

Ta chứng minh: $\frac{36x^4+29}{1+4x^2}\geq 8x+5, \forall x\in\mathbb{R}$ (1).

Thật vậy với $\forall x\in\mathbb{R}$ ta có:

$$(1)\Leftrightarrow 36x^4+29\geq(1+4x^2)(8x+5)$$
$$\Leftrightarrow 36x^4+29\geq 32x^3+20x^2+8x+5$$
$$\Leftrightarrow 36x^4-32x^3-20x^2-8x+24\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2(9x^2+10x+6)\geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng vì $(x-1)^2\geq 0, \forall x$; $9x^2+10x+6>0, \forall x$. Vậy BĐT(1) được chứng minh. Trong (1) thay x bởi $\frac{a}{b}$ ta thu được:

$$\frac{36\left(\frac{a}{b}\right)^4+29}{1+4\left(\frac{a}{b}\right)^2}\geq 8.\frac{a}{b}+5\Leftrightarrow\frac{36a^4+29b^4}{b^3+4a^2b}\geq 8a+5b.$$

Tương tự ta cũng thu được các bất đẳng thức:

$$\frac{36b^4+29c^4}{c^3+4b^2c}\geq 8b+5c;\ \frac{36c^4+29a^4}{a^3+4c^2a}\geq 8c+5a.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{36a^4+29b^4}{b^3+4a^2b}+\frac{36b^4+29c^4}{c^3+4b^2c}+\frac{36c^4+29a^4}{a^3+4c^2a}$$
$$\geq 8a+5b+8b+5c+8c+5a$$
$$=13(a+b+c).$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9.$$

Kết hợp với giả thiết suy ra:

$a+b+c\geq\frac{9}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\geq\frac{9}{\frac{117}{2023}}=\frac{2023}{13}$. Vậy

$$\frac{36a^4+29b^4}{b^3+4a^2b}+\frac{36b^4+29c^4}{c^3+4b^2c}+\frac{36c^4+29a^4}{a^3+4c^2a}\geq 13.\frac{2023}{13}$$
$$=2023.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{2023}{39}$.

Nhận xét. Hầu hết các bạn đều giải như cách giải trên. Các bạn sau có lời giải đúng:

Sơn La: *Lương Hữu Bách*, 9A1, THCS Nguyễn Trãi, TP. Sơn La; **Hà Nội:** *Trần Việt Anh*, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Trinh An*, 9K, THCS Trần Mai Ninh; **Nghệ An:** *Cao Long*, 9A, *Đậu Công Nhất Nam*, 7C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Hải*, 11 Toán 1, *Đoàn Ngọc Duy*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Bình Định:** *Trần Ngọc Tuyên*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Sóc Trăng:** *Tiết Trọng Khiêm*, 11A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/551. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R) và ngoại tiếp đường tròn (I; r). Các đường thẳng IA, IB, IC cắt lại đường tròn (O; R) lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng*

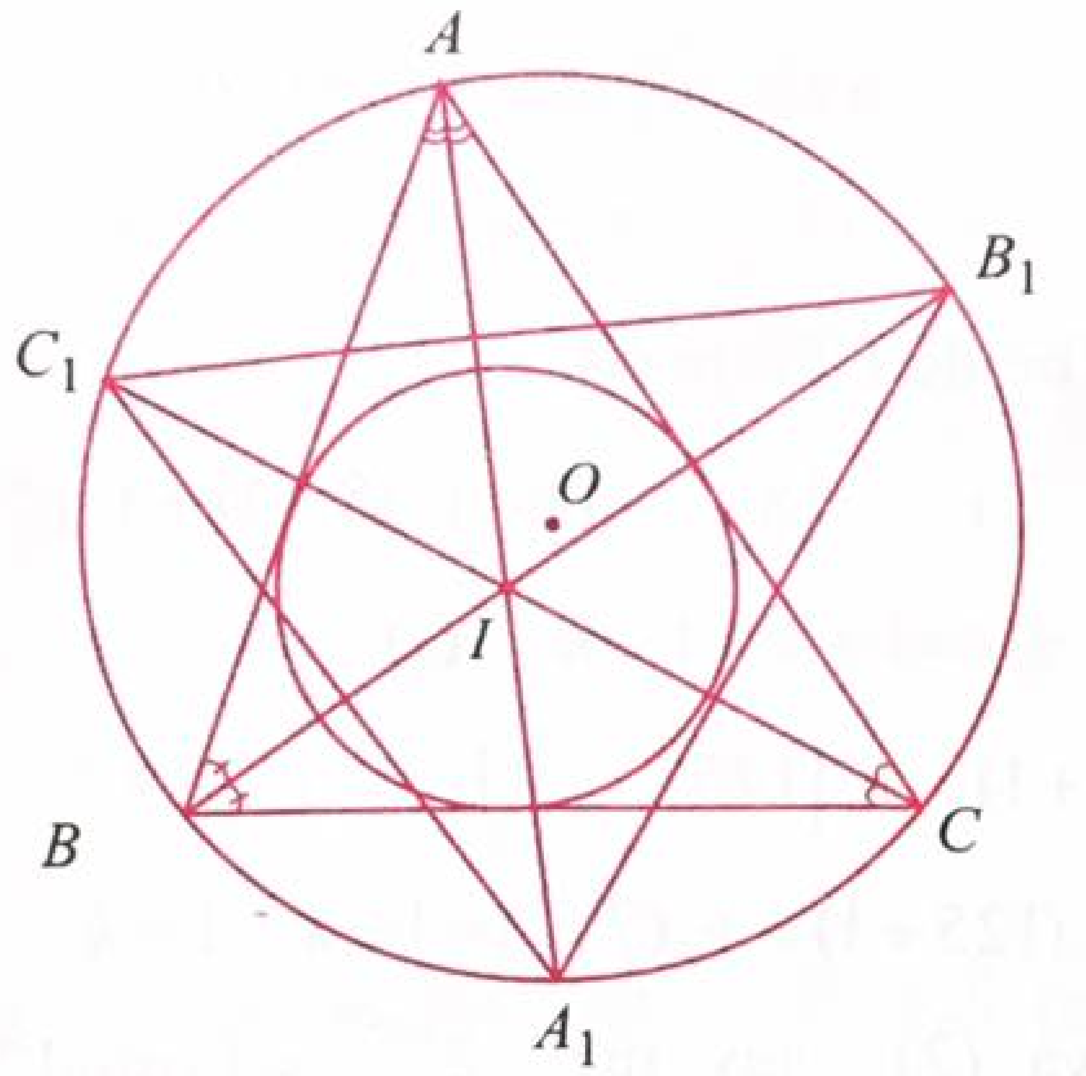
$$\frac{(A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1)^2}{A_1B_1.B_1C_1.C_1A_1}\leq\frac{(a+b+c)^2}{abc}$$

trong đó a = BC, b = CA, c = AB.

Lời giải. Kí hiệu S_{XYZ} chỉ diện tích tam giác XYZ.

Từ $\Delta IAB\sim\Delta IB_1A_1$ (g.g) suy ra:

$$S_{IA_1B_1}=\left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2.S_{IAB}=\left(\frac{A_1B_1}{c}\right)^2.\frac{1}{2}.r.c.$$



Tương tự có: $S_{IB_1C_1}=\left(\dfrac{B_1C_1}{a}\right)^2.\dfrac{1}{2}.r.a$;

$$S_{IC_1A_1}=\left(\frac{C_1A_1}{b}\right)^2.\frac{1}{2}.r.b.$$

Từ đó: $S_{A_1B_1C_1}=S_{IA_1B_1}+S_{IB_1C_1}+S_{IC_1A_1}$

$$=\frac{1}{2}.r\left(\frac{A_1B_1^2}{c}+\frac{B_1C_1^2}{a}+\frac{C_1A_1^2}{b}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}=\frac{1}{a+b+c}.\left(\frac{A_1B_1^2}{c}+\frac{B_1C_1^2}{a}+\frac{C_1A_1^2}{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{A_1B_1.B_1C_1.C_1A_1}{4R}.\frac{4R}{abc}$$

$$=\frac{1}{a+b+c}.\left(\frac{A_1B_1^2}{c}+\frac{B_1C_1^2}{a}+\frac{C_1A_1^2}{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{A_1B_1^2}{c}+\frac{B_1C_1^2}{a}+\frac{C_1A_1^2}{b}$$

$$=\frac{a+b+c}{abc}.A_1B_1.B_1C_1.C_1A_1\quad(*).$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky và hệ thức (*) ta được:

$$\left(\sqrt{\frac{A_1B_1^2}{c}}.\sqrt{c}+\sqrt{\frac{B_1C_1^2}{a}}.\sqrt{a}+\sqrt{\frac{C_1A_1^2}{b}}.\sqrt{b}\right)^2$$

$$\le(a+b+c).\left(\frac{A_1B_1^2}{c}+\frac{B_1C_1^2}{a}+\frac{C_1A_1^2}{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1\right)^2$$

$$\le(a+b+c).\frac{a+b+c}{abc}.A_1B_1.B_1C_1.C_1A_1$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1\right)^2}{A_1B_1.B_1C_1.C_1A_1}\le\frac{(a+b+c)^2}{abc}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{A_1B_1}{c}=\frac{B_1C_1}{a}=\frac{C_1A_1}{b}=k.$$

Kết hợp với (*) ta thấy điều đó tương đương với:

$$k^2(a+b+c)=\frac{a+b+c}{abc}.ka.kb.kc$$

$$\Leftrightarrow k=1\Leftrightarrow\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$$

$$\Leftrightarrow\widehat{A}=\widehat{A_1}=\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2};\widehat{B}=\widehat{B_1}=\frac{\widehat{C}+\widehat{A}}{2};\widehat{C}=\widehat{C_1}=\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}.$$

Khi đó tam giác ABC là tam giác đều.

Nhận xét. Số bạn tham gia giải bài toán này không nhiều, ba bạn *Trần Việt Anh*, 9A7, TH, THCS &THPT Archimedes, Academy Trung Yên, Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Trần Ngọc Tuyên*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**; *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long, **Vĩnh Long** có lời giải đúng.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/551. *Cho p, q, r là các số thực không âm thỏa mãn p + q + r = 1. Chứng minh rằng*

$$7(pq+qr+rp)\le 2+9pqr\quad(1).$$

Lời giải. (Của *Nguyễn Bảo An*) Vì p,q,r là các số thực không âm thỏa mãn $p+q+r=1$ nên $0\le p,q,r\le 1$. Đặt: $x=1-p, y=1-q, z=1-r$.

Khi ấy $0\le x,y,z\le 1$ và

$$x+y+z=3-(p+q+r)=2.$$

Bất đẳng thức (1) trở thành

$$7\left[(1-x)(1-y)+(1-y)(1-z)+(1-z)(1-x)\right]$$
$$\le 2+9(1-x)(1-y)(1-z)$$

$$\Leftrightarrow 7\left[3-2(x+y+z)+(xy+yz+zx)\right]$$
$$\le 2+9\left[1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz\right]$$

$$\Leftrightarrow 7\left[3-2\cdot 2+(xy+yz+zx)\right]$$
$$\le 2+9\left[1-2+(xy+yz+zx)-xyz\right]$$

$$\Leftrightarrow 9xyz\le 2(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow 9xyz\le(x+y+z)(xy+yz+zx)\quad(2).$$

Từ bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm ta có: $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}$

và $xy+yz+zz\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$.

Suy ra (2) đúng. Do đó (1) được chứng minh.

Nhận xét. Một số bạn chứng minh trực tiếp nên dài và không sáng sủa bằng bạn *An*. Tất cả các bạn đã gửi bài có lời giải tốt:

Bình Định: *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quí Đôn. **Đà Nẵng**: *Tô Đông Hải*, 10A2, THPT chuyên Lê Quí Đôn. **Hà Nội**: *Trần Việt Anh*, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy, *Đoàn Thế Anh*, 8A, THCS Đan Phượng, H. Đan Phượng. **Kiên Giang**: *Dương Thạnh Duy*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt. **Nghệ An**: *Cao Long*, 9A, THCS Cao Xuân Huy; *Phan Đại Hoàng*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Lưu Trọng Phúc*, 9B, THCS Đội Cung, TP. Vinh. **Phú Thọ**: *Nguyễn Bảo An*, 7C, THCS Nguyễn Quang Bích, huyện Tam Nông. **Phú Yên**: *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa. **Quảng Bình**: *Nguyễn Thanh Hải*, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Thanh Hóa**: *Nguyễn Trinh An*, 9K, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa. **TP. Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, Q. 3. **Thừa Thiên Huế**: *Phan Quốc Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế. **Vĩnh Long**: *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11 T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T10/551. *Cho dãy số (x_n) xác định bởi*

$$\begin{cases} x_1 = 7, x_2 = 29 \\ x_{n+2} = 7x_{n+1} - 10x_n, \forall n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương k thì tồn tại số nguyên dương n sao cho $x_n + 3 \vdots 7^k$.

Lời giải (Của bạn *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**)

Từ công thức xác định số hạng tổng quát của dãy số truy hồi cấp hai tuyến tính ta dễ thấy $x_n = 2^n + 5^n$. Ta sẽ chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương k thì $2^{3.7^{k-1}+1} + 5^{3.7^{k-1}+1} + 3$ chia hết cho 7^k.

Bổ đề LTE. *Cho p là số nguyên tố lẻ, a, b là các số nguyên dương không chia hết cho p.*

i) *Nếu $p \mid a - b$ thì với mọi n ta có:*

$$v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n).$$

ii) *Nếu $p \mid a + b$ thì với mọi n lẻ ta có:*

$$v_p(a^n + b^n) = v_p(a + b) + v_p(n).$$

Áp dụng bổ đề LTE ta có:

$$v_7(2^{3.7^{k-1}} - 1) = v_7\left(8^{7^{k-1}} - 1\right) = v_7(8 - 1) + v_7(7^{k-1})$$
$$= 1 + k - 1 = k \quad (1).$$

$$v_7(5^{3.7^{k-1}} + 1) = v_7\left(125^{7^{k-1}} + 1\right)$$
$$= v_7(125 + 1) + v_7(7^{k-1}) = 1 + k - 1 = k \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $2^{3.7^{k-1}} \equiv 1 \pmod{7^k}$ và $5^{3.7^{k-1}} \equiv -1 \pmod{7^k}$. Thành thử:

$$2^{3.7^{k-1}+1} + 5^{3.7^{k-1}+1} + 3 \equiv 2.1 + 5(-1) + 3 \equiv 0 \pmod{7^k},$$

tức là $2^{3.7^{k-1}+1} + 5^{3.7^{k-1}+1} + 3$ chia hết cho 7^k.

Như vậy với mỗi số nguyên dương k thì với $n = 3.7^{k-1} + 1$ ta có $x_n + 3$ chia hết cho 7^k.

Nhận xét. Chỉ có 3 bạn tham gia giải bài này trong đó có 2 bạn có lời giải đúng là bạn *Kiệt* và bạn *Dương Thạnh Duy*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, **Kiên Giang**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/551. *Tìm tất cả các các hàm $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn: $f(2f(a) + f(b)) = 2a + b - 4$ (1), $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.*

Lời giải. Giả sử hàm f thỏa mãn (1). Thay $b = 4$ vào (1) ta thu được:

$$f(2f(a) + f(4)) = 2a, \forall a \in \mathbb{Z} \quad (2).$$

Nhận xét rằng f là đơn ánh. Thật vậy, nếu $f(a_1) = f(a_2)$ với $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ thì theo (2), ta có:

$$f(2f(a_1) + f(4)) = f(2f(a_2) + f(4))$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = 2a_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2.$$

Để ý rằng $2a + b - 4 = 2(a-1) + (b+2) - 4$ nên theo (1) thì

$$f(2f(a-1) + f(b+2)) = 2a + b - 4, \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp với (1) và tính đơn ánh của f suy ra:

$$f(2f(a) + f(b)) = f(2f(a-1) + f(b+2)), \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$
$$\Leftrightarrow 2f(a) + f(b) = 2f(a-1) +$$
$$+ f(b+2), \forall a, b \in \mathbb{Z} \quad (3).$$

Thay $a = b + 2$ trong (3), ta thu được:

$$2f(b+2)+f(b)=2f(b+1)+f(b+2)$$

$$\Leftrightarrow f(b+2)-f(b+1)=f(b+1)-f(b), \forall b\in\mathbb{Z},$$

tức dãy số $x_n := f(n)$ là một cấp số cộng trên $\mathbb{Z}$ nên $f(n)=pn+q$ với $p,q\in\mathbb{Z}$ (do $f(0), f(1)\in\mathbb{Z}$). Thay $f(n)=pn+q$ vào (1), ta thu được $An+B=0, \forall n\in\mathbb{Z}$, tức $A=0, B=0$

hay $\left[\begin{array}{l} p=1, q=-1 \\ p=-1, q=2 \end{array}\right.$.

Kết luận: Tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện (1) là $f(x)=x-1$ và $f(x)=-x+2$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bình Định:** *Trần Ngọc Tuyên*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thanh Bảo*, 10T, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thừa Thiên Huế:** *Phan Quốc Thắng*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Kiên Giang:** *Dương Thạnh Duy*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Hải*, 11T1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 11T2, *Đoàn Ngọc Duy*, 12T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/551. *Cho tam giác nhọn ABC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp, K, L theo thứ tự là giao điểm của BO, CO với AC, AB. Giả sử bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác OAK bằng bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác OAL, chứng minh AB = AC.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Xuân Minh Đức*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**).

Gọi *X, Y* theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác *AOL, AOK*; *X', Y'* theo thứ tự là giao điểm của OX, OY và AB, AC; r là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác *AOK, AOL*.

Vì $OA=OC$ và OX là phân giác của góc $\widehat{AOL}$

nên $\widehat{AOX'}=\frac{1}{2}\widehat{AOL}=\frac{1}{2}\left(\widehat{OAC}+\widehat{OCA}\right)$

$$=\frac{1}{2}.2\widehat{OAC}=\widehat{OAC}=\widehat{OAY'}.$$

Do đó $OX'/\!/AY'$. Tương tự $OY'/\!/AX'$.

Vậy *AX'OY'* là hình bình hành (1).

Do đó $S_{AOX'}=S_{AOY'}$ (2).

Dễ thấy $S_{AOX}=\frac{1}{2}r.AO=S_{AOY}$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $S_{AXX'}=S_{AYY'}$.

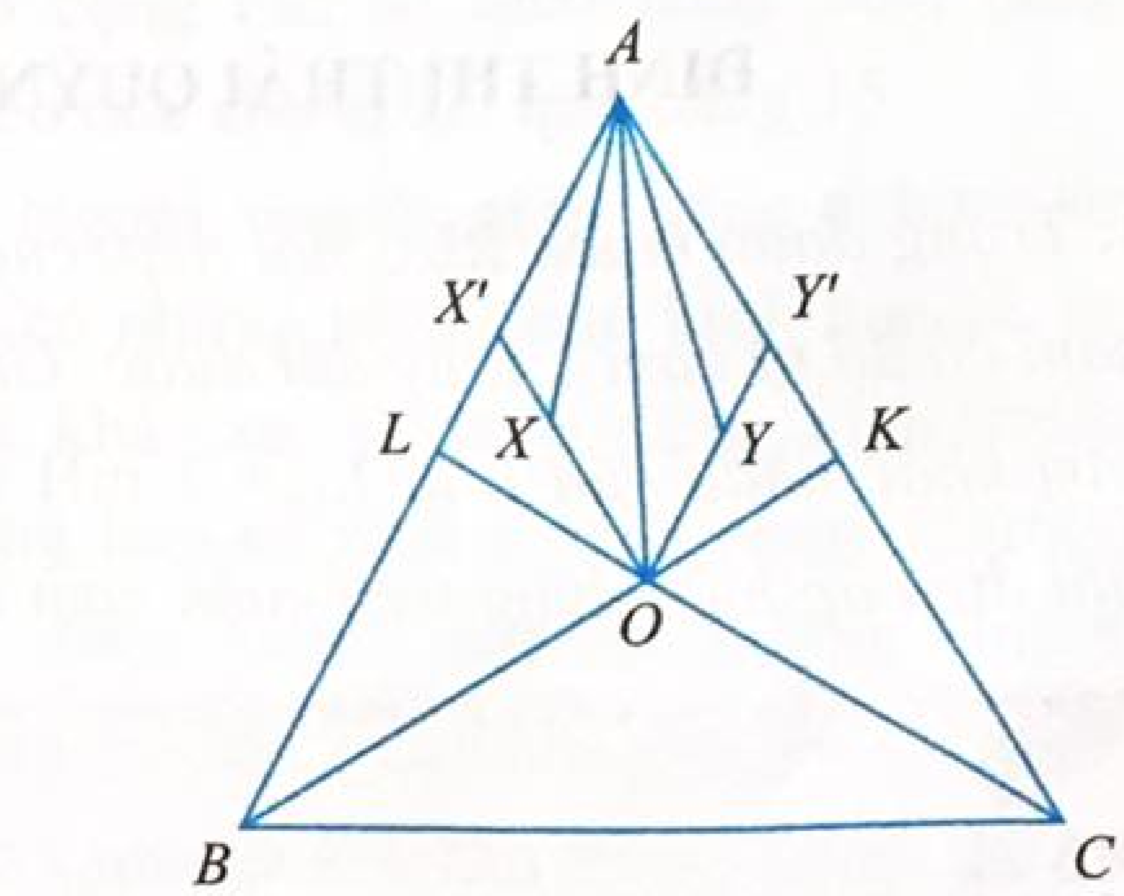
Do đó $\frac{1}{2}r.AX'=\frac{1}{2}r.AY'$. Vậy $AX'=AY'$ (4).

Từ (1) và (4) suy ra $AX'OY'$ là hình thoi.

Do đó: $\widehat{AOB}=\widehat{AX'O}=\widehat{AY'O}=\widehat{AOC}$.

Kết hợp với $OB=OA=OC$, suy ra:

$$\Delta OAB=\Delta OAC\,(\text{g.c.g}). \text{ Vậy } AB=AC.$$



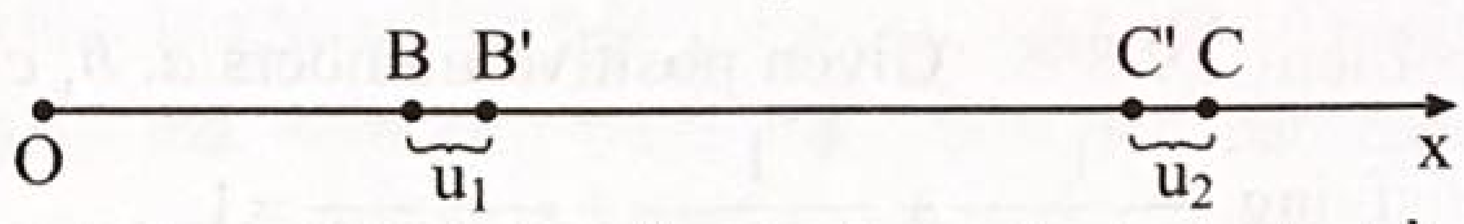
Nhận xét. 1) Bài toán này không khó, có 4 bạn tham gia giải, chỉ có bạn *Nguyễn Xuân Minh Đức* có lời giải ngắn gọn như trên.

2) Xin nêu tên ba bạn còn lại: **Thanh Hóa:** *Nguyễn Trình An*, 9K, THCS Trần Mai Ninh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Khương Duy*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/551. *Một sóng dọc truyền theo trục Ox có tần số 15 Hz, biên độ 4 cm. Tốc độ truyền sóng là 12 m/s. Xét hai phần tử B và C trên Ox có vị trí cân bằng cách nhau 40 cm. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa hai phần tử B và C khi có sóng truyền qua.*

Lời giải. Bước sóng: $\lambda=\frac{v}{f}=\frac{12}{15}=0{,}8\,\text{m}=80\,\text{cm}$



Gọi *B'* và *C'* là hai phần tử sóng có vị trí cân bằng là *B* và *C*.

$BC=40\text{ cm}=\frac{\lambda}{2}\Rightarrow$ *B'* và *C'* dao động ngược pha.

Phương trình dao động của *B'* và *C'* là :

$$u_1=a\cos(30\pi t+\varphi);\ u_2=-a\cos(30\pi t+\varphi);$$

$B'C' = OC' - OB' = OC + u_1 - (OB + u_2)$

$= BC + u_1 - u_2 = BC + 2a\cos(30\pi t + \varphi);$

$(B'C')_{\min} \Leftrightarrow \cos(30\pi t + \varphi) = -1$

$\Rightarrow (B'C')_{\min} = BC - 2a = 40 - 2.4 = 32$ cm.

Nhận xét. Chúc mừng một bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Phạm Văn Anh*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/541. *Trong đoạn mạch RLC nối tiếp, cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm L thay đổi được. Ứng với hai giá trị khác nhau của L là $L_1 = 3$ mH và $L_2 = 6$ mH thì điện áp hiệu dụng trên cuộn cảm có giá trị như nhau. Tìm giá trị của L để điện áp hiệu dụng trên cuộn cảm đạt cực đại.*

Lời giải. $\frac{UZ_1}{\sqrt{R^2+(Z_1-Z_C)^2}} = \frac{UZ_2}{\sqrt{R^2+(Z_2-Z_C)^2}}$

$\Rightarrow \frac{2Z_1Z_2}{Z_1+Z_2} = Z_C + \frac{R^2}{Z_C}$. Mặt khác: $U_{L\max}$ khi

$Z_L = Z_C + \frac{R^2}{Z_C} \Rightarrow Z_L = \frac{2Z_1Z_2}{Z_1+Z_2} \Rightarrow L = \frac{2L_1L_2}{L_1+L_2} = 4$ mH.

Nhận xét. Chúc mừng bạn *Phạm Văn Anh*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp** đã có lời giải đúng.

NGUYỄN XUÂN QUANG

****

PROBLEMS . . . *(Tiếp theo trang 19)*

Problem T7/555. Let $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, the set of the first n positive integers.

a) For $n = 10$, let list 10 3-element subsets of X so that the intersection of any two of those has at most one element.

b) For $n = 15$, prove that there exists at least 333 6-element subsets X so the intersection of any two of those has at most 4 elements.

Problem T8/555. A circle (I) is internally tangent to a circle (O) at T. A chord AB of (O) is tangent to (I) at E. TA intersects (I) at the point N which is different from T and TB intersects (I) at the point M which is different from T. Suppose that AM intersects BN at J. Show that TE is the angle bisector of $\widehat{ATB}$ and EI is the angle bisector of $\widehat{TEJ}$.

Problem T9/555. Given positive numbers a, b, c satisfying $\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} = 1.$

Show that $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge a + b + c.$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/555. Given two sequences (x_n) and (y_n) where $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ and for every $n \in \mathbb{N}$ we have: $2\sqrt{2}x_{n+1} = (\sqrt{3}+1)x_n - (\sqrt{3}-1)y_n$,

$2\sqrt{2}y_{n+1} = (\sqrt{3}-1)x_n + (\sqrt{3}+1)y_n$.

Show that there exists a number $T \in \mathbb{N}^*$ so that $x_{n+T} = x_n, y_{n+T} = y_n$, for every $n \in \mathbb{N}$.

Problem T11/555. Find the smallest real number a so that the function

$$f_n(x) = \frac{1}{n+3}x^{n+3} + \frac{2}{n+2}x^{n+2} + \frac{1}{n+1}x^{n+1} - x + 2024$$

are increasing on $(a;+\infty)$ where n is any positive integer.

Problem T12/555. Given an acute scalene triangle ABC inscribed in a circle (O). Let AD be the angle bisector of $\widehat{BAC}$. The point I is on AD so that BI intersects AC at E, CI intersects AB at F and $IE = IF$. Let J be the circumcenter of AEF and N the intersection between AI and EF. Let G be the intersectionf between EF and the tangent at A of the circle (O). Assume that L is the second intersection between two circles (O) and (J). Show that GL passes through the midpoint of the arc $\widehat{EAF}$.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN
(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

BẠN CÓ BIẾT?

THI TOÁN VÀ SỬ DỤNG TOÁN HỌC THỜI XƯA

NGUYỄN THANH GIANG

(Hưng Yên)

Khoa cử là chế độ tuyển chọn người để cất nhắc vào đội ngũ quan lại thời phong kiến thông qua các kỳ thi. Khoa cử căn cứ vào các đối tượng khác nhau mà có ba hình thức chủ yếu là thi tuyển Quan văn, thi tuyển Quan võ và tuyển Lại viên. Bài viết này đề cập đến việc sử dụng kiến thức toán học trong đời sống xã hội người Việt xưa và thi toán trong tuyển chọn Lại viên thời phong kiến.

Sơ lược việc sử dụng kiến thức toán học trong đời sống xã hội người Việt xưa

Ngày nay, dựa vào tài liệu khảo cổ học, lịch sử ngôn ngữ và khảo sát cấu trúc các công trình kiến trúc cổ còn lại... cho thấy người Việt Nam xưa cũng giỏi tính toán và toán học đã được ứng dụng khá nhiều vào đời sống từ rất sớm. Số học là môn phát sinh trước và sớm nhất. Nếu đứng ở góc độ số học để khảo cứu những cánh sao, tia sáng mặt trời, đàn chim, chiếc thuyền... khắc vẽ trên mặt, trên thân các trống đồng, chúng ta sẽ tập hợp được nhiều sự kiện toán học nằm trong đó, cung cấp cho ta một bức tranh đẹp về trình độ nắm vững và sử dụng số học của tổ tiên ta thời cổ đại. Nghiên cứu các hoa văn trên đồ gốm Chu Đậu, Bát Tràng,... tìm được chúng ta thấy các dạng hoa văn rất phong phú: hình chữ S, có loại dài, loại vuông, loại nối ngang lưng nhau; hình chữ X, chữ A; hai đường song song uốn khúc đều đặn, liên tục; hình tam giác xếp ngược chiều nhau, hình tam giác cuộn. Trong Bảo tàng Lịch sử Việt Nam có chiếc chóe gốm men do những người thợ gốm Bát Tràng chế ra trên đó có bảng vuông thể hiện các số bằng các chấm tròn. Điều kỳ diệu của bảng số này là: các số 1, 2, 3,..., 8, 9 được sắp xếp thành bảng vuông cấp ba (ma phương cấp ba) sao cho khi cộng các số theo hàng dọc, hàng ngang và chéo đều cho ta kết quả bằng 15.

Người Việt Nam từ hàng nghìn năm trước đây đã có những nhận thức hình học và tư duy chính xác khá cao. Từ hình dáng, kích thước các trống đồng loại cổ nhất ở Việt Nam, chúng ta hiểu, để tạo được những mặt tròn đường kính to nhỏ khác nhau, những mặt phẳng, những góc độ chính xác ấy, các nhà chế tác trống đồng thuở đó phải sử dụng các con số, các loại thước chính xác. Có ý kiến cho rằng một số hình ảnh trên trống đồng chính là bộ lịch âm sớm nhất của nhân loại, với chu kỳ 18 năm, một kiến thức về thiên văn học của người Việt xưa.

Có thể nói người Việt sử dụng toán học trong đo đạc diện tích ruộng đất, tính toán các công trình xây dựng, kiến trúc, đào đắp kênh mương, đê điều và sử dụng toán học trong cuộc sống hàng ngày...

Các kỳ thi chọn Lại viên

Lại viên (còn gọi là Lại điển, Liêu thuộc) là những người giúp việc cho các quan, tương đương với địa vị của các công chức hệ thống chính trị của ta hiện nay. Lại có thể chuyển thành quan nếu có công lao và thành tích làm việc. Lại viên làm các công việc như coi sổ sách, giấy má, tính sưu thuế, tính diện tích các đám ruộng, việc binh lương và các việc quốc dụng khác như tính thể tích con đê, thành, hào, tính số gạch, gỗ, ... Trong lịch sử, nhà nước phong kiến Việt Nam tổ chức các kỳ thi trong đó có thi toán để chọn người làm Lại viên. Ở giai đoạn này người làm việc lại chưa được coi trọng đúng mức do đó kẻ học để đi thi khoa cử không thi chọn Lại viên. Nhà sử học *Phan Huy Chú* đã viết trong **Lịch triều hiến chương** rằng *"Xét ra chức nha, Lại cho là hèn thấp. Việc kiểm soát sổ sách không giao cho kẻ sĩ. Kẻ sĩ làm văn, cho việc Lại là ti tiện nên không nhúng tay vào".*

Tranh vẽ cảnh trường thi xưa

Quang cảnh trường thi Nam Định xưa

Nguồn: Internet

Càng về sau, do yêu cầu tổ chức của nền hành chính, nhu cầu dự thi của xã hội ngày càng tăng (có kỳ thi tới hàng vạn người) nên các nhà cầm quyền quan tâm nhiều hơn đối với việc tổ chức thi Lại viên.

Các kỳ thi chọn Lại viên cũng không được tổ chức định kỳ. Cứ 10 năm, hoặc 15 năm mới có một kỳ thi chọn Lại viên.Theo **Vân đài loại ngữ** của *Lê Quý Đôn*, kỳ thi chọn Lại viên được biết sớm nhất là vào năm Đinh Tỵ (1077), niên hiệu *Anh Vũ Chiêu Thắng* thứ 2, triều *Lý Nhân Tông*, với 3 môn: Thư (viết chữ), Toán (phép tính) và Hình luật. Đến năm Tân Dậu (1261), đời *Trần Thánh Tôn*, thi Lại viên chỉ còn hai môn Thư và Toán. Tiếp đó, các kỳ thi Lại viên được tổ chức qua các triều vua, có kỳ không có môn Toán. Các kỳ thi chọn Lại viên tiếp theo được tổ chức vào các năm 1363, tháng 3 năm Quý Mão đời Vua *Trần Dụ Tôn*; năm 1373, tháng 8 đời Vua *Trần Duệ Tôn*; năm 1393, đời Vua *Trần Thuận Tôn* không thấy có tài liệu nào ghi lại việc thi môn Toán.

Dù chỉ tồn tại trong thời gian ngắn, nhà Hồ (1400-1407) đã có nhiều cải cách trên nhiều lĩnh vực khác nhau, trong đó có giáo dục. Ngay từ khi chưa làm Vua, *Hồ Quý Ly* đã rất quan tâm đến giáo dục và thi cử thời kỳ này. Năm 1396, ông cho sửa lại chế độ thi cử, cho đặt thêm trường thi viết chữ và toán. Thời này, nhà Hồ không những bắt buộc chương trình thi toán mà còn áp dụng rộng rãi toán học vào kinh tế, sản xuất: dùng toán học đo lại tổng số ruộng đất toàn quốc, lập thành sổ sách điền địa từng lộ, phủ, châu, huyện.

Năm 1437, tháng giêng năm Đinh Tỵ đời Vua *Lê Thái Tông* có thi toán, 690 người trúng cử được bổ các chức ở các nha môn. Tiếp theo, vào các năm 1475, 1477, 1483, 1507, 1572, 1722 tổ chức các kỳ thi chọn Lại viên. Năm 1762 tháng 5, năm Nhâm Ngọ đời Vua *Lê Hiển Tông* là kỳ thi chọn Lại viên cuối cùng có thi toán. Đặc biệt kỳ thi năm 1507, tháng chạp năm Bính Dần, đời Vua *Lê Uy Mục* tổ chức thi Toán ở sân Điện Giảng Võ có hơn 3 vạn thí sinh, 1519 người trúng tuyển, trong đó *Nguyễn Tử Khương* đỗ đầu.

Chương trình và tài liệu toán thời xưa

Không có tài liệu nào cho chúng ta biết chương trình thi toán thời Lý, thời Trần ra sao, nhưng ở thời Lê, chương trình thi toán được quy định như sau:

Về số học có các phép tính: cộng, trừ, nhân, chia được dùng bàn tính hoặc thẻ (trù toán). Các phép chia bình phân (chia đều), sai phân (chia tỷ lệ) khá phức tạp, có cả tạp số, ví dụ một mẫu bằng 10 sào, 1 sào bằng 15 thước. Ngoài ra thí sinh còn phải dùng đến cả phép khai phương (lấy căn bậc hai).

Về hình học, chương trình gồm: tính diện tích các hình tự phương điền (hình vuông), trực điền (hình chữ nhật), thê điền (hình thang), khuê điền (thang cân), tà điền (tam giác thường), viên điền (hình tròn), thuẫn điền (hai cung úp vào nhau), hình bầu dục (elip), mi điền (hình đường mày), cổ điền (hình trống).

Trạng Lường Lương Thế Vinh
Nguồn: Internet

Có một vấn đề chưa rõ là ngày xưa người ta tính diện tích các hình trong chương trình thi theo công thức gì? Đã biết dùng số pi chưa và độ chính xác đến mức nào. Rất tiếc là không có một đề thi hình học nào để có thể tham khảo. Hơn nữa các công trình, các sách toán không được in ấn hoặc có cũng không được lưu giữ cẩn thận, bài bản. Một người Anh tên là *Dampier*, sau một thời gian sống tại Việt Nam trong bài viết **Một chuyến đi tới Bắc Kỳ năm 1688** (Voyage au Tonkin en 1688) in trong cuốn **Tạp chí Đông Dương** (Revue Indochinoise) có nhận xét: *"Người Việt Nam rất giỏi số học, hình học và thiên văn học"*. Ngày nay chúng ta chỉ biết đến: Một là *Lương Thế Vinh* (1442 - 1496), người Vụ Bản, Nam Định, đỗ Trạng Nguyên khoa thi năm Quý Mùi 1463, đời Vua *Lê Thánh Tông* với cuốn **Đại thành toán pháp**, nay còn bản in thời Vĩnh Thịnh (1705 - 1719). **Đại thành toán pháp** được đưa vào chương trình thi cử suốt 450 năm trong lịch sử giáo dục Việt Nam. Sách dạy bảng cửu chương, phép bình phương, khai căn bậc hai, sai phân, phân số, cách đo bóng tính chiều cao của cây, hệ thống đo lường đương thời (tiền, vải, thóc, gạo, ...), toán đo đạc diện tích ruộng đất, từ hình vuông, hình chữ nhật, tam giác, hình tròn, hình viên phân, … Hai là *Vũ Hữu* (1437 – 1530), người làng Mộ Trạch, Hải Dương; đỗ Hoàng Giáp (tức Tiến sĩ) cùng khoa với *Lương Thế Vinh*, với cuốn **Lập thành toán pháp**. **Lập thành toán pháp** bao gồm những kiến thức cơ bản về hình học và số học, hướng dẫn cách đo lường ruộng đất theo các đơn vị mẫu, sào của nước ta, tính toán các công trình xây dựng, kiến trúc, đào đắp kênh mương, đê điều, ... Một số cuốn sách khác về toán ngày xưa phải kể đến là cuốn **Cửu chương lập thành tính pháp** của ông *Nguyễn Hữu Chung*, trước thời *Vĩnh Thịnh* (1705 - 1719). Ông *Phan Huy Khuông*, tự là *Lã Phố* (người làm vườn già), người làng Đông Ngạc, huyện Từ Liêm, Hà Nội; sinh vào thời *Lê Mạt*, soạn sách **Chỉ minh lập thành toán pháp** để dạy con cháu trong nhà đi thi chọn Lại viên.

Toán học là một trong những khoa học cổ nhất của loài người. Nhưng chưa bao giờ toán học phát triển mạnh mẽ và có nhiều ứng dụng sâu sắc như ngày nay, xâm nhập vào hầu hết các ngành khoa học và là nền tảng của nhiều lí thuyết khoa học quan trọng. Toán học có vai trò rất to lớn trong đời sống thường ngày nhưng không dễ nhìn thấy. Nó có mặt trong các thiết bị được sử dụng rộng rãi nhưng thường bị che lấp bởi công nghệ. Quá trình sản xuất và đời sống ngày càng được tự động hóa, xã hội càng sử dụng nhiều trí tuệ nhân tạo thì vai trò của toán học ngày càng lớn. Toán học chính là cuộc sống, toán học và cuộc sống luôn đi liền với nhau. Mục đích của toán học là cải thiện cuộc sống, nhu cầu cuộc sống là động lực để toán học phát triển.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1) Bài viết *Thi Toán đời xưa* của GS. Hoàng Xuân Hãn đăng trên báo Khoa Học số 13, 14 (tháng 1, 2 năm 1943, trang 207- 215), in lại trong *La Sơn Yên Hồ Hoàng Xuân Hãn*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1998.

2) *Sự phát triển giáo dục và chế độ thi cử ở Việt Nam thời phong kiến*, Nguyễn Tiến Cường. Nhà xuất bản Giáo dục, 1998.

3) Bài viết *Tuyển chọn và sử dụng quan lại ở nước ta thời kỳ trung đại* - TS. Đỗ Minh Cương, Viện Khoa học Tổ chức Nhà nước.

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

THEO CHƯƠNG TRÌNH VÀ SGK MỚI

PHÁT TRIỂN TƯ DUY VÀ LẬP LUẬN TOÁN HỌC CHO HỌC SINH THPT THÔNG QUA KHAI THÁC ỨNG DỤNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

NGUYỄN VĂN HẬU - TRẦN ĐÌNH HOÀNG - NGUYỄN VIẾT CƯỜNG

(GV THPT Nguyễn Trường Tộ, Hưng Nguyên, Nghệ An)

Mục tiêu chung của giáo dục phổ thông 2018 và bộ môn Toán nói riêng là giúp học sinh phát triển toàn diện về đạo đức, trí tuệ, thể chất, thẩm mỹ và các kỹ năng cơ bản, phát triển năng lực cá nhân, tính năng động và sáng tạo, hình thành nhân cách con người Việt Nam xã hội chủ nghĩa...

Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán (2018) xác định năng lực tư duy và lập luận toán học là một trong những yếu tố cốt lõi của năng lực toán học với yêu cầu: *"Thực hiện được tương đối thành thạo các thao tác tư duy, đặc biệt phát hiện được sự tương đồng và khác biệt trong những tình huống tương đối phức tạp và lí giải được kết quả của việc quan sát; Sử dụng được các phương pháp lập luận, quy nạp và suy diễn để nhìn ra những cách thức khác nhau trong việc giải quyết vấn đề; Nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề. Giải thích, chứng minh, điều chỉnh được giải pháp thực hiện về phương diện toán học"*

Trong chương trình môn Toán trung học phổ thông, Hình học không gian (HHKG) đóng một vai trò quan trọng. Nó thường xuất hiện là câu khó trong đề thi học sinh giỏi, cũng như những câu vận dụng, vận dụng cao trong đề thi tốt nghiệp THPT. Không những thế mà đây là chủ đề đa dạng về dạng toán hay, có nhiều cách giải. Đặc biệt nhiều bài toán HHKG giải bằng cách áp dụng kiến thức vectơ thể hiện rõ sự ưu điểm và độc đáo.

Khai thác ứng dụng của vectơ trong không gian để giải toán là một cách nghiên cứu giải bài tập hình học bằng phương pháp vectơ là sự tổng hợp, phối hợp nhịp nhàng các năng lực trí tuệ như: quan sát, ghi nhớ, óc tưởng tượng và chủ yếu là năng lực tư duy mà đặc trưng là năng lực tư duy độc lập, linh hoạt, sáng tạo, vận dụng những hiểu biết đã học để giải quyết vấn đề được đặt ra một cách tốt nhất. Góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho HS.

Chúng ta khai thác một số biện pháp sư phạm góp phần phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh trung học phổ thông thông qua khai thác ứng dụng của vectơ trong không gian như sau

1. Củng cố kiến thức liên quan và tiếp cận các dạng toán hình học không gian bằng phương pháp vectơ từ đó hoàn thiện phương pháp giải mỗi dạng

Vì khuôn khổ của báo có giới hạn trang viết nên chúng tôi không chi tiết các kiến thức cơ bản của vectơ. Song người giáo viên (GV) trước khi khai thác phương pháp vectơ để giải toán thì hệ thống lại các kiến thức về vectơ và yêu cầu HS vẽ sơ đồ tư duy để khắc sâu lý thuyết.

1.1. Phương pháp chung để giải các bài toán hình học không gian bằng phương pháp vectơ

Bước 1. Chọn 3 vectơ không đồng phẳng làm cơ sở.

Bước 2. Biểu diễn các vectơ cần tính toán theo hệ 3 vectơ cơ sở.

Bước 3. Dựa vào hệ thức biểu diễn ở trên ta tìm mối quan hệ giữa các vectơ cần xét.

Sau đây chúng tôi xin đưa ra một số bài toán HHKG giải bằng phương pháp vectơ.

1.2. Định hướng giúp học sinh tìm tòi lời giải bài toán hình học không gian bằng phương pháp vectơ

Bài toán 1. ***Chứng minh 3 điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng.***

Phương pháp giải.

Cách 1. Ta chứng minh $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$, $(k\neq 0, k\neq 1)$ (1).

Để nhận được (1), ta có thể tính vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ thông qua một tổ hợp vectơ trung gian.

Cách 2. Với điểm O bất kì, ta có:

$$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OC}.$$

Như vậy A, B, C thẳng hàng

$\Leftrightarrow \exists m,n\in\mathbb{R}:\overrightarrow{OB}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OC},\forall O,(m+n=1).$

Bài toán 2. Chứng minh ba vectơ đồng phẳng

Phương pháp giải.

Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists m,n\in\mathbb{R}:\vec{c}=m.\vec{a}+n.\vec{b}$ (với m, n xác định duy nhất).

Bài toán 3. Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp giải.

Cho hai đường thẳng phân biệt AB và CD. Khi đó:

$$AB // CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}.$$

Bài toán 4. Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp giải.

Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương thuộc mặt phẳng (P), AB không thuộc (P). Khi đó:

$AB // (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=x\vec{a}+y\vec{b}$ (x, y duy nhất).

Bài toán 5. Chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp giải.

Cho hai mặt phẳng phân biệt (ABC) và (MNP).

Khi đó: $(ABC)//(MNP)$

$$\Leftrightarrow \exists x,y,x_1,y_1\in\mathbb{R}:\begin{cases}\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{MN}+y\overrightarrow{MP}\\ \overrightarrow{AC}=x_1\overrightarrow{MN}+y_1\overrightarrow{MP}\end{cases}.$$

Bài toán 6. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp giải.

Cho hai đường thẳng phân biệt a và b. Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b ta có quy trình như sau:

Bước 1: Chọn bộ vectơ cơ sở, trên đường thẳng a và b chọn hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$.

Bước 2: Biểu thị hai vectơ trên theo bộ vectơ cơ sở.

Bước 3: Xét tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$, nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$ thì kết luận $AB\perp CD$.

Bài toán 7. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Phương pháp giải.

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (ABC). Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (ABC) ta có quy trình như sau:

Bước 1: Chọn bộ ba vectơ cơ sở, trên đường thẳng a ta chọn ra một vectơ $\overrightarrow{MN}$.

Bước 2: Biểu thị ba vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{MN}$ theo bộ ba vectơ cơ sở.

Bước 3: Xét tích vô hướng của $\overrightarrow{MN}$ với $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$, nếu $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN}=0\\ \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{MN}=0\end{cases}$ thì $a\perp(ABC)$.

Bài toán 8. Tính góc giữa hai vectơ

Phương pháp giải.

Góc φ giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ được tính theo công thức: $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}$.

Bài toán 9. Tính góc giữa hai đường thẳng

Phương pháp giải.

Góc φ giữa hai đường thẳng AB và CD được tính theo công thức:

$$\cos\varphi=\left|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}.$$

Bài toán 10. Tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp giải.

Để tính góc giữa đường thẳng MA và (ABC) ta thực hiện như sau:

Đặt $\overrightarrow{AM}=\vec{m}, \overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}$, gọi N là hình chiếu của M trên (ABC). Khi đó:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m}.$$

Do $MN\perp(ABC)$ nên $\begin{cases}(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m})\vec{a}=0\\(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m})\vec{b}=0\end{cases}$.

Nếu $x\vec{a}+y\vec{b}\neq\vec{0}$ (tức là $N\neq A$) thì góc giữa AM và (ABC) bằng góc giữa $\vec{m}$ và $x\vec{a}+y\vec{b}$, còn $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$ thì $AM\perp(ABC)$.

Bài toán 11. Tính góc giữa hai mặt phẳng

Phương pháp giải.

Gọi $\vec{m}$, $\vec{n}$ lần lượt là hai vectơ vuông góc với hai mặt phẳng (P), (Q). Khi đó góc α giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) được tính theo công thức:

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{m}.\vec{n}|}{|\vec{m}|.|\vec{n}|}.$$

Bài toán 12. Tính khoảng cách giữa hai điểm

Phương pháp giải.

Khoảng cách giữa hai điểm A và B là:

$$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}.$$

Bài toán 13. Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Phương pháp giải.

Cho điểm M và đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a}$, điểm A thuộc Δ. Tính khoảng cách từ M đến Δ. Đặt $\overrightarrow{AM}=\vec{m}$, gọi N là hình chiếu của M lên Δ. Khi đó: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=x\vec{a}-\vec{m}$ và $\overrightarrow{MN}\perp\vec{a}\Leftrightarrow\left(x\vec{a}-\vec{m}\right)\vec{a}=0.$

Khoảng cách cần tìm: $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{\left(x\vec{a}-\vec{m}\right)^2}$.

Bài toán 14. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Phương pháp giải.

Cho mp(ABC), điểm M không thuộc (ABC). Tính khoảng cách từ M đến (ABC).

Đặt $\overrightarrow{AM}=\vec{m}, \overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}$, gọi N là hình chiếu của M trên (ABC).

Khi đó: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m}.$

Do $MN\perp(ABC)$ nên

$$\begin{cases}(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m})\vec{a}=0\\(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{m})\vec{b}=0\end{cases}\Rightarrow x,y.$$

Khi biết x,y ta tìm được khoảng cách từ M đến (ABC) bằng $\sqrt{\left(x\vec{a}+y\vec{b}-m\right)^2}$.

Bài toán 15. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp giải.

Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2, d_1 và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_1}$, d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2}$. Gọi P_1P_2 là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 ($P_1\in d_1$, $P_2\in d_2$), khi đó:

$\overrightarrow{P_1P_2}=x\overrightarrow{a_1}+\vec{m}+y\overrightarrow{a_2}$, với $\vec{m}$ là vectơ trung gian.

Do $\begin{cases}\overrightarrow{P_1P_2}.\overrightarrow{a_1}=0\\\overrightarrow{P_1P_2}.\overrightarrow{a_2}=0\end{cases}\Rightarrow x,y$. Khoảng cách cần tìm:

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{(x\overrightarrow{a_1}+\vec{m}+y\overrightarrow{a_2})^2}.$$

2. Rèn luyện các thao tác tư duy cho học sinh thông qua giải toán hình học không gian bằng phương pháp vectơ

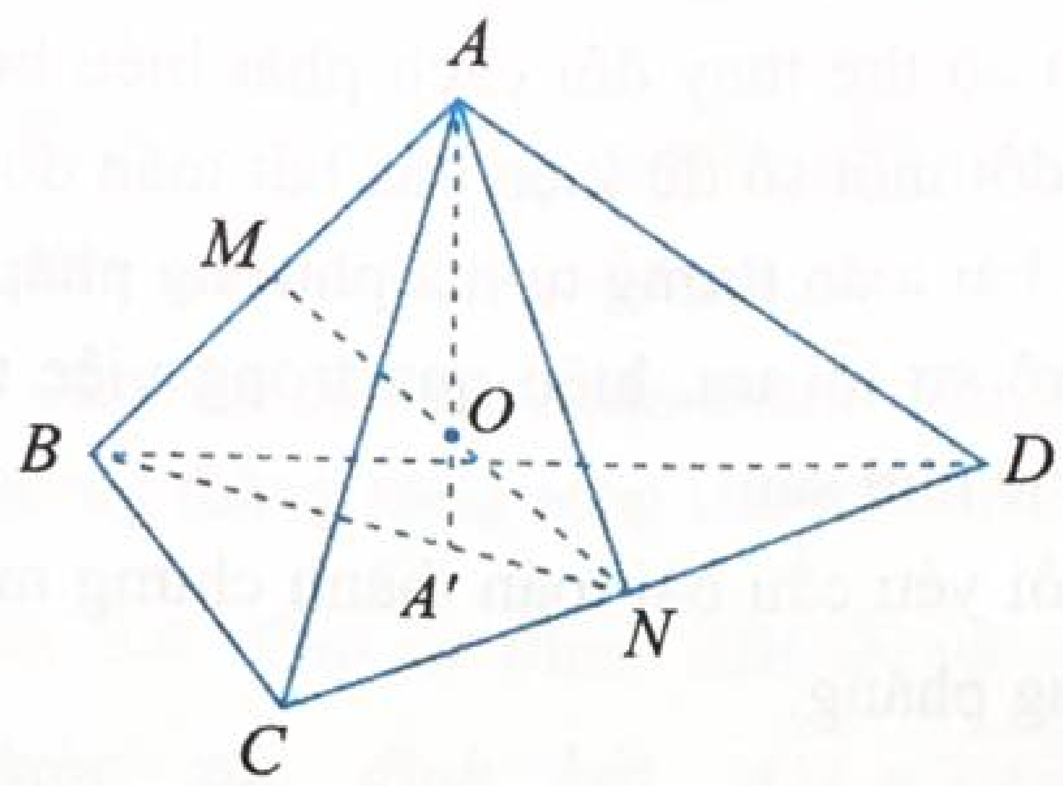
Trong quá trình dạy học, việc rèn luyện các thao tác tư duy cho học sinh sẽ rèn luyện cho HS tính chịu khó, kiên trì, tính mềm dẻo, nhuần nhuyễn, độc đáo, sáng tạo của tư duy. Qua đó HS sẽ ngày một yêu thích môn Toán hơn, đặc biệt góp phần phát triển cho học sinh năng lực tư duy và lập luận toán học.

2.1. Khai thác phương pháp vectơ để giải các bài toán hình học không gian thuần túy

Thí dụ 1 (Chứng minh 3 điểm thẳng hàng). *Cho tứ diện ABCD, các điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng MN, điểm A' là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh ba điểm O, A, A' thẳng hàng.*

Lời giải.

Chọn hệ cơ sở: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$.



Ta có: $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right);$

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$$

Vậy $\overrightarrow{AA'}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AO}$ nên ba điểm O, A, A' thẳng hàng.

Nhận xét. Sử dụng phương pháp vectơ giải dạng toán chứng minh 3 điểm thẳng hàng trong không gian thể hiện rõ sự hiệu quả, nhiều bài toán lời giải rất độc đáo và sáng tạo. Trong bài toán trên nếu ta thay đổi chút ít giả thiết hay kết luận của bài toán để có bài toán tương tự thì chắc hẳn sẽ là khó với các phương pháp ngoài vectơ, cụ thể ta có thể đưa ra các bài toán như sau với cách chứng minh tương tự:

+ Thay đổi yêu cầu bài toán thành tìm điều kiện để ba điểm thẳng hàng.

Bài toán 1.1. *Cho tứ diện ABCD, các điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Điểm A' là trọng tâm của tam giác BCD. Xác định vị trí của điểm O trên đoạn thẳng MN để ba điểm O, A, A' thẳng hàng.*

+ Thay đổi yêu cầu bài toán thành tính tỷ lệ của hai đoạn thẳng.

Bài toán 1.2. *Cho tứ diện ABCD, các điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng MN, điểm A' là trọng tâm của tam giác BCD. Tính tỷ số $\frac{AO}{AA'}$.*

Chú ý. *Điểm O trong thí dụ 1 chính là trọng tâm của tứ diện ABCD. Đây là một cách để xác định trọng tâm của tứ diện.*

Bài toán tương tự với sự mở rộng như thay đổi vị trí của điểm *M* và *N*.

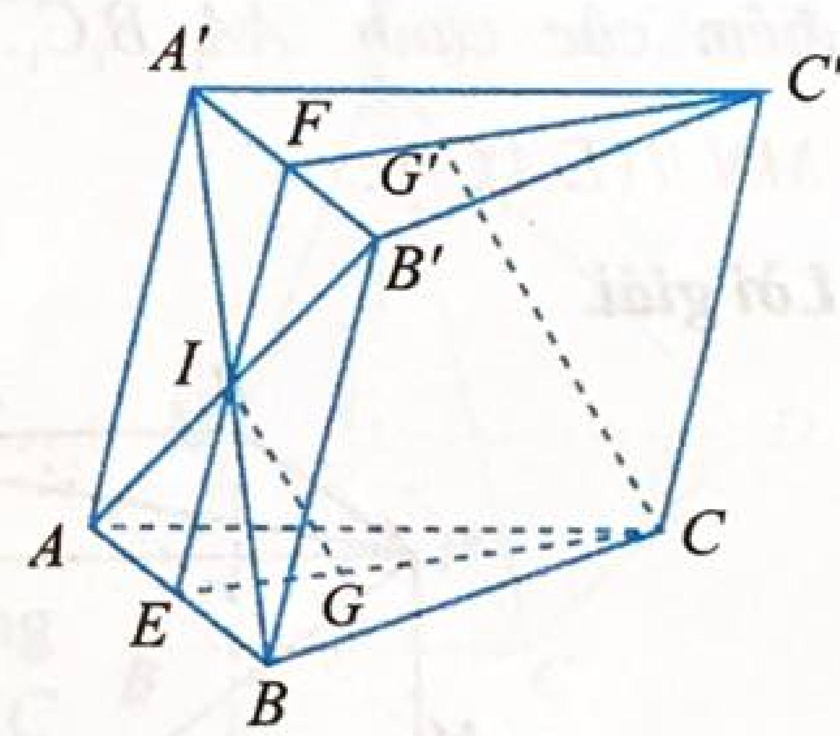
Bài toán 1.3. *Cho tứ diện ABCD, M và N là các điểm lần lượt thuộc AB và CD sao cho $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND}=-\overrightarrow{NC}$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AD, MN, BC. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.*

Bài toán 1.4. *Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc AB, CD thỏa mãn $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND}=-2\overrightarrow{NC}$. Các điểm I, J, K lần lượt thuộc AD, MN, BC sao cho $\overrightarrow{IA}=k\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{JM}=k\overrightarrow{JN}$, $\overrightarrow{KB}=k\overrightarrow{KC}$. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.*

Thí dụ 2 (Chứng minh hai đường thẳng song song). *Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AB' và $A'B$. Chứng minh rằng $GI \parallel CG'$.*

Lời giải.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, $A'B'$.



Chọn hệ vectơ cơ sở $\overrightarrow{A'A}=\vec{a}, \overrightarrow{A'B'}=\vec{b}$, $\overrightarrow{A'C'}=\vec{c}$.

Ta biểu thị được như sau: $\overrightarrow{CG'}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}$ (1);

$$\overrightarrow{GI}=\frac{1}{2}\left(-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{c}\right) \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2), ta có được:

$$\overrightarrow{GI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CG'} \Rightarrow GI \parallel CG'.$$

Rõ ràng rằng phương pháp vectơ thể hiện sự hiệu quả và độc đáo. Điều này càng rõ hơn nếu ta thay đổi một số dữ kiện của bài toán này ví dụ như sau:

+ Thay đổi yêu cầu bài toán thành tìm điều kiện để hai đường thẳng song song. Ta có bài toán sau:

Bài toán 2.1. *Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G' trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ và I là giao điểm của hai đường thẳng AB' và $A'B$. Gọi E là trung điểm của AB. Tìm vị trí của điểm G trên CE để $GI // CG'$.*

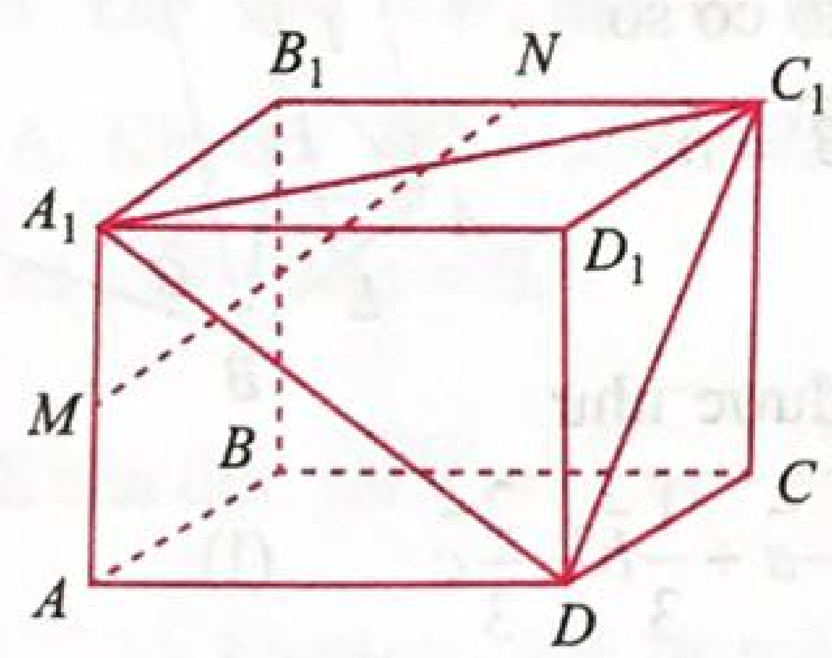
+ Thay đổi yêu cầu bài toán thành tính tỷ lệ đoạn của hai đoạn thẳng. Ta có bài toán sau:

Bài toán 2.2. *Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AB' và $A'B$. Tính tỷ số $\frac{GI}{CG'}$.*

Bằng cách tư duy và lập luận tương tự như trên, ta có thể tạo ra nhiều bài toán mới cho học sinh. Từ đó giúp các em phát huy được khả năng tư duy, óc sáng tạo, tạo được hứng thú trong học toán và giải toán.

Thí dụ 3 (chứng minh đường thẳng và mặt phẳng song song). *Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Giả sử M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AA_1, B_1C_1. Chứng minh rằng $MN // (DA_1C_1)$.*

Lời giải.



Chọn hệ vectơ cơ sở: $\overrightarrow{DA}=\vec{a}, \overrightarrow{DC}=\vec{c}, \overrightarrow{DD_1}=\vec{b}$.

Ta có: $MN // (DA_1C_1) \Leftrightarrow \exists x, y : \overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{DC_1}+y\overrightarrow{DA_1}$.

Biến đổi vectơ ta tìm được: $x=1, y=-\frac{1}{2}$. Suy ra: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DC_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA_1}$. Do đó $MN // (DA_1C_1)$.

Giáo viên có thể thay đổi cách phát biểu bài toán hay thay đổi một số dữ kiện của bài toán đó sẽ tạo ra một số bài toán tương tự mà phương pháp vécto thể hiện rõ sự tối ưu, hiệu quả trong việc tìm lời giải. Cụ thể như sau:

+ Thay đổi yêu cầu bài toán thành chứng minh ba vectơ đồng phẳng.

Bài toán 3.1. *Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Giả sử M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AA_1, B_1C_1. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{DA_1}$ đồng phẳng.*

Hướng dẫn giải. Như vậy ta cần tìm hai số x, y để $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{DC_1}+y\overrightarrow{DA_1}$. Với lời giải như thí dụ 3 ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DC_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA_1}$, ($x=1, y=-\frac{1}{2}$).

Bài toán 3.2. *Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{NA'}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh $MN // (BC'D)$.*

Hướng dẫn giải. Chọn hệ vectơ cơ sở $\overrightarrow{BA}=\vec{a}, \overrightarrow{BB'}=\vec{b}, \overrightarrow{BC}=\vec{c}$. Biểu thị $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC'}$ qua $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ta được $\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{BD}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC'}$. Suy ra $MN // (BC'D)$.

+ Thay đổi dữ kiện để tạo ra bài toán chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng cố định.

Bài toán 3.3. *Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Trên các đường chéo BD và AD' của các mặt bên lần lượt lấy hai điểm thay đổi M và N sao cho $DM = AN = x$ $(0 \le x \le a\sqrt{2})$. Chứng minh rằng khi đó đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.*

Hướng dẫn giải. Chọn hệ vectơ cơ sở $\overrightarrow{AD}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Ta có:

$$\frac{AN}{AD'} = \frac{MD}{BD} = \frac{x}{a\sqrt{2}} = k.$$

Suy ra: $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AD'}$, $\overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{BD}$.

Ta tính được $\overrightarrow{MN} = (2k-1)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BA'}$.

Suy ra $MN \parallel (BCD'A')$ cố định.

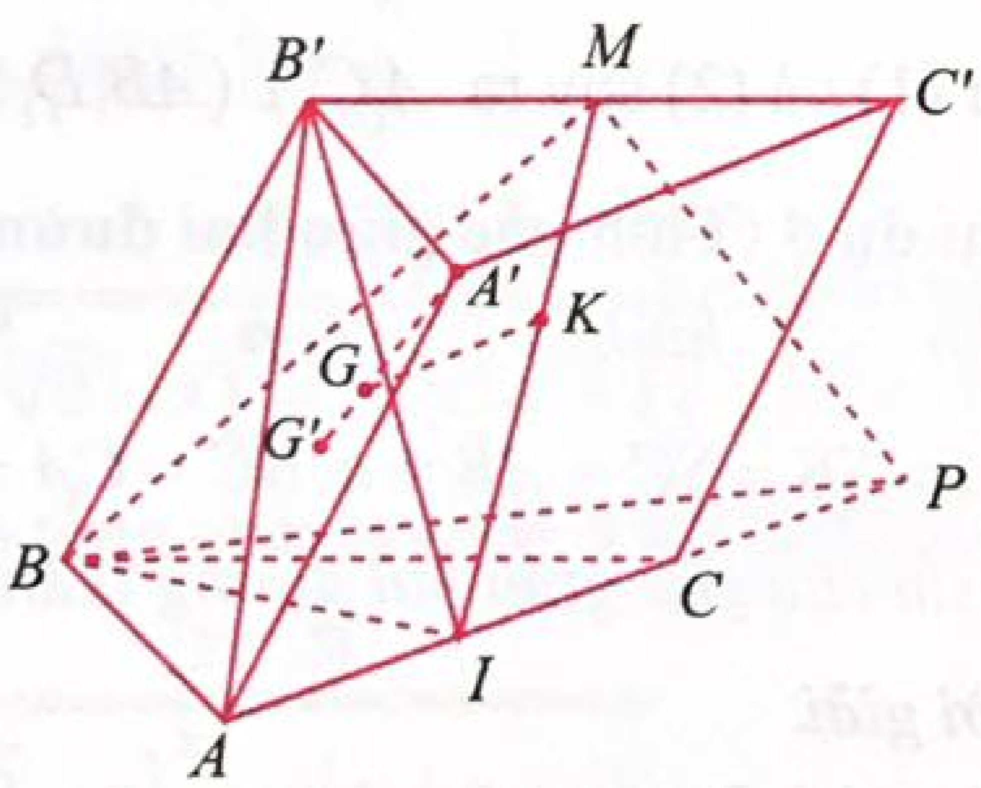
+ Thay đổi yêu cầu bài toán thành tìm điều kiện để để đường thẳng song song với mặt phẳng.

Bài toán 3.4. *Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}$. Tìm x để các đường thẳng AD, BC, MN cùng song song với một mặt phẳng.*

Bài toán 3.5. *Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NB} = y\overrightarrow{ND}$ $(x, y \neq 1)$. Tìm điều kiện giữa x và y để ba đường thẳng AB, CD, MN cùng song song với một mặt phẳng.*

+ Sử dụng điều kiện đường thẳng song song với mặt phẳng để tính tỉ số độ dài của đoạn thẳng.

Bài toán 3.6. *Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I, M lần lượt là trung điểm của $AC, B'C'$. G là trọng tâm tứ diện $AIB'A'$, P đối xứng với I qua C, K thuộc IM sao cho $GK \parallel (BMP)$. Tính $\frac{IK}{IM}$.*



Lời giải.

Chọn hệ vectơ cơ sở: $\overrightarrow{A'B'} = \vec{a}, \overrightarrow{A'A} = \vec{b}, \overrightarrow{A'I} = \vec{c}$.

Ta có: $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{BP} = -\vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c}$,

$$\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{A'K} - \overrightarrow{A'G};$$

$$\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'I}\right) = \frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right).$$

Đặt $\frac{IK}{IM} = \alpha \Rightarrow \overrightarrow{IK} = \alpha\overrightarrow{IM}$. Ta tính được:

$$\overrightarrow{A'K} = \frac{\alpha}{2}\vec{a} - \alpha\vec{b} + \vec{c};$$

$$\overrightarrow{GK} = \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\right)\vec{a} - \left(\alpha + \frac{1}{4}\right)\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}.$$

Vì $GK \parallel (BMP)$ nên

$$\overrightarrow{GK} = x\overrightarrow{BM} + y\overrightarrow{BP} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{x}{2} - y \\ -\alpha - \frac{1}{4} = -2x - 3y \\ \frac{3}{4} = x + 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 2\alpha = 1 \\ 8x + 12y - 4\alpha = 1 \\ 4x + 12y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{8}, y = \frac{3}{8}, \alpha = \frac{1}{8}.$$

Qua bài toán 3.6 ta thấy rằng việc giải bài toán này theo phương pháp HHKG thuần túy sẽ gặp nhiều khó khăn thậm chí thất bại vì học sinh không thể vẽ được hình. Do đó việc chọn lựa phương pháp vectơ để giải bài toán này là hợp lí, hiệu quả.

Thí dụ 4 (Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với $(ABCD)$, SC tạo với đáy một góc 45^0. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

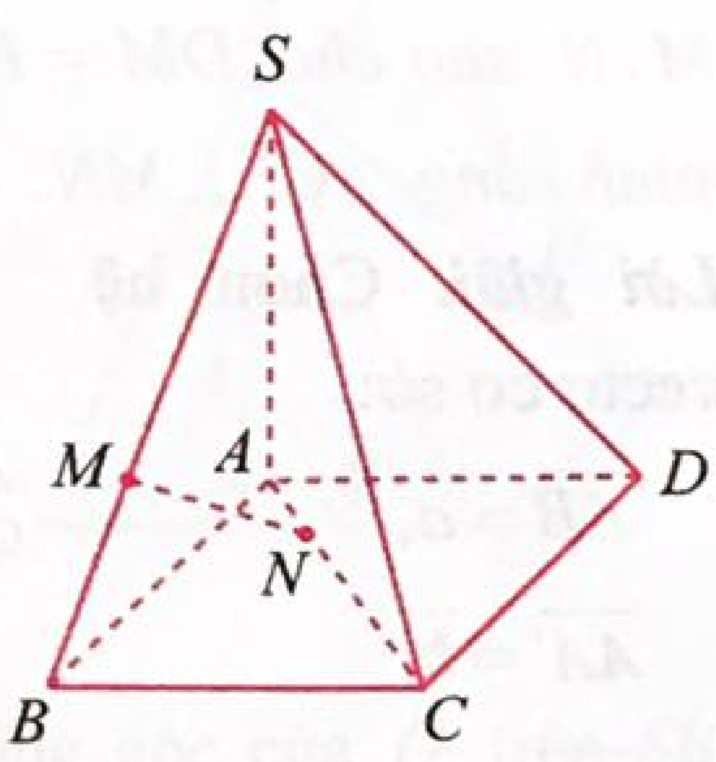
(Trích đề thi THPT Quốc gia 2015)

Lời giải.

Chọn hệ vectơ cơ sở: $\overrightarrow{AD} = \vec{a}; \overrightarrow{AB} = \vec{b}; \overrightarrow{SA} = \vec{c}$.

Khi đó:

$$\begin{cases} \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = 0 \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| = a; |\vec{c}| = a\sqrt{2} \end{cases}.$$



Gọi MN là đoạn vuông góc chung của SB và AC ($M \in SB$, $N \in AC$). Biểu thị vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SB}$ qua các vectơ cơ sở và sử dụng điều kiện $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SB} = 0 \end{cases}$ ta tìm được: $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}$

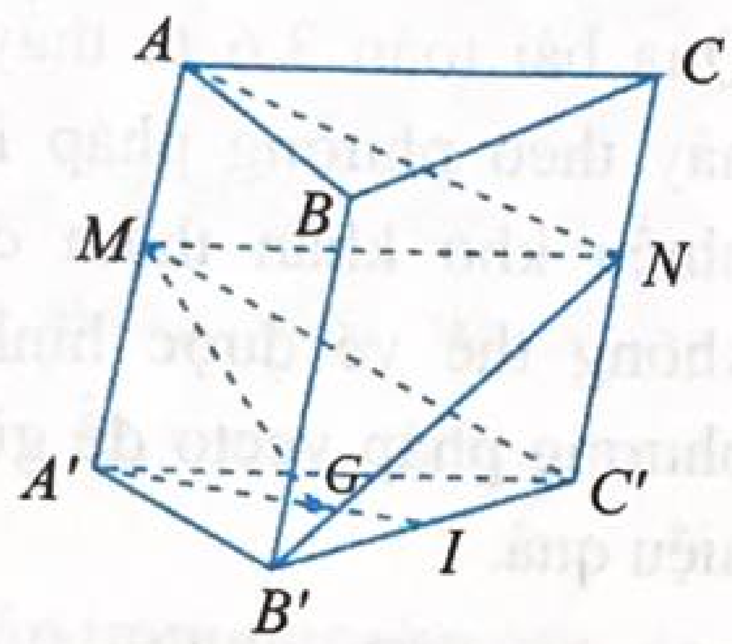
$$\Rightarrow MN = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$ Vậy

khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB là $MN = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Nhận xét. Bài toán này vẫn giải được bằng phương pháp HHKG thuần tuý. Song với phương pháp này HS có thêm một cách nhìn bài toán ở góc nhìn khác mà lời giải rất tự nhiên và độc đáo.

Thí dụ 5 (Chứng minh hai mặt phẳng song song). *Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CC' và G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Chứng minh $(MGC')//(AB'N)$..*

Lời giải.



Chọn hệ vectơ cơ sở $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Ta tính được:

$\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB'} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AN}$.

Suy ra $\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AN}$ đồng phẳng. Mà $G \notin (AB'N)$ suy ra:

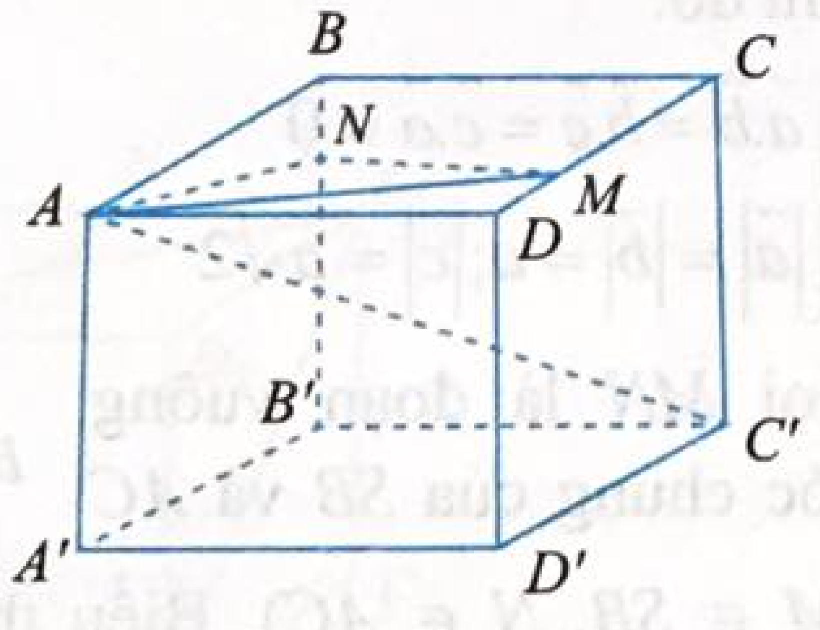
$$MG // (AB'N) \quad (1).$$

Tương tự $MC' // (AB'N) \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $(MGC') // (AB'N)$.

Thí dụ 6 (Chứng minh hai đường thẳng vuông góc). *Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Trên DC và BB' lấy các điểm M, N sao cho $DM = BN = x$ $(0 \le x \le a)$. Chứng minh rằng $AC' \perp MN$.*

Lời giải. Chọn hệ vectơ cơ sở:



$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$,

$\overrightarrow{AA'} = \vec{b}$,

$\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

Ta có:

$\overrightarrow{MN} = \left(\vec{a} + \dfrac{x}{a}\vec{b}\right) - \left(\vec{c} + \dfrac{x}{a}\vec{a}\right) = \left(1 - \dfrac{x}{a}\right)\vec{a} + \dfrac{x}{a}\vec{b} - \vec{c}$ (1);

$\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (2). Từ (1) và (2) ta có:

$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right).\left[\left(1 - \dfrac{x}{a}\right)\vec{a} + \dfrac{x}{a}\vec{b} - \vec{c}\right]$

$$= \left(1 - \frac{x}{a}\right)a^2 + \frac{x}{a}a^2 - a^2 = 0.$$

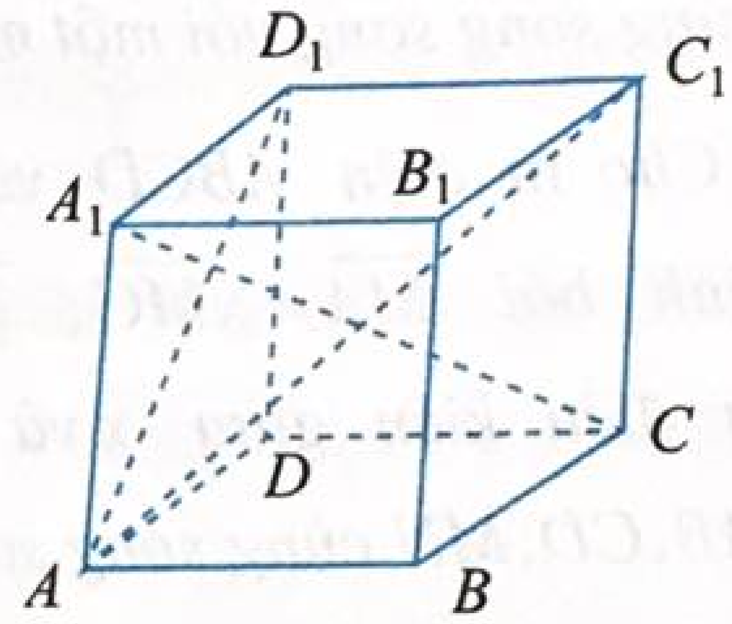
Suy ra $\overrightarrow{AC'} \perp \overrightarrow{MN}$ hay $AC' \perp MN$.

Thí dụ 7 (Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng).

Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có các mặt là các hình thoi bằng nhau. Các góc phẳng của góc tam diện đỉnh A_1 bằng nhau. Chứng minh rằng:

$$A_1C \perp (AB_1D_1).$$

Lời giải.



Chọn hệ vectơ cơ sở: $\overrightarrow{A_1A} = \vec{a}, \overrightarrow{A_1B_1} = \vec{b}, \overrightarrow{A_1D_1} = \vec{c}$.

Gọi m là độ dài cạnh hình hộp. Ta dễ dàng tính được:

$\overrightarrow{A_1C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{AB_1} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{AD_1} = \vec{c} - \vec{a}$;

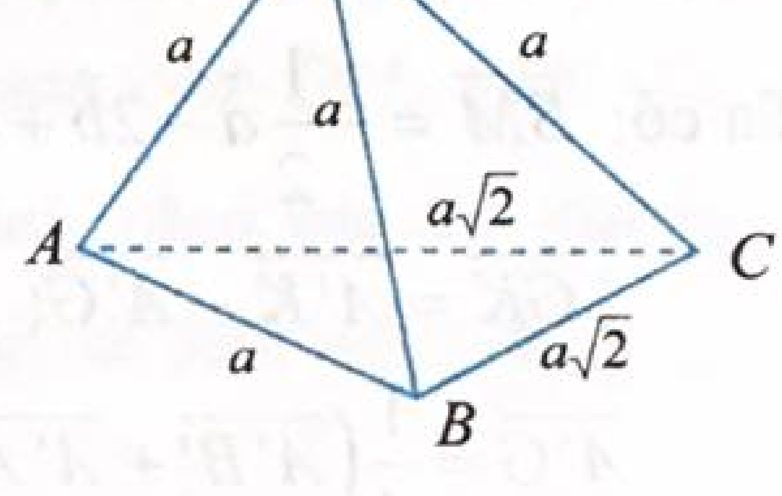
$\overrightarrow{A_1C}.\overrightarrow{AB_1} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{b} - \vec{a}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{A_1C} \perp \overrightarrow{AB_1}$ (1);

$\overrightarrow{A_1C}.\overrightarrow{AD_1} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{c} - \vec{a}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{A_1C} \perp \overrightarrow{AD_1}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $A_1C \perp (AB_1D_1)$.

Thí dụ 8 (Tính góc giữa hai đường thẳng). *Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = a, BC = CA = a\sqrt{2}$ Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng SA và BC.*

Lời giải.



Dùng bộ 3 vectơ cơ sở: $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$, thì dễ xác định được góc giữa các vectơ này nên ta tính được các tích vô hướng:

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = a^2.\cos 60^0 = \frac{a^2}{2},\ \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = 0.$$

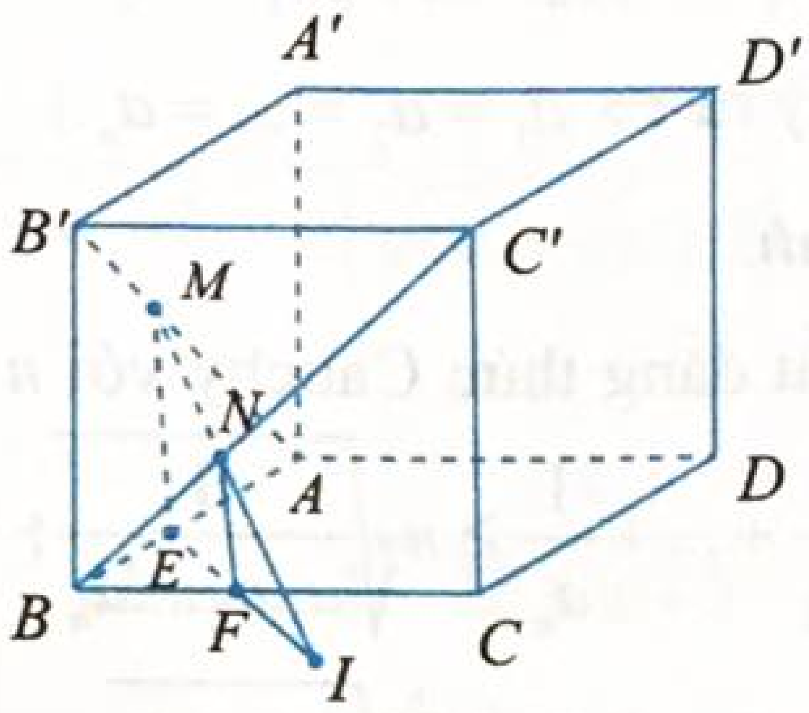
Suy ra: $\cos(SA,BC)=|\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC})|=\dfrac{|\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}|}{SA.BC}$.

$$=\frac{\left|\overrightarrow{SA}.\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}\right)\right|}{a.a\sqrt{2}}=\frac{\frac{a^2}{2}}{a^2\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Thí dụ 9 (Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng).

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Trên cạnh AB' và BC' lấy các điểm M và N tương ứng sao cho $AM=x$, $BN=y$. Tìm x và y để góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 45^0.

Lời giải.



Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$.

Ta có: $\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$

$$=\left(1-\frac{x}{a\sqrt{2}}\right)\vec{a}+\frac{y}{a\sqrt{2}}\vec{b}+\left(\frac{y-x}{a\sqrt{2}}\right)\vec{c}.$$

MN tạo với $(ABCD)$ góc bằng 45^0 thì góc giữa MN và AA' bằng 45^0, tức là:

$$\cos 45^0=\left|\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AA'}\right)\right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|y-x|a^2}{a\sqrt{\left(a\sqrt{2}-x\right)^2a^2+y^2a^2+(y-x)^2a^2}}.$$

Không mất tính tổng quát ta chọn $a=1$. Khi đó:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|y-x|}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-x\right)^2+y^2+(y-x)^2}}$$

$\Leftrightarrow (x-y)^2=\left(\sqrt{2}-x\right)^2+y^2$ (1). Ta có:

(1) $\Leftrightarrow xy=\sqrt{2}x-1\ge 0\Rightarrow \sqrt{2}\ge x\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\ge y\ge 0.$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$(\sqrt{2}-x+y)^2\le\left[(\sqrt{2}-x)^2+y^2\right](1^2+1^2).$$

Kết hợp với (1) ta được:

$$\left[\sqrt{2}-(x-y)\right]^2\le 2(x-y)^2$$

$$\Rightarrow (x-y)^2+2\sqrt{2}(x-y)-2\ge 0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x-y\le -2-\sqrt{2}\\ x-y\ge 2-\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\sqrt{2}-x=y\\ x-y=2-\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\sqrt{2}-1\end{cases}.$

Thí dụ 10 (Tính khoảng cách giữa hai điểm).

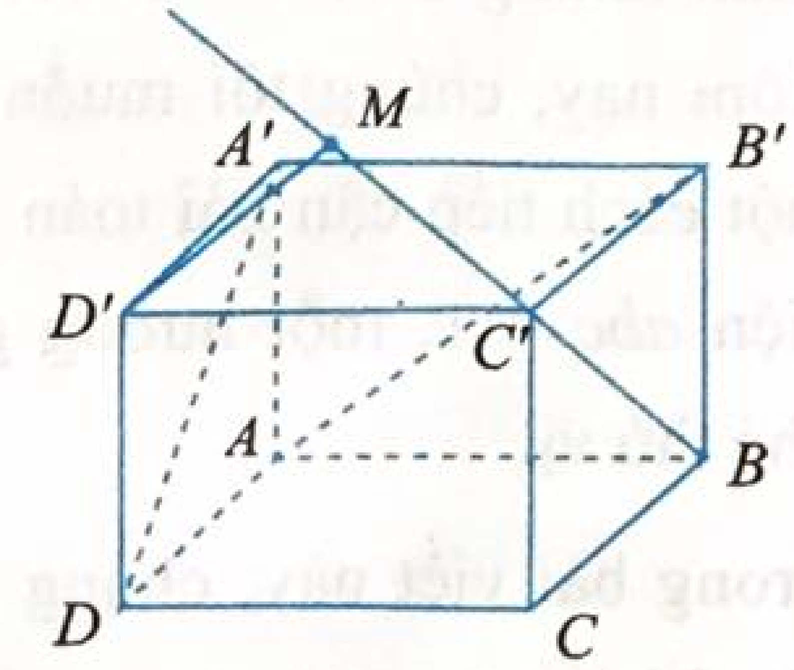
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a. Một mặt phẳng đi qua D' song song với DA' và AB', cắt đường thẳng BC' tại M. Tính độ dài đoạn thẳng $D'M$.

Lời giải.

Đặt: $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$;

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$;

$\overrightarrow{AD}=\vec{c}$.



Ta có:

$$\overrightarrow{D'M}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\Rightarrow\left|\overrightarrow{D'M}\right|=\sqrt{\overrightarrow{D'M}^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Thí dụ 11 (Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với $(ABCD)$, SC tạo với đáy một góc 45^0. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD. Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng SB theo a.

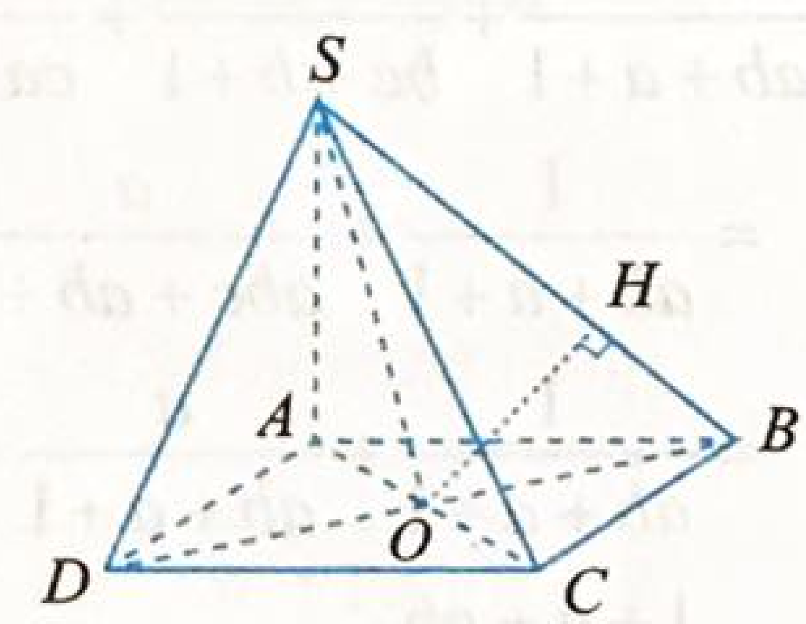
Lời giải.

Chọn hệ vectơ cơ sở:

$\overrightarrow{AD}=\vec{a};\overrightarrow{AB}=\vec{b};\overrightarrow{SA}=\vec{c}.$

Khi đó:

$$\begin{cases}\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=\vec{c}.\vec{a}=0\\ \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=a;\left|\vec{c}\right|=a\sqrt{2}\end{cases}.$$



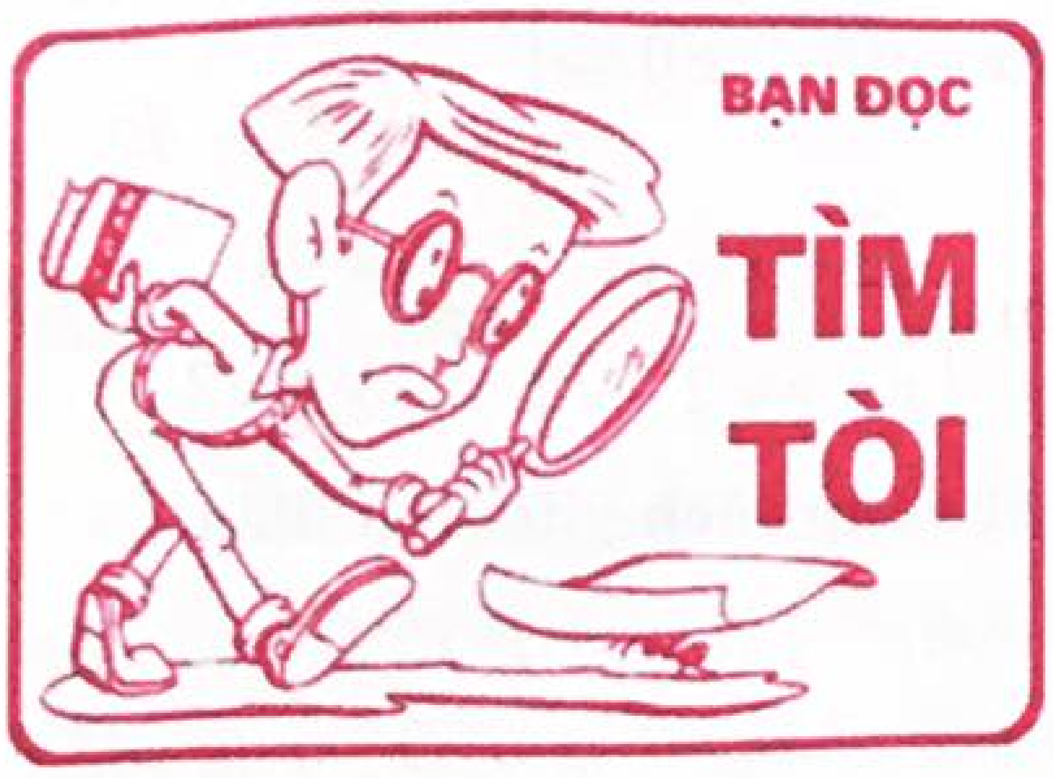
Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên SB.

Giả sử $\overrightarrow{SH}=x\overrightarrow{SB}$. Suy ra: $\overrightarrow{OH}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{6}\vec{c}.$

Vậy khoảng cách từ O đến SB là:

$$OH=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{6}\vec{c}\right)^2}=\frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

(Kỳ sau đăng tiếp)



VÀI NÉT THÚ VỊ VỀ BẤT ĐẲNG THỨC CÓ GIẢ THIẾT abc =1

ĐOÀN THỊ NHÀI *(SV Đại học Y Hà Nội)*
ĐỖ MINH KHÁ *(SV Đại học Quốc gia Hà Nội)*

Lời tựa. Bất đẳng thức vốn là một kho tàng ẩn chứa những điều bí ẩn đối với các bạn yêu toán. Hôm nay, chúng tôi muốn chia sẻ cùng bạn đọc một cách tiếp cận bài toán bất đẳng thức với điều kiện $abc = 1$, một hướng giải mà chúng tôi thấy khá thú vị.

Trong bài viết này, chúng tôi sẽ sử dụng kết quả của 2 bài toán sau:

Bài toán 1. *Với $abc = 1$ và $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:*

a) $\dfrac{1}{ab+a+1}+\dfrac{1}{bc+b+1}+\dfrac{1}{ca+c+1}=1;$

b) $\dfrac{1}{ab+b+1}+\dfrac{1}{bc+c+1}+\dfrac{1}{ca+a+1}=1.$

Chứng minh.

a) Vì $abc = 1$ nên ta có:

$$\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}$$
$$=\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{abc+ab+a}+\frac{ab}{ab.ca+abc+ab}$$
$$=\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{ab+a+1}$$
$$=\frac{1+a+ab}{ab+a+1}=1.$$

b) $$\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ca+a+1}$$
$$=\frac{1}{ab+b+1}+\frac{ab}{ab^2c+abc+ab}+\frac{b}{cab+ab+b}$$
$$=\frac{1}{ab+b+1}+\frac{ab}{ab+b+1}+\frac{b}{ab+b+1}$$
$$=\frac{1+b+ab}{ab+b+1}=1.$$

Bài toán 2. *Với $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ thì*

$$\frac{1}{a_1+a_2+...+a_n}\le\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Chứng minh.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với *n* số dương ta có: $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}\ge n\sqrt[n]{\dfrac{1}{a_1.a_2....a_n}}$;

$$a_1+a_2+...+a_n\ge n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)(a_1+a_2+...+a_n)$$
$$\ge n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1.a_2....a_n}}.n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}=n^2$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\ge\frac{n^2}{a_1+a_2+...+a_n}$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{a_1+a_2+...+a_n}\le\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\text{ (đpcm).}$$

Sau đây là một số bài toán áp dụng.

Bài toán áp dụng số 1.

Với $a, b, c > 0$, và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{a}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{b}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{c}+1}=1;$

b) $\dfrac{1}{2a+b+3}+\dfrac{1}{2b+c+3}+\dfrac{1}{2c+a+3}\le\dfrac{1}{2}.$

Lời giải. a) Đặt $a=x^2, b=y^2, c=z^2$ $(x,y,z>0)$, ta có: $x^2y^2z^2=1\Rightarrow xyz=1$. Bài toán trở thành: *Với $xyz = 1$ và $x, y, z > 0$ chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}=1.$$

Áp dụng bài toán 1, ta có điều phải chứng minh.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a+b\ge 2\sqrt{ab};\ a+1\ge 2\sqrt{a}$$

$$\Rightarrow a+b+a+1\ge 2\sqrt{ab}+2\sqrt{a}$$

$$\Rightarrow 2a+b+1\ge 2\sqrt{ab}+2\sqrt{a}$$

$$\Rightarrow 2a+b+3\ge 2\sqrt{ab}+2\sqrt{a}+2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2a+b+3}\le\frac{1}{2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{a}+1\right)}.$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\frac{1}{2b+c+3}\le\frac{1}{2\left(\sqrt{bc}+\sqrt{b}+1\right)};$$

$$\frac{1}{2c+a+3}\le\frac{1}{2\left(\sqrt{ca}+\sqrt{c}+1\right)}.$$

Do đó ta có:

$$\frac{1}{2a+b+3}+\frac{1}{2b+c+3}+\frac{1}{2c+a+3}$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{a}+1}+\frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{b}+1}+\frac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{c}+1}\right).$$

Áp dụng câu a ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét 1. Chứng minh tương tự như trên và dựa vào kết quả của bài toán 1 ta cũng chứng minh được:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{b}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{c}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{a}+1}=1.$

2) $\dfrac{1}{a+2b+3}+\dfrac{1}{b+2c+3}+\dfrac{1}{c+2a+3}\le\dfrac{1}{2}.$

Nếu số "3" trong bất đẳng thức

$$\frac{1}{2a+b+3}+\frac{1}{2b+c+3}+\frac{1}{2c+a+3}\le\frac{1}{2}$$

không xuất hiện mà là con số khác thì phải làm sao nhỉ? Chúng ta cùng đến với bài toán áp dụng số 2 nhé:

Bài toán áp dụng số 2.

Với a, b, c > 0 và abc = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a+b+4}+\frac{1}{2b+c+4}+\frac{1}{2c+a+4}\le\frac{3}{7}.$$

Lời giải. Áp dụng bài toán 2 ta có:

$$\frac{1}{2a+b+4}=\frac{6}{6(2a+b+4)}=\frac{6}{6(2a+b+3)+6}$$

$$=\frac{6}{(2a+b+3)+\ldots+(2a+b+3)+6}$$

$$\le\frac{6}{7^2}\left(\frac{1}{2a+b+3}.6+\frac{1}{6}\right).$$

Do đó ta có: $\dfrac{1}{2a+b+4}\le\dfrac{6^2}{7^2}.\dfrac{1}{2a+b+3}+\dfrac{1}{7^2}.$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\frac{1}{2b+c+4}\le\frac{6^2}{7^2}.\frac{1}{2b+c+3}+\frac{1}{7^2};$$

$$\frac{1}{2c+a+4}\le\frac{6^2}{7^2}.\frac{1}{2c+a+3}+\frac{1}{7^2}.$$

Do đó ta có

$$\frac{1}{2a+b+4}+\frac{1}{2b+c+4}+\frac{1}{2c+a+4}$$

$$\le\frac{6^2}{7^2}\left(\frac{1}{2a+b+3}+\frac{1}{2b+c+3}+\frac{1}{2c+a+3}\right)+\frac{3}{7^2}.$$

Dựa vào câu b của bài toán áp dụng 1, ta có điều phải chứng minh.

Vậy nếu như không có hằng số tự do nào dưới mẫu ở vế trái bất đẳng thức $\dfrac{1}{2a+b+3}+\dfrac{1}{2b+c+3}+\dfrac{1}{2c+a+3}\le\dfrac{1}{2}$ xuất hiện, thì ta nên làm như thế nào! chúng ta cùng đến với bài toán áp dụng số 3 nhé:

Bài toán áp dụng số 3.

Với a, b, c > 0, và abc = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3a+2b+c}+\frac{1}{3b+2c+a}+\frac{1}{3c+2a+b}\le\frac{1}{2}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương ta có:

$$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\ \Rightarrow a+b+c\ge 3$$

$$\Rightarrow 3a+2b+c=(2a+b)+(a+b+c)\ge 2a+b+3$$

$$\Rightarrow\frac{1}{3a+2b+c}\le\frac{1}{2a+b+3}.$$

Chứng minh tương tự và dựa vào kết quả của bài toán áp dụng 1 ta có điều phải chứng minh.

Bài toán áp dụng số 4.

Với $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a+5b+2c+9}+\frac{1}{2b+5c+2a+9}+\frac{1}{2c+5a+2b+9}\le\frac{1}{6}.$$

Lời giải. Sử dụng bài toán 2 ta có:

$$\frac{1}{2a+5b+2c+9}=\frac{1}{(2a+b+3)+(2b+c+3)+(2b+c+3)}$$

$$\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2a+b+3}+\frac{1}{2b+c+3}+\frac{1}{2b+c+3}\right).$$

Do đó ta có:

$$\frac{1}{2a+5b+2c+9}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2a+b+3}+\frac{2}{2b+c+3}\right).$$

Chứng minh tương tự và dựa vào kết quả của bài toán áp dụng 1 ta có điều phải chứng minh.

Để cho bài toán nhìn "phức tạp" hơn một chút, chúng ta sẽ cho thử các dấu căn vào ở bài toán số 5 sau.

Bài toán áp dụng số 5.

Với $a, b, c > 0$, và $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{3a+4b+2c}}+\frac{1}{\sqrt{3b+4c+2a}}+\frac{1}{\sqrt{3c+4a+2b}}\le 1.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{3a+4b+2c}}=3.\frac{1}{3}.\frac{1}{\sqrt{3a+4b+2c}}$$

$$\le 3.\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3a+4b+2c}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{3a+4b+2c}}\le\frac{1}{6}+\frac{3}{2}.\frac{1}{3a+4b+2c}.$$

Ta lại có: $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$

$$\Rightarrow 3a+4b+2c=(a+2b)+2(a+b+c)$$

$$\ge a+2b+6$$

$$\Rightarrow\frac{1}{3a+4b+2c}\le\frac{1}{a+2b+6}$$

Áp dụng bài toán 2 ta có:

$$\frac{1}{a+2b+6}=\frac{2}{2(a+2b+3)+6}$$

$$=2.\frac{1}{(a+2b+3)+(a+2b+3)+6}$$

$$\le 2.\frac{1}{9}\left(\frac{1}{a+2b+3}+\frac{1}{a+2b+3}+\frac{1}{6}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a+2b+6}\le\frac{4}{9}.\frac{1}{a+2b+3}+\frac{1}{27}.$$

Do đó ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{3a+4b+2c}}\le\frac{1}{6}+\frac{3}{2}.\left(\frac{4}{9(a+2b+3)}+\frac{1}{27}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{3a+4b+2c}}\le\frac{2}{3}.\frac{1}{a+2b+3}+\frac{2}{9}$$

Chứng minh tương tự và áp dụng nhận xét 1 ta có điều phải chứng minh.

Sau đây là một số bài tập để các bạn vận dụng

Với $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{5a+4b+3c+12}+\frac{1}{5b+4c+3a+12}+\frac{1}{5c+4a+3b+12}\le\frac{1}{8}.$

b) $\frac{1}{a^3+2b^3+3}+\frac{1}{b^3+2c^3+3}+\frac{1}{c^3+2a^3+3}\le\frac{1}{2}.$

c) $\frac{1}{(a+1)(b+3)+1}+\frac{1}{(b+1)(c+3)+1}+\frac{1}{(c+1)(a+3)+1}\le\frac{1}{3}.$

d) $\sqrt{\frac{1}{7a+10b+c+18}}+\sqrt{\frac{1}{7b+10c+a+18}}+\sqrt{\frac{1}{7c+10a+b+18}}\le\frac{1}{2}.$

Các bạn thấy cách " tự sáng tác" bài toán mới của chúng tôi có ổn không? Mong các bạn cũng sẽ tự sáng tạo ra cho mình những bài toán mới nhé!

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN
BÀI SỐ 96

PROBLEM. *Find all natural numbers n so that n, $n + 2$, and $n + 4$ are prime numbers.*

Solution: The number n must be odd since otherwise $n + 4$ would be an even number which is greater than 2, and therefore could not be prime. When n is odd, n, $n + 2$, and $n + 4$ are three consecutive odd numbers. Thus one of them must be a multiple of 3. But since they are all prime, one of them must be 3. From this observation, we can conclude that $n = 3$ is the only case.

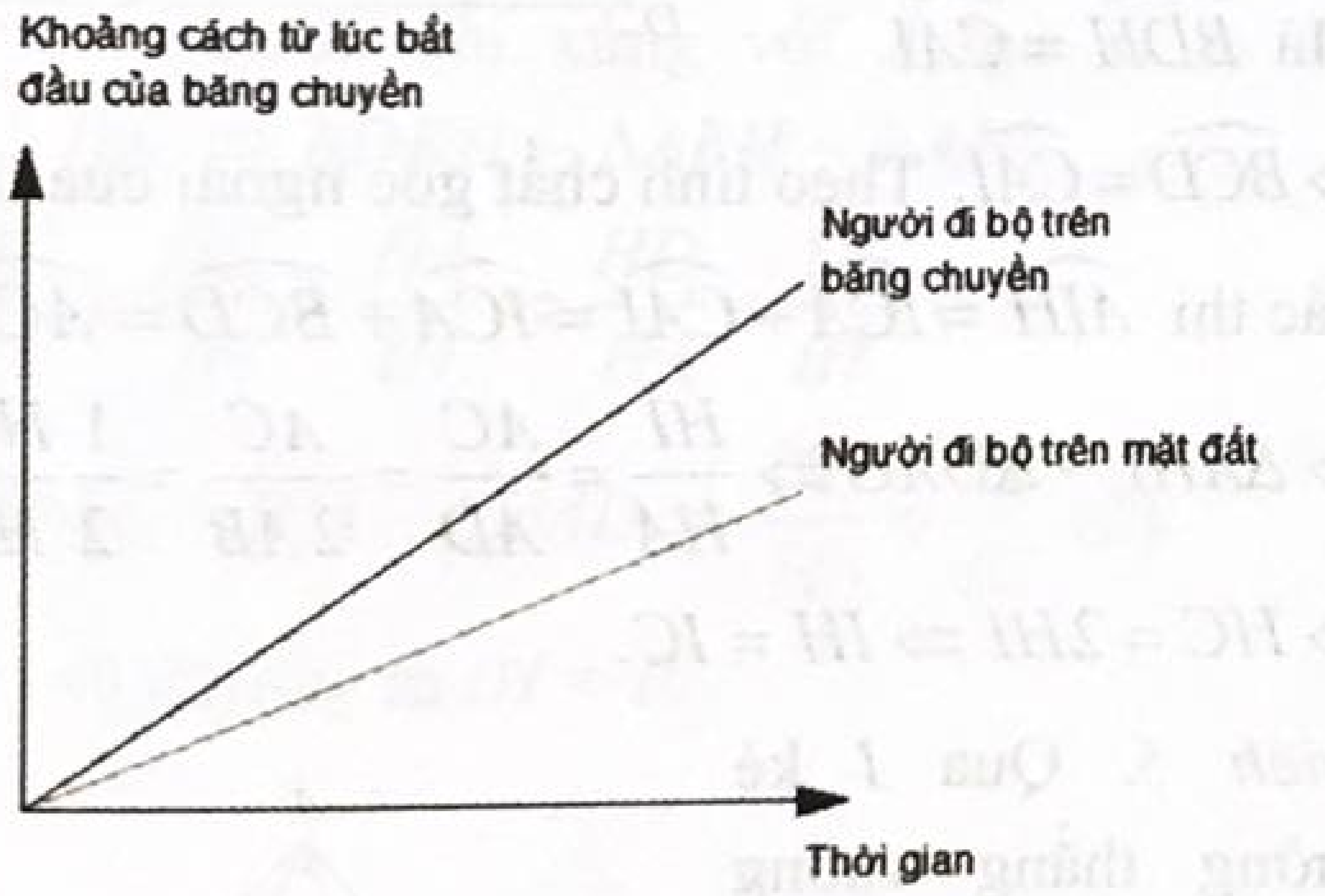
TỪ VỰNG

Prime number : *số nguyên tố*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science–Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI TOÁN 94. *Dưới đây là bức ảnh của một băng chuyền. Đồ thị biểu diễn khoảng cách theo thời gian sau đây cho thấy sự so sánh giữa "đi bộ trên băng chuyền" và "đi bộ trên mặt đất cạnh băng chuyền".*



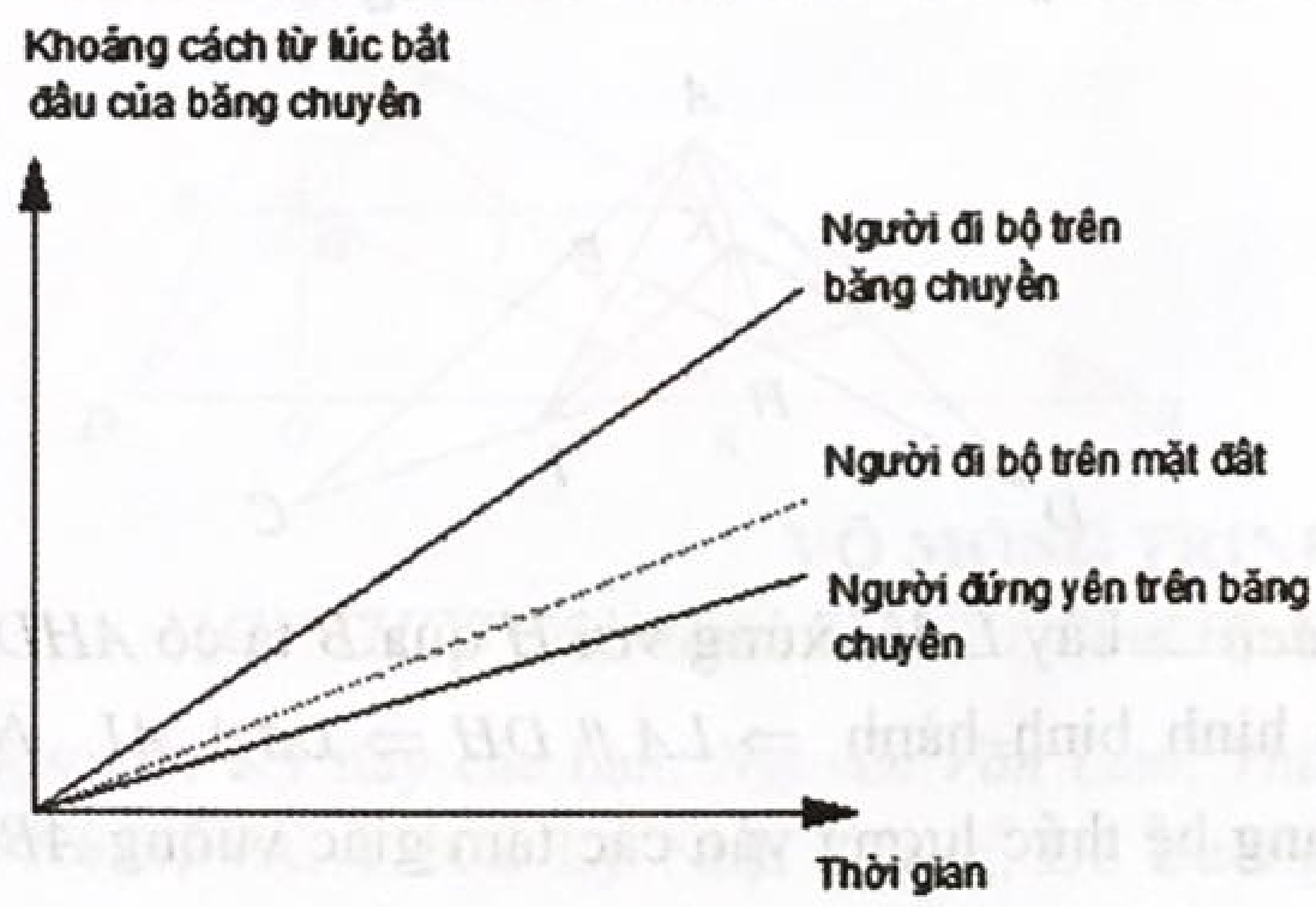
Giả sử rằng, trong đồ thị trên, tốc độ đi bộ của cả hai người là như nhau, hãy thêm một đường thẳng vào đồ thị để biểu thị khoảng cách theo thời gian của một người đang đứng yên trên băng chuyền.

Lưu ý: *Bài toán này được sưu tầm từ* ***Sample Question from OECD's PISA Assessment***.

(**PISA**: *Chương trình đánh giá học sinh Quốc tế*).

Đường dẫn: Sample Question from OECD's PISA Assessment | PISA | OECD iLibrary (oecd – ilibrary.org).

Lời giải. (Đây là hình được sưu tầm từ tài nguyên được đề cập ở trên).



Từ đồ thị đã cho, ta thấy tốc độ của người đi bộ trên mặt đất và tốc độ người đi bộ trên băng chuyền là không đổi và tốc độ của người thứ hai nhỏ hơn tốc độ của người thứ nhất một chút. Do đó đồ thị biểu diễn khoảng cách theo thời gian của một người đứng yên trên băng chuyền là một đường thẳng nằm dưới đường của người đi bộ trên mặt đất một chút.

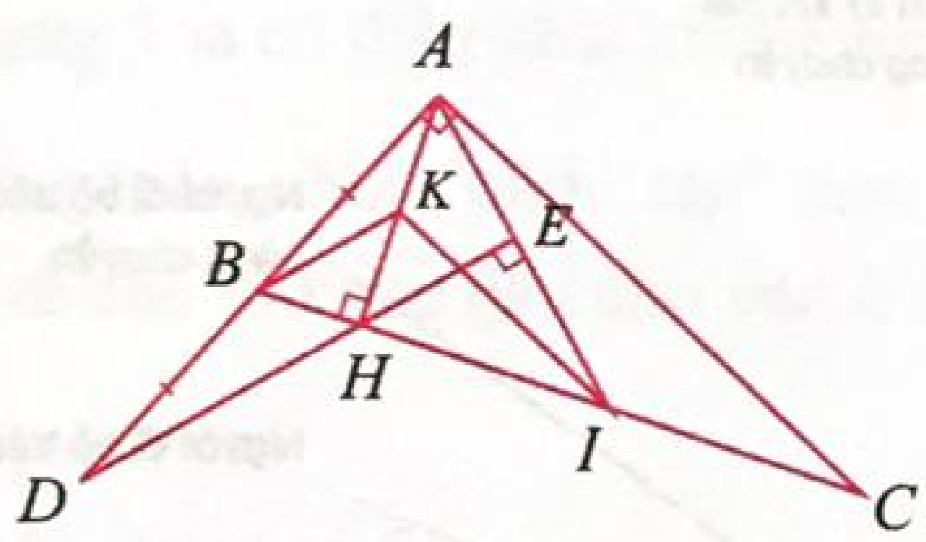
Nhận xét. Kì này bạn *Võ Hoàng Minh Khôi*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**, *Nguyễn Quốc Hoàng Anh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm. Xin hoan nghênh hai bạn.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 75. *Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, điểm D đối xứng với A qua B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với DH cắt BC ở I. Chứng minh rằng IH = IC.*

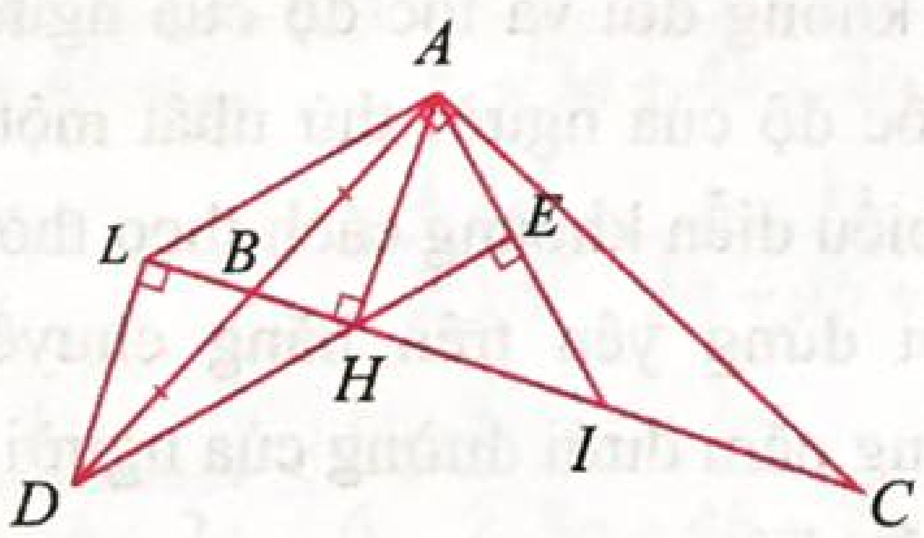
Lời giải. *Cách 1.* Gọi K là trung điểm của AH ta có $BK \parallel DH \Rightarrow BK \perp AI$. ΔABI có $BK \perp AI$, $AH \perp BI$ suy ra K là trực tâm, do đó $IK \perp AB \Rightarrow IK \parallel AC$. ΔAHC có K là trung điểm AH mà $IK \parallel AC$ dẫn đến I là trung điểm HC.



Cách 2. Lấy L đối xứng với H qua B ta có $AHDL$ là hình bình hành $\Rightarrow LA \parallel DH \Rightarrow LA \perp AI$. Áp dụng hệ thức lượng vào các tam giác vuông ABC và ALI, ta có: $HA^2 = HB.HC$ và $HA^2 = HL.HI$.

Suy ra $HL.HI = HB.HC$. Do $HL = 2HB$ dẫn đến:

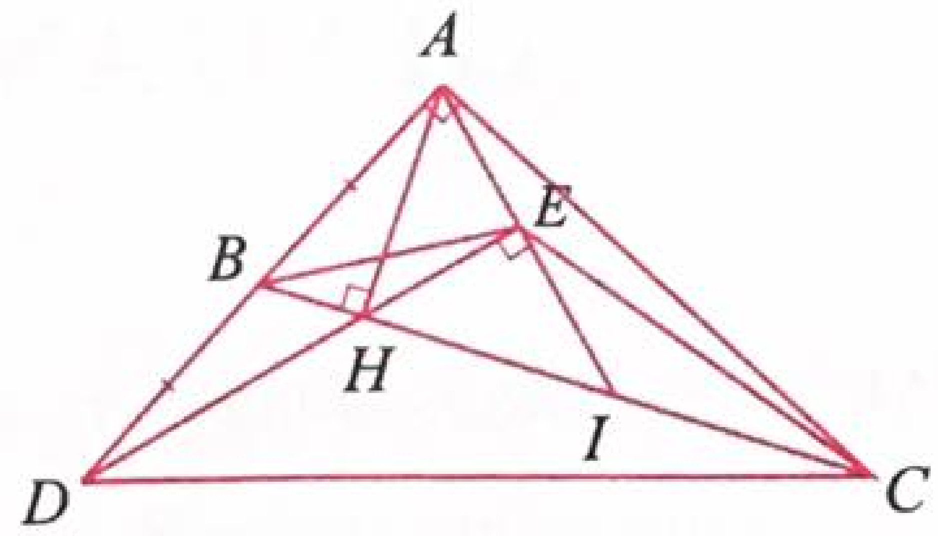
$$2HB.HI = HB.HC \Rightarrow HC = 2HI \Rightarrow IH = IC.$$



Cách 3. Gọi E là giao điểm của DH và AI, ΔAED vuông tại E có EB là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $BE = BD = BA$.

Suy ra: $BE^2 = BA^2 = BH.BC \Rightarrow \dfrac{BE}{BH} = \dfrac{BC}{BE}$

$\Rightarrow \Delta BEH \sim \Delta BCE$ (c.g.c).



$\Rightarrow \widehat{ECB} = \widehat{HEB} = \widehat{HDB}$ (1). Ta có: $\widehat{CAI} = \widehat{HDB}$ (cùng phụ với $\widehat{EAD}$) (2). Từ (1) và (2) suy ra:

$$\widehat{ECI} = \widehat{CAI} \Rightarrow \Delta EIC \sim \Delta CIA \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{IC}{IE} = \frac{IA}{IC} \Rightarrow IC^2 = IE.IA \text{ (3).}$$

Mặt khác, ΔAHI vuông tại H có HE là đường cao nên áp dụng hệ thức lượng ta có:

$$IH^2 = IE.IA \quad (4).$$

Từ (3) và (4) ta có $IH = IC$.

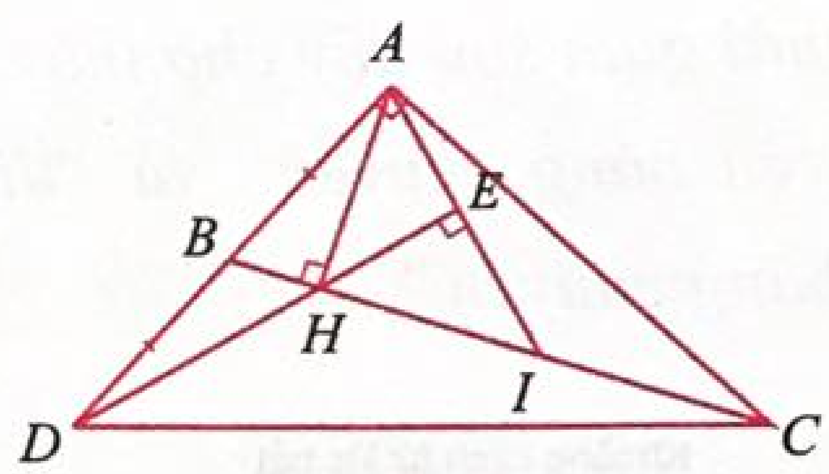
Cách 4. Ta có: $BA^2 = BH.BC \Rightarrow BD^2 = BH.BC$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BH}{BD}$

$\Rightarrow \Delta BDH \sim \Delta BCD$

$\Rightarrow \widehat{BDH} = \widehat{BCD}$.

Mà $\widehat{BDH} = \widehat{CAI}$

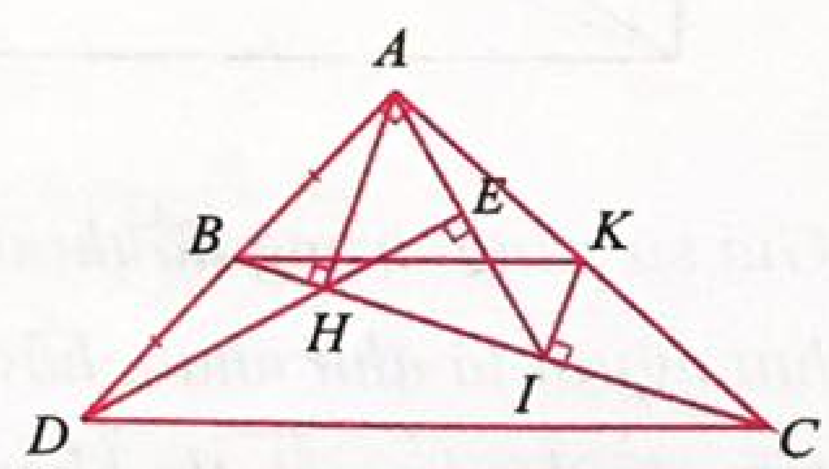


$\Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{CAI}$. Theo tính chất góc ngoài của tam giác thì $\widehat{AIH} = \widehat{ICA} + \widehat{CAI} = \widehat{ICA} + \widehat{BCD} = \widehat{ACD}$

$$\Rightarrow \Delta AHI \sim \Delta DAC \Rightarrow \frac{HI}{HA} = \frac{AC}{AD} = \frac{AC}{2AB} = \frac{1}{2}\frac{HC}{HA}$$

$\Rightarrow HC = 2HI \Rightarrow IH = IC$.

Cách 5. Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với CH cắt AC tại K. Vì tứ giác $ABIK$ nội tiếp nên $\widehat{KBI} = \widehat{KAI}$. Theo cách 3 ta có $\widehat{BCD} = \widehat{KAI}$. Do đó $\widehat{BCD} = \widehat{KBI} = \widehat{KBC} \Rightarrow BK \parallel CD \Rightarrow KA = KC$. Tam giác AHC có $KA = KC$ và $KI \parallel AH \Rightarrow IH = IC$.



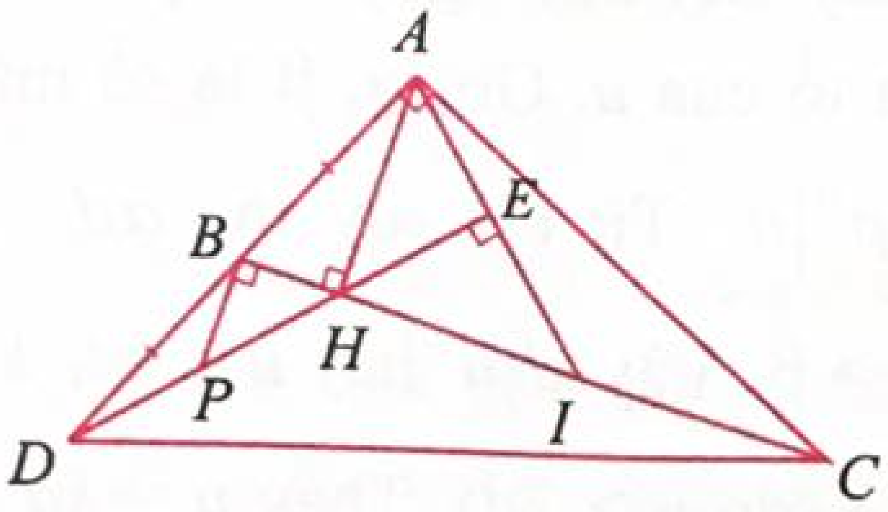
Cách 6. Gọi P là trung điểm của DH ta có:

$$\Delta PBH \sim \Delta IEH \sim \Delta IHA \Rightarrow \frac{HP}{AI} = \frac{PB}{HI} = \frac{1}{2}\frac{AH}{HI}$$

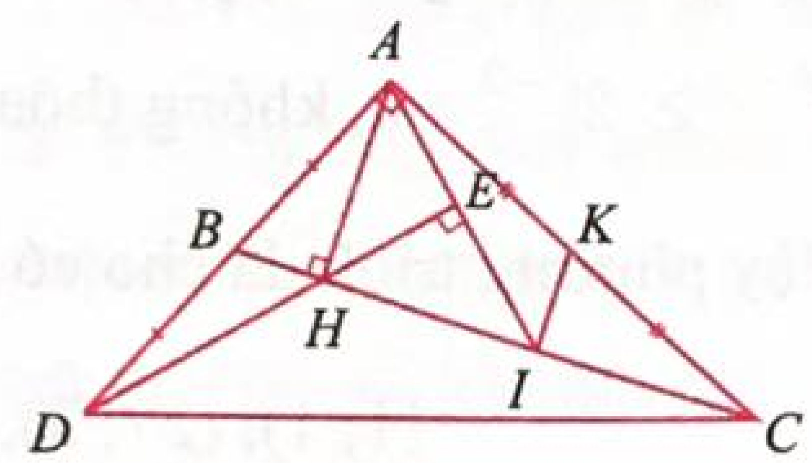
$$\Rightarrow \frac{HD}{AI} = \frac{HA}{HI} = \frac{AE}{HE}$$

$\Rightarrow HD.HE = AE.AI = AH^2 = HB.HC$ (1).

Ta lại có: $HP.HE = HB.HI$ (2). Chia (1) cho (2) ta được: $\dfrac{HC}{HI} = \dfrac{HD}{HP} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow HC = 2HI \Rightarrow IH = IC.$



Cách 7. Ta có: $\widehat{CAI} = \widehat{ADH}$ (cùng phụ $\widehat{DAI}$), $\widehat{ACB} = \widehat{BAH}$ (cùng phụ $\widehat{HAC}$). Nên $\Delta ICA \sim \Delta HAD$ (g.g). Kẻ trung tuyến IK của ΔICA. Do IK và HB là hai trung tuyến tương ứng của hai tam giác đồng dạng nên



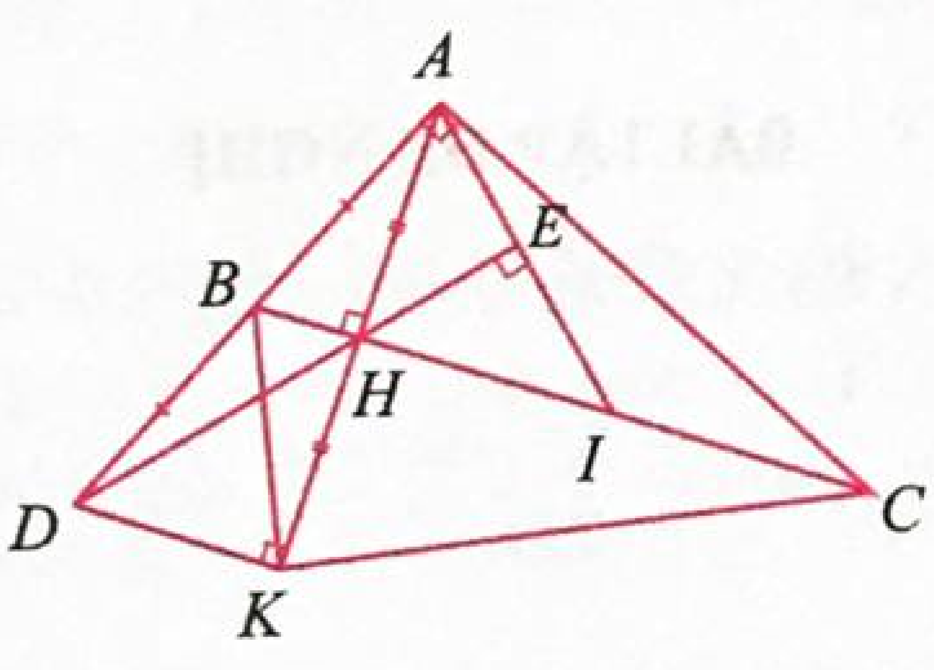
$\widehat{CIK} = \widehat{AHB} = 90^0$. ΔHAC có $AK = KC$, $KI \parallel AH$ nên suy ra $IH = IC$.

Cách 8. Lấy K đối xứng với A qua H ta có $DK \perp HK \Rightarrow \Delta DKH \sim \Delta AEH \sim \Delta AHI$

$\Rightarrow \dfrac{HD}{IA} = \dfrac{HK}{IH} = \dfrac{HA}{IH} \Rightarrow \dfrac{HD}{HA} = \dfrac{IA}{IH}$ (1).

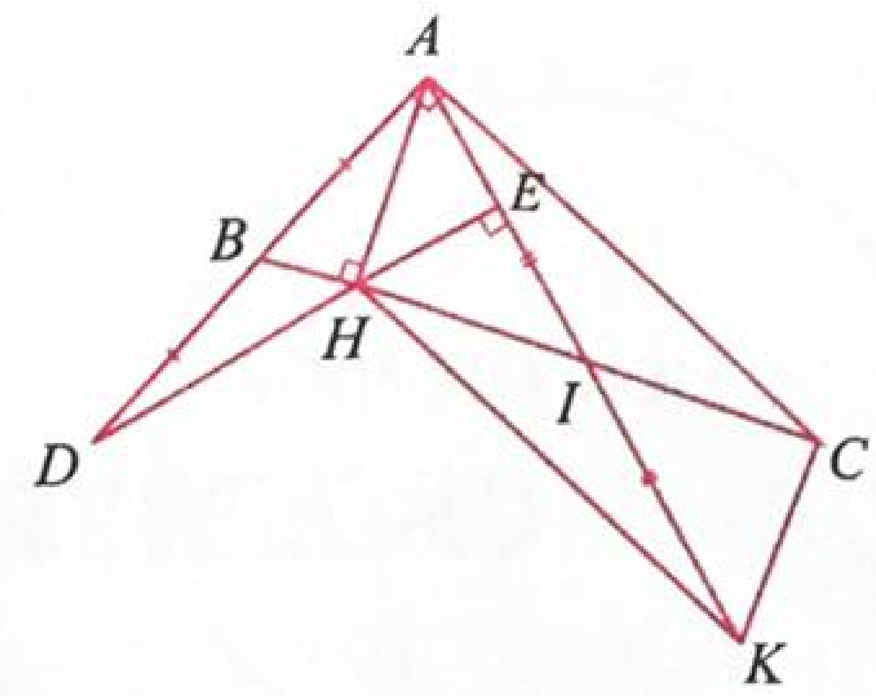
Mặc khác, $\Delta ICA \sim \Delta HAD \Rightarrow \dfrac{HD}{HA} = \dfrac{IA}{IC}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $IH = IC$.



Cách 9. Lấy K đối xứng với A qua I ta có $DK \parallel HI \Rightarrow \dfrac{IK}{HD} = \dfrac{IE}{HE} = \dfrac{IH}{AH}$ (1). Lại có: $\widehat{AHE} = \widehat{HIE} \Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{HIK}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra: $\Delta AHD \sim \Delta HIK \Rightarrow \widehat{HKI} = \widehat{ADH} = \widehat{CAI}$

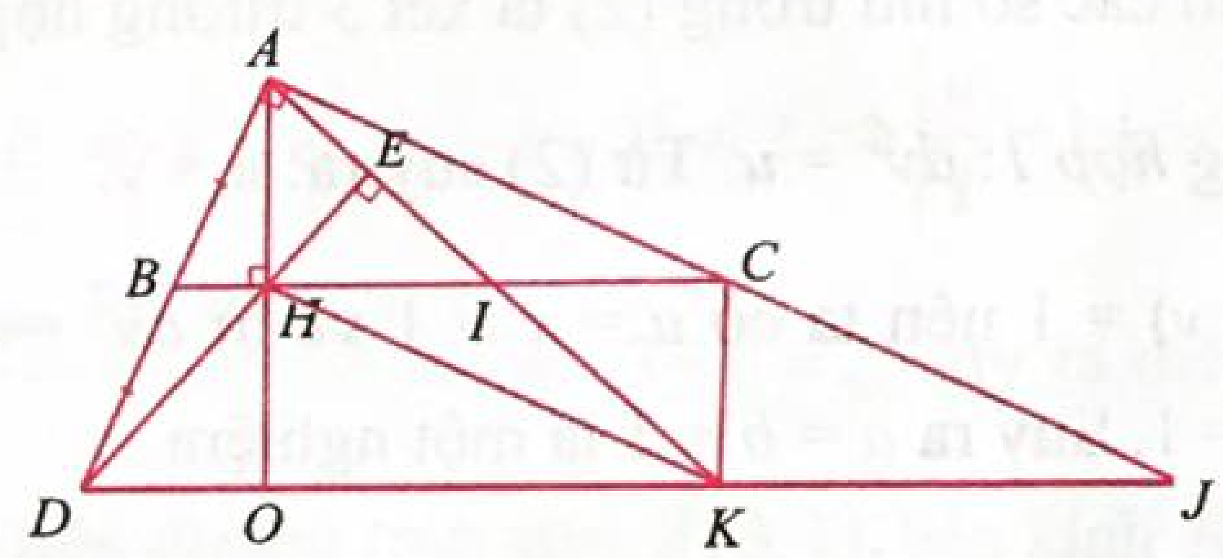
$\Rightarrow \Delta HKI = \Delta CAI$ (g.c.g) $\Rightarrow IH = IC$.



Cách 10. Vẽ $DJ \parallel BC$ $(J \in AC)$. AH, AI cắt DJ lần lượt tại Q, K.

Vì $DE \perp AK, AQ \perp DJ$ nên H là trực tâm ΔABK suy ra $HK \perp AD \Rightarrow HK \parallel AC$. (1)

Do B là trung điểm AD nên H, C lần lượt là trung điểm AI, mà $HK \parallel AC$ dẫn đến K là trung điểm QJ. Kết hợp với C là trung điểm AJ suy ra $KC \parallel AH$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $AHKC$ là hình bình hành. Theo tính chất hình bình hành suy ra I là trung điểm HC.



VÕ MỘNG TRINH

(GV THCS Cát Minh, Phù Cát, Bình Định)

Nhận xét. Kỳ này các bạn: *Nguyễn Văn Lâm, Thái Bá Nhân*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**, *Nguyễn Văn Cảnh*, GV THCS Long Hậu, xã Long Hậu, huyện Cần Giuộc, **Long An** cũng đóng góp một số cách giải tương tự như cách giải của bạn *Võ Mộng Trinh*, người đề xuất bài toán. Xin hoan nghênh các bạn.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 77 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.10.2023.

BÀI TOÁN 77. *Cho ba số thực dương a, b, c và các số thực không âm α, β. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^\alpha}{b^\beta + c^\beta} + \frac{b^\alpha}{c^\beta + a^\beta} + \frac{c^\alpha}{a^\beta + b^\beta} \geq \frac{3(a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha)}{2(a^\beta + b^\beta + c^\beta)}.$$

NGÔ VĂN THÁI

(Thái Bình)

BÀI TOÁN 84 (IMO 1997). *Tìm tất cả các cặp (a; b) các số nguyên $a \ge 1, b \ge 1$ thỏa mãn*

$$a^{b^2} = b^a \quad (1).$$

Lời giải. Giả sử a, b là một nghiệm và $d = (a; b)$. Khi đó $a = du, b = dv$ với $u, v \in \mathbb{N}^*$, $(u; v) = 1$.

Phương trình (1) trở thành: $(du)^{dv^2} = (dv)^u$ (2).

So sánh các số mũ trong (2) ta xét 3 trường hợp:

Trường hợp 1: $dv^2 = u$. Từ (2) suy ra: $u = v$.

Vì $(u; v) = 1$ nên ta có $u = v = 1$ và từ $dv^2 = u$ ta có: $d = 1$. Suy ra $a = b = 1$ là một nghiệm.

Trường hợp 2: $dv^2 > u$. Ta viết lại (2) như sau:

$$d^{dv^2-u}.u^{dv^2} = v^u \quad (3).$$

Suy ra $u^{dv^2} \,\middle|\, v^u$. Lại do $(u; v) = 1$ nên $u = 1$. Vậy $d^{dv^2-1} = v$ (4). Nếu $d = 1$ thì từ (4) ta có $v = 1$ và bất đẳng thức $dv^2 > u$ không xảy ra. Với $d \ge 2$ ta có:

$$d^{dv^2-1} \ge 2^{2v^2-1} \ge 2^{2v-1} > v \quad (5) \text{ với } v = 1, 2, 3, ...$$

Bất đẳng thức (5) có thể dễ dàng kiểm tra bằng phương pháp quy nạp theo v. Nhưng (5) mâu thuẫn với (4). Vậy trong trường hợp này phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 3: $dv^2 < u$ (suy ra $u > d$). Ta viết lại (2) như sau:

$$u^{dv^2} = d^{u-dv^2}.v^u \quad (6).$$

Suy ra $v^u \,|\, u^{dv^2}$. Lại do $(u; v) = 1$ nên $v = 1$ và (6) trở thành: $u^d = d^{u-d}$ (7). Do $u > d$ nên $d < u - d$.

Từ (7) ta thấy mọi ước nguyên tố p của d cũng là ước nguyên tố của u. Gọi α, β là số mũ lớn nhất với $p^\alpha \,|\, u$, $p^\beta \,|\, d$. Từ (7) suy ra: $\alpha d = \beta(u - d)$, chứng tỏ $\alpha > \beta$. Vậy $d \,|\, u$ hay $u = kd$, $k \in \mathbb{Z}$. Chú ý rằng $k \ge 3$ (do $u > 2d$). Thay $u = kd$ vào (7) ta được: $k = d^{k-2}$ (8).

Nếu $k = 3$ thì từ (8) ta có: $d = 3$, suy ra: $u = 9$, $a = 27$, $b = 3$. Nếu $k = 4$ thì từ (8) ta có: $d = 2$, suy ra: $u = 8$, $a = 16$, $b = 2$. Nếu $k \ge 5$ thì $d^{k-2} \ge 2^{k-2} > k$, không thỏa mãn (8).

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $(a; b)$ là:

$$(1; 1), (27; 3), (16; 2).$$

Nhận xét: Hoan nghênh hai bạn: *Phan Đại Hoàng*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An** và *Võ Hoàng Minh Khôi*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp** đã giải đúng bài này với cách giải tương tự như trên.

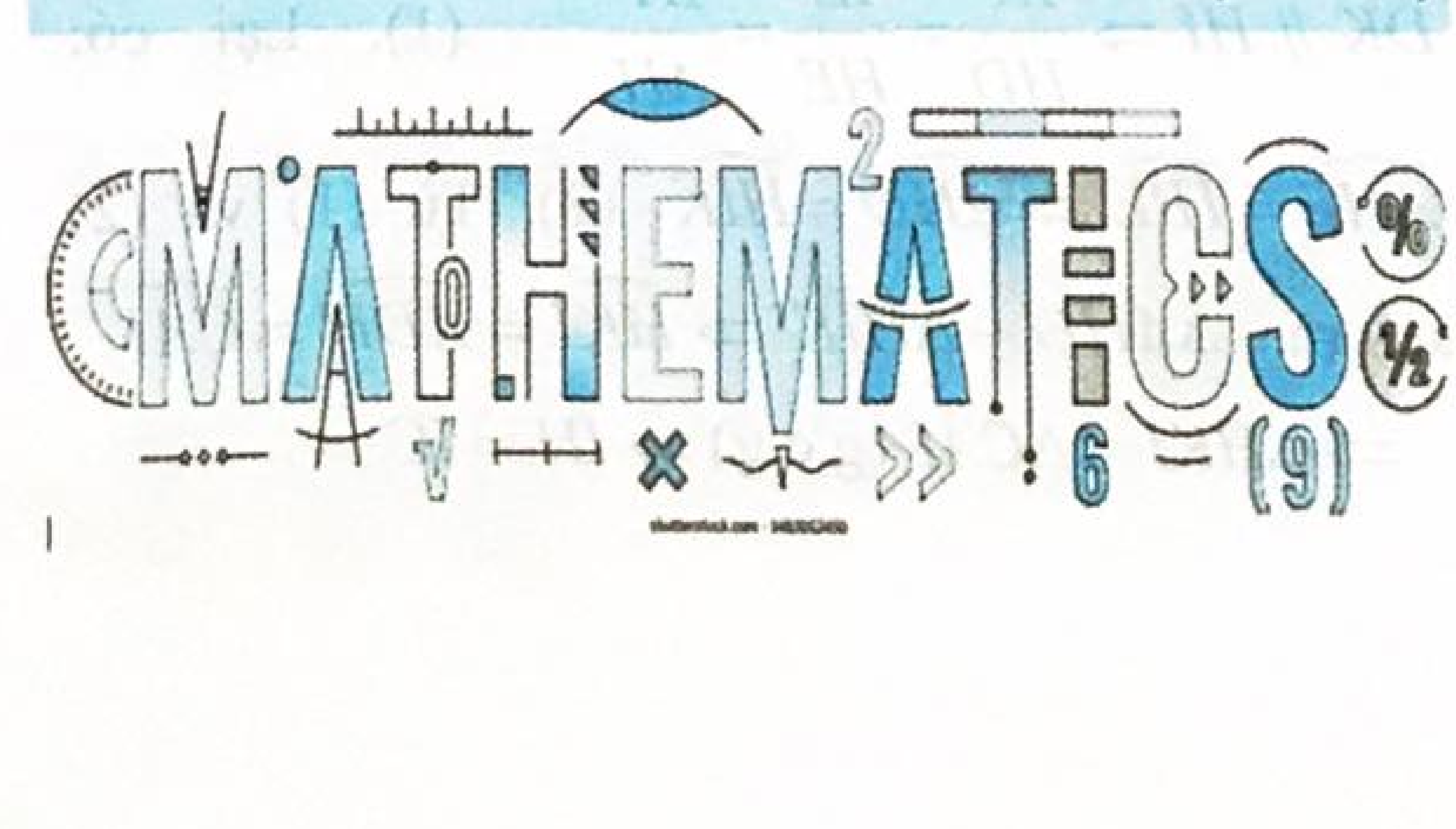
NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.10.2023.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 86. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì các số* $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} 2^{3k}$ *đều không chia hết cho 5.*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG?

(Đề đăng trên TH&TT số 551, tháng 5 năm 2023)

Phân tích sai lầm. Ta thấy rằng, nếu hàm số $f(x)=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 thì x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $f'(x)=0$, nhưng nếu x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ thì chưa chắc $f(x)=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị là x_1,x_2 vì có thể xảy ra trường hợp hai nghiệm x_1,x_2 trùng nhau. Với bài toán của chúng ta, sau khi tìm ra $m=3$, thay trở lại hàm số ban đầu thì

$$f(x)=x^3-3x^2+3x-1,$$

$$f'(x)=3x^3-6x+3=3(x-1)^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R},$$

nên $f(x)$ lúc này không có cực trị. Còn với giá trị $m=-1$ thì hàm số đã cho trở thành $f(x)=x^3-3x^2-x-1$ và có hai điểm cực trị thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Chứng tỏ chỉ có một giá trị $m=-1$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Đáp án bạn *Hân* đưa ra không chính xác.

Lời giải đúng. Hàm số $f(x)=x^3-3x^2+mx-1$ có đạo hàm $f'(x)=3x^2-6x+m.$ Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 khi và chỉ khi phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2, tức là $\Delta'=9-3m>0\Leftrightarrow m<3$. Theo định lí Viète, ta có: $x_1+x_2=2,\ x_1x_2=\dfrac{m}{3}.$ Vì thế:

$$x_1+x_2-2x_1x_2+3x_1^2x_2^2=3\Leftrightarrow 2-\frac{2m}{3}+\frac{m^2}{3}=3$$

$$\Leftrightarrow m^2-2m-3=0\Leftrightarrow m=-1, m=3.$$

Đối chiếu với điều kiện $m<3$ chỉ có giá trị $m=-1$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Vậy $(-1)^2=1$, chọn đáp án C.

Nhận xét. Bạn *Trần Vĩnh Phú*, chung cư Remax Plaza, 20 Phạm Đình Hổ, phường 1, Q. 6, **TP. Hồ Chí Minh** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Xin hoan nghênh bạn.

KIHIVI

PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC!

Trong giờ ôn tập phần số phức, thầy giáo đưa ra bài toán sau và yêu cầu cả lớp cùng suy nghĩ tìm lời giải. Sau một vài phút suy nghĩ bạn *Dương* đã xung phong lên bảng trình bày.

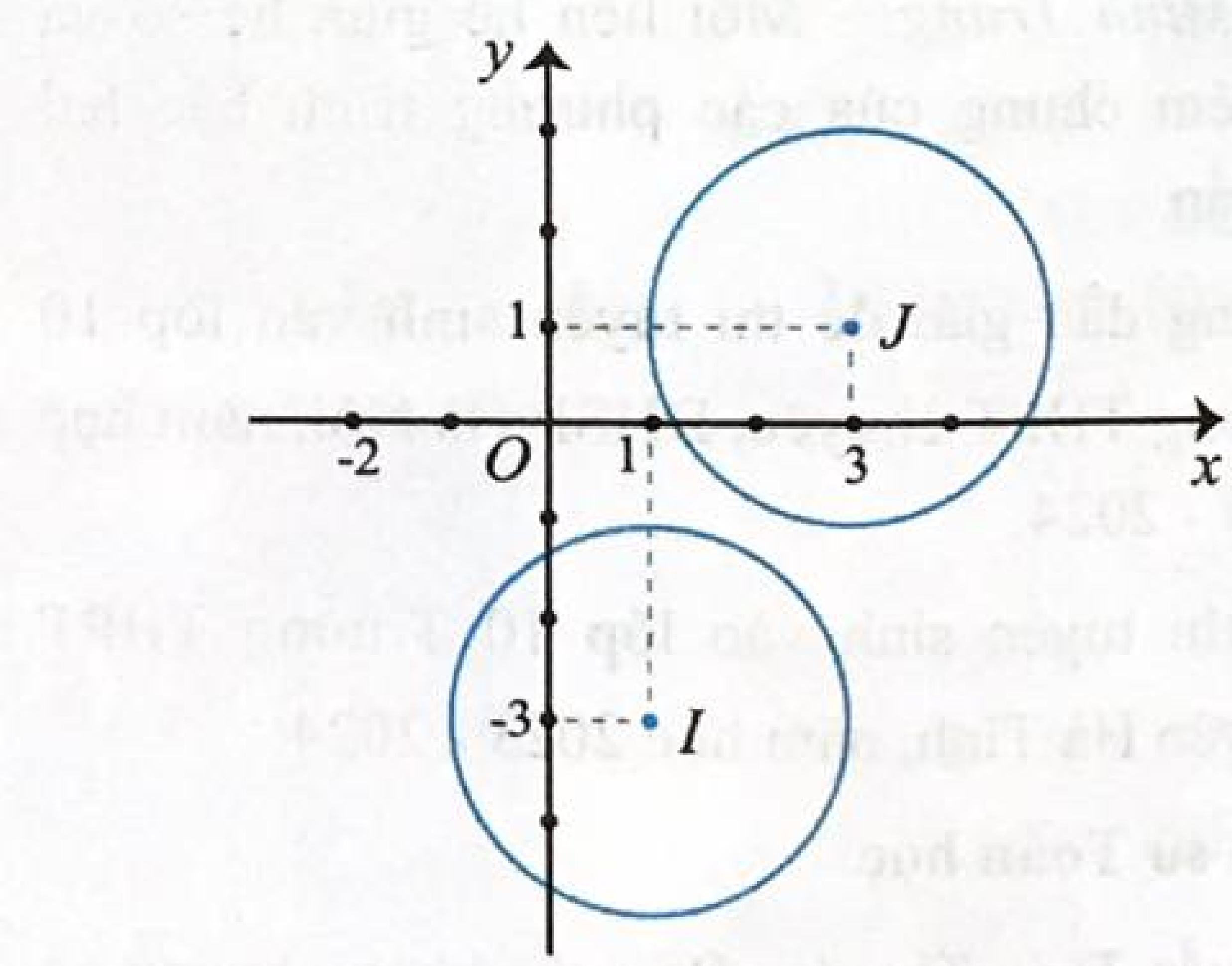
Đề bài: *Cho số phức* z *thỏa mãn* $|z-1+3i|=2$, *số phức* $w=iz$. *Tìm giá trị lớn nhất của* $|z-w|$.

Lời giải của bạn Dương:

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z, w. Từ $|z-1+3i|=2$ suy ra điểm M nằm trên đường tròn tâm $I(1;-3)$ bán kính $R_1=2$. Ta có:

$$w=iz\Rightarrow z=\frac{w}{i};\ |z-1+3i|=2\Rightarrow\left|\frac{w}{i}-1+3i\right|=2$$

$$\Rightarrow\left|\frac{w-3-i}{i}\right|=2\Rightarrow|w-3-i|=2$$ suy ra điểm N nằm trên đường tròn tâm $J(3;1)$ bán kính $R_2=2.$



Ta có $IJ=2\sqrt{5}>4\Rightarrow IJ>R_1+R_2\Rightarrow$ đường tròn tâm $I(1;-3)$ bán kính $R_1=2$ và đường tròn tâm $J(3;1)$ bán kính $R_2=2$ nằm ngoài nhau. Suy ra: $|z-w|=MN\leq R_1+IJ+R_2\Rightarrow|z-w|\leq 4+2\sqrt{5}$.

Vậy $\max|z-w|=4+2\sqrt{5}$. ***Theo em lời giải của bạn Dương đã chính xác chưa? Lời giải của em như thế nào!***

THÂN VĂN DỰ

(GV THPT Lạng Giang số 1, Bắc Giang)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 555 (9.2023)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

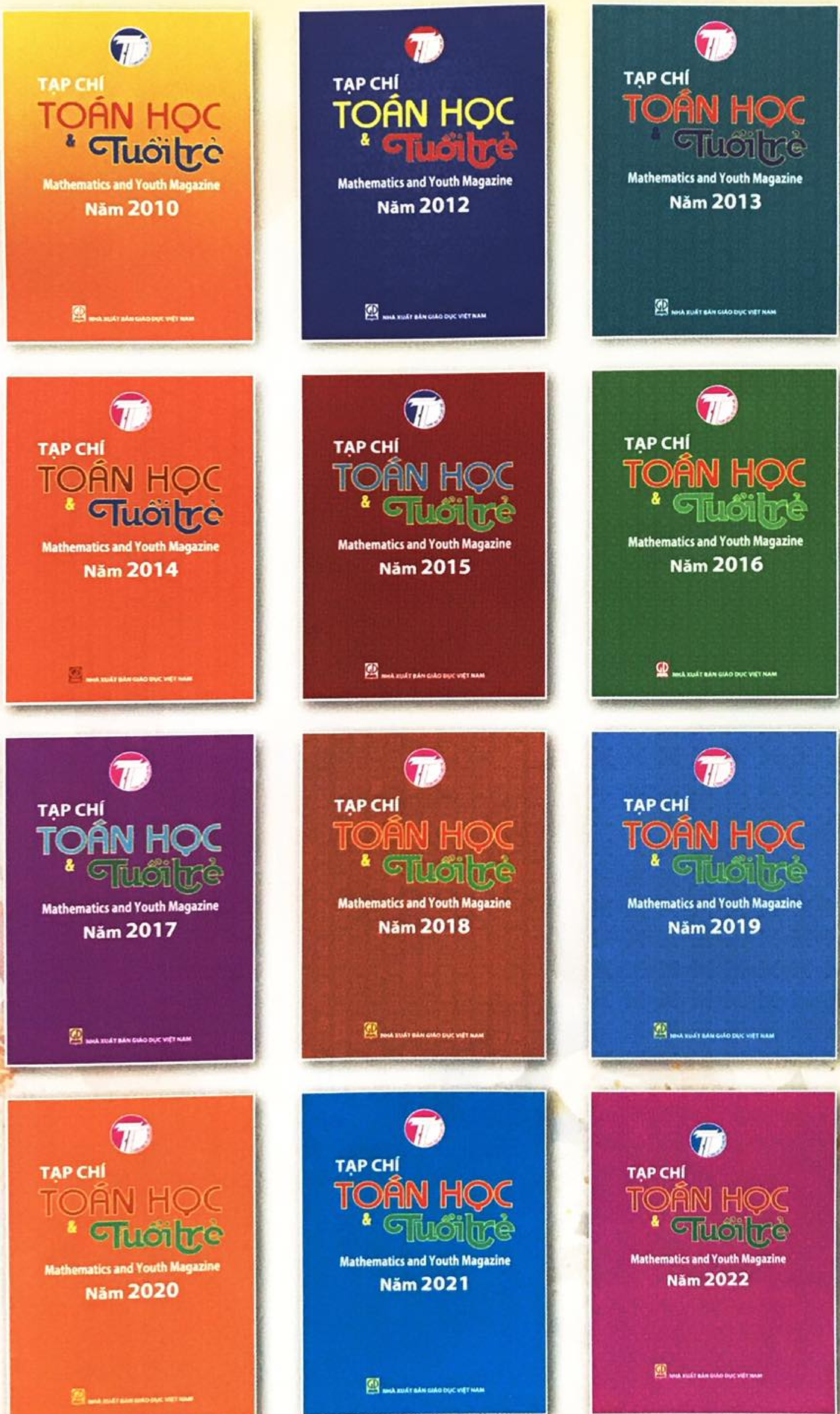
Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



Năm 2010
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 240.000 đồng

Năm 2022
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 260.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

CÁCH PHÂN BIỆT
SÁCH GIÁO KHOA THẬT – SÁCH IN LẬU

Thời gian vừa qua, tại một số địa phương, tình hình in và phát hành sách giáo khoa giả sử dụng trong năm học 2023-2024 diễn biến phức tạp. Qua kiểm tra thực tế, cơ quan chức năng đã phát hiện hàng trăm đầu sách giáo khoa bị in lậu (đặc biệt là sách giáo khoa Tiếng Anh của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam) và những đơn vị phân phối này không xuất trình được hoá đơn, chứng từ hợp pháp.

Làm thế nào để phân biệt sách lậu – sách thật?

Quý thầy cô, phụ huynh và các em học sinh có thể nhận biết sách thật của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) và sách in lậu qua các dấu hiệu sau:

- Sách in lậu là sách do các cá nhân/đơn vị tự sao chụp/ scan từ các tựa sách thật rồi in lại, với nội dung và cách trình bày giống sách thật. Nhiều cuốn sách in lậu không đảm bảo đầy đủ nội dung, chất lượng hình minh họa để tiết kiệm chi phí in ấn. Do các đối tượng in lậu không phải thực hiện quy trình xuất bản theo quy định, không trả chi phí bản quyền cho tác giả theo Luật sở hữu trí tuệ nên chi phí làm sách lậu thấp hơn nhiều so với giá thực tế của cuốn sách. Sách in lậu được bán ra với nhiều mức giá khác nhau, thậm chí có nơi bán sách lậu ngang với giá niêm yết trên bìa của sách thật.

- Sách in lậu thường bị cắt xén, có khổ sách nhỏ hơn sách thật, đóng gáy cẩu thả, gáy sách mỏng dễ bị bong rời các trang, thiếu trang.

- Sách in lậu thường in ấn kém chất lượng hơn sách thật, sử dụng giấy in chất lượng thấp, không sử dụng các công nghệ in đặc biệt (ép nhũ, cán mờ,…). Để cắt giảm tối đa chi phí in ấn, nhiều đơn vị làm sách lậu thường chỉ scan/phô tô, đánh máy lại nội dung từ trong sách thật mà không qua các khâu kiểm duyệt rồi in đại trà dẫn đến việc phần chữ dù được xử lý lại nhưng quan sát kĩ vẫn thấy bị vỡ, nét đậm nhưng không sắc, đôi lúc bị đứt. Phần hình ảnh không rõ ràng, bị nhòe, màu sắc không đồng đều (thường là đậm hơn so với sách thật) do dùng máy scan và xử lí lại.

Sách giả ảnh hưởng đến học sinh và giáo viên như thế nào?

Khi mua phải sách in lậu, sách kém chất lượng, người tiêu dùng đã vô tình làm ảnh hưởng đến quyền lợi của bản thân. Đầu tiên phải kể đến việc khi mua sách in lậu, các em học sinh sẽ không được sử dụng những cuốn sách chất lượng, được bảo hộ nguồn gốc từ NXBGDVN. Các hình ảnh, nội dung trong sách bị nhòe, mờ, không rõ nét dẫn đến việc thị lực bị suy giảm nếu sử dụng sách kém chất lượng trong thời gian dài.

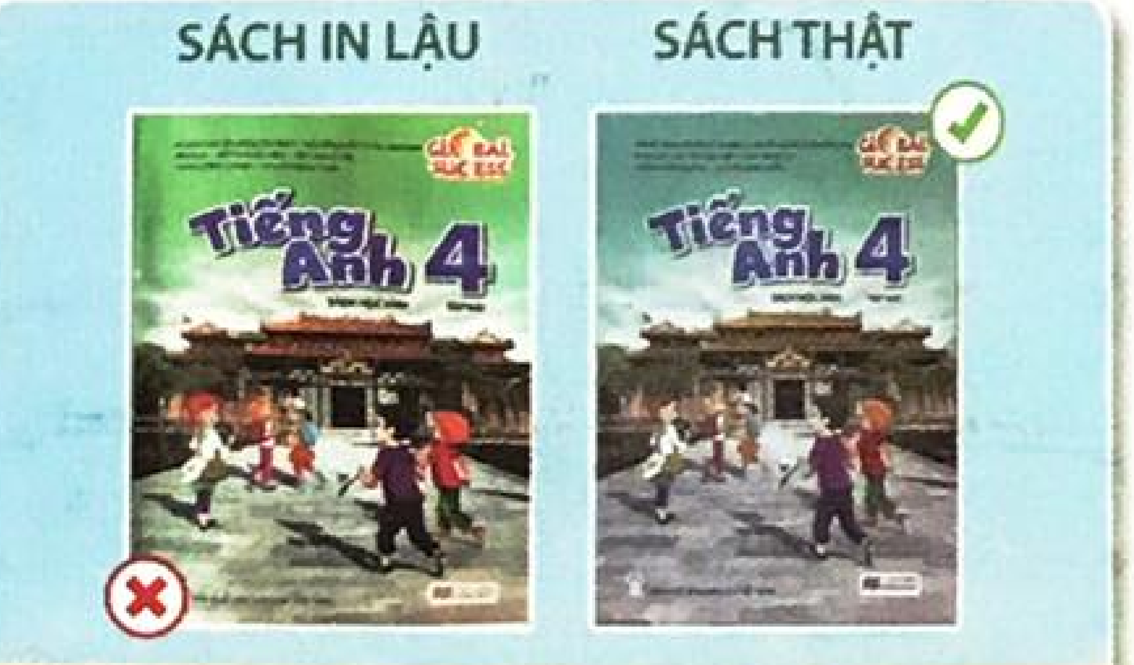
Một số nội dung trong sách in lậu được đánh máy lại nhưng không qua các khâu kiểm duyệt như sách thật, có thể làm sai lệch kiến thức trong quá trình học tập của học sinh. Đây cũng là một trong những lí do quan trọng để người tiêu dùng nên nói KHÔNG với sách in lậu, sách kém chất lượng.

Đặc biệt, từ năm 2020 trở đi, NXBGDVN đã dán tem định danh với các cuốn sách giáo khoa do NXBGDVN phát hành. Đối với sách lậu, các mã tem được in cùng một mã số seri và không kích hoạt được. Nếu mua nhầm sách in lậu, học sinh không thể truy cập và sử dụng kho học liệu điện tử của NXBGDVN.

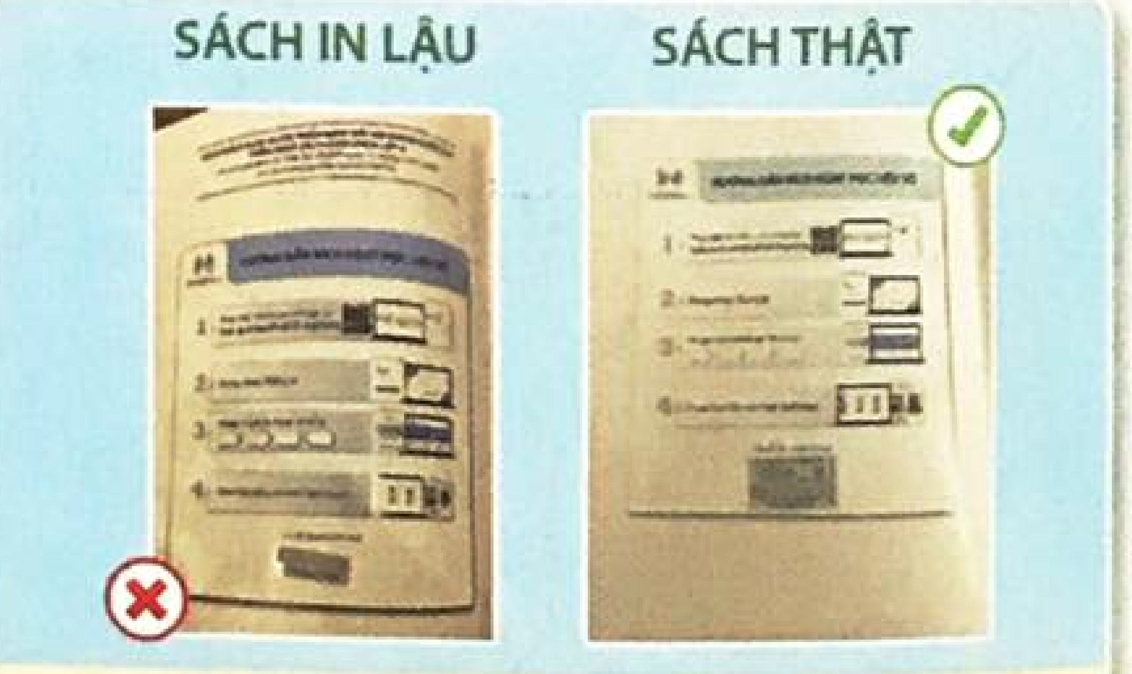
Làm sao để mua được sách thật?

Để tránh mua phải sách in lậu, quý thầy cô, phụ huynh và các em học sinh nên lựa chọn các đơn vị phát hành sách giáo dục thuộc hệ thống NXBGDVN (các Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục, các Công ty Sách-Thiết bị giáo dục miền, các Công ty Sách - Thiết bị trường học tại địa phương).

NXBGDVN



Màu sắc không đồng đều. Sách in lậu có màu sắc đậm hơn, không phù hợp để sử dụng trong thời gian dài



Chất lượng sách in lậu kém hơn so với sách thật. Các nét chữ mờ hơn, nhiều chữ thường bị nhoè mực, hình ảnh tối và mờ

Kích hoạt sách điện tử trên hệ thống

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT9M23
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2023

Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng