TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 557
Tháng 11 - 2023
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 60 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

Năm 2010
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2012
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2013
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 240.000 đồng

Năm 2022
Khổ 19 × 26,5
Giá bìa: 260.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121[illegible]7
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.[illegible]

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT KỸ NĂNG KHI SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du 1, Tiên Du, Bắc Ninh)

Một điều quan trọng giúp chúng ta giải được một phương trình (PT) hay hệ phương trình bằng cách đặt ẩn phụ đó là phát hiện được các mối liên hệ giữa các ẩn với nhau. Mối liên hệ này gồm có:

- Mối liên hệ giữa các ẩn mới.
- Mối liên hệ giữa các ẩn cũ.
- Mối liên hệ giữa các ẩn mới với các ẩn cũ.

Mối liên hệ giữa các ẩn được thể hiện dưới dạng các đẳng thức hoặc bất đẳng thức. Sau đây là một số thí dụ.

Thí dụ 1. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{41\sqrt{(x-1)^5}-\sqrt{(x+1)^5}}{4\sqrt{2}}.$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$. Ta có:

$$\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\sqrt{x+1-2\sqrt{(x+1)(x-1)}+x-1}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}=\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right|$$
$$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}.$$

Do đó PT đã cho tương đương với

$$4(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})=41\sqrt{(x-1)^5}-\sqrt{(x+1)^5}\quad (1).$$

Đặt $\sqrt{x+1}=a>0$, $\sqrt{x-1}=b\ge 0$.

Từ cách đặt ta phát hiện ra mối liên hệ sau:

$$a^2-b^2=2.$$

Suy ra: $(a^2-b^2)^2=4$ (2). Khi đó PT(1) có dạng: $4(a-b)=41b^5-a^5$ (3).

Nhân theo vế (2) và (3) ta được:

$$(a^2-b^2)^2(a-b)=41b^5-a^5$$
$$\Leftrightarrow 2a^5-a^4b-2a^3b^2+2a^2b^3+ab^4-42b^5=0$$
$$\Leftrightarrow (a-2b)(2a^4+3a^3b+4a^2b^2+10ab^3+21b^4)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ 2a^4+3a^3b+4a^2b^2+10ab^3+21b^4=0\quad (4)\end{array}\right..$$

Vì $a>0, b\ge 0$ nên VT(4) > 0. Suy ra (4) vô nghiệm. Với $a=2b\Rightarrow \sqrt{x+1}=2\sqrt{x-1}$

$$\Leftrightarrow x+1=4(x-1)\Leftrightarrow x=\frac{5}{3}.$$

Thử lại ta thấy $x=\frac{5}{3}$ là nghiệm PT đã cho.

Vậy PT đã cho có một nghiệm $x=\frac{5}{3}$.

Thí dụ 2. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{x^2+1}=1+(x-1)\sqrt{x^4+2x}\quad (*).$$

Lời giải. Điều kiện:

$$x^4+2x\ge 0\Leftrightarrow x(x^3+2)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -\sqrt[3]{2} \\ x\ge 0\end{array}\right..$$

- Với $x\le -\sqrt[3]{2}$ thì $x-1<0\Rightarrow$ VT(*) > 1 > VP(*).
- Dễ thấy $x=0$ là một nghiệm của PT(*).
- Xét $x>0$. Đặt $a=\sqrt{x^2+1}\ge 1; b=\sqrt{x^4+2x}>0$.

Ta có mối liên hệ sau:

$$a^2+b^2=x^4+x^2+2x+1\ (1).$$

Từ PT đã cho có: $a=1+(x-1)b$. Thay vào (1) ta được: $\left[1+(x-1)b\right]^2+b^2=x^4+x^2+2x+1$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x+2)b^2+(2x-2)b-(x^4+x^2+2x)=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-2x+2)b^2+(2x-2)b-(x+1)(x^3-x^2+2x)=0$$
$$\Leftrightarrow (b-x-1)[(x^2-2x+2)b+x^3-x^2+2x]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=x+1 \\ b=-\dfrac{x\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right]}{(x-1)^2+1}\end{array}\right..$$

Do $x>0$ nên $b=-\dfrac{x\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right]}{(x-1)^2+1}<0$ (loại).

Với $b=x+1$ thì $a=x^2$ khi đó có hệ:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+1}=x^2\\ \sqrt{x^4+2x}=x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x^2+1=x^4\\ x^4+2x=(x+1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x^4-x^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x^2=\dfrac{1+\sqrt5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt5}{2}}.$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x=0;\ x=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt5}{2}}$.

Thí dụ 3. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{-x^4-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}+\sqrt{2x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}$$
$$=\sqrt[3]{-x^4-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}+\sqrt[3]{2x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}\quad(1).$$

Lời giải. Đặt

$$-x^4-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}=a\ge 0;\ 2x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}=b\ge 0.$$

PT(1) trở thành $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ (2). Ta có mối liên hệ sau:

$$a+b=-x^4+2x^2=1-\left(x^2-1\right)^2\le 1.$$

Suy ra: $a\le 1-b\le 1-0=1$ và $b\le 1-a\le 1-0=1$.

Với $0\le a\le 1$ ta thấy: $a^2(1-a)\ge 0$

$$\Rightarrow a^3\le a^2\Rightarrow\sqrt[6]{a^3}\le\sqrt[6]{a^2}\Rightarrow\sqrt{a}\le\sqrt[3]{a}\quad(3).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=0;\ a=1$. Tương tự $\sqrt{b}\le\sqrt[3]{b}$ (4). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b=0;\ b=1$.

Cộng vế với vế (3), (4) ta được:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}.$$

Do vậy (2) xảy ra khi $b=0$ hoặc $b=1$.

• Khi $b=0$ có: $2x^2+\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$.

• Khi $b=1$ có: $2x^2+\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{2}=1$

$$\Leftrightarrow 2x^2+\frac{x}{2}-\frac{5}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-\dfrac{5}{4}\end{array}\right..$$

Thử lại ta thấy phương trình đã cho có đúng hai nghiệm $x=\pm1$.

Thí dụ 4. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2-y^2-6x+12}+\sqrt{x^2-6x+12}=x+y & (1)\\ \dfrac{\sqrt{(2x^2-y^2-6x+12)^3}-3\sqrt{(x^2-6x+12)^3}}{x^2y+3xy^2}=\dfrac{1}{2} & (2)\end{cases}.$$

Lời giải. Ta có $x^2-6x+12=(x-3)^2+3>0$ nên VT(1) >0, suy ra $x+y>0$.

Đặt $\sqrt{2x^2-y^2-6x+12}=a\ge 0;$

$$\sqrt{x^2-6x+12}=b>0.$$

Từ cách đặt ta có mối liên hệ sau:

$$a^2-b^2=x^2-y^2.$$

Kết hợp với PT(1) ta có: $\begin{cases}a+b=x+y\\ a^2-b^2=x^2-y^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=x+y\\ (a+b)(a-b)=(x+y)(x-y)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=x+y\\ a-b=x-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=x\ge 0\\ b=y>0\end{cases}\quad(*).$$

Thay vào PT(2) được: $\dfrac{x^3-3y^3}{x^2y+3xy^2}=\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x^3-x^2y-3xy^2-6y^3=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2y)(2x^2+3xy+3y^2)=0\quad(3).$$

Do $x+y>0$ nên $x,\ y$ không đồng thời bằng 0.

Suy ra $2x^2+3xy+3y^2=\dfrac{\left(2x+\frac{3y}{2}\right)^2+\frac{15y^2}{4}}{2}>0.$

Vì vậy (3) $\Leftrightarrow x=2y$. Thay $x=2y$ vào (*) ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{7y^2-12y+12}=2y\\ \sqrt{4y^2-12y+12}=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7y^2-12y+12=4y^2\\ 4y^2-12y+12=y^2\end{cases}$$

$\Leftrightarrow 3y^2-12y+12=0\Leftrightarrow y=2.$

Với $y=2$ suy ra $x=4$. Vậy hệ PT đã cho có đúng một nghiệm $(x;y)=(4;2)$.

Thí dụ 5. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}\sqrt{3x^2+4xy+18}-\sqrt{x^2+6}=x+y & (1)\\ \sqrt{3x^2+4xy+18}-2\sqrt{x^2+6}=(x^2-y^2)^2 & (2)\end{cases}.$$

Lời giải. Đặt

$$\sqrt{3x^2+4xy+18}=a\ge 0,\ \sqrt{x^2+6}=b\ge\sqrt{6}.$$

Suy ra $a^2-3b^2=4xy$ (3). Ta có:

$$4xy=(x+y)^2-(x-y)^2\le(x+y)^2 \quad (4)$$

Từ (1) ta cũng có: $a-b=x+y$ (5).

Từ (3),(4),(5) suy ra:

$$a^2-3b^2\le(a-b)^2 \Leftrightarrow 2b(a-2b)\le 0$$

$$\Leftrightarrow a-2b\le 0 \ (6) \text{ (do } b\ge\sqrt{6}).$$

Từ (2) có $a-2b=(x^2-y^2)^2\ge 0$ (7).

Từ (6),(7) suy ra $a-2b=0$, thay vào (7) được:

$$0=(x^2-y^2)^2.$$

Suy ra : $\begin{cases}\sqrt{3x^2+4xy+18}=2\sqrt{x^2+6}\\ (x^2-y^2)^2=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+4xy+18=4(x^2+6)\\ y=\pm x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=2\\ y=x\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}5x^2+6=0\\ y=-x\end{cases} \Leftrightarrow x=y=\pm\sqrt{2}.$$

Thử lại ta thấy hệ PT đã cho chỉ có nghiệm

$$x=y=\sqrt{2}.$$

Nhận xét: Việc tìm ra các mối liên hệ (3) và (4) đã giúp ta giải được hệ PT.

Thí dụ 6. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^5-\left(\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right)^5=\dfrac{x^4+y^4}{2x^2y^2} & (1)\\ \dfrac{4x+\sqrt{2y-2xy+1}}{\sqrt{2x^2y^2+14y^2-2y+7}}=1 & (2)\end{cases}.$$

Lời giải. Dễ thấy $14y^2-2y+7>0$.

Điều kiện: $x,y\ne 0; 2y-2xy+1\ge 0$.

Đặt $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=a;\ \dfrac{-2xy}{x^2+y^2}=b$. Dễ thấy do $x,y\ne 0$ nên $a\ne\pm1$ và $b\ne 0$. Ta có đẳng thức:

$$\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2+\left(\frac{-2xy}{x^2+y^2}\right)^2=1.$$

Suy ra: $a^2+b^2=1 \Rightarrow a^2=1-b^2\ge 0$

$$\Rightarrow -1\le b\le 1 \Rightarrow -1\le b^3\le 1\Rightarrow b^2(1-b^3)\ge 0$$

$$\Rightarrow b^5\le b^2 \ (3).$$

Tương tự: $a^5\le a^2$ (4).

Từ (3), (4) suy ra

$$\text{VT}(1)=a^5+b^5\le a^2+b^2=1 \ (5).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a^2(1-a^3)=0\\ b^2(1-b^3)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=1\end{cases}.$$

Với $a=0, b=1$ ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0\\ \dfrac{-2xy}{x^2+y^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm y\\ \dfrac{-2xy}{x^2+y^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=-y.$$

Mặt khác $\text{VP}(1)=\dfrac{x^4+y^4}{2x^2y^2}=1+\dfrac{(x^2-y^2)^2}{2x^2y^2}\ge 1$ (6).

nên đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x^2-y^2=0\Leftrightarrow x=\pm y.$$

Từ (5), (6) suy ra có $\text{VT}(1)\le\text{VP}(1)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x=-y\\ x=\pm y\end{cases}\Leftrightarrow y=-x.$$

Như vậy $\text{PT}(1)\Leftrightarrow y=-x$. Thay $y=-x$ vào PT(2)

ta được: $\dfrac{4x+\sqrt{2x^2-2x+1}}{\sqrt{2x^4+14x^2+2x+7}}=1$

$$\Leftrightarrow 4x+\sqrt{2x^2-2x+1}=\sqrt{2x^4+14x^2+2x+7} \ (*).$$

Đặt $\sqrt{2x^4+14x^2+2x+7}=c\ge 0;$

$$\sqrt{2x^2-2x+1}=d\ge 0.$$

Suy ra: $c^2+d^2=2x^4+16x^2+8$ (7).

Từ PT(*) ta có: $c=d+4x$ (**), thay vào (7) được: $(d+4x)^2+d^2=2x^4+16x^2+8$

$$\Leftrightarrow 2d^2+8xd-(2x^4+8)=0$$

$$\Leftrightarrow d^2+4xd-(x^4+4x^2+4-4x^2)=0$$

$$\Leftrightarrow d^2+\left(x^2+2x+2-x^2+2x-2\right)d$$
$$-(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(d-x^2+2x-2\right)\left(d+x^2+2x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=x^2-2x+2 \\ d=-1-(x+1)^2<0 \end{array}\right..$$

Ta chỉ lấy $d=x^2-2x+2$, thay vào (**) được:

$$c=x^2+2x+2.$$

Với c, d vừa tìm ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{2x^4+14x^2+2x+7}=x^2+2x+2 \\ \sqrt{2x^2-2x+1}=x^2-2x+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^4+14x^2+2x+7=(x^2+2x+2)^2 \\ 2x^2-2x+1=(x^2-2x+2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^4-4x^3+6x^2-6x+3=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left((x-1)^3-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1+\sqrt[3]{2} \end{array}\right..$$

Với $x=1$ thì $y=-1$.

Với $x=1+\sqrt[3]{2}$ thì $y=-1-\sqrt[2]{2}$.

Kiểm tra thấy các nghiệm thỏa mãn điều kiện.

Vậy hệ PT đã cho có 2 nghiệm $(x; y)$ là:

$$(1;-1);\left(1+\sqrt[3]{2};-1-\sqrt[3]{2}\right).$$

Thí dụ 7. *Cho hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{1+xy}+\dfrac{y-z}{1+yz}+\dfrac{z-x}{1+zx}=-\dfrac{1}{3} \\ \left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)^2+\left(\dfrac{y-z}{1+yz}\right)^2+\left(\dfrac{z-x}{1+zx}\right)^2=\dfrac{41}{18} \end{cases}$$

a) *Giải hệ phương trình.*

b) *Tìm các nghiệm $(x; y; z)$ sao cho x, y, z là các số nguyên.*

Lời giải. a) Đặt $\dfrac{x-y}{1+xy}=a; \dfrac{y-z}{1+yz}=b; \dfrac{z-x}{1+zx}=c.$

Ta chứng minh mối liên hệ sau:

$$a+b+c=abc.$$

Thật vậy: $a+b+c=\dfrac{x-y}{1+xy}+\dfrac{y-z}{1+yz}+\dfrac{z-x}{1+zx}$

$$=\frac{(x-z)(y^2+1)}{(1+xy)(1+yz)}+\frac{z-x}{1+zx}$$

$$=\frac{(z-x)\left[(1+xy)(1+yz)-(1+y^2)(1+zx)\right]}{(1+xy)(1+yz)(1+zx)}$$

$$=\frac{(z-x)(xy+yz-y^2-xz)}{(1+xy)(1+yz)(1+zx)}$$

$$=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(1+xy)(1+yz)(1+zx)}=abc.$$

Ta có hệ PT: $\begin{cases} a+b+c=-\dfrac{1}{3} \\ a^2+b^2+c^2=\dfrac{41}{18} \\ abc=-\dfrac{1}{3} \end{cases}.$

Do $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

nên có $ab+bc+ca=-\dfrac{13}{12}.$

Ta có: $(t-a)(t-b)(t-c)=0$

$$\Leftrightarrow t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc=0$$

$$\Leftrightarrow t^3+\frac{1}{3}t^2-\frac{13}{12}t+\frac{1}{3}=0 \quad (*).$$

Suy ra a, b, c là các nghiệm của (*).

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2\left(t+\dfrac{4}{3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow t=\frac{1}{2} \text{ hoặc } t=-\frac{4}{3}.$$

Suy ra $(a; b; c)$ nhận

$$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{4}{3}\right),\left(\frac{1}{2};-\frac{4}{3};\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right).$$

Với $(a; b; c)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};-\dfrac{4}{3}\right)$ có:

$$\frac{x-y}{1+xy}=\frac{1}{2};\ \frac{y-z}{1+yz}=\frac{1}{2};\ \frac{z-x}{1+zx}=-\frac{4}{3}.$$

Từ $\dfrac{x-y}{1+xy}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ (1).

Từ $\dfrac{y-z}{1+yz}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow z=\dfrac{2y-1}{y+2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$z=\frac{\frac{4x-2}{x+2}-1}{\frac{2x-1}{x+2}+2}=\frac{3x-4}{4x+3}.$$

Thay vào PT : $\frac{z-x}{1+zx}=-\frac{4}{3}$ được :

$$\frac{\frac{3x-4}{4x+3}-x}{1+x.\frac{3x-4}{4x+3}}=-\frac{4}{3} \text{ (luôn đúng).}$$

Vì vậy trong trường hợp này nghiệm $(x; y; z)$ của hệ PT là:

$$\left(t_1;\frac{2t_1-1}{t_1+2};\frac{3t_1-4}{4t_1+3}\right) \text{ với } t_1\neq -2; t_1\neq -\frac{3}{4}.$$

Giải tương tự các trường hợp còn lại. Từ đó ta có tất cả các nghiệm $(x; y; z)$ của hệ PT đã cho là:

$$\left(t_1;\frac{2t_1-1}{t_1+2};\frac{3t_1-4}{4t_1+3}\right),\left(t_2;\frac{2t_2-1}{t_2+2};\frac{-2t_2-1}{t_2-2}\right),$$
$$\left(t_3;\frac{-3t_3-4}{4t_3-3};\frac{-2t_3-1}{t_3-2}\right).$$

b) Xét $(x;y;z)=\left(t_1;\frac{2t_1-1}{t_1+2};\frac{3t_1-4}{4t_1+3}\right)$

Ta có $\frac{2t_1-1}{t_1+2}=2-\frac{5}{t_1+2}$. Do x, y là số nguyên nên $\frac{5}{t_1+2}\in\mathbb{Z}$. Suy ra t_1+2 là ước của 5. Từ đó ta được $t_1\in\{-1;-3;3;-7\}$. Thử lại ta được các nghiệm $(x; y; z)$ cần tìm là: $(-7;3;1),(-1;-3;7)$.

Giải tương tự các trường hợp còn lại. Ta có tất cả các nghiệm $(x; y; z)$ sao cho x, y, z là số nguyên là:

$$(-7;3;1),(-1;-3;7),\ (-3;7;-1),(3;1;-7),$$
$$(1;-7;3),(7;-1;-3).$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. *Giải các phương trình:*

a) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{(7-x)^2}=9+\sqrt[3]{56x-8x^2}$.

b) $\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-4}}=\frac{50\sqrt{(x-2)^5}-\sqrt{(x+2)^5}}{4(3x-2)}$.

c) $\sqrt{x^2+5}-(x-1)\sqrt{x^4+2x-3}=2$.

d) $\sqrt{3x^2+7x-1}-\sqrt{2x^4+3x^2-7x+3}=2x$.

e) $\sqrt{3-x^2}+\sqrt[3]{5x^2-8x+9}=2x$.

f) $\sqrt{\frac{2}{3}x^2-2x+\frac{4}{3}}+x.\sqrt[3]{\frac{x^2+2}{3}}=1$.

g) $\sqrt{x^2+5x+4}=x.\sqrt[3]{3x^2-x+5}+1$.

h) $\sqrt{3x^2-8x+4}+x.\sqrt[3]{x^2+4x+5}=1$.

Bài tập 2. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=1\\ \frac{x+y}{x-y}+\frac{y+z}{y-z}+\frac{z+x}{z-x}=-6\\ \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=30\end{cases}$$

Bài tập 3. *Giải các hệ phương trình:*

a) $\begin{cases}8xy^2+3x^2-5x+1=0\\ \sqrt{5+4x-y^2}-x.\sqrt[3]{\frac{x^2+y^2+2}{3}}=2\end{cases}$.

b) $\begin{cases}x^4+y^4=162\\ \sqrt{\frac{xy}{3}+\frac{x}{2}-\frac{y}{6}}+\sqrt{2xy-x+\frac{y}{3}}=x+y\end{cases}$.

c) $\begin{cases}\sqrt[4]{3x^2-4y^2-1}+\sqrt[4]{8xy-3}=x+2y\\ \sqrt{3x^2-4y^2-1}+\sqrt{8xy-3}=4xy\end{cases}$.

d) $\begin{cases}x^2+2xy-2y^2+12=0\\ \sqrt{x^2+2y^2-20}+\sqrt{3x^2-y^2+20}=2x+y\end{cases}$.

e) $\begin{cases}\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)^5+\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^5=\frac{3x^4+3y^4}{2x^4+2x^2y^2+2y^4}\\ \frac{1+\sqrt{4x^2+8x+1}}{1+xy}+\frac{1+\sqrt{2y^2+2y+1}}{2+xy}=3\end{cases}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, TỈNH NAM ĐỊNH NĂM HỌC 2023 - 2024

VÒNG 1

Câu 1. 1) *Tính giá trị biểu thức*

$$P=\sqrt{2024+2\sqrt{2023}}-\sqrt{2025+2\sqrt{2024}}.$$

2) *Tìm tọa độ của điểm M là giao điểm của đường thẳng $y=x+1$ với trục Oy.*

3) *Tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác vuông có cạnh huyền bằng $2\sqrt{2}$ cm.*

4) *Tính thể tích của hình nón có đường sinh bằng 10 cm và bán kính đáy bằng 6 cm.*

Lời giải.

1) $P=\sqrt{\left(\sqrt{2023}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2024}+1\right)^2}$

$=\sqrt{2023}+1-\left(\sqrt{2024}+1\right)$

$=\sqrt{2023}-\sqrt{2024}.$

2) Tọa độ giao điểm là $M(0;1)$.

3) Gọi R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp.

Từ giả thiết ta có $2R=2\sqrt{2}\Leftrightarrow R=\sqrt{2}.$

Vậy diện tích của hình tròn là:

$$S=\pi R^2=2\pi\ (\text{cm}^2).$$

4) Gọi h là chiều cao của hình nón. Từ giả thiết ta có $h=\sqrt{10^2-6^2}\Leftrightarrow h=8.$ Vậy thể tích của hình nón là $V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi.6^2.8=96\pi\ (\text{cm}^3).$

Câu 2. *Cho biểu thức*

$$P=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right).\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

(với $x\ge 0$ và $x\ne 1$).

1) *Rút gọn biểu thức P.*

2) *Tìm x để $P=\frac{1}{3}$.*

Lời giải.

1) $P=\dfrac{x+2+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

$=\dfrac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x}+1}.$

2) $P=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x+\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-2=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=1\\ \sqrt{x}=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1$ (loại).

Câu 3. 1) *Cho phương trình*

$$x^2-(2m+1)x+4m-2=0\quad(1)$$

(với m là tham số).

a) *Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.*

b) *Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm tất cả giá trị của m để x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{13}$.*

2) *Giải phương trình*

$$6\sqrt{2x+5}+4\sqrt{x+2}=3x+20.$$

Lời giải. 1) a) Ta có:

$$\Delta=(2m+1)^2-4(4m-2)=4m^2-12m+9.$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta>0\Leftrightarrow m\ne\frac{3}{2}.$

b) Với $m \neq \frac{3}{2}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x = 2, x = 2m - 1$. Vì x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật nên $2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$. Ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 = 13$$
$$\Leftrightarrow 2^2 + (2m-1)^2 = 13$$
$$\Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \text{ (loại)} \\ m = 2 \quad \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right.$$

Vậy $m = 2$.

2) Điều kiện: $x \geq -2$. Phương trình trở thành:

$$\left[(2x+5) - 6\sqrt{2x+5} + 9\right] + \left[(x+2) - 4\sqrt{x+2} + 4\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+5} - 3\right)^2 + \left(\sqrt{x+2} - 2\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+5} - 3 = 0 \\ \sqrt{x+2} - 2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \sqrt{x+2} - 2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Câu 4. *Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn tâm O, AD là đường cao. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC.*

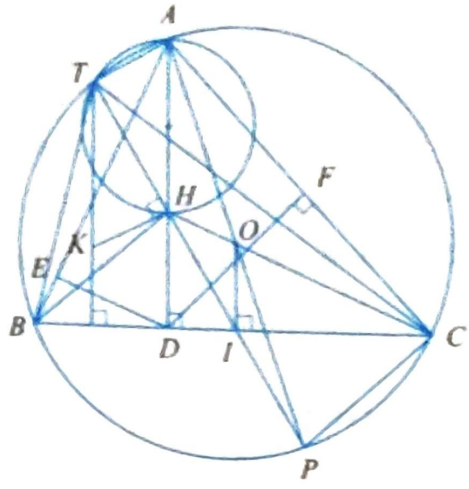
1) Chứng minh tứ giác AEDF nội tiếp và

$$AE.AB = AF.AC.$$

2) Gọi AP là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh AP vuông góc với EF.

3) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là T. Gọi K là trực tâm của tam giác BTC. Chứng minh tam giác HKT vuông tại H.

Lời giải.



1) Ta có: $\widehat{AED} = 90°$, $\widehat{AFD} = 90°$. Xét tứ giác $AEDF$ có $\widehat{AED} + \widehat{AFD} = 90° + 90° = 180°$, suy ra tứ giác $AEDF$ nội tiếp.

Trong tam giác vuông ABD có DE là đường cao suy ra: $AE.AB = AD^2$ (1).

Trong tam giác vuông ACD có DF là đường cao suy ra: $AF.AC = AD^2$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $AE.AB = AF.AC$.

2) Do $AE.AB = AF.AC \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$, mà $\widehat{BAC}$ chung suy ra: $\Delta AEF \backsim \Delta ACB \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ACB}$.

Ta có: $\widehat{BAP} = \widehat{BCP}$, suy ra:

$$\widehat{AEF} + \widehat{BAP} = \widehat{ACB} + \widehat{BCP} = \widehat{ACP} = 90°.$$

Vậy AP vuông góc với EF.

3) Ta có $AH \perp BC$, $TK \perp BC \Rightarrow AH \parallel TK$.

Do $BH \perp AC$, $PC \perp AC \Rightarrow BH \parallel PC$.

Do $CH \perp AB$, $PB \perp AB \Rightarrow CH \parallel PB$.

Suy ra tứ giác $BHCP$ là hình bình hành.

Gọi I là trung điểm BC, ta có $OI = \frac{1}{2}AH$.

Tương tự: $OI = \frac{1}{2}TK \Rightarrow AH = TK$. Khi đó tứ giác $AHKT$ là hình bình hành $\Rightarrow AT \parallel HK$.

Mà $\widehat{ATH} = 90° \Rightarrow \widehat{THK} = 90°$. Vậy tam giác HKT vuông tại H.

Câu 5. *1) Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\sqrt{4x^2+3}-2\sqrt{y}=\sqrt{y^2+3}-2\sqrt{2x} & (1)\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{y+3-x^2} & (2)\end{cases}.$$

2) Xét hai số thực dương x, y thỏa mãn $6x+y=2xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=3x+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{42}{y}+\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2.$$

Lời giải. 1) Điều kiện:

$$\begin{cases}0\le x\le 3\\ y\ge 0\\ y+3-x^2\ge 0\end{cases}.$$

Phương trình (1) trở thành:

$$\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{2x}-2\sqrt{y}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x}-\sqrt{y}\right)\left[\frac{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{y}\right)(2x+y)}{\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{y^2+3}}+2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow y=2x.$$

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{2x+3-x^2}.$$

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\Rightarrow\sqrt{2x+3-x^2}=\dfrac{t^2-4}{2}$.

Khi đó: $t=2+\dfrac{t^2-4}{2}\Leftrightarrow t^2-2t=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=2\end{array}\right..$$

Với $t=0$ ta được:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Với $t=2$ ta được:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)(3-x)}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=-1 & \text{(loại)}\\ x=3 & \text{(thỏa mãn)}\end{array}\right..$$

Với $x=3\Rightarrow y=6$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(3;6)$.

2) Ta có: $P=4x+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{42}{y}+2\sqrt{xy}$.

Do $x>0, y>0$ và $6x+y=2xy$ nên $\dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{y}=2$.

Mặt khác ta có:

$$2xy=6x+y\ge 2\sqrt{6xy}\Rightarrow\sqrt{xy}\ge\sqrt{6}.$$

Khi đó:

$$P=\left(2x+2x+\frac{2}{x^2}\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{6}{y}\right)+\left(y+\frac{36}{y}\right)+2\sqrt{xy}$$

$$\ge 3.2+2+2.6+2\sqrt{6}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=1, y=6$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $20+2\sqrt{6}$.

VÒNG 2

Câu 1. *a) Cho x, y, z là ba số thực khác 0 thỏa mãn $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$ và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=0$.*

Chứng minh rằng $x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$.

b) Cho $f(n)=\dfrac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$ với n là số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức

$$S=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(40).$$

Lời giải. a) Từ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=0$ suy ra:

$$yz+2zx+3xy=0 \quad (1).$$

Từ $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$ suy ra:

$$1=\left(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}\right)^2$$

$$=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}+2\left(x.\frac{y}{2}+\frac{y}{2}.\frac{z}{3}+\frac{z}{3}.x\right)$$

$$=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}+\frac{3xy+yz+2zx}{3} \quad (2).$$

Kết hợp (1) và (2) suy ra: $x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$.

b) Ta có:

$$f(n)=\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{2\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)}{(2n+1)-(2n-1)}$$

$$\left(\text{do } \sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\ne 0\right)$$

$$=\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}.$$

Áp dụng điều trên có:

$S = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(40)$

$= \left(\sqrt{3} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right) + ... + \left(\sqrt{81} - \sqrt{79}\right)$

$= \sqrt{81} - \sqrt{1} = 9 - 1 = 8.$

Vậy $S = 8$.

Câu 2. *a) Giải phương trình*

$$2\left(\sqrt{x-1}+1\right) = x + \sqrt{x+2}.$$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + x - y + 2 \\ x^3 + y^3 = y(x + y + 4) + x \end{cases}.$$

Lời giải. a) Xét phương trình:

$$2\left(\sqrt{x-1}+1\right) = x + \sqrt{x+2} \quad (1)$$

điều kiện xác định là $x \geq 1$. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \left(2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2}\right) - (x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-6}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}} - (x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{3}{2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}} - 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ 2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 3 \quad (2) \end{array}\right..$$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow \left(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}\right)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow 5x - 2 + 4\sqrt{x^2 + x - 2} = 9$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 + x - 2} = 11 - 5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11 - 5x \geq 0 \\ 16\left(x^2 + x - 2\right) = (11 - 5x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11 - 5x \geq 0 \\ 9x^2 - 126x + 153 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11 - 5x \geq 0 \\ x^2 - 14x + 17 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11 - 5x \geq 0 \\ x = 7 \pm 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 7 - 4\sqrt{2}.$$

Vậy phương trình (1) có đúng 2 nghiệm là

$$x = 2,\ x = 7 - 4\sqrt{2}.$$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + x - y + 2 \\ x^3 + y^3 = y(x + y + 4) + x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = x - y + 2 & (3) \\ (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) = xy + y^2 + 4y + x & (4) \end{cases}.$$

Thay (3) vào (4) ta được:

$$(x+y)(x-y+2) = xy + y^2 + 4y + x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 + x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)(x+y+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ x = -y - 1 \end{array}\right..$$

Với $x = 2y$, thay vào (3) được:

$$4y^2 - 2y^2 + y^2 = y + 2 \Leftrightarrow 3y^2 - y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right..$$

Tìm được $(x;y) = (2;1)$ và $(x;y) = \left(-\dfrac{4}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Với $x = -y - 1$, thay vào (3) được:

$$(y+1)^2 + (y+1)y + y^2 = -y - 1 - y + 2$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 + 5y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -\dfrac{5}{3} \end{array}\right..$$

Tìm được $(x;y) = (-1;0)$ và $(x;y) = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$.

Vậy hệ có đúng bốn bộ nghiệm $(x;y)$ là:

$$(2;1),\ \left(-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right),\ (-1;0),\ \left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right).$$

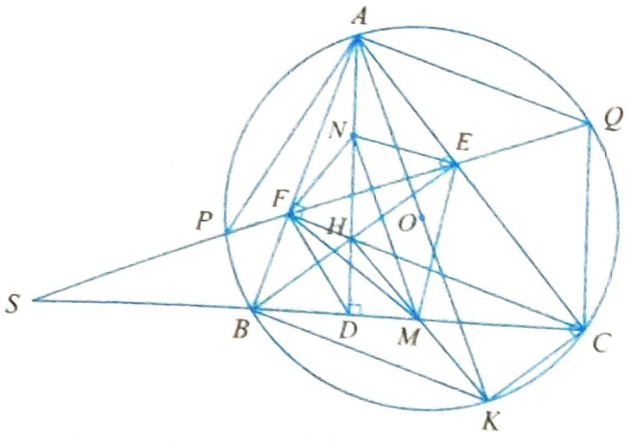
Câu 3. *Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là trung điểm của đoạn AH, đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại P, Q và cắt đường thẳng BC tại S sao cho P nằm giữa S và F. Chứng minh rằng:*

a) Tứ giác AOMN là hình bình hành.

b) $AP^2 = AQ^2 = AE.AC$.

c) Tứ giác DMEF nội tiếp và $\dfrac{FP}{PS} = \dfrac{QE}{ES}$.

Lời giải.



a) Kẻ đường kính AK của (O) thì $KC \perp AC$, từ $BH \perp AC$ suy ra $BH // KC$.

Tương tự có $CH // BK$. Suy ra: $BHCK$ là hình bình hành, suy ra M là trung điểm của HK.

Xét tam giác KHA có OM là đường trung bình nên $OM // AH$ và $OM = \frac{1}{2}AH$, suy ra $OM // AN$ và $OM = AN$, do đó tứ giác $AOMN$ là hình bình hành.

b) • Ta chỉ ra $AO \perp PQ$

Vì tam giác AFH vuông tại F nên $NF = \frac{AH}{2}$.

Tương tự $NE = \frac{AH}{2}$ nên $NF = NE$.

Tương tự cũng có $MF = \frac{BC}{2} = ME$.

Từ đó suy ra MN là đường trung trực của EF, theo ý a) có được $AO // MN$ nên suy ra $AO \perp PQ$.

• Xét (O) có bán kính AO vuông góc với dây cung PQ nên AO là đường trung trực của PQ, suy ra $AP = AQ$ (1).

• Xét tam giác AQE và tam giác ACQ có góc A chung, $\widehat{AQE} = \widehat{AQP} = \widehat{APQ} = \widehat{ACQ}$ nên chúng là hai tam giác đồng dạng (g.g).

Suy ra: $\frac{AQ}{AE} = \frac{AC}{AQ} \Rightarrow AQ^2 = AE.AC$ (2).

Từ (1) và (2) có: $AP^2 = AQ^2 = AE.AC$.

c) Do tứ giác $BFEC$ nội tiếp nên $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$.

Tam giác EMC cân tại M nên $\widehat{MEC} = \widehat{ACB}$.

Suy ra: $\widehat{FEM} = 180° - \widehat{AEF} - \widehat{MEC}$

$= \widehat{180°} - \widehat{ABC} - \widehat{ACB}$

$= \widehat{BAC}$.

Có tứ giác $DFAC$ nội tiếp nên

$\widehat{FDM} + \widehat{BAC} = 180°$.

Từ đó suy ra: $\widehat{FEM} + \widehat{FDM} = 180°$.

Suy ra tứ giác $DMEF$ nội tiếp.

Xét tam giác SDF và SEM có $\hat{S}$ chung và $\widehat{FDS} = \widehat{MES}$ nên chúng đồng dạng (g.g).

Suy ra:

$$\frac{SD}{SF} = \frac{SE}{SM} \text{ hay } SD.SM = SE.SF.$$

Tương tự, từ tứ giác $BFEC$ nội tiếp suy ra:

$$SE.SF = SB.SC;$$

Từ tứ giác $BCQP$ nội tiếp suy ra:

$$SB.SC = SP.SQ.$$

Từ đó suy ra: $SP.SQ = SE.SF$.

Suy ra: $\frac{FS}{PS} = \frac{QS}{ES} \Rightarrow \frac{FS - PS}{PS} = \frac{QS - ES}{ES}$

$$\Leftrightarrow \frac{FP}{PS} = \frac{QE}{ES}.$$

Câu 4. a) *Cho hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^3 \vdots b$; $b^3 \vdots a$. Chứng minh $(a^4 + b^4) \vdots ab$.*

b) *Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn*

$$x(x^2 - y) + (y - 3)(x^2 + 1) = 0.$$

Lời giải. a) Ta có $a^4 = a.a^3$ và $a^3 \vdots b$ nên $a^4 \vdots ab$.

Tương tự cũng có $b^4 \vdots ab$. Suy ra $(a^4 + b^4) \vdots ab$.

b) Ta có: $x(x^2 - y) + (y - 3)(x^2 + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-x^3 + 3x^2 + 3}{x^2 - x + 1} \text{ (do } x^2 - x + 1 > 0, \forall x)$$

$$\Leftrightarrow y = -x + 2 + \frac{3x + 1}{x^2 - x + 1} \quad (1).$$

Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó từ (1) suy ra:

$(3x+1)\vdots(x^2-x+1) \Rightarrow (3x+1)^2 \vdots (x^2-x+1)$.

Mà $(3x+1)^2 = 9(x^2-x+1)+15x-8$

nên $(15x-8)\vdots(x^2-x+1)$.

Suy ra $13 = 5(3x+1)-(15x-8)$ chia hết cho x^2-x+1, do đó $x^2-x+1 \in \{1;13\}$.

+ Nếu $x^2-x+1=1$ thì $x^2-x=0 \Leftrightarrow x \in \{0;1\}$.

Thay vào (1) tìm được $(x;y)=(0;3)$ và $(x;y)=(1;5)$ đều thỏa mãn.

+ Nếu $x^2-x+1=13$ thì

$$x^2-x-12=0 \Leftrightarrow x \in \{-3;4\}.$$

Thay vào (1) tìm được $(x;y)=\left(-3;\frac{57}{13}\right)$ không thỏa mãn yêu cầu, $(x;y)=(4;-1)$ thỏa mãn yêu cầu. Vậy có ba cặp $(x;y)$ thỏa mãn là: $(0;3)$, $(1;5)$, $(4;-1)$.

Câu 5. a) *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $0 \le x, y, z \le 4$. Chứng minh rằng:*

$$x^2y+y^2z+z^2x+16 \ge xy^2+yz^2+zx^2.$$

b) *Ban đầu trên bảng viết 2023 số thực. Mỗi lần biến đổi số trên bảng là việc thực hiện như sau: Chọn ra hai số a và b nào đó ở trên bảng, xóa hai số đó đi và viết thêm lên bảng số $\frac{a+b}{4}$. Giả sử ban đầu trên bảng ghi 2023 số 1 và ta thực hiện liên tiếp các biến đổi cho đến khi trên bảng chỉ còn lại một số, chứng minh rằng số đó lớn hơn $\frac{1}{2^{11}}$.*

Lời giải. a) Ta có:

$$\begin{aligned}P &= (x^2y+y^2z+z^2x)-(xy^2+yz^2+zx^2)\\ &= x^2(y-z)+y^2(z-y+y-x)+z^2(x-y)\\ &= (y-z)(x^2-y^2)+(x-y)(z^2-y^2)\\ &= -(x-y)(y-z)(z-x).\end{aligned}$$

$$|P| = |x-y||y-z||z-x|.$$

Ta đi chứng minh: $|P| \le 16$.

Không mất tổng quát, giả sử $0 \le z \le y \le x \le 4$.

Khi đó:

$$\begin{aligned}|P| &= (x-z)(x-y)(y-z)\\ &\le (x-z)\frac{(x-y+y-z)^2}{4}\\ &= \frac{(x-z)^3}{4}.\end{aligned}$$

Mặt khác $0 \le x-z \le 4$ nên

$$|P| \le \frac{(x-z)^3}{4} \le \frac{4^3}{4} = 16.$$

Suy ra $P \ge -16$ hay có điều phải chứng minh.

b) ***Nhận xét.*** Nếu ban đầu bảng viết toàn số dương thì sau mỗi bước biến đổi, các số viết trên bảng vẫn dương.

Kí hiệu T_i là tổng các nghịch đảo của các số thực viết trên bảng ngay sau bước biến đổi thứ $i(i=\overline{0,2022}; i=0$ coi là trạng thái ban đầu).

Giả sử ở bước $i+1$ ta xóa đi hai số dương a, b và viết lên bảng số $\frac{a+b}{4}$ thì:

$$\begin{aligned}T_{i+1}-T_i &= \frac{1}{\frac{a+b}{4}}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\\ &= -\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \le 0\end{aligned}$$

Do đó có $T_{2022} \le T_{2021} \le \ldots \le T_0$

Ban đầu có 2023 số 1 nên $T_0 = 2023$, sau 2022 bước thì trên bảng còn lại số dương x

khi đó $T_{2022} = \frac{1}{x} \le T_0 = 2023$, suy ra:

$$x \ge \frac{1}{2023} > \frac{1}{2048} = \frac{1}{2^{11}}.$$

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(5/7/136 Phan Đình Phùng, TP Nam Định, Nam Định)

Giới thiệu

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRẦN PHÚ, THÀNH PHỐ HẢI PHÒNG
NĂM HỌC 2023 – 2024

(Thời gian làm bài 150 phút, dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán)

Bài 1. *(2,0 điểm)*

a) Cho biểu thức

$$A=\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right):\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$$

(với $x>0$).

Rút gọn biểu thức A và chứng minh $A\le 2$.

b) Cho phương trình:

$$x^2-2(a+1)x+a^2-2a+1=0$$

(x là ẩn, a là tham số).

Chứng minh nếu a là số chính phương thì phương trình đã cho có hai nghiệm cũng là những số chính phương.

Bài 2. *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình:

$$\left(3x^2+4x+6\right)\sqrt{3x^2+4x+5}=27x^3+3x.$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{y}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=1\\ y+4\sqrt{y}=x^2+3x-3-2(x+1)\sqrt{x}\end{cases}.$$

Bài 3. *(3,0 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn tâm O. Vẽ đường kính AT của đường tròn (O) và lấy điểm P trên đoạn thẳng $OT\ (P\ne T)$. Gọi E và F tương ứng là hình chiếu vuông góc của P trên các đường thẳng AC và AB. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC.

a) Chứng minh $\widehat{OAB}=\widehat{HAC}$ và hai đường thẳng BC, EF song song với nhau.

b) Cho AH và EF cắt nhau tại U; điểm Q di động trên đoạn thẳng $UE\ (Q\ne U,\ Q\ne E)$. Đường thẳng vuông góc với AQ tại điểm Q cắt các đường thẳng PE, PF tương ứng tại M, N. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh bốn điểm A, M, N, P cùng thuộc một đường tròn và $\widehat{OAH}=\widehat{KAQ}$.

c) Kẻ KD vuông góc với $BC\ (D\in BC)$. Chứng minh đường thẳng đi qua điểm D và song song với AQ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4. *(1,0 điểm)*

Cho các số thực a, b, c thoả mãn $a+b+c=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2a-1}{a^2+2}+\frac{2b-1}{b^2+2}+\frac{2c-1}{c^2+2}.$$

Bài 5. *(2,0 điểm)*

a) Tìm các số nguyên tố a, b và số nguyên dương m thoả mãn $a^2+b^2+18ab=4.5^m$.

b) Cho 8 điểm phân biệt trên một đường tròn. Đánh số các điểm đó một cách ngẫu nhiên bởi các số $1,2,\ldots,8$ (hai điểm khác nhau được đánh số bởi hai số khác nhau). Mỗi dây cung nối hai điểm bất kỳ được gán với giá trị tuyệt đối của hiệu các số ở hai đầu mút. Chứng minh rằng luôn tìm được bốn dây cung, đôi một không có điểm chung, sao cho tổng của các số gán với bốn dây cung đó bằng 16.

LÊ ĐỨC THỊNH

(GV THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng)

Giới thiệu

PHÁT TRIỂN TƯ DUY VÀ LẬP LUẬN TOÁN HỌC CHO HỌC SINH THPT THÔNG QUA KHAI THÁC ỨNG DỤNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

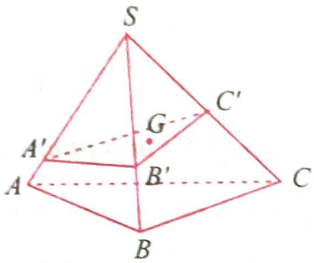
NGUYỄN VĂN HẬU - TRẦN ĐÌNH HOÀNG - NGUYỄN VIẾT CƯỜNG
(GV THPT Nguyễn Trường Tộ, Hưng Nguyên, Nghệ An)

(Kỳ 3)

3. Phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh thông qua hướng dẫn học sinh sáng tác bài toán mới

BÀI TOÁN GỐC 1. *Cho tứ diện $S.ABC$. Một mặt phẳng (α) thay đổi đi qua trọng tâm G của tứ diện sao cho mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại các điểm A', B', C'. Chứng minh rằng:*

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=4.$$



Lời giải. Vì G là trọng tâm của tứ diện $S.ABC$ nên ta có:

$$\overrightarrow{SG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}\right).$$

Vì 4 điểm G, A', B', C' đồng phẳng nên ta có:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}\right)=1.$$

Suy ra $\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=4$.

Nếu chỉ giải quyết bài toán đến đây thì vô tình chúng ta để bài toán trên thành bài toán "chết". Nhiều giáo viên chỉ tập trung hướng dẫn và yêu cầu HS làm các bài tập được giao mà chưa quan tâm nhiều đến việc nghiên cứu sâu và khai thác bài toán. Do đó sau khi giải bài toán, GV sẽ hướng dẫn HS nghiên cứu sâu, tập dượt cho HS cách sáng tác ra các bài toán mới cũng như giải các bài toán tương tự nhằm khơi gợi sự sáng tạo, đam mê, hứng thú cho HS. Cũng từ đó giúp HS đi từ việc thụ động giải các bài toán được giao đến việc chủ động tìm tòi, sáng tác các bài toán mới, rèn luyện tư duy và lập luận toán học cho HS, tạo cảm hứng say mê, hứng thú khi học chủ đề vectơ trong không gian.

Để có thể phát hiện và đề xuất được bài toán mới, phương pháp mới từ các bài toán đã cho, GV có thể hướng dẫn HS tự đặt ra và tìm câu trả lời là:

+ Có thể mở rộng bài toán này theo các hướng nào?

+ Có thể thay đổi giả thiết, yêu cầu bài toán, điều kiện nào, có thể thêm điều kiện gì?

+ Phương pháp giải bài toán này có thể áp dụng cho các dạng toán nào khác?

+ Bài toán này có nêu lên vấn đề nào mới không?

Cụ thể, chúng ta sẽ định hướng học sinh khai thác bài toán theo các hướng sau:

Hướng 1. *Thay đổi giả thiết của bài toán để tạo ra các bài toán tương tự*

Thay đổi độ dài các cạnh bên của tứ diện

+ Cho $SA=SB=SC=a$ ta có bài toán

Bài toán 1.1. *Cho tứ diện $S.ABC$, có $SA=SB=SC=a$. Một mặt phẳng (α) thay đổi đi qua trọng tâm G của tứ diện sao cho mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại các điểm A', B', C'. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{SA'}+\frac{1}{SB'}+\frac{1}{SC'}=\frac{4}{a}.$$

+ Cho $SA=1, SB=2, SC=3$ lúc đó ta có bài toán

Bài toán 1.2. *Cho tứ diện $S.ABC$, có $SA=1, SB=2, SC=3$. Một mặt phẳng (α) thay đổi đi qua trọng tâm G của tứ diện sao cho mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại các điểm A', B', C'. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{SA'}+\frac{2}{SB'}+\frac{3}{SC'}=4.$$

Thay đổi vị trí của điểm G

Nếu ta lấy G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có bài toán mới như sau:

Bài toán 1.3. *Cho tứ diện $S.ABC$. Một mặt phẳng (α) thay đổi đi qua trọng tâm G của tam giác ABC sao cho mặt phẳng (α) cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại các điểm A', B', C'. Chứng minh rằng:*

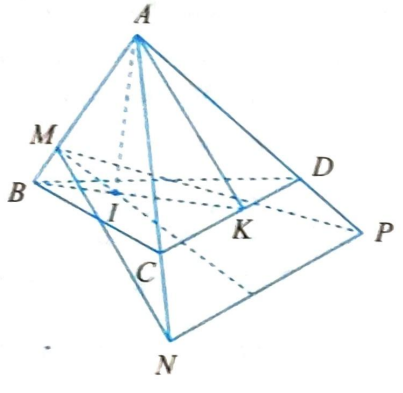
$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3.$$

Nội dung kết luận của bài toán sẽ thay đổi nếu ta thay đổi vị trí của điểm G trong không gian. Chúng ta sẽ có bài toán mới đủ độ "đẹp" về hình thức và nội dung nhờ vào việc thay đổi vị trí của điểm G. Song cách giải thì hoàn toàn tương tự. Cụ thể là bài toán sau:

Bài toán 1.4. *Cho tứ diện $ABCD$. Gọi K là điểm thuộc cạnh CD sao cho $2KC=3KD$, I là điểm thuộc cạnh BK sao cho $IK=2IB$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua điểm I sao cho mặt phẳng (α) cắt các tia AB, AC, AD lần lượt tại các điểm M, N, P (khác đỉnh A). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$T=4\frac{AB^2}{AM^2}+16\frac{AC^2}{AN^2}+9\frac{AD^2}{AN^2}.$$

Hướng dẫn:



Chúng ta biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo ba vectơ không đồng phẳng $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ ta được:

$$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{15}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}.$$

Mặt khác các cặp vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$ cùng hướng nên ta có:

$$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\frac{AB}{AM}\overrightarrow{AM}+\frac{2}{15}\frac{AC}{AN}\overrightarrow{AN}+\frac{1}{5}\frac{AD}{AP}\overrightarrow{AP}.$$

Do bốn điểm I, M, N, P đồng phẳng nên

$$\frac{2}{3}.\frac{AB}{AM}+\frac{2}{15}.\frac{AC}{AN}+\frac{1}{5}.\frac{AD}{AP}=1$$

$$\Leftrightarrow 10.\frac{AB}{AM}+2.\frac{AC}{AN}+3.\frac{AD}{AP}=15.$$

Suy ra: $225=\left(10.\frac{AB}{AM}+2.\frac{AC}{AN}+3.\frac{AD}{AP}\right)^2$

$$\le\left(25+\frac{1}{4}+1\right)\left(4.\frac{AB^2}{AM^2}+16.\frac{AC^2}{AN^2}+9.\frac{AD^2}{AP^2}\right)$$

$$\Rightarrow 4.\frac{AB^2}{AM^2}+16.\frac{AC^2}{AN^2}+9.\frac{AD^2}{AP^2}\ge\frac{60}{7}.$$

Vậy $T_{min}=\frac{60}{7}$ xảy ra khi

$$\frac{AB}{AM}=\frac{150}{113}, \frac{AC}{AN}=\frac{15}{226}, \frac{AD}{AP}=\frac{60}{113}.$$

Thay đổi mặt phẳng (α)

Bây giờ nếu ta thay đổi vị trí của mặt phẳng (α) ví dụ như ta cho mặt phẳng (α) thay đổi nhưng luôn cắt các tia SA, SB, SC, SG (G là trọng tâm tam giác ABC) lần lượt tại các điểm A', B', C', G' thì ta có bài toán mới như sau:

Bài toán 1.5. *Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) cắt các tia SA, SB, SC, SG (G là trọng tâm tam giác ABC) lần lượt tại các điểm A', B', C', G'. Chứng minh rằng:*

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3\frac{SG}{SG'}.$$

Cho G' là trung điểm của SG thì ta có bài toán sau:

Bài toán 1.6. *Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua G' là trung điểm của SG (G là trọng tâm tam giác ABC) cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại các điểm A', B', C'. Chứng minh rằng:* $\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=6.$

Bài toán có cách giải tương tự và có kết quả tổng quát hơn nếu ta cho G' là thuộc cạnh SG sao cho

$$\frac{SG}{SG'} = k.$$

Bài toán 1.7. *Cho hình chóp $S.ABC$, mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua G' thuộc cạnh SG (G là trọng tâm tam giác ABC) sao cho $\overrightarrow{SG} = k\overrightarrow{SG'}$ $(k > 0)$ cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại các điểm A', B', C'. Chứng minh rằng:*

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3k.$$

Hướng 2. *Khai thác kết luận của bài toán để tạo ra các bài toán mới*

Ta có: $16 = \left(\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'}\right)^2$

$$\le 3\left(\left(\frac{SA}{SA'}\right)^2 + \left(\frac{SB}{SB'}\right)^2 + \left(\frac{SC}{SC'}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{SA}{SA'}\right)^2 + \left(\frac{SB}{SB'}\right)^2 + \left(\frac{SC}{SC'}\right)^2 \ge \frac{16}{3}.$$

Vậy ta có thể phát biểu bài toán mới như sau:

Bài toán 1.8. *Cho tứ diện $S.ABC$. Một mặt phẳng (α) thay đổi đi qua trọng tâm G của tứ diện sao cho mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại các điểm A', B', C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $\left(\frac{SA}{SA'}\right)^2 + \left(\frac{SB}{SB'}\right)^2 + \left(\frac{SC}{SC'}\right)^2$.*

Bài toán 1.9. *Cho tứ diện $S.ABC$. Một mặt phẳng (α) thay đổi đi qua trọng tâm G của tứ diện sao cho mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại các điểm A', B', C'. Chứng minh:*

$$\left(\frac{SA}{SA'}\right)^2 + \left(\frac{SB}{SB'}\right)^2 + \left(\frac{SC}{SC'}\right)^2 \ge \frac{16}{3}.$$

Bài toán 1.10. *Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = 1, SB = 2, SC = 3$. Một mặt phẳng (α) thay đổi đi qua trọng tâm G của tứ diện sao cho mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại các điểm A', B', C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$\frac{1}{SA'^2} + \frac{4}{SB'^2} + \frac{9}{SC'^2}.$$

Theo bài toán 1 ta có với $SA = SB = SC = 1$ thì đẳng thức $\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SC'} = 4$ luôn xảy ra.

Đặt $\frac{1}{SA'} = x, \frac{1}{SB'} = y, \frac{1}{SC'} = z \Rightarrow x + y + z = 4$.

Ta có: $16 = (x + y + z)^2 \ge 3(xy + yz + xz)$

$\Rightarrow xy + yz + xz \le \frac{16}{3}$.

Do đó ta có bài toán mới như sau:

Bài toán 1.11. *Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh bên bằng 1. Mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm của hình chóp, cắt ba cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại D, E, F. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{SD.SE} + \frac{1}{SE.SF} + \frac{1}{SF.SD}$.*

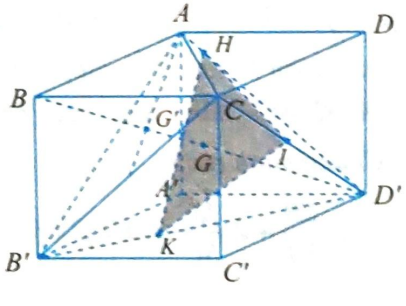
Bây giờ chúng ta tìm cách ẩn nội dung bài toán này thông qua một hình mới trong không gian là hình lập phương ta có bài toán như sau:

Bài toán 1.12. *Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. G là trung điểm của BD', mặt phẳng (P) thay đổi qua G cắt $AD', CD', B'D'$ tương ứng tại H, I, K. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$T = \frac{1}{D'H.D'I} + \frac{1}{D'I.D'K} + \frac{1}{D'K.D'H}.$$

Hướng dẫn. Xét tứ diện $D'AB'C$ là tứ diện đều cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Vì $D'B \perp (B'AC)$ nên $D'B$ là đường cao của tứ diện.

Gọi G' là giao điểm của $D'B$ với $(B'AC)$, ta chứng minh được $D'G = \frac{3}{4}D'G'$

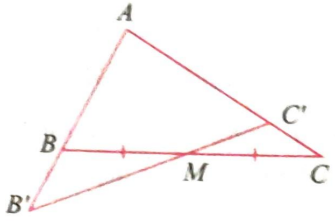


Vì tứ diện $D'AB'C$ là tứ diện đều nên G' là trọng tâm của tam giác $B'AC$, suy ra G là trọng tâm của tứ diện $D'AB'C$. Đến đây ta đã đưa về bài toán quen thuộc ở trên.

Hướng 3. *Đặc biệt hoá bài toán bằng cách phát biểu bài toán tương tự trong mặt phẳng*

Bài toán 1.13. *Trong mặt phẳng cho tam giác ABC. Một đường thẳng thay đổi đi qua trung điểm M của cạnh BC cắt các tia AB, AC lần lượt tại các điểm A', B'. Chứng minh rằng:*

$$\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}=2.$$



Hướng dẫn. Vì M là trung điểm của BC nên ta có:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AB'}\overrightarrow{AB'}+\frac{AC}{AC'}\overrightarrow{AC'}\right).$$

Vì 3 điểm M, B', C' thẳng hàng nên ta có:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}\right)=1. \text{ Suy ra } \frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}=2.$$

Trong khuôn khổ đề tài này, chúng tôi chỉ trình bày các bài toán trong không gian do đó chúng tôi không đề cập đến việc khai thác Bài toán 1.13. trong hình học phẳng. Tuy nhiên bằng cách tương tự như các hướng ở trên chúng ta cũng có rất nhiều các bài toán mới được tạo ra từ bài toán này.

Hướng 4. *Tổng quát bài toán trong không gian ta có bài toán mới như sau*

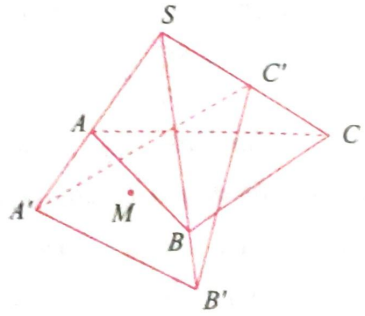
Bài toán 1.14. *Cho tứ diện $S.ABC$. M là một điểm tuỳ ý trong không gian thỏa mãn*

$$\alpha\overrightarrow{MS}+\beta\overrightarrow{MA}+\gamma\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}=\vec{0},$$

với $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\lambda^2\neq 0$. Một mặt phẳng (α) thay đổi đi qua điểm M sao cho mặt phẳng (α) cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại các điểm A', B', C'. Chứng minh rằng:

$$\beta.\frac{SA}{SA'}+\gamma.\frac{SB}{SB'}+\lambda.\frac{SC}{SC'}=\alpha+\beta+\gamma+\lambda.$$

Hướng dẫn.



Ta có: $\alpha\overrightarrow{MS}+\beta\overrightarrow{MA}+\gamma\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow(\alpha+\beta+\gamma+\lambda)\overrightarrow{SM}=\beta\overrightarrow{SA}+\gamma\overrightarrow{SB}+\lambda\overrightarrow{SC}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{SM}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\left(\beta\overrightarrow{SA}+\gamma\overrightarrow{SB}+\lambda\overrightarrow{SC}\right)$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{SM}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\left(\beta\frac{SA}{SA'}\overrightarrow{SA'}+\gamma\frac{SB}{SB'}\overrightarrow{SB'}+\lambda\frac{SC}{SC'}\overrightarrow{SC'}\right).$$

Vì bốn điểm M, A', B', C' đồng phẳng nên ta có:

$$\beta.\frac{SA}{SA'}+\gamma.\frac{SB}{SB'}+\lambda.\frac{SC}{SC'}=\alpha+\beta+\gamma+\lambda.$$

Khi có bài toán tổng quát thì chúng ta có thể tạo ra được vô số bài toán mới rất đẹp ví dụ như: Chúng ta cho $\alpha=1, \beta=2, \gamma=3, \lambda=4$ và khai thác bất đẳng thức Cauchy ta có bài toán sau

Bài toán 1.15. *Cho tứ diện $S.ABC$. M là một điểm tuỳ ý trong không gian thoả mãn*

$$\overrightarrow{MS}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

Một mặt phẳng (α) thay đổi đi qua điểm M sao cho mặt phẳng (α) cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại các điểm A', B', C'. Chứng minh rằng:

$$\frac{SA^2}{SA'^2}+\frac{SB^2}{SB'^2}+\frac{SC^2}{SC'^2}\geq\frac{100}{29}.$$

BÀI TOÁN GỐC 2. *Cho tứ diện gần đều $ABCD$ có $AB=CD=10$, $AC=BD=20$, $AD=BC=20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=MA+MB+MC+MD$$

khi M thay đổi trong không gian.

Hướng dẫn. Một tính chất của tứ diện gần đều mà việc chứng minh rất đơn giản là trọng tâm của tứ diện gần đều trùng với tâm mặt cầu ngoại tiếp của nó.

Gọi O là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ ta suy ra O cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện. Ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. Dùng công thức tính độ dài đường trung tuyến ta tính được:

$$OA=OB=OC=OD=R=\frac{15\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có: $P=MA+MB+MC+MD$

$$=\frac{MA.OA+MB.OB+MC.OC+MD.OD}{R}$$

$$\geq\frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{OD}}{R}$$

$$=\frac{\overrightarrow{MO}.\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)+4.R^2}{R}$$

$$=4R=30\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ M trùng với điểm O.

Nhận xét. Đây là một bài toán liên quan đến tứ diện gần đều. Chúng ta khai thác tính chất "Tâm mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện và trọng tâm của nó trùng nhau" và kiến thức về vectơ để giải nó:

Bây giờ, chúng ta sẽ định hướng học sinh khai thác bài toán theo các hướng sau:

Hướng 1. *Thay đổi giả thiết của bài toán để tạo ra các bài toán tương tự*

+ Bằng cách ẩn đi giả thiết tứ diện đều mà thay bằng giả thiết khác ta có bài toán được ra trong *kỳ thi học sinh giỏi lớp 12 Tỉnh Nghệ An năm học 2022 -2023* sau đây:

Bài toán 2.1. *Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=10$, $AC=AD=20$. Biết rằng $\widehat{BAC}+\widehat{CAD}+\widehat{DAB}$ $=\widehat{ABC}+\widehat{CBD}+\widehat{DBA}=\widehat{ACB}+\widehat{BCD}+\widehat{DCA}=180°$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+MB+MC+MD$ khi M thay đổi trong không gian.*

+ Lại tiếp tục phân tích kết luận của bài toán ta có:

$$P=MA+MB+MC+MD$$

$$=MA+\frac{MB.AB}{AB}+\frac{MC.AC}{AC}+\frac{MD.AD}{AD}$$

$$\geq MA+\frac{\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AC}}{AC}+\frac{\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)\overrightarrow{AD}}{AD}$$

$$\geq MA+\overrightarrow{MA}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}+\frac{\overrightarrow{AD}}{AD}\right)+AB+AC+AD.$$

Ta thêm giả thiết $\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}+\frac{\overrightarrow{AD}}{AD}\right|\leq 1$ thì $MA+\overrightarrow{MA}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}+\frac{\overrightarrow{AD}}{AD}\right)\geq 0$. Do đó ta luôn có: $MA+MB+MC+MD\geq AB+AC+AD$.

Ta phát biểu bài toán mới như sau:

Bài toán 2.2. *Cho tứ diện $ABCD$ thỏa mãn $\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}+\frac{\overrightarrow{AD}}{AD}\right|\leq 1$. Với mỗi điểm M tùy ý trong không gian, chứng minh rằng:*

$$MA+MB+MC+MD\geq AB+AC+AD.$$

+ Nếu tứ diện $ABCD$ là tứ diện vuông tại đỉnh A thì ta có $\frac{\overrightarrow{AB}}{AB},\frac{\overrightarrow{AC}}{AC},\frac{\overrightarrow{AD}}{AD}$ là các vectơ đơn vị nên

$$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}+\frac{\overrightarrow{AD}}{AD}\right)^2=3\Leftrightarrow\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}+\frac{\overrightarrow{AD}}{AD}\right|=\sqrt{3}.$$

Do đó ta lại có bài toán mới như sau:

Bài toán 2.3. *Cho tứ diện $ABCD$ là tứ diện vuông tại đỉnh A. Với mỗi điểm M trong không gian. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{3}MA+MB+MC+MD\geq AB+AC+AD.$$

Hướng 2. *Tìm cách mở rộng bài toán*

Mở rộng bài toán gốc trong tứ diện gần đều ta có bài toán

Bài toán 2.4. *Cho tứ diện gần đều $ABCD$ có $AB=CD=a, AC=BD=b, AD=BC=c$. M là điểm thay đổi trong không gian. Chứng minh rằng:*

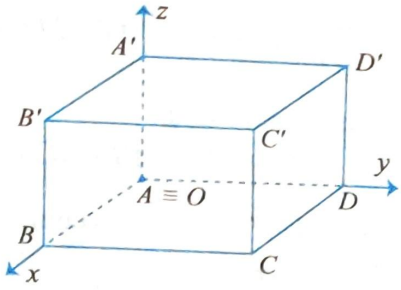
$$MA+MB+MC+MD\geq\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

4. Phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh thông qua vận dụng phương pháp chuyển đổi ngôn ngữ

4.1. *Dùng phương pháp toạ độ hoá để chuyển bài toán hình học sang bài toán toạ độ*

Thí dụ 1. *Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=1$, $BC=2$, $AA'=3$. Mặt phẳng (P) đi qua C' và cắt các tia AB, AD, AA' lần lượt tại E, F, G (khác A) sao cho thể tích tứ diện $AEFG$ nhỏ nhất. Tính GTNN của $P=AE+AF+AG$.*

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, như hình vẽ.



Khi đó: $A\equiv O(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;2;0)$, $A'(0;0;3)$ và $C'(1;2;3)$. Giả sử (P) cắt các tia AB, AD, AA' lần lượt tại $E(a;0;0)$, $F(0;b;0)$ và $G(0;0;c)$ với a,b,c là các số dương. Suy ra mặt phẳng (P) có phương trình là: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Ta có: $V_{AEFG}=\frac{1}{6}abc$. Mặt khác

$$C'\in(P)\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$$

nên $1\geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}\Leftrightarrow\frac{1}{6}abc\geq 27\Leftrightarrow V_{AEFG}\geq 27.$

Suy ra thể tích tứ diện $AEFG$ nhỏ nhất khi

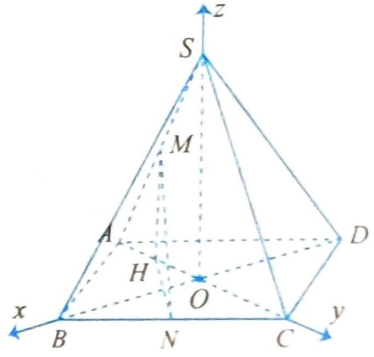
$$\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1\\ \frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=6\\ c=9\end{cases}.$$

Vậy $AE+AF+AG=a+b+c=18$.

Thí dụ 2. *Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°, tính côsin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD).*

Lời giải. Kẻ $MH\perp AC$ thì $MH\perp(ABCD)$, $\widehat{MNH}=60^0$ và ta tính được $NH=\frac{a\sqrt{10}}{4}$, $SO=\frac{a\sqrt{30}}{2}$. Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $B\in Ox$, $C\in Oy$, $S\in Oz$ như hình vẽ thì ta có:

$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $D\left(\frac{-\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $A\left(0;\frac{-\sqrt{2}}{2};0\right)$, $M\left(0;\frac{-\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{30}}{4}\right)$, $S\left(0;0;\frac{\sqrt{30}}{2}\right)$, $N\left(\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4};0\right)$ (coi $a=1$).



Ta có: $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{-\sqrt{30}}{4}\right)$

$$\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{2};0;0),\ \overrightarrow{BS}=\left(\frac{-\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{30}}{2}\right)$$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BS}\right]=\left(0;\sqrt{15};0\right)$.

$$\sin^2\left(MN,(SBD)\right)=\left(\frac{\left|\overrightarrow{MN}.\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BS}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BS}\right]\right|}\right)^2=\frac{1}{5}$$

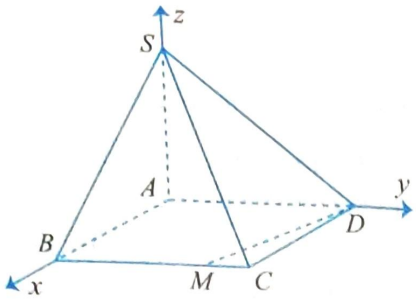
$\Rightarrow\cos^2\left(MN,(SBD)\right)=\frac{4}{5}\Rightarrow\cos\left(MN,(SBD)\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Thí dụ 3. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Độ dài các cạnh $AB=3a$, $AD=4a$, $SA=5a$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh BC và $BM=3a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MD.*

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ Descartes các vuông góc $Oxyz$ như hình vẽ. Từ giả thiết ta có tọa độ các điểm: $B(3a;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 4a;\ 0)$, $S(0;\ 0;\ 5a)$ và $M(3a;\ 3a;\ 0)$. Suy ra:

$\overrightarrow{SB}=(3a;0;-5a)$, $\overrightarrow{MD}=(-3a;a;0)$, $\overrightarrow{BM}=(0;3a;0)$.

$\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{MD}\right]=(5a^2;15a^2;3a^2)$. Suy ra:



$\overrightarrow{SB}=(3a;0;-5a)$, $\overrightarrow{MD}=(-3a;a;0)$, $\overrightarrow{BM}=(0;3a;0)$.

$\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{MD}\right]=(5a^2;15a^2;3a^2)$.

Vận dụng công thức tính khoảng cách ta có:

$$d(SB,MD)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{MD}\right].\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{MD}\right]\right|}=\frac{45a^3}{a^2\sqrt{259}}=\frac{45a}{\sqrt{259}}.$$

4.2. *Dùng phương pháp toạ độ hoá để chuyển bài toán đại số sang bài toán toạ độ*

Thí dụ 4. *Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn* $2\left(2^{a^2+b^2+c^2}-1\right)+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=4^{a+b+c}$.

Đặt $P=\dfrac{3a+2b+c}{a+b+c}$ *và gọi M là tập hợp gồm những giá trị nguyên của P. Tính số phần tử của tập hợp M.*

Lời giải. Ta có:

$$2\left(2^{a^2+b^2+c^2}-1\right)+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=4^{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow 2^{a^2+b^2+c^2+1}+a^2+b^2+c^2+1$$
$$=2^{2a+2b+2c}+2a+2b+2c\ (*).$$

Xét hàm số: $f(t)=2^t+t$ có

$$f'(t)=2^t\ln 2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó:

$$(*)\Leftrightarrow f\left(a^2+b^2+c^2+1\right)=f(2a+2b+2c)$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+1=2a+2b+2c$$
$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=2.$$

Xét không gian $Oabc$, ta có:

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=2$$

là phương trình mặt cầu (*S*) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$. Gọi (α) là mặt phẳng có phương trình $a+b+c=0$. Do $d(I,(\alpha))=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}>R$ nên mp(α) và mặt cầu (*S*) không có điểm chung, điều này nghĩa là với các số thực *a*, *b*, *c* thỏa mãn (*) thì $a+b+c\neq 0$. Ta có: $P=\dfrac{3a+2b+c}{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow (P-3)a+(P-2)b+(P-1)c=0\ (\beta).$$

Điều kiện tồn tại a,b,c là

$$d(I,(\beta))\le R\Leftrightarrow\frac{|3P-6|}{\sqrt{(P-3)^2+(P-2)^2+(P-1)^2}}\le\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 3P^2-12P+8\le 0\Leftrightarrow\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\le P\le\frac{6+2\sqrt{3}}{3}.$$

Do $P\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}\le P\le\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$ nên $P\in\{1;2;3\}$. Vậy tập *M* có 3 phần tử.

Thí dụ 5. *Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn* $4x^2+y^2+9z^2=4x+12z+11$. *Tính giá trị lớn nhất của biểu thức* $P=4x+2y+3z$.

Lời giải. Ta có: $4x^2+y^2+9z^2=4x+12z+11$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2+y^2+(3z-2)^2=16\ (1).$$

Đặt $2x-1=a, y=b, 3z-2=c$. Khi đó:

$$\begin{cases}a^2+b^2+c^2=16\\ P=4x+2y+3z=2a+2b+c+4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+c^2=16 & (1)\\ 2a+2b+c+4-P=0 & (2)\end{cases}(I).$$

Ta có (1) là mặt cầu tâm $O(0;0;0)$ bán kính $R=4$; (2) là mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;2;1)$ trong hệ toạ độ $Oabc$. Hệ (*I*) có nghiệm khi và chỉ khi $d(O,(\alpha))\le R\Leftrightarrow\dfrac{|4-P|}{3}\le 4$

$$\Leftrightarrow |P-4|\le 12\Leftrightarrow -8\le P\le 16.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=\dfrac{11}{6}, y=\dfrac{8}{3}, z=\dfrac{10}{9}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là 16.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/557 (Lớp 6). Tìm các cặp số nguyên $(a; b)$ thỏa mãn $a^4 - 3a^2 = 3 + 2^b$.

CAO NGỌC TOẢN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T2/557 (Lớp 7). Cho tam giác ABC. Các điểm D, E lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC. Gọi O là giao điểm của BE và CD. Biết rằng $AE = BD$, $\frac{AD}{CE} = \frac{10}{9}$, diện tích các tam giác ABC và OBC lần lượt là 10cm^2 và 3cm^2. Tính tỷ số $\frac{AD}{BD}$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/557. Tìm hệ thức liên hệ giữa các số a, b, c (không phụ thuộc vào x, y, z) biết

$$a = b\frac{z}{y} + c\frac{y}{z},\ b = c\frac{y}{x} + a\frac{x}{y},\ c = a\frac{x}{z} + b\frac{z}{x}.$$

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN

(3/29E, Đã Nẵng, Hải Phòng)

Bài T4/557. Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ tia Bx vuông góc với BA. Gọi D là điểm đối xứng của C qua Bx, E là trung điểm của cạnh AB. CE cắt AD tại F. Chứng minh tứ giác $BDCF$ nội tiếp trong một đường tròn.

BÙI VĂN CHI

(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T5/557. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a < b$ và $\frac{1+ab}{b-a} \le \sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{a(a+b)}$.

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/557. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x} + 3\sqrt{x-1} + x = 5 + \sqrt[3]{2}.$$

TRẦN VĂN HẠNH

(GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Bài T7/557. Tính các góc của tam giác ABC biết rằng $5\cot A + 8\cot B + 9\cot C = 12$.

DƯƠNG ĐỨC LÂM

(K51, XD9, Đại học Xây dựng Hà Nội)

Bài T8/557. Cho tam giác ABC với $\max\{\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}\} < 120^0$. M là điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{BMC} = \widehat{CMA} = \widehat{AMB} = 120^0$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{MB+MC-MA}{BC}\right)^2 + \left(\frac{MC+MA-MB}{CA}\right)^2 + \left(\frac{MA+MB-MC}{AB}\right)^2 \ge 1.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/557. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$:

$$f(x) = \frac{8(x^2+x)^3 + (2x+1)^3}{(2x^2+2x+1)^3}.$$

TRẦN QUANG CHUNG

(SV lớp ĐTYS 12, Học viện Kỹ thuật Quân sự)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/557. Tìm các số nguyên tố a, b, c, d thỏa mãn phương trình

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{3}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{3}} + \sqrt[3]{\cos\frac{6\pi}{3}} = \sqrt[3]{\frac{a - b\sqrt[3]{c}}{d}}.$$

NGUYỄN ĐỨC TƯỞNG

(Pleiku)

Bài T11/557. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2f(x)+y) = 3x + f(f(y)-x)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

KIỀU ĐÌNH MINH

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T12/557. Cho tam giác nhọn không cân ABC ngoại tiếp đường tròn (I). D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB. P là hình chiếu vuông góc của D trên EF. DP cắt (I) tại điểm thứ hai K, L là hình chiếu vuông góc của A trên IK. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác LEC và LFB cắt (I) lần thứ hai tương ứng tại M, N. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

LƯU CÔNG ĐÔNG
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài L1/557. Các điểm A, B, C, D trên mặt nước tạo thành hình thang cân $ABCD$ (đáy AB, CD). Biết $AB = 50$ cm, $CD = 30$ cm, đường cao hình thang $h = 20$ cm. Tại hai điểm A, B người ta đặt hai nguồn sóng kết hợp, dao động ngược pha nhau và phát sóng có bước sóng $\lambda = 3$ cm. Tính số điểm có biên độ dao động cực đại trên đáy nhỏ CD.

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/557. Điện năng từ một trạm phát điện được đưa đến một khu dân cư bằng đường dây truyền tải một pha. Nếu điện áp tại nơi truyền tải tăng từ U lên $2U$ thì số hộ dân được trạm cung cấp đủ công suất điện tăng từ 93 hộ lên 120 hộ. Coi rằng công suất điện truyền đi từ trạm phát không đổi, công suất tiêu thụ điện của mỗi hộ dân như nhau và không đổi. Hệ số công suất trên đường truyền tải không đổi. Khi tăng điện áp tại nơi truyền tải lên $3U$ thì số hộ dân được trạm phát cung cấp đủ công suất điện là bao nhiêu?

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/557 (For 6th grade). Find all pairs of integers $(a; b)$ satisfying $a^4 - 3a^2 = 3 + 2^b$.

Problem T2/557 (For 7th grade). Given a triangle ABC and some points D, E on the sides AB, AC respectively. Let O be the intersection between BE and CD. Suppose that $AE = BD$, $\frac{AD}{CE} = \frac{10}{9}$, and the areas of the triangles ABC and OBC are 10cm^2 and 3cm^2 respectively. Find the ratio $\frac{AD}{BD}$.

Problem T3/557. Find the relationship between a, b, c (which does not contain x, y, z,) given that

$$a = b\frac{z}{y} + c\frac{y}{z}, b = c\frac{y}{x} + a\frac{x}{y}, c = a\frac{x}{z} + b\frac{z}{x}.$$

Problem T4/557. Given an isosceles triangle ABC with the vertex angle A. Draw the ray Bx perpendicular to BA. Let D be the reflection point of C in Bx and E is the midpoint of AB. Suppose that CE intersects AD at F. Show that $BDCF$ is a cyclic quadrilateral.

Problem T5/557. Suppose that a, b are positive numbers satisfying $a < b$ and $\frac{1+ab}{b-a} \le \sqrt{3}$. Find the minimum value of the expression

$$P = \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{a(a+b)}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/557. Solve the equation

$$\sqrt[3]{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x + 3\sqrt{x-1} + x} = 5 + \sqrt[3]{2}.$$

Problem T7/557. Find the angle measurements of a triangle ABC given that

$$5\cot A + 8\cot B + 9\cot C = 12.$$

(Xem tiếp theo trang 42)

Bài T1/553. *Cho 625 số nguyên dương 1, 2, 3, ..., 625 ta chọn ra 312 số sao cho không có hai số nào có tổng bằng 625. Chứng minh trong 312 số được chọn bao giờ cũng có ít nhất hai số chính phương.*

Lời giải. Ta thấy:

$$625 = 25^2 = 49 + 576 = 225 + 400$$

với $49 = 7^2$; $576 = 24^2$; $225 = 15^2$; $400 = 20^2$. Ta chia tập số gồm 624 số nguyên 1; 2; 3;...; 624 thành 312 nhóm, mỗi nhóm gồm hai số nguyên dương sao cho tổng hai số đó bằng 625, tức là mỗi nhóm có dạng $\{n\ ;\ 625 - n\}$ với $1 \le n \le 312$. Nhóm thứ nhất là {1; 624}, nhóm thứ hai là {2; 623},..., nhóm thứ 49 là {49; 576}, ..., nhóm thứ 225 là {225; 400}..., nhóm thứ 312 là {312; 313}. Giả sử đã chọn được 312 số sao cho không có hai số nào có tổng bằng 625 thì hai số bất kì được chọn không thể thuộc cùng một nhóm. Xảy ra hai trường hợp sau.

1) Trong 312 số được chọn thì mỗi số thuộc một nhóm. Lúc đó số thuộc nhóm thứ 49 và số thuộc nhóm thứ 225 là hai số chính phương.

2) Trong 312 số được chọn có số $625 = 25^2$, với 311 số còn lại thì mỗi số thuộc một nhóm. Lúc đó một số a hoặc thuộc nhóm thứ 49, hoặc nhóm thứ 225 nên là số chính phương; như thế trong 312 số được chọn có hai số chính phương là a và 625.

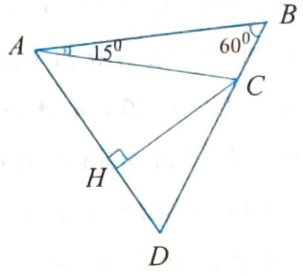
Như vậy trong 312 số được chọn bao giờ cũng có ít nhất hai số chính phương.

Nhận xét. Một số bạn lập luận chưa đầy đủ, chú ý rằng ta xét 312 số đã được chọn rồi một cách tùy ý. Một bạn ở Cần Thơ xét thiếu một trường hợp khi có một số thuộc nhóm thứ 311. Các bạn sau có lời giải đúng. **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Bảo Châu, Nguyễn Hữu Gia Long, Nguyễn Phi Long, Nguyễn Duy Mạnh Lương*, 6A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội**: *Doãn Hải Dương*, 6A6, Trường chất lượng cao quận Thanh Xuân; **Hà Tĩnh**: *Phạm Quỳnh Na*, 6A, *Nguyễn Thị Diễm Quỳnh*, 7A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/553. *Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 15^0$, $\widehat{ABC} = 60^0$. Đặt AB = a. Tính BC, CA theo a.*

Lời giải. (Của các bạn gửi bài).



Dựng tam giác đều ABD (hình vẽ) và CH vuông góc với AD. Ta có:

$$\widehat{DCH} = 30^0,\ \widehat{HAC} = \widehat{HCA} = 45^0.$$

Đặt $CD = 2x$, trong nửa tam giác đều CDH ta có: $HD = x$, $CH = \sqrt{3}x$.

Vì $AD = AH + HD = HC + HD$ nên ta có:

$$a = AD = x\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

Vậy $x = \dfrac{a}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$. Trong tam giác vuông cân AHC ta có $AC = \sqrt{2}CH$ cho nên:

$$AC = \sqrt{2}.\left(\sqrt{3}x\right) = \frac{\sqrt{6}\,a(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{a(\sqrt{18}-\sqrt{6})}{2}.$$

Ngoài ra, ta cũng có:

$$BC = BD - CD = a - 2x = a - a\left(\sqrt{3}-1\right)$$
$$= 2a - a\sqrt{3}.$$

Nhận xét. Các bạn lớp 6 và lớp 7 sau đây có lời giải tốt: **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Trịnh Phương Minh*, 7/15, THCS Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** *Dương Ngũ Kim Lân*, 6A6, THCS Đoàn Thị Điểm, Ninh Kiều; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Băng Tâm, Nguyễn Văn Hải*

Anh, Hoàng Văn Nhân, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Huỳnh Diễm Quỳnh*, 6B, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Gia Lai:** *Cao Minh An*, 7, THCS Trần Phú, TP. Pleiku.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/553. *Cho tập $A=\{1,2,\ldots,2023\}$. Hỏi có thể chọn ra nhiều nhất bao nhiêu phần tử của A sao cho trong những phần tử được chọn ra không tồn tại ba phần tử a, b, c mà $a-b$ chia hết cho c?*

Lời giải. Tập hợp $B=\{1012,1013,\ldots,2023\}$ không chứa ba phần tử a,b,c nào mà $a-b$ chia hết cho c vì với mọi bộ ba a,b,c thì $0<|a-b|\le 1011<1012<c$. Chú ý là tập B có 1012 phần tử.

Ta chứng minh số phần tử nhiều nhất có thể chọn ra để thoả mãn đề bài là 1012, tức là trong 1013 phần tử bất kỳ của A luôn có ba phần tử a,b,c thoả mãn $a-b$ chia hết cho c.

Cách 1. Xét 1013 phần tử bất kỳ của A và gọi c là phần tử nhỏ nhất trong 1013 phần tử đó. Thế thì $c\le 1011$. Theo nguyên lý Dirichlet, trong 1012 phần tử còn lại phải có hai phần tử a,b có cùng số dư khi chia cho c, kéo theo $c\,|\,a-b$. Như vậy trong 1013 phần tử bất kỳ của A luôn có ba phần tử a,b,c thoả mãn $a-b$ chia hết cho c.

Cách 2. Xét tập $C=\{a_1,a_2,\ldots,a_{1013}\}$ là một tập con 1013 phần tử bất kỳ của A. Giả sử

$$a_1<a_2<\cdots<a_{1013}.$$

Khi đó, hai dãy $a_2-a_1<a_3-a_1<\cdots<a_{1013}-a_1$ và $a_2<a_3<\ldots<a_{1013}$ có 2024 số hạng là các số nguyên dương không vượt quá 2023 nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai số hạng bằng nhau. Rõ ràng hai số hạng này phải thuộc hai dãy khác nhau, tức là tồn tại hai chỉ số $i>j>1$ thoả mãn $a_i-a_1=a_j$, kéo theo $a_j\,|\,a_i-a_1$. Như vậy trong 1013 phần tử bất kỳ của A luôn có ba phần tử a,b,c thoả mãn $a-b$ chia hết cho c.

Vậy, số phần tử nhiều nhất có thể chọn ra là 1012.

Nhận xét. Đây là bài toán cơ bản, có nhiều bạn gửi lời giải đến Toà soạn nhưng đáng tiếc chỉ có một bạn giải đúng. Một số bạn có hướng đi đúng nhưng lời giải chưa trọn vẹn.

- Các bạn chỉ ra số phần tử nhiều nhất là 1012 nhưng chưa chỉ ra một trường hợp có 1012 phần tử thoả mãn yêu cầu bài toán.
- Các bạn chỉ ra một ví dụ về tập hợp chứa 1011 phần tử đều là số chẵn nên trong đó sẽ có ba phần tử $x,y,2$ mà $2\,|\,x-y$ rồi suy ra số phần tử nhiều nhất không vượt quá 1012 là chưa đúng vì đây chỉ là một trường hợp không thoả mãn đề bài, chưa thể khẳng định không tồn tại một tập có chứa nhiều phần tử hơn thoả mãn đề bài.
- Có một bạn giải theo cách 2, nhưng đáng tiếc tính toán nhầm lẫn ở đoạn cuối.
- Ý tưởng của bài toán trên là số lượng số chọn ra không thể lớn hơn giá trị của số nhỏ nhất.

Tuyên dương bạn *Lê Tuấn Hiệp*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, **Hưng Yên** có lời giải đúng.

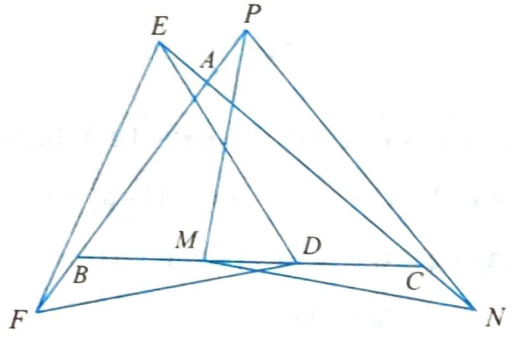
NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T4/553. *Cho tam giác ABC ($BC>CA>AB$). Trên hai tia BC và CB lần lượt lấy hai điểm D và M sao cho $BD=CM=AB$. Trên hai tia CA và AC lần lượt lấy hai điểm E và N sao cho $CE=AN=BC$. Trên hai tia AB và BA lần lượt lấy hai điểm F và P sao cho $AF=BP=CA$. Chứng minh*

a) $S_{DEF}=S_{MNP}$;

b) $S_{DEF}>S_{ABC}$.

Lời giải.



Từ giả thiết suy ra $BM = CD$, $CN = AE$, $AP = BF$. Do đó $S_{CEF} = S_{NAF} = S_{NBP}$.

a) Ta có: $S_{DEF} = S_{FCE} - S_{ECD} - S_{FCD}$.

Mặt khác: $S_{ECD} + S_{FCD} = S_{ADN} + S_{FBM}$

$= S_{ACD} + S_{NCD} + S_{FBM} = S_{ABM} + S_{FBM} + S_{NBM}$

$= S_{PBM} + S_{NBM}$.

Do đó $S_{DEF} = S_{NBP} - S_{PBM} - S_{NBM} = S_{MNP}$.

b) Vì $S_{BNP} = S_{MNP} + S_{PBM} + S_{BMN} = S_{ABC} + S_{APN} + S_{BCN}$ nên BĐT cần chứng minh tương đương với

$$S_{APN} + S_{BCN} > S_{PBM} + S_{BMN}$$

$$\Leftrightarrow S_{APN} + S_{MNC} > S_{PBM} \quad (1).$$

Chia cả hai vế của (2) cho S_{ABC}, ta được:

$$\frac{AP}{AB}.\frac{AN}{AC} + \frac{NC}{AC}.\frac{MC}{BC} > \frac{BP}{BA}.\frac{BM}{BC} \quad (2).$$

Lại có: $AP = b - c$, $AN = a$, $NC = a - b$, $MC = c$, $BM = a - c$, $BP = b$.

Vậy (2) tương đương với

$$(b-c)a^2 + (a-b)c^2 > (a-c)b^2$$

$\Leftrightarrow (b-c)(a-b)(a-c) > 0$ (đúng do $a > b > c$).

Như vậy, $S_{DEF} > S_{ABC}$.

Nhận xét. Chỉ có bạn *Nguyễn Thùa Long*, 9D, THCS Đại Nài, **Hà Tĩnh** làm tốt bài toán trên.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/553. *Giải phương trình*

$$(4x^2 + x - 1)\sqrt{x^2 + x + 2} - (5x^2 + 3x + 4)\sqrt{x^2 - 1} = 0.$$

Lời giải. Vì $x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ nên điều kiện để phương trình xác định là:

$$x^2 - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge 1 \end{array}\right..$$

Đặt $a = \sqrt{x^2 + x + 2} > 0$; $b = \sqrt{x^2 - 1} \ge 0$. Ta có:

$$4x^2 + x - 1 = x^2 + x + 2 + 3(x^2 - 1) = a^2 + 3b^2;$$

$$5x^2 + 3x + 4 = 3(x^2 + x + 2) + 2(x^2 - 1)$$

$$= 3a^2 + 2b^2.$$

Phương trình trở thành:

$$(a^2 + 3b^2)a - (3a^2 + 2b^2)b = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = b^3$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^3 = b^3 \Leftrightarrow a = 2b.$$

Ta được: $\sqrt{x^2 + x + 2} = 2\sqrt{x^2 - 1}$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 4(x^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 - \sqrt{73}}{6} \\ x = \dfrac{1 + \sqrt{73}}{6} \end{array}\right.$$

(thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình có tập hợp nghiệm là:

$$S = \left\{\frac{1 - \sqrt{73}}{6}; \frac{1 + \sqrt{73}}{6}\right\}.$$

Nhận xét. 1) Điều then chốt của lời giải là chứng minh phương trình trong đầu bài tương đương với phương trình $\sqrt{x^2 + x + 2} = 2\sqrt{x^2 - 1}$.

Hầu hết các bạn có kết quả đúng làm theo cách trên.

2) Có thể thử trực tiếp để thấy $x = \frac{1 - \sqrt{73}}{6} < -1$; $x = \frac{1 + \sqrt{73}}{6} > 1$; hoặc các giá trị $x = \frac{1 \pm \sqrt{73}}{6}$ là nghiệm của phương trình $4(x^2 - 1) = x^2 + x + 2 > 0$ nên chúng thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Các bạn sau đây có bài giải tốt :

Nghệ An: *Nguyễn Thị Băng Tâm*, 7C, *Nguyễn Thái Triệu*, *Thái Bá Nhân*, *Đinh A Na*, *Nguyễn Trọng Bảo*, *Nguyễn Công Dũng*, *Phạm Xuân Hoàng*, 8A, *Bùi Thị Thùy Linh*, *Nguyễn Văn Lâm*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Trần Gia Bảo*, 9B, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, quận 3; **Cần Thơ:** *Dương Ngũ Kim Lân*, 6A6, THCS Đoàn Thị Điểm, quận Ninh Kiều; **Hà Nội:** *Ngô Minh Chấn*, 9A3, TH&THCS Archimedes Đông Anh; **Quảng Trị:** *Lê Thị Ngân Tâm*, 9G, THCS Phan Đình Phùng, TP Đông Hà.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/553. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^5}{b^2\sqrt{(a^2+3ab+b^2)^3}}+\frac{b^5}{c^2\sqrt{(b^2+3bc+c^2)^3}}+\frac{c^5}{a^2\sqrt{(c^2+3ca+a^2)^3}}\geq\frac{3}{5\sqrt{5}}\quad(1).$$

Lời giải (Của bạn *Tiết Trọng Khiêm*).

Vì $5(a+b)^2-4(a^2+3ab+b^2)=(a-b)^2\geq 0$

nên $5(a+b)^2\geq 4(a^2+3ab+b^2)$. Suy ra:

$$\frac{a^5}{b^2\sqrt{(a^2+3ab+b^2)^3}}\geq\frac{a^5}{b^2\sqrt{\left(\frac{5(a+b)^2}{4}\right)^3}}$$

$$=\frac{8a^5}{5\sqrt{5}b^2(a+b)^3}=\frac{8a^5}{5\sqrt{5}b^5\left(\frac{a+b}{b}\right)^3}$$

$$=\frac{8\left(\frac{a}{b}\right)^5}{5\sqrt{5}\left(\frac{a}{b}+1\right)^3}=\frac{8x^5}{5\sqrt{5}(x+1)^3}$$

với $x=\frac{a}{b}$. Tương tự : Với $y=\frac{b}{c}$ ta có:

$$\frac{b^5}{c^2\sqrt{(b^2+3bc+c^2)^3}}\geq\frac{8\left(\frac{b}{c}\right)^5}{5\sqrt{5}\left(\frac{b}{c}+1\right)^3}=\frac{8y^5}{5\sqrt{5}(y+1)^3};$$

Với $z=\frac{c}{a}$ ta có:

$$\frac{c^5}{a^2\sqrt{(c^2+3ca+a^2)^3}}\geq\frac{8\left(\frac{c}{a}\right)^5}{5\sqrt{5}\left(\frac{c}{a}+1\right)^3}=\frac{8z^5}{5\sqrt{5}(z+1)^3}.$$

Vậy để chứng minh (1) ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{x^5}{(x+1)^3}+\frac{y^5}{(y+1)^3}+\frac{z^5}{(z+1)^3}\geq\frac{3}{8}\quad(2).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 5 số ta được:

$$\frac{x^5}{(x+1)^3}+\frac{x+1}{16}+\frac{x+1}{16}+\frac{x+1}{16}+\frac{1}{8}$$

$$\geq 5\sqrt[5]{\frac{x^5}{(x+1)^3}\cdot\frac{x+1}{16}\cdot\frac{x+1}{16}\cdot\frac{x+1}{16}\cdot\frac{1}{8}}=\frac{5x}{8}$$

$$\Rightarrow\frac{x^5}{(x+1)^3}\geq\frac{7x}{16}-\frac{5}{16}.$$

Tương tự: $\frac{y^5}{(y+1)^3}\geq\frac{7y}{16}-\frac{5}{16}$

và $\frac{z^5}{(z+1)^3}\geq\frac{7z}{16}-\frac{5}{16}.$

Do $xyz=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=1$ nên tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương, ta được:

$$\frac{x^5}{(x+1)^3}+\frac{y^5}{(y+1)^3}+\frac{z^5}{(z+1)^3}$$

$$\geq\left(\frac{7x}{16}-\frac{5}{16}\right)+\left(\frac{7y}{16}-\frac{5}{16}\right)+\left(\frac{7z}{16}-\frac{5}{16}\right)$$

$$\geq\frac{7}{16}(x+y+z)-\frac{15}{16}\geq\frac{7}{16}\cdot 3\sqrt[3]{xyz}-\frac{15}{16}$$

$$=\frac{21}{16}-\frac{15}{16}=\frac{3}{8}.$$

Vậy (2), do đó (1) được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x^5}{(x+1)^3}=\frac{x+1}{16}=\frac{1}{8}\text{ và }x=y=z=1$$

hay $a=b=c$.

Nhận xét. Một số bạn chứng minh không ngắn như của bạn *Khiêm*. Tất cả các bạn đã gửi bài có lời giải tốt:

Bạc Liêu: *Đỗ Văn Dương*, 11CA, THPT Trần Văn Bảy, Phước Long; **Bình Định:** *Phan Trung Trực*, 11T, *Trần Ngọc Tuyên*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Gia Lai:** *Phan Trịnh Nguyên*, 11A1, THPT Chi Lăng; **Hà Nội:** *Ngô Minh Chấn*, 9A3, Archimedes Academy Đông Anh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thừa Long*, 9D, THCS Đại Nài, TP. Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Phan Tuấn Mạnh*, 9D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Thái Bá Nhân*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Yên:** *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Lộc*, 11 Toán 1, *Đoàn Ngọc Duy*, *Nguyễn Thanh Hải*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*,

12 Toán 2, *Nguyễn Phương Nam*, 10 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hoàng Tuấn Anh*, 10A1, THPT Hướng Hóa; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Hà Giang*, *Tiết Trọng Khiêm*, 11A2, *Doãn Trọng Quý*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T7/553. *Cho x là số nguyên lớn hơn 1 và $a,b\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh hệ phương trình*

$$\begin{cases} x+1=5^a \\ 1+x^2+x^4+...+x^{2m-2}=5^b \end{cases}$$

vô nghiệm với $\forall m\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải.

• Với $m = 1$, khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành $1 = 5^b \Leftrightarrow b=0$, trái với giả thiết là $b\in\mathbb{N}^*$.

• Với $m \geq 2$. Giả sử tồn tại số nguyên x_0 ($x_0 > 1$) là nghiệm của hệ phương trình đã cho, ta có:

$$\begin{cases} x_0+1=5^a & (1) \\ 1+x_0^2+x_0^4+...+x_0^{2m-2}=5^b & (2) \end{cases}.$$

Do $a\in\mathbb{N}^*$ nên từ (1) suy ra:

$$x_0+1 \vdots 5 \Rightarrow x_0 \equiv -1 \pmod 5$$

$$\Rightarrow x_0^2 \equiv 1 \pmod 5 \ (3).$$

+ Với $m = 2$, thay vào (2) ta có $1+x_0^2=5^b$, suy ra $x_0^2\equiv -1 \pmod 5$, điều này mâu thuẫn với (3).

+ Với $m > 2$, biến đổi (2) thành:

$$(1+x_0^2)(1+x_0^4+...+x_0^{2m-4})=5^b.$$

Do $x_0 > 1$ nên $1+x_0^2=5^k$ ($k\in\mathbb{N}^*$, $k<b$).

Do đó $1+x_0^2 \vdots 5$ suy ra $x_0^2\equiv -1 \pmod 5$, điều này lại mâu thuẫn với (3).

Vậy với mọi $m\in\mathbb{N}^*$, hệ phương trình đã cho luôn vô nghiệm.

Nhận xét. Bài này các bạn tham gia gửi bài đều cho lời giải tương tự như trên. Các bạn đều sử dụng tính chất chia hết trên tập số tự nhiên để chỉ ra hệ phương trình vô nghiệm. Tuyên dương các bạn sau có lời giải lập luận chặt chẽ và ngắn gọn.

Gia lai: *Phạm Trịnh Nguyên*, 11A1, THPT Chi Lăng; **Sóc Trăng:** *Tiết Trọng Khiêm*, 11A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thị Thanh Hải*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T8/553. *Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c. Gọi l_a, l_b, l_c lần lượt là độ dài các đường phân giác trong kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{l_bl_c}+\frac{b^2}{l_cl_a}+\frac{c^2}{l_al_b}\geq 4.$$

Lời giải. Gọi p là nửa chu vi của tam giác ABC. Sử dụng công thức đường phân giác trong, định lí hàm số côsin cho tam giác ABC và bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$l_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}=\frac{2bc.\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}}{b+c}$$

$$=\frac{bc\sqrt{2}.\sqrt{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}}{b+c}$$

$$=\frac{\sqrt{bc}.\sqrt{(b+c)^2-a^2}}{b+c}$$

$$=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}.\sqrt{p(p-a)}\leq\sqrt{p(p-a)}.$$

Tương tự có: $l_b\leq\sqrt{p(p-b)}$; $l_c\leq\sqrt{p(p-c)}$.

Do đó:

$$l_a^2+l_b^2+l_c^2\leq p(p-a)+p(p-b)+p(p-c)=p^2$$

$$\Rightarrow p^2\geq l_a^2+l_b^2+l_c^2\geq l_al_b+l_bl_c+l_cl_a.$$

Từ đó, áp dụng bất đẳng thức Schwarz ta thấy:

$$\frac{a^2}{l_bl_c}+\frac{b^2}{l_cl_a}+\frac{c^2}{l_al_b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{l_bl_c+l_cl_a+l_al_b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{p^2}=4.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều.

Nhận xét. Mấu chốt của lời giải bài toán trên là việc đánh giá được các bất đẳng thức: $l_a \le \sqrt{p(p-a)}$;

$$l_b \le \sqrt{p(p-b)};\ l_c \le \sqrt{p(p-c)};$$

và $$p^2 \ge l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \ge l_a l_b + l_b l_c + l_c l_a.$$

Tất cả các bài giải gửi về Toà soạn đều đúng. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Ngô Minh Chấn*, 9A3, TH &THCS Archimedes Đông Anh; **Nghệ An:** *Thái Bá Nhân*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Phan Đại Hoàng*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thừa Long*, 9D, THCS Đại Nài, TP. Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Lộc*, 11 Toán 1, *Đoàn Ngọc Duy*, *Nguyễn Thanh Hải*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Phú Yên:** *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hoà; **Gia Lai:** *Phan Trần Ngọc Hải*, 10A1, THPT Chi Lăng, TP. Pleiku; **Bình Định:** *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP.Quy Nhơn; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/553. *Tìm số dương k lớn nhất sao cho*

$$a^2+b^2+c^2+k(a+b+c) \ge 3+k(ab+bc+ca)$$

với mọi số dương a, b, c thỏa mãn abc = 1.

Lời giải. Trước tiên ta cần chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề: *Với mọi a, b, c dương ta luôn có:*

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \ge 2(ab+bc+ca) \quad (1).$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1.

Chứng minh. Theo nguyên lý Dirichlet thì trong ba số a, b, c luôn tồn tại hai số cùng lớn hơn hoặc bằng 1, hoặc hai số cùng bé hơn hoặc bằng 1. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $b \ge 1$, $c \ge 1$ (hoặc $b \le 1$, $c \le 1$).

Khi đó ta có:

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \ge 2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-c)^2+2abc+2a-2ab-2ac \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-c)^2+2a(bc+1-b-c) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-c)^2+2a(1-b)(1-c) \ge 0$$

đúng do $b \ge 1$, $c \ge 1$ (hoặc $b \le 1$, $c \le 1$).

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. Bổ đề (1) được chứng minh.

Quay lại bài toán, ta có:

$$a^2+b^2+c^2+k(a+b+c) \ge 3+k(ab+bc+ca) \quad (1).$$

Trong (1), thay $a = b = x, c = \dfrac{1}{x^2}$ $(x > 0)$ ta được:

$$2x^2+\frac{1}{x^4}+k\left(2x+\frac{1}{x^2}\right) \ge 3+k\left(x^2+\frac{2}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2+\frac{1}{x^6}+k\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^4}\right) \ge \frac{3}{x^2}+k\left(1+\frac{2}{x^3}\right).$$

Cho $x \to +\infty$ ta thu được $2 \ge k$.

Ta sẽ chứng minh $k = 2$ là số dương lớn nhất cần tìm, tức là cần chỉ ra:

$$a^2+b^2+c^2+2(a+b+c) \ge 3+2(ab+bc+ca) \quad (2).$$

Ta có: $a^2+b^2+c^2+2(a+b+c)$

$$\ge a^2+b^2+c^2+2.3\sqrt[3]{abc} \text{ (BĐT Cauchy)}$$

$$= a^2+b^2+c^2+6 = a^2+b^2+c^2+2abc+1+3$$

$$\ge 2(ab+bc+ca)+3 \text{ (theo bổ đề 1).}$$

Vậy $k = 2$ là số nguyên dương lớn nhất cần tìm.

Nhận xét. 1) Việc sử dụng giới hạn để có đánh giá $k \le 2$ là mấu chốt trong lời giải của bài toán.

2) Không dùng bổ đề 1, có thể chứng minh trực tiếp BĐT(2) như sau:

Do BĐT(2) đối xứng theo các biến a, b, c nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \ge b \ge c$. Từ giả thiết $abc = 1$ nên $a \ge 1 \ge c$. Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2+2ac-2ab-2bc)$$
$$-2(a+c-b)+1+4(a-ac-1+c) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a+c-b-1)^2+4(a-1)(1-c) \ge 0$$

(luôn đúng).

2) Đa số các bạn có lời giải tương tự như trên, các bạn sau có lời giải đúng:

Quảng Bình: *Hoàng Kim Lộc*, 10 Toán 1, *Nguyễn Phương Nam*, 10 Toán 2, *Nguyễn Thanh Hải*, *Đoàn Ngọc Duy*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thừa Long*, 9D, THCS Đại Nài, TP. Hà Tĩnh; **Hà Nội:** *Ngô Minh Chấn*, 9A3, TH, THCS Archimedes Đông Anh; **Đà Nẵng:** *Tô Đông Hải*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Gia Lai:** *Phan Trịnh Nguyên*, 11A1, *Phan Trần Ngọc Hải*, 10A1, THPT Chi Lăng; **Đồng Tháp:** *Trần Hồng Vy*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Sóc Trăng:** *Lê Huỳnh Duy Khang*, 11A1, *Lâm Minh Thư*, *Tiết Trọng Khiêm*, 11A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Phú Yên:** *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Nam:** *Ngô Gia Tường*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bình Định:** *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bạc Liêu:** *Đỗ Văn Dương*, 11CA, THPT Trần Văn Bảy, Phước Long.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/553. *Chứng minh rằng*

$$2^{2n} \mid \varphi(2^{2^{n-1}}+1),\ \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4,$$

trong đó $\varphi(m)$ là số các số nguyên dương không vượt quá m và nguyên tố cùng nhau với m, $m \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải (Dựa theo lời giải của bạn *Đoàn Ngọc Duy*, 12T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**).

Bổ đề. *Với p là ước nguyên tố của $2^{2^k}+1$ thì*

$$p \equiv 1 \pmod{2^{k+1}}.$$

Chứng minh. Ta có:

$$p \mid 2^{2^k}+1 \Rightarrow 2^{2^k} \equiv -1 \pmod p \Rightarrow 2^{2^{k+1}} \equiv 1 \pmod p.$$

Giả sử $a = \mathrm{ord}_p(2)$. Khi đó:

$$a \mid 2^{k+1} \Rightarrow a = 2^h \mid 2^{k+1} \Rightarrow h \leq k+1.$$

Nếu $h < k+1 \Rightarrow a = 2^h \mid 2^k \Rightarrow 2^{2^k} \equiv 1 \pmod p$.

Mặt khác $2^{2^k} \equiv -1 \pmod p$ nên $1 \equiv -1 \pmod p$.

Do đó $p|2$, điều này vô lý (vì $2^{2^k}+1$ là số lẻ nên p là số lẻ). Vậy $h = k+1$ tức là $a = 2^{k+1}$. Theo định lý Fermat $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Vậy $a|p-1$ hay $p \equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$.

Trở lại bài toán: Theo bổ đề nếu p là ước nguyên tố của $2^{2^{n-1}}+1$ thì $p \equiv 1 \pmod{2^n}$ (1).

Đặt $m = 2^{2^{n-1}}+1$.

• Nếu m có ít nhất hai ước nguyên tố phân biệt p và q thì $\phi(p)\phi(q) \mid \phi(m) \Leftrightarrow (p-1)(q-1) \mid \phi(m)$. Theo (1), $p-1$ và $q-1$ chia hết cho 2^n nên $(p-1)(q-1)$ chia hết cho $2^n.2^n = 2^{2n}$.

Do đó $2^{2n} \mid (p-1)(q-1) \mid \phi(m)$.

• Nếu m chỉ có duy nhất một ước nguyên tố p thì $m = p^t$. Ta có:

$$p-1 \mid m-1 = 2^{2^{n-1}} \Rightarrow p-1 = 2^u \Rightarrow p = 2^u+1.$$

Đặt $u = 2^v t$, t lẻ. Khi đó $p = 2^u+1 = 2^{2^v t}+1$ chia hết cho $2^{2^v}+1$ (do t lẻ). Vì p là số nguyên tố nên $p = 2^{2^v}+1$.

Dễ thấy với mỗi số nguyên dương a và k ta có:

$$a^{2^k}-1 = (a-1)(a+1)(a^2+1)\ldots(a^{2^{k-1}}+1).$$

Suy ra: $a^{2^h}+1 \mid a^{2^k}-1$ với mỗi $h \leq k-1$

Nói riêng nếu $v \leq n-2$ thì

$p = 2^{2^v}+1 \mid 2^{2^{n-1}}-1 = m-2$, suy ra $p|2$. Điều này mâu thuẫn.

Vậy $v = n-1$ tức là $p = 2^{2^{n-1}}+1 = m$.

Vậy $\phi(m) = \phi(p) = p-1 = 2^{2^{n-1}}$ chia hết cho 2^{2n} do $2^{n-1} \geq 2n$ với mọi $n \geq 4$.

Nhận xét. Có ít bạn tham gia giải bài toán này. Ngoài bạn *Duy*, các bạn sau đây có lời giải tốt: **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Quảng Bình:** *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/553. *Tìm hàm $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:*

$$xf(f(x+y)) = xf(y) + \frac{1}{f(x)},\ \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (1).$$

Lời giải. (Dựa theo ý tưởng của đa số các bạn)

Giả sử tồn tại hàm $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện (1). Thay x bởi y và ngược lại, ta thu được:

$$yf(f(x+y))=yf(x)+\frac{1}{f(y)},\forall x,y\in\mathbb{R}^+\ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$f(x)-\frac{1}{xf(x)}=f(y)-\frac{1}{yf(y)},\forall x,y\in\mathbb{R}^+\ (3)$$

hay $f(x)-\dfrac{1}{xf(x)}=a,\forall x\in\mathbb{R}^+$ (3) với a là hằng số thực hay $f^2(x)-af(x)-\dfrac{1}{x}=0,\forall x\in\mathbb{R}^+$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+\frac{4}{x}}\right),\forall x\in\mathbb{R}^+(4).$$

Thử lại, thay (4) vào (1) ta được:

$$\frac{a+\sqrt{a^2+\dfrac{8}{a+\sqrt{a^2+\dfrac{4}{x+y}}}}}{2}=\frac{a+\sqrt{a^2+\dfrac{4}{y}}}{2}+\frac{2}{x\left(a+\sqrt{a^2+\dfrac{4}{x}}\right)}\ (5).$$

- Nếu $a>0$, từ (5) cho $x,y\to+\infty$ ta có:

$$\frac{a+\sqrt{a^2+\dfrac{4}{a}}}{2}=a\Rightarrow\sqrt{a^2+\frac{4}{a}}=a\Rightarrow\frac{4}{a}=0,\text{ vô lý.}$$

- Nếu $a\le 0$, trong (5) cho $x=1$ và $y\to+\infty$ ta có:

$$\lim_{y\to+\infty}\mathrm{VT}(5)=+\infty;\ \lim_{y\to+\infty}\mathrm{VP}(5)=\frac{2}{a+\sqrt{a^2+4}},\text{ vô lý.}$$

Kết luận: Không tồn tại $f(x)$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng.

Bình Định: *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Kiêm; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Hải*, *Đoàn Ngọc Duy*, 12T1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

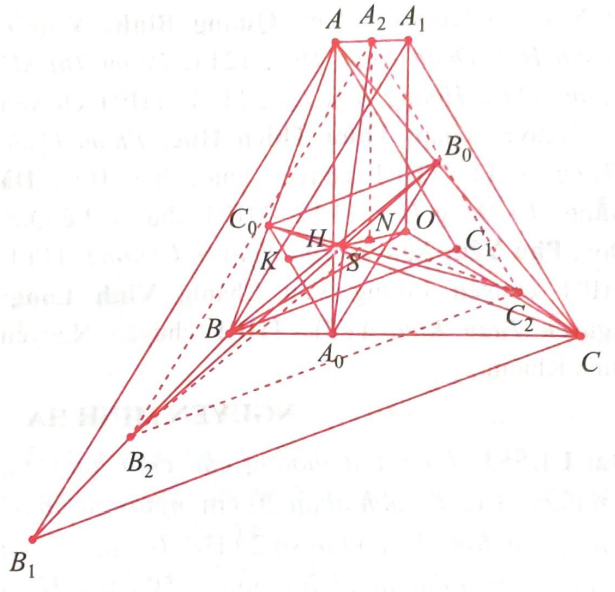
NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/553. *Cho tam giác ABC, O, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác. A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là giao điểm của AH, BH, CH và BC, CA, AB. A_1 là giao điểm của đường thẳng qua B song song với A_0B_0 và đường thẳng qua C song song với A_0C_0. A_2 là trung điểm của AA_1. Các điểm B_2, C_2 được xác định tương tự. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ thuộc OH.*

Lời giải. Gọi N, K theo thứ tự là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác $A_2B_2C_2$.

Vì $BC_1 // B_0C_0 // CB_0$ và B_2, C_2 theo thứ tự là trung điểm của BB_1, CC_1 nên $B_2C_2 // B_0C_0$.

Tương tự $C_2A_2 // C_0A_0$; $A_2B_2 // A_0B_0$.



Vậy các tam giác $A_2B_2C_2$ và $A_0B_0C_0$ có các cạnh tương ứng song song. Do đó A_0A_2, B_0B_2, C_0C_2 đồng tại tại một điểm, kí hiệu là S (1).

Từ đó, chú ý rằng N, K theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A_0B_0C_0$ và $A_2B_2C_2$, suy ra S, N, K thẳng hàng (2).

Dễ thấy các bộ bốn điểm (A, B, A_0, B_0) và (A, C, A_0, C_0) cùng thuộc một đường tròn.

Kết hợp với $BA_1 // B_0A_0$; $CA_1 // C_0A_0$, suy ra:

$$\begin{aligned}(BC,BA_1)&\equiv(BA_0,B_0A_0)\equiv(BA,B_0A)\\&\equiv(C_0A,CA)(\bmod\pi)\equiv(C_0A_0,CA_0)\\&\equiv(CA_1,CB)\equiv-(CB,CA_1)(\bmod\pi).\end{aligned}$$

Do đó tam giác A_1BC cân tại A_1.

Từ đó, chú ý rằng tam giác OBC cân tại O, suy ra $A_1O\perp BC$. Kết hợp với $AH\perp BC$, suy ra $A_1O // AH$. Từ đó, chú ý rằng A_2, N theo thứ tự là trung điểm của AA_1, HO, suy ra

$A_2N // AH \equiv A_0H$. Tương tự $B_2N // B_0H$. Vậy các tam giác NA_2B_2 và HA_0B_0 có các cạnh tương ứng song song. Do đó NH, A_0A_2, B_0B_2 đồng quy (3).

Từ (1) và (3) suy ra H, N, S thẳng hàng (4).

Từ (2) và (4), suy ra H, N, K thẳng hàng.

Kết hợp với N là trung điểm của OH, suy ra K thuộc OH (đpcm).

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó, nhưng chỉ có 8 bạn tham gia giải. Một vài bạn coi H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A_0B_0C_0$ (không chính xác, điều đó chỉ đúng khi tam giác ABC nhọn).

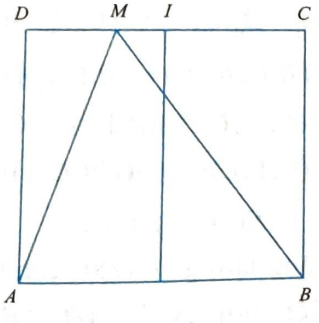
2) Xin nêu tên cả 8 bạn: **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Hải, Đoàn Ngọc Duy*, 12T1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12T2, *Hoàng Kim Lộc*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Phạm Quốc Thắng*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đà Nẵng:** *Tô Đông Hải*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/553. *Trên mặt thoáng của chất lỏng, tại hai điểm A và B cách nhau 20 cm, người ta bố trí hai nguồn đồng bộ có tần số 20 Hz. Tốc độ truyền song trên mặt thoáng chất lỏng v = 50 cm/s. Hình vuông ABCD nằm trên mặt thoáng chất lỏng. I là trung điểm của đoạn CD, M là điểm nằm trên CD gần I nhất dao động với biên độ cực đại. Tính khoảng cách từ M đến I.*

Lời giải. Ta xác định được: $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{50}{20} = 2,5$ cm.

Các điểm A, B, C, D, I, M được biểu diễn như hình dưới:



Ta có $0 \le MI \le 10MI$. Để M dao động cực đại gần I nhất thì M thuộc cực đại bậc 1 tính từ trung trực của AB. Ta có:

$$MB - MA = \lambda$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(OB+MI)^2 + IO^2} - \sqrt{(OA-MI)^2 + IO^2} = \lambda$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(10+MI)^2 + 20^2} - \sqrt{(10-MI)^2 + 20^2} = 2,5$$

$$\Rightarrow MI = 2 \text{ cm}.$$

Nhận xét. Chúc mừng bạn *Phạm Văn Anh*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diệu, **Đồng Tháp** đã có lời giải đúng cho đề ra kì này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/553. *Điện năng được truyền từ nơi phát đến một xưởng sản xuất bằng đường dây một pha với hiệu suất truyền tải là 90%. Ban đầu xưởng sản xuất này có 90 máy hoạt động, vì muốn mở rộng quy mô sản xuất nên xưởng đã nhập về thêm một số máy. Hiệu suất truyền tải lúc sau khi có thêm các máy mới cùng hoạt động giảm đi 10% so với ban đầu. Coi hao phí điện năng chỉ do tỏa nhiệt trên đường dây, công suất tiêu thụ điện của các máy hoạt động (kể cả các máy mới nhập về) đều như nhau và hệ số công suất đều bằng 1. Nếu giữ nguyên công suất điện nơi phát thì số máy nhập về là bao nhiêu?*

Lời giải. Hiệu suất truyền tải:

$$H = \frac{P - P_{hp}}{P} = 1 - \frac{P_{hp}}{P}.$$

Suy ra: $P_1 = 0,9P_1 + 90P_0 \Rightarrow 0,1P_1 = 90P_0$,

$$P_2 = 0,8P_2 + (90+n)P_0 \Rightarrow 0,2P_2 = (90+n)P_0$$

trong đó P_1, P_2 lần lượt là công suất truyền đi trước và sau khi nhập thêm n máy và P_0 là công suất tiêu thụ của mỗi máy. Ta có:

$$P_{hp} = \frac{P^2R}{U} \Rightarrow \frac{P_{hp1}}{P_{hp2}} = \frac{P_1^2}{P_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{P_{hp1}}{P_{hp2}} = \frac{1-H_1}{1-H_2}.\frac{P_1}{P_2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{1-0,9}{1-0,8} = \frac{1}{2}.$$

Từ đó tính được: $n = 70$. Vậy số máy nhập thêm là 70 máy.

Nhận xét. Các bạn *Phạm Văn Anh*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diệu, **Đồng Tháp,** *Đỗ Văn Dương*, 11A1, Trung tâm GDNN – GDTX, quận Ô Môn, **Cần Thơ** đã có lời giải đúng cho đề ra kì này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Kết quả cuộc thi GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÝ TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM HỌC 2022 - 2023

LTS. Cuộc thi giải Toán và Vật lý năm học 2022 - 2023 trên Tạp chí TH&TT được khởi động từ tháng 9 năm 2022 đến tháng 8 năm 2023. Cuộc thi này được nhiều bạn trẻ yêu Toán và Vật lý cấp THCS và THPT trên cả nước tham gia giải bài rất sôi nổi. **Giải Xuất sắc** về môn Toán thuộc về bạn: ***Trần Minh Hoàng***, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh. Giải Ba** môn Vật lý thuộc về bạn: ***Phạm Văn Anh***, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**. Chúc mừng tất cả các bạn đoạt giải cuộc thi. Hẹn gặp các bạn ở cuộc thi tiếp theo trong năm học 2023 - 2024. Sau đây là danh sách **64** bạn đoạt giải Toán và **7** bạn đoạt giải Vật Lý năm học 2022 - 2023.

MÔN TOÁN

☆ Giải Xuất sắc (1 giải)

Trần Minh Hoàng, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh.**

☆ Giải Nhất (6 giải)

1. *Nguyễn Trần Hoàng*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình.**
2. *Nguyễn Văn Đức Quảng*, 9K, THCS Trần Mai Ninh TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**.
3. *Hà Phương Anh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Phú Thọ.**
4. *Nguyễn Thị Thu Phương*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình.**
5. *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình.**
6. *Trần Việt Anh*, 9A7, Archimedes Academy Trung Yên, Cầu Giấy, **Hà Nội**.

☆ Giải Nhì (10 giải)

1. *Nguyễn Chánh Thiện*, 8/14, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3, **TP. Hồ Chí Minh.**
2. *Lương Hữu Bách*, 8A, THCS Nguyễn Trãi, TP. Sơn La, **Sơn La.**
3. *Lê Tuấn Nghĩa*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên, **Hưng Yên.**
4. *Nguyễn Hữu Trí*, 10A1, THPT số 2 Phù Cát, **Bình Định.**
5. *Trần Lan Anh*, 8E, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Phú Thọ.**
6. *Tiết Trọng Khiêm*, 10A2, THPT chuyên Minh Khai, TP. Sóc Trăng, **Sóc Trăng.**
7. *Phan Trung Trực*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định.**
8. *Nguyễn Tuấn Kiệt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long.**
9. *Nguyễn Văn Việt*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
10. *Tô Đông Hải*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng.**

☆ Giải Ba (17 giải)

1. *Lê Tuấn Hiệp*, 6C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ, **Hưng Yên.**
2. *Nguyễn Tất Han*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
3. *Trần Diệu Linh*, 8A, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh.**
4. *Phan Trung Kiên*, 12T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu, **Bà Rịa – Vũng Tàu.**
5. *Nguyễn Huy Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định.**
6. *Nguyễn Đăng Quang*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
7. *Nguyễn Thị Băng Tâm*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
8. *Nguyễn Văn Lâm*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
9. *Lưu Trọng Phúc*, 8B, THCS Đội Cung, TP. Vinh, **Nghệ An.**
10. *Đoàn Văn Hoàng Lân*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**
11. *Phan Quốc Thắng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**
12. *Trần Thị Thanh Thư*, 12 Toán 1, THPT Chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**
13. *Phạm Nguyên Khang*, 10T2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, **Sóc Trăng.**
14. *Hoàng Văn Nhân*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
15. *Trần Phạm Minh Đạt*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông, **Quảng Nam.**
16. *Bạch Thái Sơn*, 10A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**
17. *Lưu Khánh Huy*, 8H, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh.**

☆ Giải Khuyến khích (30 giải)

1. *Đỗ Tuấn Minh*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, **Phú Thọ.**
2. *Nguyễn Trịnh Phương Minh*, 6/14, THCS Lê Quý Đôn, Q.3, **TP. Hồ Chí Minh.**
3. *Lương Thị Hải Yến*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
4. *Nguyễn Nguyên Thịnh*, 9A4, THCS P. Bình Định, An Nhơn, **Bình Định**.
5. *Lê Gia Quang*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định.**
6. *Phạm Xuân Hoàng*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
7. *Vũ Tiến Đạt*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn, **Bình Định.**
8. *Lê Đình Minh Quân*, 12CT, THPT Gia Định, Bình Thạnh, **TP. Hồ Chí Minh.**
9. *Phạm Đình Khôi*, 10A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**
10. *Nguyễn Hải Triều*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
11. *Nguyễn Xuân Minh Đức*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**
12. *Phan Đại Hoàng*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An.**
13. *Ngô Văn Trường*, 9A, THCS Mai Hùng, TX. Hoàng Mai, **Nghệ An.**
14. *Phạm Thị Minh Ánh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên, **Hưng Yên.**
15. *Đinh Như Phát*, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, **Phú Yên.**
16. *Hoàng Văn Duy*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
17. *Phan Nhật Minh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh.**
18. *Chu Đức Bảo*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên.**
19. *Nguyễn Trọng Việt*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên.**
20. *Trần Hữu Dương*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên.**
21. *Thái Bá Nhân*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
22. *Nguyễn Văn Khiêm*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên.**
23. *Hoàng Văn Quyết*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An.**
24. *Huỳnh Bá Tuấn Anh*, 9/2, THCS Nguyễn Văn Cừ, Sơn Trà, **Đà Nẵng.**
25. *Lê Anh Triết*, 8C17, TH-THCS-THPT Nguyễn Siêu, Cầu Giấy, **Hà Nội.**
26. *Trần Công Minh*, 12 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc, TP. Bảo Lộc, **Lâm Đồng.**
27. *Cao Quốc Hưng*, 11 Toán, THPT chuyên Bảo Lộc, TP. Bảo Lộc, **Lâm Đồng.**
28. *Nguyễn Doãn Thuận*, 10A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc.**
29. *Nguyễn Đình Nam Khánh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh.**
30. *Nguyễn Trinh An*, 9K, THCS Trần Mai Ninh, **Thanh Hóa.**

MÔN VẬT LÝ

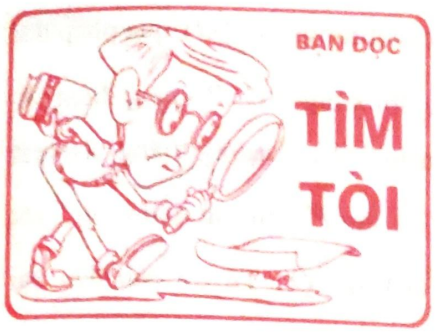
☆ Giải Ba (1 giải)

Phạm Văn Anh, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp.**

☆ Giải Khuyến khích (6 giải)

1. *Trần Thị Thanh Thư*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế.**
2. *Trần Thị Tuyết Trinh*, 11A1, Trung tâm giáo dục nghề nghiệp – Giáo dục thường xuyên, quận Ô Môn, **Cần Thơ.**
3. *Trương Phúc Vinh*, 11 Lý, THPT chuyên Tiền Giang, **Tiền Giang.**
4. *Ngô Huỳnh Thiên Vinh*, 11 Lý, THPT chuyên Tiền Giang, **Tiền Giang.**
5. *Đỗ Văn Dương*, 11A1, Trung tâm giáo dục nghề nghiệp – Giáo dục thường xuyên, quận Ô Môn, **Cần Thơ.**
6. *Thái Thông Minh*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp.**

Các bạn đoạt giải Toán và Vật Lý nhớ gửi gấp địa chỉ mới của mình về Tòa soạn hoặc liên hệ trực tiếp qua số điện thoại (024) 35121607 để nhận Giấy Chứng nhận và tặng phẩm của Tạp chí.



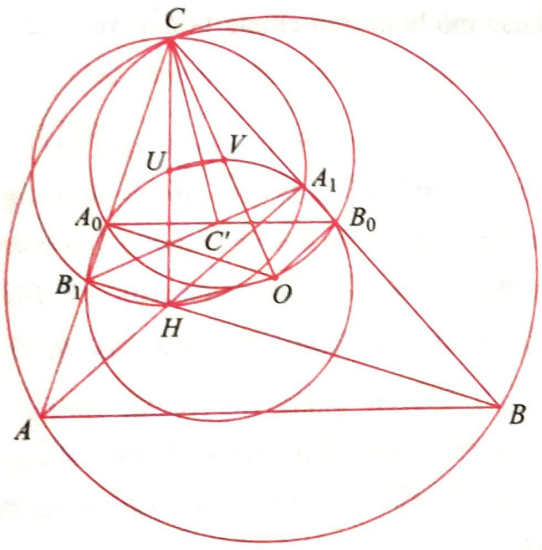
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HAI ĐIỂM LIÊN HỢP ĐẲNG GIÁC ĐẶC BIỆT TRONG TAM GIÁC

NGUYỄN VĂN THANH
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Trong chương trình toán phổ thông, chúng ta đã biết đến bài toán quen thuộc sau:"*Cho tam giác ABC có trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp là O. Khi đó hai điểm O và H là hai điểm liên hợp đẳng giác và đường thẳng OH là đường thẳng Euler của tam giác ABC*". Bài toán này là một tính chất đẹp và là nguồn cảm hứng được khai thác rất nhiều trong các đề toán hình học phẳng thi học sinh giỏi các cấp. Trong bài viết nhỏ này, tác giả xin tổng hợp và gửi đến bạn đọc một hướng khai thác như thế. Trước tiên chúng ta đến với bài toán sau.

Bài 1 (Peru TST 2006). *Gọi AA_1 và BB_1 là hai đường cao của tam giác ABC nhọn không cân. Hai điểm A_o, B_o lần lượt là trung điểm của CB và CA. Gọi C' là giao điểm của A_1B_1 và A_oB_o. Chứng minh rằng CC' vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC.*

Lời giải.

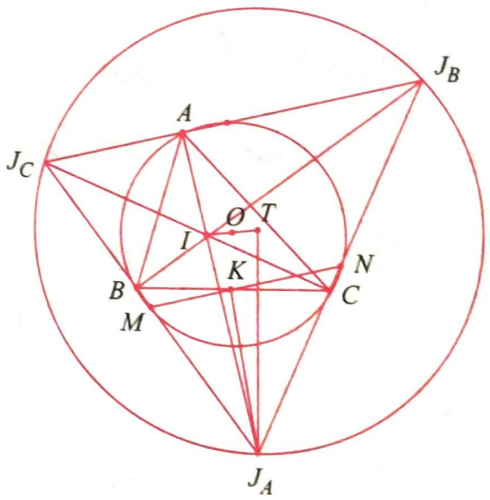


Gọi H, O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; U, V lần lượt là tâm đường tròn đường kính CH và đường tròn đường kính CO. Ta có 4 điểm A_1, B_1, A_o, B_o nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC nên $\overline{C'A_1}.\overline{C'B_1} = \overline{C'A_o}.\overline{C'B_o}$. Từ đó $\mathcal{P}_{C'/(U)} = \mathcal{P}_{C'/(V)}$, suy ra CC' là trục đẳng phương của đường tròn đường kính CH và đường tròn đường kính CO. Dẫn đến $CC' \perp UV$, mà UV là đường trung bình của tam giác COH nên $CC' \perp OH$.

Tiếp tục khai thác bài toán 1, chúng ta đến với bài toán sau.

Bài 2. *Cho tam giác ABC có I, J_A lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, bàng tiếp góc $\widehat{BAC}$. Hai điểm M, N lần lượt là điểm chính giữa hai cung $\overset{\frown}{ABC}$ và $\overset{\frown}{ACB}$ của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. K là giao điểm của hai đường thẳng MN và BC. Chứng minh rằng J_AK vuông góc với OI.*

Lời giải.

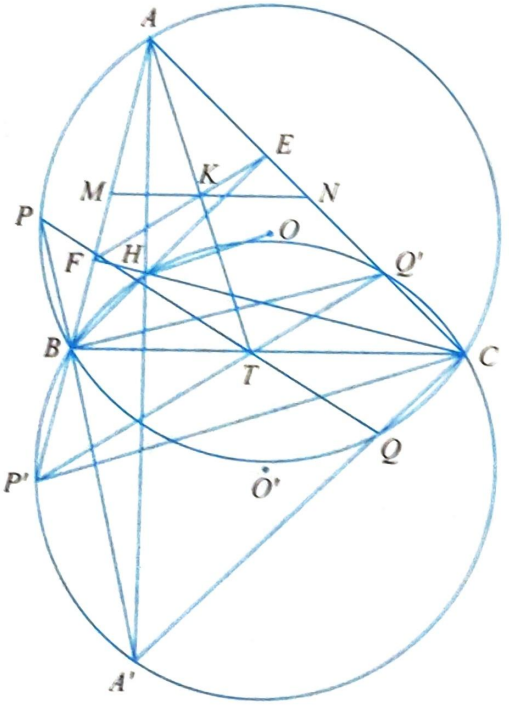


Gọi J_B, J_C lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ góc của tam giác ABC; T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $J_AJ_BJ_C$. Suy ra I là trực tâm và O là tâm đường tròn Euler của tam giác $J_AJ_BJ_C$, hay ba điểm T, I, O thẳng hàng (đường thẳng Euler của tam giác $J_AJ_BJ_C$). Rõ ràng M, N lần lượt là trung điểm của J_AJ_C và J_AJ_B nên theo bài 1, ta có $J_AK \perp OI$.

Nhận xét. Ta thấy bài toán 2 là thủ thuật đổi mô hình của bài toán 1. Tiếp tục khai thác mô hình bài toán 1, chúng ta đến với bài toán sau.

Bài 3. *Cho tam giác ABC có trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp là O. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua BC. Đường thẳng A'B cắt lại đường tròn (O) tại P, đường thẳng A'C cắt lại đường tròn (O) tại Q. Gọi T là giao điểm của hai đường thẳng BC và PQ. Chứng minh rằng AT vuông góc với OH.*

Lời giải.



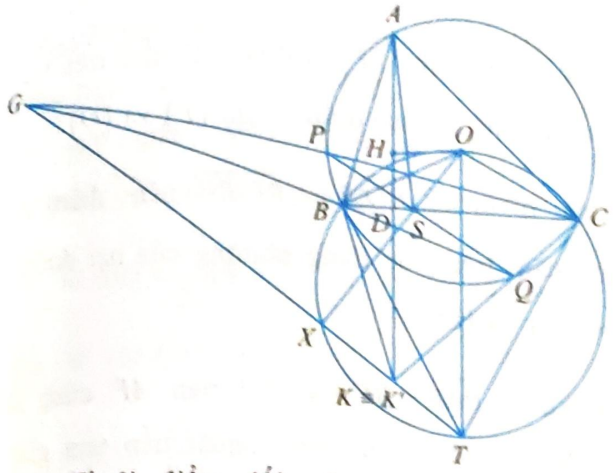
Gọi (O') là ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng trục với trục đối xứng BC. Rõ ràng điểm A nằm trên đường tròn (O'). Đường thẳng AB cắt lại đường tròn (O') tại P', đường thẳng AC cắt lại đường tròn (O') tại Q'. Từ đó dẫn đến hai đường thẳng PQ và $P'Q'$ là ảnh của nhau qua phép đối xứng trục với trục đối xứng BC. Suy ra điểm T nằm trên $Q'P'$.

Gọi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ B, C tương ứng của tam giác ABC; M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC; K là giao điểm của hai đường thẳng MN và EF. Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C} = \widehat{AP'C} = \widehat{AQ'B} = \widehat{AP'C}$. Suy ra tam giác ACP' cân tại C và tam giác ABQ' cân tại B. Suy ra F là trung điểm AP' và E là trung điểm của AQ'. Dẫn đến tồn tại một phép vị tự tâm A tỉ số $k = 2$ biến hai đường thẳng MN, EF lần lượt thành hai đường thẳng $BC, P'Q'$ tương ứng. Vì thế 3 điểm A, K, T thẳng hàng. Mà theo bài 1, AK vuông góc với OH nên AT vuông góc với OH.

Nhận xét. Bài toán 3 là hướng phát triển trực tiếp bài toán 1 thông qua các phép biến hình. Tiếp tục khai khác mô hình trên chúng ta đến với bài toán sau.

Bài 4. *Cho tam giác ABC có đường cao AD (điểm D nằm trên BC) và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC cắt BC tại S. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C cắt nhau tại T. Đường thẳng OS cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác TBC tại X. Đường thẳng XT cắt AD tại K. Chứng minh rằng D là trung điểm của AK.*

Lời giải.

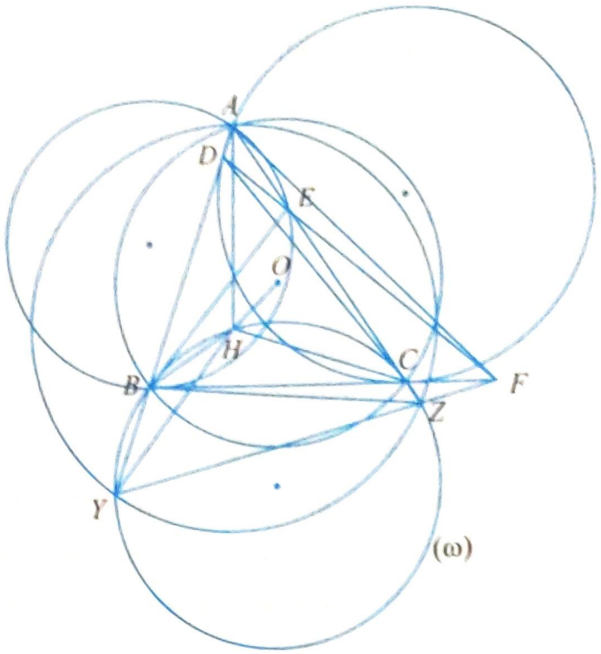


Gọi K' là điểm đối xứng với A qua BC; $K'B, K'C$ cắt lại (O) lần lượt tại P, Q tương ứng. Theo bài toán 3, S chính là giao điểm PQ với BC. Gọi G là giao điểm của hai đường thẳng BQ và PC. Áp dụng định lý Pascal vào 6 điểm $\begin{pmatrix} B & C & Q \\ C & B & P \end{pmatrix}$ ta có 3 điểm G, K', T thẳng hàng. Áp dụng định lý Brocard cho tứ giác toàn phần $PBQC.K'G$ ta có S là trực tâm của tam giác $GK'O$, hay $OX \perp TK'$. Theo giả thiết ta có $OX \perp TX$. Dẫn đến ba điểm X, K', T thẳng hàng, hay $K \equiv K'$. Vậy D là trung điểm của AK.

Nhận xét. Mấu chốt lời giải bài toán 4 là dựa vào việc xây dựng lại mô hình bài toán 3, từ đó phát hiện ra điểm S là trực tâm của tam giác $GK'O$. Tiếp tục khai thác mô hình trên chúng ta đến với bài toán sau.

Bài 5 (Hong Kong MO 2014) *Cho tam giác ABC không cân. Gọi D, E là các điểm nằm trên cạnh AB và AC tương ứng sao cho hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD và tam giác ABE đều nhận BC làm tiếp tuyến. Gọi F là giao điểm của BC và DE. Chứng minh rằng AF vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC.*

Lời giải.



Gọi O, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm tam giác ABC. Giả sử đường tròn tâm H bán kính AH cắt các tia AB, AC lần lượt tại Y, Z. Ta có: $\widehat{AYZ} = \frac{1}{2}\widehat{AHZ} = 90^\circ - \widehat{HAC} = \widehat{ACB}$

và $\widehat{HCB} = \widehat{BAH} = \widehat{BYH}$.

Suy ra 5 điểm Y, B, C, Z, H nằm trên đường tròn (w). Mặt khác:

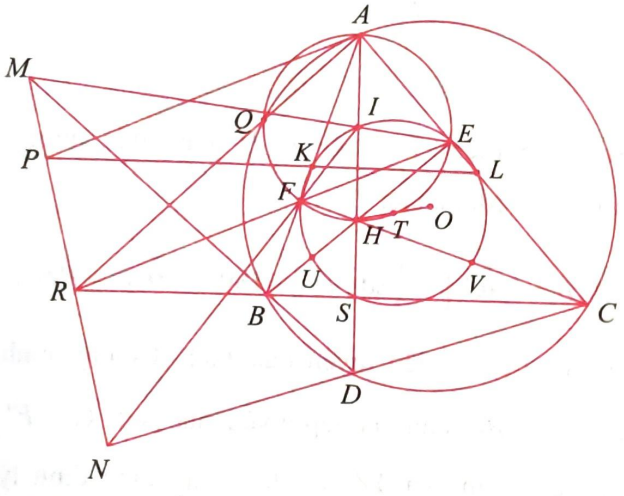
$$\widehat{DCB} = \widehat{BAC}\left(= \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{CD}\right) = 180^\circ - \widehat{BHC} = \widehat{BZC},$$

suy ra CD là tiếp tuyến của (w). Chứng minh tương tự BE cũng là tiếp tuyến của (w). Gọi F' là giao điểm của YZ và BC. Áp dụng định lý Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix} B & C & Y \\ Z & B & C \end{pmatrix}$ ta có ba điểm D, E, F' thẳng hàng. Mà theo giả thiết, F là giao điểm của BC và DE nên $F \equiv F'$, hay điểm F nằm trên đường thẳng YZ. Suy ra $\overline{FB}.\overline{FC} = \overline{FY}.\overline{FZ}$, hay $\mathcal{P}_{F/(O)} = \mathcal{P}_{F/(H)}$. Dẫn đến AF là trục đẳng phương của 2 đường tròn (O) và đường tròn tâm H bán kính AH. Vậy, AF vuông góc với OH.

Tiếp tục khai thác mô hình trên, chúng ta đến với bài toán sau.

Bài 6. *Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh B, C. AH cắt (O) tại D khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt lại đường tròn (O) tại điểm Q khác điểm A. Gọi K, I, L lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AH và AC tương ứng. EI cắt BD tại M, FI cắt CD tại N, AQ cắt EF tại R và LK cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) tại P. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, R, P cùng nằm trên đường thẳng vuông góc với OH.*

Lời giải.



Gọi U, S, V lần lượt là trung điểm các cạnh HB, HD, HC và T là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. Ta có:

$$\overline{HU}.\overline{HE} = \overline{HS}.\overline{HI} = \overline{HV}.\overline{HF}$$
$$\Leftrightarrow 2\overline{HU}.\overline{HE} = 2\overline{HS}.\overline{HI} = 2\overline{HV}.\overline{HF}$$
$$\Leftrightarrow \overline{HB}.\overline{HE} = \overline{HD}.\overline{HI} = \overline{HC}.\overline{HF}.$$

Suy ra các tứ giác $BDEI$ và $CDFI$ nội tiếp, dẫn đến:

$$\overline{ME}.\overline{MI} = \overline{MB}.\overline{MD}$$

và $$\overline{NF}.\overline{NI} = \overline{ND}.\overline{NC}.$$

Từ đó ta có điểm M và điểm N nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (T) và (O).

Tương tự ta có $\overline{RQ}.\overline{RA} = \overline{RF}.\overline{RE}$ nên điểm R cũng nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (T) và (O).

Mặt khác, $\widehat{PAB} = \widehat{BCA} = \widehat{ALP}$ nên AP cũng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ALK. Suy ra $PA^2 = \overline{PK}.\overline{PL}$, hay điểm P nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (T) và (O).

Vậy, 4 điểm M, N, R, P cùng nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (T) và (O) và rõ ràng đường thẳng này vuông góc với OH.

Tiếp tục khai thác mô hình trên, chúng ta đến với bài toán sau.

Bài 7. *Cho tam giác ABC nhọn, không cân có trực tâm H nội tiếp đường tròn (O). Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và D là chân đường cao hạ từ đỉnh A trên BC. Tia GD cắt đường tròn (O) tại X và tia GA cắt đường tròn Euler của tam giác ABC tại Y. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Đường thẳng MN cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) tại Z. d là đường thẳng qua Z và vuông góc với đường thẳng OH. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt lại đường tròn (O) tại P. Chứng minh rằng:*

a) *Các điểm D, G, P thẳng hàng.*

b) *Các đường thẳng d, AX và DY đồng quy.*

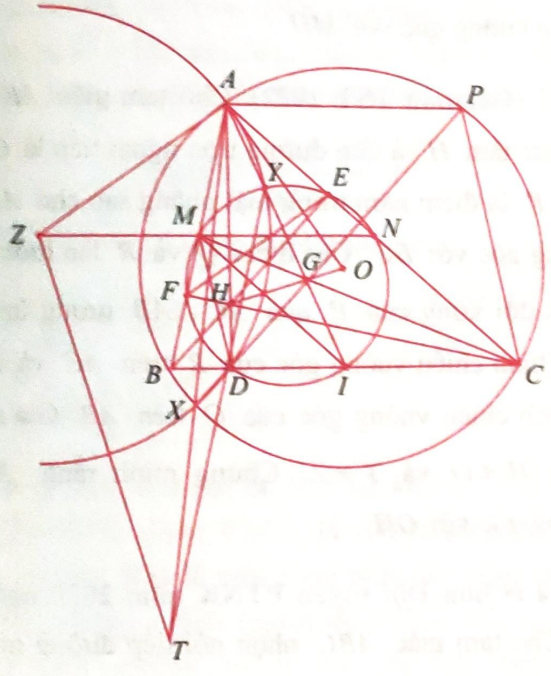
Lời giải.

a) Theo giả thiết ta thấy tứ giác $ABCP$ là hình thang cân nên $\widehat{BCP} = \widehat{ABC}$. Lại có MN là đường trung trực của AD nên $BM = MA = MD$. Dẫn đến tam giác MBD cân tại M. Suy ra $\widehat{BCP} = \widehat{ABC} = \widehat{MDB}$. Từ đó $DM \parallel CP$ và rõ ràng là $MD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CP$. Gọi G' là giao điểm của DP với CM, ta có:

$$\frac{G'C}{G'M} = \frac{G'P}{G'D} = \frac{PC}{MD} = 2.$$

Mà $\frac{GC}{GM} = 2$ nên $\frac{GC}{GM} = \frac{G'C}{G'M}$.

Suy ra $G \equiv G'$, hay ba điểm D, G, P thẳng hàng.



b) Gọi I là trung điểm của BC. Ta có $\widehat{DYI} = \widehat{IMD} = \widehat{ACP} = \widehat{AXP}$. Suy ra tứ giác $AYDX$ nội tiếp. Dẫn đến AX là trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AYDX$ với đường tròn (O) và DY là trục đẳng phương của đường tròn Euler của tam giác ABC với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AYDX$.

Mặt khác, theo bài toán 6 ta có đường thẳng d là trục đẳng phương của đường tròn Euler của tam giác ABC với đường tròn (O). Vậy, các đường thẳng d, AX và DY đồng quy tại tâm đẳng phương của 3 đường tròn nêu trên.

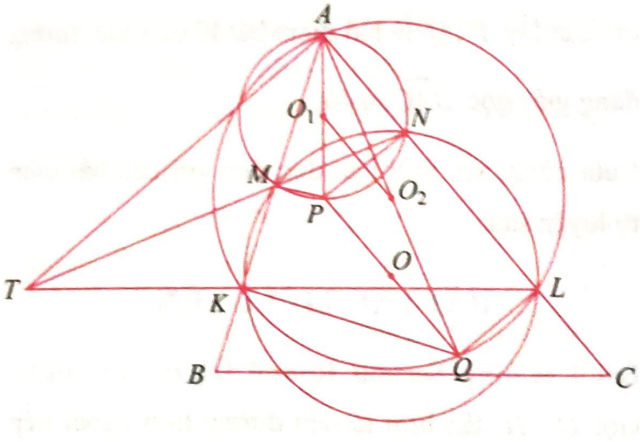
Nhận xét. Câu a của bài toán 7 là một bổ đề quan trọng đã từng xuất hiện trong nhiều đề thi học sinh giỏi các cấp. Sau đây chúng ta đến với mô hình tổng quát hơn, đó là thay đổi giả thiết điểm H là trực tâm và điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bởi hai điểm liên hợp đẳng giác P và Q bất kì trong tam giác. Chúng ta có bài toán sau.

Bài 8 (Chọn Đội tuyển Vĩnh Long năm 2022). *Cho tam giác ABC có P nằm trong tam giác. Lấy điểm Q sao cho các đường thẳng AQ, BQ và CQ lần lượt đối xứng với các đường thẳng AP, BP và CP qua phân giác trong các góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ tương ứng. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên AB và AC; K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của Q trên AB và AC.*

a) Chứng minh rằng các điểm M, N, L, K nằm trên một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

b) Gọi T là giao điểm của MN và KL. Chứng minh rằng AT vuông góc với PQ.

Lời giải.



a) Ta có: $AM = AP.\cos\widehat{MAP}$,

$$AN = AP.\cos\widehat{NAP},$$

$$AK = AQ.\cos\widehat{KAQ},\ AL = AQ.\cos\widehat{LAQ}.$$

Do AP, AQ là hai đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{MAP} = \widehat{LAQ}$ và $\widehat{NAP} = \widehat{KAQ}$.

Từ đó: $AM.AK = AP.\cos\widehat{MAP}.AQ.\cos\widehat{KAQ}$

$$= AP.\cos\widehat{LAQ}.AQ.\cos\widehat{NAP}$$
$$= AN.AL$$

Suy ra các điểm M, N, L, K nằm trên một đường tròn.

Lại có tứ giác $MKQP$ và tứ giác $NLQP$ là hình thang vuông nên theo tính chất đường trung bình của hình thang dễ thấy hai đường trung trực của cạnh MK và cạnh NL cắt nhau tại O là trung điểm của cạnh PQ. Vậy O là tâm đường tròn đi qua các điểm M, N, L, K.

b) Gọi $(O_1), (O_2)$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMPN$ và $AKQL$.

Ta có: $\overline{TK}.\overline{TL} = \overline{TM}.\overline{TN}$ hay $\mathscr{P}_{T/(O_1)} = \mathscr{P}_{T/(O_2)}$.

Suy ra AT là trục đẳng phương của 2 đường tròn (O_1) và (O_2), dẫn đến $AT \perp O_1O_2$. Mà O_1O_2 là đường trung bình của tam giác APQ nên

$$AT \perp PQ.$$

Nhận xét. Ta thấy trong bài toán 8, giả thiết P, Q là hai điểm liên hợp đẳng giác là không cần thiết, chỉ cần lấy P, Q là hai điểm bất kì trên hai đường đẳng giác góc $\widehat{BAC}$ là đủ.

Cuối cùng, xin mời bạn đọc đến với các bài toán tự luyện sau.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1 (China Second Round Olympiad 2001). Gọi O, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm tam giác ABC. Đường thẳng AH cắt BC tại D, đường thẳng BH cắt AC tại E, đường thẳng CH cắt AB tại F, đường thẳng AB và ED cắt nhau tại M, AC và FD cắt nhau tại N. Chứng minh rằng OH vuông góc với MN.

Bài 2 (Oral Moscow Geometry Olympiad 2014). Cho tam giác nhọn ABC có các đường trung tuyến AA_0, BB_0, CC_0 đồng quy tại M và các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H. Tiếp tuyến tại C_1 của đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ cắt đường thẳng A_0B_0 tại C'. Các điểm A' và B' được định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng các điểm A', B' và C' nằm trên đường thẳng vuông góc với MH.

Bài 3 (German TST 2022). Cho tam giác ABC có trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp là O. Gọi P là điểm nằm trong mặt phẳng sao cho AP vuông góc với BC. Các điểm Q và R lần lượt là điểm đối xứng của P qua AC, AB tương ứng. Y là hình chiếu vuông góc của R trên AC và Z là hình chiếu vuông góc của Q trên AB. Giả sử rằng $H \neq O$ và $Y \neq Z$. Chứng minh rằng YZ vuông góc với OH.

Bài 4 (Chọn Đội tuyển PTNK năm 2020 ngày 1). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và AH, BH, CH cắt các cạnh đối diện lần lượt tại D, E, F. Gọi I, M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, HB, HC và HB, HC cắt lại (O) theo thứ tự tại L, K. Giả sử KL cắt MN tại G. Trên EF lấy điểm T sao cho AT vuông góc với HI. Chứng minh rằng GT vuông góc với OH.

BẠN CÓ BIẾT ?

CÁC CÔNG THỨC CỦA SỐ π VÀ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC ĐẸP

TRẦN ĐỨC SƠN
(Đồng Nai)

Trong bài này ta sẽ nói về hai công thức khác nhau để tính số pi và từ đó rút ra được một bất đẳng thức đẹp và khó.

1 Giới thiệu

Số pi được định nghĩa bằng chu vi đường tròn chia cho đường kính của nó. Chúng ta hầu như ai cũng biết về số pi khi học về đường tròn ở bậc học cấp hai. Trong bài này tôi xin được nói về hai công thức để tính số pi. Công thức đầu tiên là dựa vào khai triển Maclaurin cho hàm số (arctg x) ở bậc đại học. Một số bạn học chuyên toán cũng có thể biết đến, công thức như sau:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Tại $x = 1$ ta có công thức tính pi là

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \ldots$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (1).$$

Công thức thứ hai có lịch sử khá lâu đời. Vào năm 1655, *John Wallis* đã viết ra công thức trứ danh này. Đây là một công thức nổi tiếng nhưng chắc không nhiều người được biết đến nó. Nó có một chứng minh sơ cấp rất đẹp của *Wastlund* (xem [1]). Công thức như sau:

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdots = \frac{\pi}{2} \quad (2).$$

Xét tích riêng

$$P_n = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

ta thấy rằng $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \frac{\pi}{2}$. Nếu chúng ta nhóm lại các thừa số một cách khác thì nhận được:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdots\left(\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\right)$$

$$= 2.\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Từ đây ta có công thức khá đẹp, một dạng khác của (2) như sau:

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{\pi}{4} \quad (3).$$

Từ (1) và (3) ta nhận được một bất đẳng thức đẹp và khó qua định lý sau đây

Định lý 1. *Với mọi số tự nhiên n ta có bất đẳng thức*

$$\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(4n+3)^2}\right) > 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}.$$

2 Bổ đề

Bất đẳng thức trong định lý 1 là dễ dàng khi $n = 0$, lúc đó nó là $\frac{8}{9} > \frac{2}{3}$. Tuy nhiên ta sẽ gặp khó khăn n tăng dần. Vì khi đó vế trái thì giảm dần trong khi vế phải lại tăng dần. Để chứng minh định lý 1 ta cần bổ đề đơn giản dưới đây

Bổ đề 1.

i) *Cho dãy giảm* $s_1 > s_2 > s_3 > \ldots$ *sao cho* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$. *Vậy thì* $s_n > a, \forall n$.

ii) *Cho dãy tăng* $s_1 < s_2 < s_3 < \ldots$ *sao cho* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$. *Vậy thì* $s_n < a, \forall n$.

Chứng minh.

i) Giả sử ngược lại tồn tại chỉ số k sao cho $s_k < a$. Đặt $\varepsilon = a - s_k$, vì dãy giảm nên ta cũng sẽ có $s_n < a, \forall n \geq k$. Hay $|s_n - a| > \varepsilon, \forall n > k$. Điều này là vô lý vì $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$. Mâu thuẫn này dẫn tới điều phải chứng minh.

ii) Tương tự như chứng minh trên.

3. Chứng minh định lý 1

Đặt tổng riêng của (1) là

$$a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Khi này ta xét n chẵn ($n = 2m$) và n lẻ ($n = 2m + 1$). Dễ thấy rằng

$a_2 > a_4 > \ldots > a_{2m} > \ldots$ và $a_1 < a_3 < \ldots < a_{2m+1} < \ldots$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2m} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2m+1} = \frac{\pi}{4}$.

Bây giờ áp dụng bổ đề 1 ta nhận được các bất đẳng thức sau:

$$a_2 > a_4 > \ldots > a_{2m} > \ldots > \frac{\pi}{4} \quad (4);$$

$$a_1 < a_3 < \ldots < a_{2m+1} < \ldots < \frac{\pi}{4} \quad (5).$$

Đặt tích riêng của (3) là:

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right).$$

Tương tự ta thấy:

$$b_1 > b_2 > b_3 > \ldots > b_{2m} > b_{2m+1} > \ldots$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{\pi}{4}$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2m} = \lim\limits_{n\to\infty} b_{2m+1} = \frac{\pi}{4}$.

Lại áp dụng bổ đề 1 ta có $b_n > \frac{\pi}{4}$ nói riêng ta thu được: $b_1 > b_3 > \ldots > b_{2m+1} > \ldots > \frac{\pi}{4}$ (6).

Từ (5) và (6) ta có: $b_{2m+1} > \frac{\pi}{4} > a_{2m+1}, \forall m$.

Vậy ta có: $\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{(4m+3)^2}\right)$

$$> 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3}.$$

Đây chính là định lý 1 (đpcm).

Nhận xét. Dựa theo chứng minh này chúng ta có thể phát biểu và chứng minh định lý 1 theo dạng tổng quát hơn, phát biểu đó là

Định lý 2. *Với mọi số tự nhiên m, n ta có bất đẳng thức*

$$\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{(4m+3)^2}\right)$$

$$> 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3}.$$

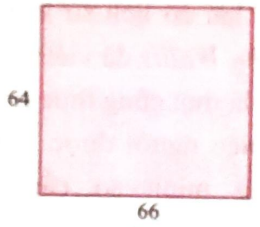
Tài liệu tham khảo

[1] Wastlund, J. (2007). *An Elementary Proof of the Wallis Product Formula for pi.* Amer . Math. Monthly. **114** (10): 914-917.

ĐỐ VUI

CHIA BÁNH

Bài toán. *Trong một buổi sinh nhật của bạn Văn có tất cả 36 bạn (kể cả Văn) và một chiếc bánh gato hình chữ nhật có kích thước 64 × 66 (cm).*



Khi Văn chia bánh cho mọi người thì ai cũng muốn phần bánh của mình phải là hình vuông và chiếc bánh phải chia hết cho 36 người. Văn lúng túng chưa biết chia như thế nào cho hợp lí. Bạn có thể giúp Văn chia chiếc bánh đó được không?

NGUYỄN VĂN BẢN
(GV THCS Thanh Yên, Điện Biên)

GIẢI THÍCH ĐƯỜNG CONG LAFFER TRONG KINH TẾ HỌC BẰNG KIẾN THỨC PHỔ THÔNG

NGUYỄN THƯỜNG LẠNG
(203 Nguyễn Huy Tưởng, Thanh Xuân, Hà Nội)

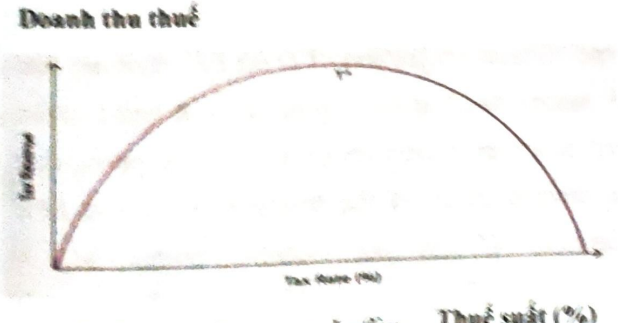
Đường cong Laffer (Authur Laffer, 1974) trong kinh tế học biểu diễn quan hệ giữa mức thuế phải nộp và nguồn thu từ thuế. Việc chứng minh mối quan hệ mang tính quy luật quan trọng này có thể thực hiện bằng kiến thức toán phổ thông. Điều này càng làm tăng vẻ đẹp toán phổ thông đối với kinh tế học.

Đường cong Laffer

Có thể nhìn thấy quan hệ giữa thuế suất và doanh thu thuế vừa thuận chiều, vừa ngược chiều từ đường cong này. Với thuế suất 0%, doanh thu thuế bằng 0. Khi thuế suất tăng từ mức thấp, doanh thu thuế của chính phủ tăng. Nếu mức thuế 100%, thể hiện điểm xa nhất trên đường Laffer, mọi người không còn động lực làm việc vì mọi thứ họ kiếm được thuộc về chính phủ.

Mỗi loại thuế có một ngưỡng thuế suất làm sản xuất giảm dần, do đó làm giảm doanh thu thuế.Do đó, tại một điểm doanh thu thuế tăng khi tăng thuế và cuối cùng đạt điểm tối đa T^* trên đồ thị.

Ở bên trái T^*, tăng thuế suất làm tăng doanh thu nhiều hơn. Nếu tăng tỉ lệ vượt quá T^* (50%) mọi người không làm việc nhiều hoặc không làm, làm giảm doanh thu thuế thậm chí bằng 0 nếu thuế suất 100% (hình 1). Hình dạng đường Laffer có thể khác nhau tùy mức thuế.



Hình 1. Đường cong Laffer

Giải thích đường Laffer

Việc giải thích hình dạng đường Laffer hay xác định quỹ tích mối quan hệ giữa thuế suất và doanh thu thuế, cần xuất phát từ việc tính nguồn thu này trong kinh tế học. Giả sử có phương trình đường cung, cầu mặt hàng là:

$$Sx = -1 + Px,\ Dx = 13 - 2Px,$$

Px là giá đơn vị 2$, mức thuế t.

Lưu ý, mức giá sau thuế là: $Pxt = Px(1 + t)$.

Doanh thu thuế của chính phủ là

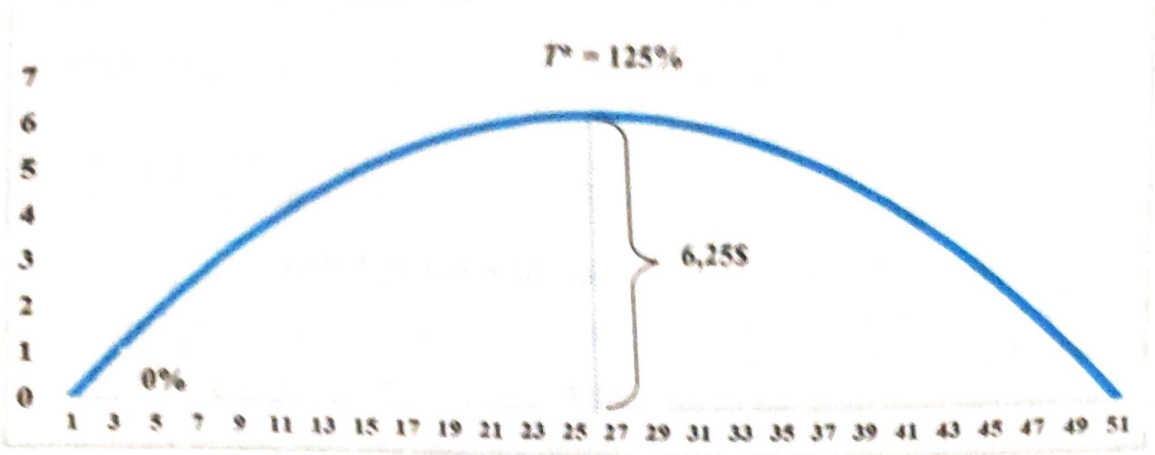
$$TR\ (\text{Tax Revenue}) = (Dx - Sx)t$$

Thay các biểu thức trên vào doanh thu, có kết quả là: $TR = 10t - 4t^2$.

Đây là phương trình của parabol. Giải phương trình này thu được mức thuế làm doanh thu bằng 0 là 0% và 250%. Đúng với nhận định của Laffer, mức thuế để thu nhập lớn nhất là 125% với doanh thu tối đa 6,25$. Do giả định ban đầu khác nhau cho nên Laffer cho thuế tối ưu với doanh thu thuế lớn nhất 50%, khác với 125% như dữ liệu giả định và mức thuế 250% làm thu nhập bằng 0 vì có thể không làm việc hoặc gây trốn, tránh thuế. Nếu có giao dịch nhập khẩu,

mức thuế cao này có thể chấm dứt nhập khẩu. Thực tế, có mức thuế chống lẫn tránh biện pháp phòng vệ thương mại lên tới khoảng 500%.

Dựa trên dữ liệu giả định, có thể vẽ đường cong Laffer ở Hình 2.



Hình 2: Đường cong Laffer thực nghiệm

Kết luận. Đường cong Laffer có vai trò quan trọng trong điều chỉnh chính sách thuế của các nước và được khẳng định tính đúng đắn phổ biến, được đưa vào các giáo trình kinh tế học, giáo trình thuế của các cơ sở giáo dục chuyên nghiệp, cơ quan quản lý. Việc sử dụng kiến thức toán phổ thông có thể vẽ mô phỏng đường cong này và xác định được các ngưỡng cần thiết. Một vấn đề kinh tế phức tạp có thể giải thích bằng kiến thức toán phổ thông. Điều này càng cho thấy vai trò to lớn Toán học, mà ở góc độ khác, vẻ đẹp của toán học cần được nâng niu, trân trọng và làm tỏa sáng.

****

PROBLEMS IN . . . *(Tiếp theo trang 21)*

Problem T8/557. Given a triangle ABC with $\max\{\hat{A},\hat{B},\hat{C}\}<120^0$. Let M be the point inside the triangle so that $\widehat{BMC}=\widehat{CMA}=\widehat{AMB}=120^0$. Prove that

$$\left(\frac{MB+MC-MA}{BC}\right)^2+\left(\frac{MC+MA-MB}{CA}\right)^2+\left(\frac{MA+MB-MC}{AB}\right)^2\geq 1.$$

Problem T9/557. Find the minimum value of the function $f(x)=\dfrac{8(x^2+x)^3+(2x+1)^3}{(2x^2+2x+1)^3}$ on the interval $(0;+\infty)$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/557. Find all prime numbers a, b, c, d which satisfy the equality

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{3}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{3}}+\sqrt[3]{\cos\frac{6\pi}{3}}=\sqrt[3]{\frac{a-b\sqrt[3]{c}}{d}}.$$

Problem T11/557. Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfying

$$f\left(2f(x)+y\right)=3x+f\left(f(y)-x\right)$$

for all $x,y\in\mathbb{R}$.

Problem T12/557. Given an acute scalene triangle ABC circumscribing the circle (I). Denote by D, E, F the touch points between the circle (I) and BC, CA, AB respectively. Let P be the perpendicular projection of D on EF. Assume that DP intersects (I) at the second point K and L is the perpendicular projection of A on IK. Suppose that the circumcircles of the triangles LEC and LFB intersects (I) at the second points M, N respectively. Show that M, N, P are collinear.

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(College of Science – Vietnam national University, Hanoi)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN
BÀI SỐ 98

PROBLEM 97. *Show that, for any positive integer n, there exist n consecutive composite numbers.*

Solution. It is clear that

$$(n+1)!+2,\ (n+1)!+3,\ \ldots,\ (n+1)!+(n+1)$$

are n consecutive composite numbers.

TỪ VỰNG

consecutive : *liên tiếp*

composite number : *hợp số*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science - Vietnam National University, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 96.

BÀI TOÁN. *Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho n, n + 2 và n + 4 đều là các số nguyên tố.*

Lời giải. Số n phải là số lẻ vì nếu không $n+4$ sẽ là số chẵn lớn hơn 2 và từ đó số này không thể là số nguyên tố.

Khi n lẻ thì n, $n+2$ và $n+4$ là ba số lẻ liên tiếp. Do đó một trong các số đó là bội số của 3. Nhưng vì chúng đều là số nguyên tố, nên một số trong chúng phải bằng 3. Từ nhận xét này ta có thể kết luận rằng $n=3$ là số tự nhiên duy nhất thoả mãn đề bài.

Nhận xét. Kì này bạn *Nguyễn Quốc Hoàng Anh*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** và bạn *Cao Minh An*, 7A3, THCS Trần Phú, TP. Pleiku, **Gia Lai** có bài dịch tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm. Xin hoan nghênh các bạn.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

****

SAI LẦM . . . (*Tiếp theo trang 47*)

Phương trình hoành độ giao điểm là

$$x^3-3mx^2+2m(m-4)x+9m^2-m=0\ (1).$$

Giả sử phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3. Khi đó $x_1x_2x_3=-9m^2+m$ Mà $x_1x_3=x_2^2$. Suy ra:

$$x_2^3=-9m^2+m\Rightarrow x_2=\sqrt[3]{-9m^2+m}.$$

Do x_2 là nghiệm của phương trình (1), ta có:

$$\left(\sqrt[3]{-9m^2+m}\right)^3-3m\left(\sqrt[3]{-9m^2+m}\right)^2$$
$$+2m(m-4)\sqrt[3]{-9m^2+m}+9m^2-m=0$$
$$\Leftrightarrow -m\sqrt[3]{-9m^2+m}\left[3\sqrt[3]{-9m^2+m}-2(m-4)\right]=0$$

- $m=0$.
- $\sqrt[3]{-9m^2+m}=0\Leftrightarrow -9m^2+m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\\ m=\dfrac{1}{9}\end{array}\right.$.
- $3\sqrt[3]{-9m^2+m}=2(m-4)$

$$\Leftrightarrow 8m^3+147m^2+357m-512=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\\ m=\dfrac{-155\pm3\sqrt{849}}{16}\end{array}\right..$$

Thử lại: Với $m=0$, phương trình (1) có một nghiệm (loại). Với $m=1$, phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt (thỏa mãn). Với $m=\dfrac{1}{9}$, phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt (thỏa mãn).

Với $m=\dfrac{-155+3\sqrt{849}}{16}$, phương trình (1) có một nghiệm (loại). Với $m=\dfrac{-155-3\sqrt{849}}{16}$, phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt (thỏa mãn).

Vậy $m=1; m=\dfrac{1}{9}; m=\dfrac{-155-3\sqrt{849}}{16}$.

Theo em lời giải trên có đúng không?

TRẦN ĐỨC PHƯƠNG
(*GV THPT Giao Thủy, Nam Định*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 77. *Cho ba số thực dương a, b, c và $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha,\beta\ge 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^\alpha}{b^\beta+c^\beta}+\frac{b^\alpha}{c^\beta+a^\beta}+\frac{c^\alpha}{a^\beta+b^\beta}\ge\frac{3(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha)}{2(a^\beta+b^\beta+c^\beta)}.$$

Lời giải. Đặt $T=\dfrac{a^\alpha}{b^\beta+c^\beta}+\dfrac{b^\alpha}{c^\beta+a^\beta}+\dfrac{c^\alpha}{a^\beta+b^\beta}$.

Cách 1. Dễ thấy

$$T=\frac{a^{2\alpha}}{a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta}+\frac{b^{2\alpha}}{b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta}+\frac{c^{2\alpha}}{c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta}.$$

Theo BĐT Schwarz ta có:

$$T\ge\frac{(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha)^2}{a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta}.$$

Với $a,b,c>0;\alpha,\beta\ge 0$ thì $\left(a^\alpha-b^\alpha\right),\left(a^\beta-b^\beta\right)$ không thể trái dấu nên $\left(a^\alpha-b^\alpha\right)\left(a^\beta-b^\beta\right)\ge 0$ hay $a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}\ge a^\alpha b^\beta+a^\beta b^\alpha$.

Tương tự: $b^{\alpha+\beta}+c^{\alpha+\beta}\ge b^\alpha c^\beta+b^\beta c^\alpha$;

$c^{\alpha+\beta}+a^{\alpha+\beta}\ge c^\alpha a^\beta+c^\beta a^\alpha$. Vậy:

$$2\left(a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}+c^{\alpha+\beta}\right)\ge a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}+c^{\alpha+\beta}\right)+2(a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta)\ge 3(a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{3}\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)\left(a^\beta+b^\beta+c^\beta\right)\ge a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta.$$

Do đó: $T\ge\dfrac{(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha)^2}{\frac{2}{3}(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha)(a^\beta+b^\beta+c^\beta)}$.

$$\Leftrightarrow T\ge\frac{3(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha)}{2(a^\beta+b^\beta+c^\beta)}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $\beta=0$.

Cách 2. Dễ thấy

$$T=\frac{a^{2\alpha}}{a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta}+\frac{b^{2\alpha}}{b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta}+\frac{c^{2\alpha}}{c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta}$$

Theo BĐT Schwarz ta có:

$$T\ge\frac{\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)^2}{a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử:

$a\ge b\ge c>0\Rightarrow a^\alpha\ge b^\alpha\ge c^\alpha>0;a^\beta\ge b^\beta\ge c^\beta>0.$

Theo BĐT Chebyshev thì:

$$3(a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}+c^{\alpha+\beta})\ge(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha)(a^\beta+b^\beta+c^\beta)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}+c^{\alpha+\beta}\right)\ge a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}+c^{\alpha+\beta}\right)+2(a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta)\ge 3(a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{3}\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)\left(a^\beta+b^\beta+c^\beta\right)\ge a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta.$$

Vậy

$$T\ge\frac{(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha)^2}{\frac{2}{3}(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha)(a^\beta+b^\beta+c^\beta)}=\frac{3(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha)}{2(a^\beta+b^\beta+c^\beta)}.$$

Cách 3. Để chứng bài toán đề ra ta chứng minh bài toán tương đương sau:

$$\left(a^\beta+b^\beta+c^\beta\right)\left(\frac{a^\alpha}{b^\beta+c^\beta}+\frac{b^\alpha}{c^\beta+a^\beta}+\frac{c^\alpha}{a^\beta+b^\beta}\right)\ge\frac{3\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)}{2}$$

hay $\left(\dfrac{a^{\alpha+\beta}}{b^\beta+c^\beta}+\dfrac{b^{\alpha+\beta}}{c^\beta+a^\beta}+\dfrac{c^{\alpha+\beta}}{a^\beta+b^\beta}\right)\ge\dfrac{(a^\beta+b^\beta+c^\beta)}{2}$.

Không mất tính tổng quát giả sử:

$$a\ge b\ge c>0\Rightarrow a^\alpha\ge b^\alpha\ge c^\alpha;$$

$$\frac{a^\beta}{b^\beta+c^\beta}\ge\frac{b^\beta}{c^\beta+a^\beta}\ge\frac{c^\beta}{a^\beta+b^\beta}.$$

Theo BĐT Chebyshev thì:

$$\left(\frac{a^{\alpha+\beta}}{b^\beta+c^\beta}+\frac{b^{\alpha+\beta}}{c^\beta+a^\beta}+\frac{c^{\alpha+\beta}}{a^\beta+b^\beta}\right)$$

$$\geq\frac{1}{3}\left(\frac{a^\beta}{b^\beta+c^\beta}+\frac{b^\beta}{c^\beta+a^\beta}+\frac{c^\beta}{a^\beta+b^\beta}\right)\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)$$

Mặt khác, theo BĐT Nesbitt ta có:

$$\left(\frac{a^\beta}{b^\beta+c^\beta}+\frac{b^\beta}{c^\beta+a^\beta}+\frac{c^\beta}{a^\beta+b^\beta}\right)\geq\frac{3}{2}.$$ Suy ra:

$$\left(\frac{a^{\alpha+\beta}}{b^\beta+c^\beta}+\frac{b^{\alpha+\beta}}{c^\beta+a^\beta}+\frac{c^{\alpha+\beta}}{a^\beta+b^\beta}\right)\geq\frac{\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)}{2}$$

Cách 4. Đặt $S=a^\beta+b^\beta+c^\beta$. Để chứng minh đề ra ta chứng minh bài toán tương đương

$$\frac{2a^{\alpha+\beta}-a^\alpha b^\beta-a^\alpha c^\beta}{2(b^\beta+c^\beta)S}+\frac{2b^{\alpha+\beta}-b^\alpha c^\beta-b^\alpha a^\beta}{2(c^\beta+a^\beta)S}+\frac{2c^{\alpha+\beta}-c^\alpha a^\beta-c^\alpha b^\beta}{2(a^\beta+b^\beta)S}\geq 0.$$

hay

$$\Leftrightarrow\frac{2a^{\alpha+\beta}-a^\alpha b^\beta-a^\alpha c^\beta}{(b^\beta+c^\beta)}+\frac{2b^{\alpha+\beta}-b^\alpha c^\beta-b^\alpha a^\beta}{(c^\beta+a^\beta)}+\frac{2c^{\alpha+\beta}-c^\alpha a^\beta-c^\alpha b^\beta}{(a^\beta+b^\beta)}\geq 0\ \ (1).$$

Bài toán đã cho và (1) đều là BĐT đối xứng nên không mất tính tổng quát giả sử: $a\geq b\geq c>0$, khi đó:

$$\begin{cases}2a^{\alpha+\beta}-a^\alpha b^\beta-a^\alpha c^\beta\geq 0\geq 2c^{\alpha+\beta}-c^\alpha a^\beta-c^\alpha b^\beta\\ 0<\left(b^\beta+c^\beta\right)\leq\left(c^\beta+a^\beta\right)\leq\left(a^\beta+b^\beta\right)\end{cases}.$$

Suy ra:

$$\frac{2a^{\alpha+\beta}-a^\alpha b^\beta-a^\alpha c^\beta}{(b^\beta+c^\beta)}\geq\frac{2a^{\alpha+\beta}-a^\alpha b^\beta-a^\alpha c^\beta}{(c^\beta+a^\beta)};$$

$$\frac{2b^{\alpha+\beta}-b^\alpha c^\beta-b^\alpha a^\beta}{(c^\beta+a^\beta)}=\frac{2b^{\alpha+\beta}-b^\alpha c^\beta-b^\alpha a^\beta}{(c^\beta+a^\beta)};$$

$$\frac{2c^{\alpha+\beta}-c^\alpha a^\beta-c^\alpha b^\beta}{(a^\beta+b^\beta)}\geq\frac{2c^{\alpha+\beta}-c^\alpha a^\beta-c^\alpha b^\beta}{(c^\beta+a^\beta)}.$$

Cộng theo vế ba BĐT trên thì

$$\mathrm{VT}(1)\geq\frac{(2a^{\alpha+\beta}-a^\alpha b^\beta-a^\alpha c^\beta)}{c^\beta+a^\beta}+\frac{(2b^{\alpha+\beta}-b^\alpha c^\beta-b^\alpha a^\beta)+(2c^{\alpha+\beta}-c^\alpha a^\beta-c^\alpha b^\beta}{c^\beta+a^\beta}.$$

BĐT(1) được chứng minh nếu chứng minh được:

$$\left(2a^{\alpha+\beta}-a^\alpha b^\beta-a^\alpha c^\beta\right)+\left(2b^{\alpha+\beta}-b^\alpha c^\beta-b^\alpha a^\beta\right)+\left(2c^{\alpha+\beta}-c^\alpha a^\beta-c^\alpha b^\beta\right)\geq 0\ \ (2)$$

hay $\left(a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}-a^\alpha b^\beta-a^\beta b^\alpha\right)$

$+(b^{\alpha+\beta}+c^{\alpha+\beta}-b^\alpha c^\beta-b^\beta c^\alpha)$

$+c^{\alpha+\beta}+a^{\alpha+\beta}-c^\alpha a^\beta-c^\beta a^\alpha)\geq 0$

Nhận thấy: $(a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}-a^\alpha b^\beta-a^\beta b^\alpha)$

$=a^\alpha(a^\beta-b^\beta)-b^\alpha(a^\beta-b^\beta)=(a^\beta-b^\beta)(a^\alpha-b^\alpha)\geq 0.$

Chứng minh tương tự với hai biểu thức còn lại sẽ thì (2) đúng. Vậy (1) được chứng minh do đó bài toán đề ra cũng được chứng minh.

Dưới đây là bài toán tổng quát, phần chứng minh chi tiết xin dành lại cho các bạn đọc:

Cho $n\in\mathbb{N}, n>1;\ a_i>0,\ S=\sum_{i=1}^{n}a_i^\beta$ *và* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha,\beta\geq 0$. *Chứng minh* $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^\alpha}{S-a_i^\beta}\geq\frac{n\sum_{i=1}^{n}a_i^\alpha}{(n-1)S}$.

NGÔ VĂN THÁI

(Tổ 34, phường Hoàng Diệu, Thái Bình)

Nhận xét. Kỳ này bạn *Trần Vĩnh Phú*, chung cư Remax Plaza, 20 Phạm Đình Hổ, phường 1, Q.6, **TP. Hồ Chí Minh** đóng góp 2 cách giải tương tự như cách 2 và cách 3 của bạn *Ngô Văn Thái*. Xin hoan nghênh bạn.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 79 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.12.2023.

BÀI TOÁN 79. *Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD và một điểm I trên đường cao SO của hình chóp. Mặt phẳng (π) qua I cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD của hình chóp tương ứng tại các điểm M, N, P, Q. Chứng minh hệ thức*

$$\frac{1}{SM}+\frac{1}{SP}=\frac{1}{SN}+\frac{1}{SQ}.$$

a) *Hãy tìm các cách giải của bài toán.*

b) *Hãy tổng quát bài toán.*

c) *Nêu và giải bài toán tương tự.*

LÊ QUỐC HÁN

(Trường Đại học Vinh, Nghệ An)

BÀI TOÁN 86 (IMO 1974). *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, các số* $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} 2^{3k}$ *đều không chia hết cho 5.*

Lời giải. Ta có: $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} 2^{3k} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} (\sqrt{8})^{2k}$

$$= \frac{\sqrt{8}\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} (\sqrt{8})^{2k}}{\sqrt{8}} = \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} (\sqrt{8})^{2k+1}}{\sqrt{8}}.$$

Biểu thức ở tử số là một loạt các số hạng có lũy thừa bậc lẻ trong khai triển nhị thức $(1+\sqrt{8})^{2n+1}$ dưới dạng nhị thức Newton và đó là những số hạng vẫn còn chứa $\sqrt{8}$ sau khi thực hiện phép tính lũy thừa thì nhị thức có dạng: $(1+\sqrt{8})^{2n+1} = A_n + \sqrt{8}B_n$ với A_n và B_n là số nguyên.

Thật vậy, ta chứng minh dễ dàng điều đó bằng quy nạp. Với $n = 1$ thì $(1+\sqrt{8})^3 = 25 + \sqrt{8}.11$ (ở đây $A_1 = 25$, $B_1 = 11$, tức $A_1, B_1 \in \mathbb{Z}$).

Giả sử với $n = k$ thì $(1+\sqrt{8})^{2k+1} = A_k + \sqrt{8}B_k$ với $A_k, B_k \in \mathbb{Z}$. Với $n = k + 1$, ta có:

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{8})^{2k+3} &= (1+\sqrt{8})^{2k+1}(1+\sqrt{8})^2 \\ &= (A_k + \sqrt{8}B_k)(9 + 2\sqrt{8}) \\ &= (9A_k + 16B_k) + \sqrt{8}(2A_k + 9B_k) \\ &= A_{k+1} + \sqrt{8}B_{k+1}\end{aligned}$$

với $\begin{cases} A_{k+1} = 9A_k + 16B_k \in \mathbb{Z} \\ B_{k+1} = 2A_k + 9B_k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ (*).

Theo trên thì $\sqrt{8}B_n = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} (\sqrt{8})^{2k+1}$.

Suy ra: $B_n = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} 2^{3k}$. Sử dụng công thức (*) ta sẽ chứng minh B_n không chia hết cho 5 với mọi n. Muốn thế ta chỉ cần xét quan hệ đồng dư theo modulo 5 sau đây:

$$A_1 = 25 \equiv 0 \pmod 5; \quad B_1 = 11 \equiv 1 \pmod 5;$$

$$A_{k+1} = 9A_k + 16B_k \equiv B_k - A_k \pmod 5;$$

$$B_{k+1} = 2A_k + 9B_k = 9A_k - B_k \pmod 5.$$

Từ đó tính theo modulo 5 ta lần lượt suy ra:

$$\begin{cases} A_1 \equiv 0 \\ B_1 \equiv 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 \equiv 1 \\ B_2 \equiv -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_3 \equiv -2 \\ B_3 \equiv -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_4 \equiv 0 \\ B_4 \equiv -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_5 \equiv -2 \\ B_5 \equiv 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_6 \equiv -1 \\ B_6 \equiv -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_7 \equiv 0 \\ B_7 \equiv 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_8 \equiv -1 \\ B_8 \equiv 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_9 \equiv 2 \\ B_9 \equiv 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{10} \equiv 0 \\ B_{10} \equiv 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{11} \equiv 2 \\ B_{11} \equiv 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{12} \equiv 1 \\ B_{12} \equiv 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} A_{13} \equiv 0 \\ B_{13} \equiv 1 \end{cases}$. Như vậy ta thấy:

$A_i = A_{i+12} \pmod 5$; $B_i \equiv B_{i+12} \pmod 5$ (vì đều tính bằng một công thức trong lớp đồng dư đó).

Mà trong 12 trường hợp đầu thì không khi nào $B_i \equiv 0 \pmod 5$, nghĩa là B_n không chia hết cho 5 với mọi n.

Nhận xét. Một số bạn tham gia giải bài này nhưng lời giải không chính xác, cách giải nêu trên là của *Hoàng Lê Minh*, học sinh đã đoạt giải Nhất trong kỳ thi IMO lần thứ 16 năm 1974 tại Cộng hòa Dân chủ Đức.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.12.2023.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 88. *Trong mặt phẳng cho một tam giác. Hãy chỉ ra cách dựng một điểm P nằm bên trong tam giác đó và thỏa mãn điều kiện: Nếu từ P ta hạ các đường vuông góc xuống các cạnh tam giác thì ba chân đường vuông góc đó tạo thành một tam giác nhận P là trọng tâm.*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP: ĐÚNG HAY SAI ?

(Đề đăng trên TH&TT số 553, tháng 7 năm 2023)

Phân tích sai lầm.

Nếu $(x-1)(x-a)(x^2+x+b)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ thì $(0-1)(0-a)(0^2+0+b)\geq 0$ hay $a\cdot b\geq 0$, do đó kết quả của *Tùng* sai.

Khi $x=1, x=a$ đều là nghiệm của tam thức bậc hai x^2+x+b thì chưa chắc

$$(x-1)(x-a)(x^2+x+b)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Chẳng hạn, với $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$ thì $x=1, x=a$ đều là nghiệm của tam thức bậc hai x^2+x+b, tuy nhiên lúc này $(x-1)(x-a)(x^2+x+b)=(x-1)^3(x+2)<0$ khi $x\in(-2;1)$.

Lời giải đúng.

Cách 1. Xét $f(x)=(x-1)(x-a)(x^2+x+b)$ với $x\in\mathbb{R}$. Ta xét hai trường hợp sau đây:

- TH1: $\begin{cases} (x-1)(x-a)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \\ x^2+x+b\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 1-4b\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b\geq \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Do đó $a\cdot b\geq \dfrac{1}{4}$. Với $a=1, b=\dfrac{1}{4}$ thì

$$(x-1)(x-a)(x^2+x+b)=(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

- TH2: $(x-1)(x-a)$ đồng nhất với tam thức bậc hai x^2+x+b, tức là $\begin{cases} -a-1=1 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases}$.

Dẫn tới $a.b=4$.

Vậy GTNN của $a.b$ bằng $\dfrac{1}{4}$. Chọn đáp án C.

Cách 2. Xét

$f(x)=(x-1)(x-a)(x^2+x+b), x\in\mathbb{R}$. Ta có:

$$f'(x)=(x-a)(x^2+x+b)+(x-1)(x^2+x+b)+(x-1)(x-a)(2x+1), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Vì $(x-1)(x-a)(x^2+x+b)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)\geq f(1), f(x)\geq f(a), \forall x\in\mathbb{R}$ suy ra:

$$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f'(a)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)(2+b)=0 \\ (a-1)(a^2+a+b)=0 \end{cases}.$$

- Nếu $a=1$ thì $f(x)=(x-1)^2(x^2+x+b)$ nên $f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ khi $x^2+x+b\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ hay $1-4b\leq 0\Leftrightarrow b\geq\dfrac{1}{4}$. Lúc này $a.b\geq\dfrac{1}{4}$.

- Nếu $a\neq 1$ thì $\begin{cases} 2+b=0 \\ a^2+a+b=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+a-2=0 \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \text{ (do } a\neq 1) \\ b=-2 \end{cases}.$$

Suy ra $a.b=4$.

Vậy GTNN của $a.b$ bằng $\dfrac{1}{4}$. Chọn đáp án C.

Nhận xét. Một số bạn đã khẳng định lời giải của bạn *Tùng* là sai và đã đưa ra lời giải đúng. Tuy nhiên khi khẳng định lời giải của bạn *Tùng* sai thì các bạn cần chỉ rõ là sai ở đâu (và có thể cho ví dụ minh họa). Tuyên dương các bạn: *Phạm Quỳnh Na*, *Nguyễn Diễm Quỳnh*, *Nguyễn Hoàng Bách*, 6A, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Trần Sĩ Phương*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**, đã có lời giải đúng.

KIHIVI

ĐÁP ÁN NÀO ?

Bài toán. *Tìm để đồ thị hàm số*

$$y=x^3-3mx^2+2m(m-4)x+9m^2-m$$

cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số nhân.

Một học sinh đã giải bài toán như sau:

(*Xem tiếp trang 43*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 557 (11.2023)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

TINH HOA MỸ THUẬT VIỆT TRUYỀN THỐNG – HÌNH TƯỢNG TIÊN NỮ VỚI GIẢI THƯỞNG TOÀN QUỐC VỀ THÔNG TIN ĐỐI NGOẠI LẦN THỨ IX

Tối ngày 12/10/2023, Lễ trao Giải thưởng toàn quốc về thông tin đối ngoại lần thứ IX đã diễn ra tại Nhà hát Lớn Hà Nội. Cuốn sách *Tinh hoa mỹ thuật Việt truyền thống - Hình tượng tiên nữ* của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đã đạt giải Khuyến khích.

Giải thưởng do Ban Tuyên giáo Trung ương, Ban Chỉ đạo Công tác thông tin đối ngoại chủ trì, phối hợp với Thông tấn xã Việt Nam và các cơ quan liên quan tổ chức.

Tại kỳ giải thưởng này đã có 1456 tác phẩm/sản phẩm gửi tham gia, tăng 30% so với kỳ giải thưởng trước. Chủ đề của các tác phẩm, sản phẩm năm nay bao quát đầy đủ các sự kiện chính trị, đối ngoại, văn hóa,… quan trọng của đất nước, thu hút sự quan tâm của dư luận trong nước và quốc tế; thông tin về chủ trương, đường lối, chính sách của Đảng, Nhà nước, những thành tựu của đất nước trên các lĩnh vực chính trị, kinh tế, đối ngoại, quyền con người; vẻ đẹp đất nước, con người, giá trị văn hóa Việt Nam…

Cuốn sách ***Tinh hoa mỹ thuật Việt truyền thống - Hình tượng tiên nữ*** của nhóm tác giả *Trần Hậu Yên Thế*, *Trần Trung Hiếu*, *Lê Thị Liễu*, *Trần May* là một trong những đầu sách chất lượng cao của NXBGDVN.

Sách tập trung khảo cứu về hình tượng tiên nữ trong mỹ thuật cổ Việt Nam từ thời tiền sử đến thời hiện đại. Tiên nữ là một hình tượng thường xuất hiện trong các truyền thuyết, truyện cổ tích, văn học, nghệ thuật và những công trình văn hoá của người Việt nhưng chưa có công trình nghiên cứu nào lý giải đầy đủ và khái quát mặc dù đây là một đề tài hay nhưng lại không dễ thực hiện. Với sự đam mê nhiệt huyết, cẩn trọng, nhóm tác giả đã dày công sưu tầm từ các nguồn tư liệu và khảo sát, thu thập tư liệu trực tiếp ở các công trình văn hoá (chùa, tháp, đền, miếu, đình làng,...). Cuốn sách đã được nhiều nhà nghiên cứu đánh giá cao về những đóng góp cho nền văn hóa Việt Nam nói chung và ngành nghiên cứu mỹ thuật cổ nói riêng.

Tại Giải thưởng toàn quốc về thông tin đối ngoại lần thứ IX, Hội đồng Giải thưởng chọn ra 110 tác phẩm/sản phẩm xuất sắc nhất để trao giải. Trong đó, có 8 giải Nhất, 22 giải Nhì, 30 giải Ba, 50 giải Khuyến khích.

Hiền Thương

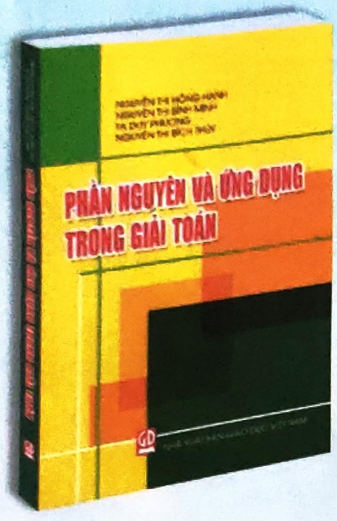
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

PHẦN NGUYÊN VÀ ỨNG DỤNG TRONG GIẢI TOÁN

Tác giả: **Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Nguyễn Thị Bình Minh, Tạ Duy Phượng, Nguyễn Thị Bích Thủy**

Sách dày 303 trang, khổ 16 × 24cm, giá bìa 105.000 đồng.



Phần nguyên [x] của một số thực x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Do tính độc đáo không giống ai của hàm phần nguyên, thí dụ, hàm phần nguyên khá đơn giản: là hàm hằng từng khúc, nhưng cũng khá phức tạp: không liên tục tại các điểm nguyên với bước nhảy bằng 1, do đó khó sử dụng công cụ giải tích, vì vậy các bài tập về phần nguyên thường là khó.

Ngoài lí thuyết được trình bày chi tiết, bắt đầu từ Trung học Cơ sở, sách có nhiều bài toán thi học sinh giỏi cấp huyện, tỉnh, Quốc gia và Quốc tế liên quan đến phần nguyên.

Cuốn sách gồm năm chương.

Chương 1 tập hợp **những kiến thức cơ bản về phần nguyên**: Hàm phần nguyên và đồ thị hàm phần nguyên.

Chương 2 trình bày các bài toán **số học** liên quan đến **phần nguyên**: Toán chia hết, ứng dụng nhị thức Newton trong giải toán với phần nguyên,…

Chương 3 trình bày các dạng toán liên quan đến **phần nguyên trong đại số**: Tính giá trị của biểu thức chứa phần nguyên, chứng minh hệ thức chứa phần nguyên và đặc biệt, phân loại chi tiết và khá đầy đủ về các dạng phương trình chứa phần nguyên.

Chương 4 là các bài toán về **phần nguyên trong toán Giải tích**: Dãy số, chuỗi số, giới hạn của biểu thức có phần nguyên.

Chương 5 sơ lược trình bày một số vấn đề liên quan đến phần nguyên: phần nguyên và hệ đếm cơ số khác 10, phần nguyên và phương trình hàm, phần nguyên trong lí thuyết hàm thực.

Những kiến thức và bài tập trong sách là cơ sở để giải nhiều bài toán thi học sinh giỏi khác chưa được đưa vào sách. Ngoài ra, cuốn sách có thể giúp các thầy cô giáo trong việc thiết kế các bài tập và đề thi mới.

Cuốn sách không chỉ có ích cho các học sinh, các bạn yêu toán và các thầy cô dạy toán phổ thông, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho các sinh viên và giảng viên đại học, cao đẳng ngành toán, cũng như các phụ huynh mong muốn giúp con em mình học tốt môn toán.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC – DẠY NGHỀ

Địa chỉ: 187B, Giảng Võ, Hà Nội

● Điện thoại: 024.39724715 - 0983605756

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT11M23
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2023

Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng