TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 561
Tháng 3 - 2024
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 61 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

Nhà toán học Pháp
Pierre de Fermat
(1601 – 1665)

Cảnh đẹp vùng Occitanie (Pháp)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM TRIỂN KHAI GIỚI THIỆU SÁCH GIÁO KHOA MỚI CÁC LỚP 5, 9, 12 TRÊN TOÀN QUỐC

Theo lộ trình triển khai Chương trình giáo dục phổ thông 2018, từ năm học 2024 - 2025, học sinh lớp 5, 9 và 12 trên cả nước sẽ bắt đầu học sách giáo khoa (SGK) mới. Bộ Giáo dục và Đào tạo (GD&ĐT) đã ban hành các quyết định phê duyệt danh mục SGK lớp 5, 9 và 12 theo chương trình mới được sử dụng trong các cơ sở giáo dục phổ thông.

Từ ngày 19/02/2024, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) phối hợp với Sở Giáo dục và Đào tạo các địa phương tổ chức Hội thảo giới thiệu các bộ SGK do NXBGDVN biên soạn theo danh mục đã được Bộ trưởng Bộ GD&ĐT phê duyệt tới lãnh đạo, cán bộ quản lí và giáo viên tại các địa phương trên toàn quốc.

Hội thảo được NXBGDVN tổ chức theo hình thức trực tuyến nhằm cung cấp thông tin về nội dung, cấu trúc, những điểm nổi bật,... của mỗi bộ SGK, làm căn cứ để cán bộ quản lí, giáo viên tại các cơ sở giáo dục xem xét và lựa chọn sử dụng SGK có hiệu quả, phù hợp với đối tượng học sinh và điều kiện của đơn vị mình.

Phó Giám đốc Sở GD - ĐT Hà Nội Phạm Quốc Toản phát biểu khai mạc Hội thảo

Tại mỗi buổi hội thảo, bên cạnh nội dung giới thiệu về mỗi cuốn SGK thuộc hai bộ sách *Kết nối tri thức với cuộc sống* và *Chân trời sáng tạo*, các thầy cô giáo còn được giới thiệu các nguồn tài liệu hỗ trợ giáo viên sử dụng, dạy học theo SGK mới hiệu quả. Nguồn học liệu này gồm phiên bản điện tử sách giáo khoa, sách giáo viên, sách bổ trợ; các tài liệu giới thiệu sách, tài liệu hỗ trợ khác được đăng tải mở trên nền tảng Tập huấn (tại địa chỉ *taphuan.nxbgd.vn*).

NXBGDVN cũng huy động tất cả các Tổng chủ biên, chủ biên, tác giả các bộ SGK tham gia giới thiệu sách để đảm bảo đáp ứng các yêu cầu về nội dung và thời gian giới thiệu của các tỉnh, thành phố.

Về phần kĩ thuật, để đảm bảo chất lượng (hình ảnh, âm thanh, tương tác giữa báo cáo viên và người nghe,...) tại các buổi giới thiệu trực tuyến, NXBGDVN đã chuẩn bị hệ thống 30 phòng studio đạt tiêu chuẩn tại hai địa điểm Hà Nội và TP. Hồ Chí Minh.

Cán bộ quản lí, giáo viên nghiên cứu SGK mới

Với tư tưởng đổi mới, sáng tạo, các bộ SGK lớp 5 9, 12 của NXBGDVN sẽ giúp học sinh tích cực ho tập, kết nối những kiến thức và kĩ năng được học d áp dụng vào thực tiễn cuộc sống. Đồng thời, giú giáo viên đổi mới phương pháp giảng dạy, triển kha thành công Chương trình giáo dục phổ thông 2018.

NXBGDVN cùng các tác giả SGK cam kết cung cấp nguồn tài liệu, học liệu đa dạng, luôn đồng hành, hỗ trợ để các thầy cô triển khai công tác giảng dạy đạt hiệu quả cao trong năm học tới và các năm tiếp theo.

Theo kế hoạch, đến cuối tháng 3/2024, NXBGDVN sẽ hoàn thành việc giới thiệu SGK mới đến tất cả các tỉnh/thành trên cả nước theo chỉ đạo của B GD&ĐT.

BAN TRUYỀN THÔN
(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Na

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN BA ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC

TRẦN VIỆT ANH (*Nam Định*)

Trong bài viết này chúng tôi xin giới thiệu một số bài toán thú vị có liên quan đến ba đường cao trong tam giác. Hy vọng rằng các cấu hình trong mỗi bài toán đó sẽ giúp ích cho các bạn trong kỳ thi vào lớp 10 THPT sắp tới.

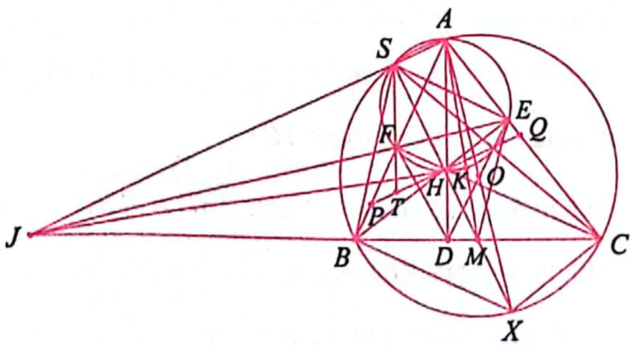
Bài 1. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại điểm thứ hai là S. Hai đường thẳng AS và BC cắt nhau tại J. Gọi M là trung điểm của BC.*

a) *Chứng minh ba điểm J, F, E thẳng hàng và tứ giác $DMEF$ nội tiếp.*

b) *Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt AM tại điểm K. Chứng minh tứ giác $ASDM$ nội tiếp và $\widehat{JKM} = 90^0$.*

c) *Gọi T là trực tâm tam giác SBC. Đường thẳng HT cắt các cạnh AB, AC tại P, Q. Chứng minh H là trung điểm của PQ.*

Lời giải.



a) Gọi giao điểm của JF với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF là E'. Khi đó:

$$\widehat{JAF} = \widehat{JE'S} \Rightarrow \Delta JSE' \sim \Delta JFA \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow JS.JA = JF.JE'.$$

Ta có: $\widehat{JAB} = \widehat{JCS} \Rightarrow \Delta JAB \sim \Delta JCS$

$$\Rightarrow JA.JS = JB.JC.$$

Do đó: $JF.JE' = JB.JC$. Suy ra:

$$\Delta JFC \sim JBE' \Rightarrow \widehat{JE'B} = \widehat{JCF}.$$

Do đó tứ giác $BCE'F$ nội tiếp. Nên E' là giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác BFC và AEF.

Tứ giác $BFEC$ có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^0$ nên tứ giác $BFEC$ nội tiếp. Do đó E là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BFC và AEF.

Khi đó $E \equiv E'$ nên ba điểm $J; F; E$ thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{BEM} = \widehat{MBE}$ (do tam giác MBE cân tại M), mà $\widehat{DAC} = \widehat{MBE}$ $\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BEM}$ (1).

Mặt khác: $\widehat{BAD} = \widehat{HEF}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \widehat{HEF} + \widehat{BEM}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{MEF}$$

$$\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{MEF} \text{ (do } \widehat{BAC} = \widehat{BDF}\text{)}$$

nên tứ giác $DMEF$ nội tiếp.

b) Từ câu a) ta có:

$$\widehat{JEM} = \widehat{JDF} \Rightarrow \Delta JEM \sim \Delta JDF.$$

Suy ra: $JF.JE = JD.JM$.

Do đó: $JD.JM = JS.JA$

$\Rightarrow \Delta JAD \sim JMS$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{JDA} = \widehat{JSM} = 90^0$

nên tứ giác $ASDM$ nội tiếp.

Tứ giác $AEHF$ có $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^0$ nên tứ giác $AEHF$ nội tiếp. Khi đó tứ giác $ASHE$ nội tiếp nên $\widehat{ASH} = 180^0 - \widehat{AEH} = 90^0$, nên $HS \perp JA$, do đó ba điểm M, H, S thẳng hàng.

ΔAJM có $AH \perp JM, MH \perp JA \Rightarrow JH \perp AM$.

Tứ giác $AEKH$ nội tiếp nên $\widehat{AKH} = \widehat{AEH} = 90^0$. Khi đó ba điểm J, H, K thẳng hàng nên $\widehat{JKM} = 90^0$.

c) Kẻ đường kính AX của đường tròn (O). Khi đó: $\widehat{ABX} = 90^0 \Rightarrow BX \perp BA$.

Do đó BX song song với CH.

Tương tự CX song song với BH.

Do đó tứ giác $BHCX$ là hình bình hành.

Vì vậy M là trung điểm của HX.

Khi đó MO là đường trung bình tam giác AHX, nên $AH = 2MO$.

Chứng minh tương tự ta có $ST = 2MO$.

Suy ra $AH = ST$. Mà AH song song với ST nên tứ giác $AHTS$ là hình bình hành. Do đó AS song song với TH, vì vậy $\widehat{MHT} = 90^0$.

Ta có: $\widehat{PHD} = \widehat{DMH} = 90^0 - \widehat{DHM}$

$\Rightarrow \widehat{AHP} = \widehat{CMH}$.

Ta có: $\widehat{FAD} = \widehat{FCD} = 90^0 - \widehat{ABC}$.

$$\Delta AHP \sim \Delta CMH \Rightarrow \frac{HP}{HM} = \frac{AH}{CM} = \frac{2AH}{BC}.$$

Tương tự: $\dfrac{HQ}{HM} = \dfrac{2AH}{BC}$. Do đó $HP = HQ$.

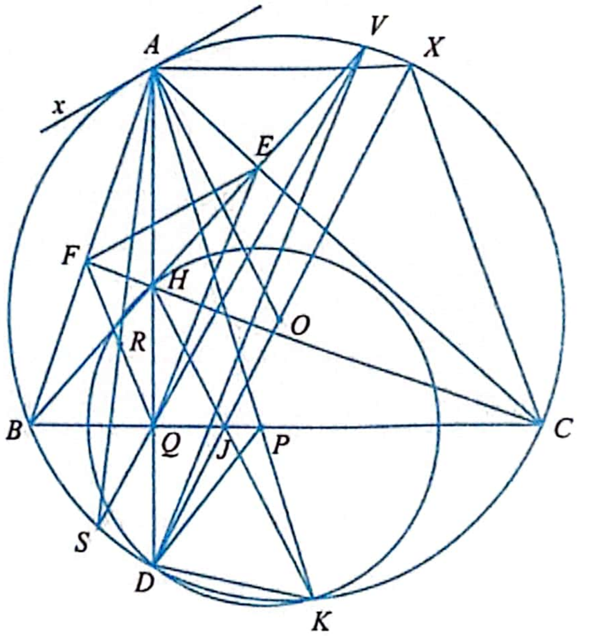
Bài 2. *Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao AQ, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng AH cắt (O) tại điểm D. Hai đường thẳng OD và BC cắt nhau tại điểm J.*

a) Chứng minh Q là trung điểm của đoạn DH.

b) Tia HJ cắt (O) tại điểm K. AK cắt BC tại P. Chứng minh $HJ \perp EF$ và P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DHK với P là giao điểm của AK và BC.

c) BE cắt (O) tại điểm thứ hai là V. VQ cắt (O) tại điểm thứ hai là S. Gọi R là trung điểm của FQ. Chứng minh ba điểm A, R, S thẳng hàng.

Lời giải.



a) Tứ giác $ABQE$ nội tiếp nên $\widehat{HBQ} = \widehat{DAC}$.

Lại có $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$, do đó $\widehat{DBQ} = \widehat{HBQ}$.

ΔHBD có BQ là phân giác đồng thời là đường cao nên Q là trung điểm HD.

b) Khi đó ta có $JH = JD$ nên $\widehat{JHD} = \widehat{JDH}$.

Mặt khác $OA = OD$ nên $\widehat{OAD} = \widehat{ODA}$. Do đó:

$\widehat{DHJ} = \widehat{DAO}$, khi đó $HJ \parallel OA$.

Kẻ tiếp tuyến Ax của (O) khi đó $\widehat{xAB} = \widehat{ACB}$.

Tứ giác $BFEC$ nội tiếp nên $\widehat{ACB} = \widehat{AFE}$.

Do đó $\widehat{xAB} = \widehat{AFE}$. Suy ra:

$$Ax \parallel EF \Rightarrow OA \perp EF \Rightarrow HJ \perp EF.$$

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt lại (O) tại X. Ta có:

$$\widehat{ABC} + \widehat{AXC} = 180^\circ \text{ và } \widehat{AXC} + \widehat{XCB} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{XCB}.$$

Khi đó tứ giác $ABCX$ là hình thanh cân nên

$$\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = \text{sđ}\overset{\frown}{XC}.$$

(O) có: $\widehat{APB} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\overset{\frown}{CK}\right)$

$$= \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{XCK} = \widehat{XDK}.$$

Do đó tứ giác $DJPK$ nội tiếp nên $\widehat{PKH} = \widehat{PDJ}$.

Vì BC là trung trực của HD nên:

$$PH = PD, JH = JD.$$

$\Delta PHJ = \Delta PDJ$ nên $\widehat{PKH} = \widehat{PHK} \Rightarrow PH = PK$.

Do đó $PH = PD = PK$. Vì vậy P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DHK.

c) Chứng minh tương tự câu a) ta có E là trung điểm HV. Suy ra QE là đường trung bình của tam giác HDV nên $QE \parallel DV \Rightarrow \widehat{HQE} = \widehat{HDV}$.

Tứ giác $BFHQ$ nội tiếp nên $\widehat{HQF} = \widehat{HBA}$.

Tứ giác $ABQE$ nội tiếp nên $\widehat{HQE} = \widehat{HBA}$.

Do đó $\widehat{FQA} = \widehat{HDV}$.

Tứ giác $BFHQ$ nội tiếp nên:

$$\widehat{BFQ} = \widehat{BHQ} \Rightarrow \widehat{AFQ} = \widehat{DHV}.$$

Khi đó: $\Delta AFQ \sim \Delta VHD \Rightarrow \dfrac{AF}{FQ} = \dfrac{VH}{HD}$

$$\Rightarrow \frac{AF}{FR} = \frac{VH}{HQ} \text{ (vì } FR = \frac{1}{2}FQ,\ HQ = \frac{1}{2}HD).$$

Do đó $\Delta AFR \sim \Delta VHQ \Rightarrow \widehat{BAR} = \widehat{BVS}$.

(O) có $\widehat{BAS} = \widehat{BVS}$ nên $\widehat{BAR} = \widehat{BAS}$.

Khi đó ba điểm A, R, S thẳng hàng.

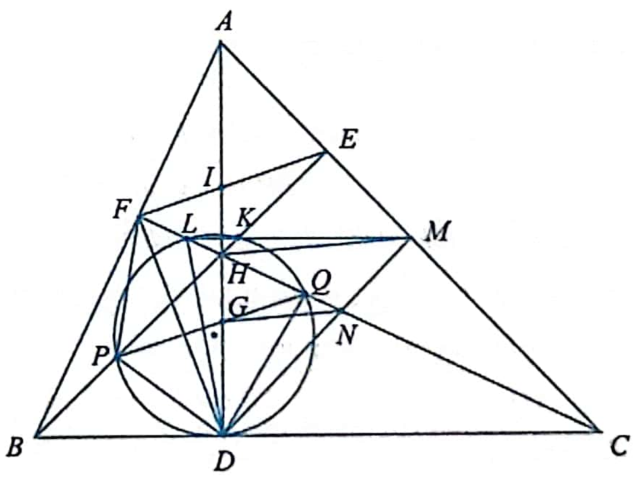
Bài 3. *Cho tam giác ABC nhọn không cân có $AB < AC$ và các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Lấy các điểm P, Q lần lượt trên BE, CF sao cho $EFPQ$ là hình bình hành có giao điểm của hai đường chéo là H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DPQ cắt BE, CF lần lượt là K, L. Đường thẳng AD cắt EF tại I, gọi M là trung điểm của đoạn AC.*

a) *Chứng minh $\dfrac{HI}{HD} = \dfrac{FI}{FD}$ và tứ giác $DMEF$ nội tiếp.*

b) *Gọi G là giao điểm của PQ với AD; N là giao điểm của DM và HC. Chứng minh KL song song với BC và $\Delta PDG \sim \Delta LDN$..*

c) *Chứng minh ba điểm M, K, L thẳng hàng.*

Lời giải.



a) Ta có kết quả quen thuộc: FH là phân giác của $\widehat{IFD}$ từ đó suy ra $\dfrac{HI}{HD} = \dfrac{FI}{FD}$.

Lại có $\widehat{DMC} = 2\widehat{DAC} = \widehat{DFE}$ nên tứ giác $DMEF$ nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{LKH} = \widehat{LQP} = \widehat{EFH}$.

Tứ giác $BFEC$ nội tiếp nên:

$$\widehat{EFH} = \widehat{EBC} \Rightarrow \widehat{LKH} = \widehat{HBC}$$

$\Rightarrow KL$ song song với BC.

Mặt khác $\widehat{IFH} = \widehat{HAE} = \widehat{HDN} \Rightarrow$ tứ giác $FIND$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FID} = \widehat{FND}$.

Mặt khác $\widehat{FID} = \widehat{IGQ} = \widehat{PGD}$ nên $\widehat{PGD} = \widehat{LND}$.

Lại có $\widehat{DPG} = \widehat{DLN}$. Do đó $\Delta PDG \sim \Delta LDN$.

c) Ta có: $\dfrac{HD}{HG} = \dfrac{HD}{HI} = \dfrac{FD}{FI}$.

$$\Delta DFI \sim \Delta CMN \Rightarrow \frac{DF}{FI} = \frac{CM}{MN} = \frac{DM}{MN}.$$

Do đó: $\dfrac{HD}{HG} = \dfrac{MD}{MN} \Rightarrow \dfrac{DH}{DM} = \dfrac{DG}{DN}$.

Theo câu b thì $\dfrac{DG}{DN} = \dfrac{DP}{DL}$. Do đó $\dfrac{DH}{DM} = \dfrac{DP}{DL}$.

Kết hợp câu b) ta có:

$$\Delta DPH \sim \Delta DLM \Rightarrow \widehat{DPH} = \widehat{DLM}.$$

Mà $\widehat{DLK} = \widehat{DPH}$, nên $\widehat{DLK} = \widehat{DLM}$. Suy ra ba điểm M, K, L thẳng hàng.

Bài 4. *Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi BH và CQ là hai đường cao của tam giác ABC. Tiếp tuyến tại B và tại C của đường tròn (O) cắt nhau tại M. Đoạn thẳng OM cắt BC và cắt đường tròn (O) lần lượt tại N và D. Tia AD cắt BC tại F; AM cắt BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K (K khác A).*

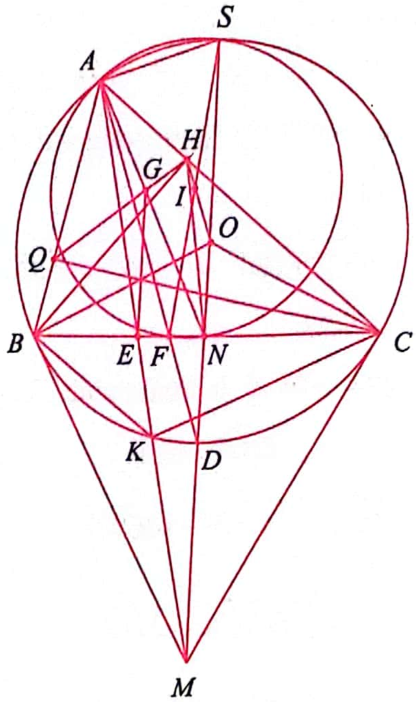
a) Chứng minh rằng:

$$AB.KC = AC.KB \text{ và } \widehat{ABM} = \widehat{AHN}.$$

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN. Chứng minh $\widehat{IOM} + \widehat{ADN} = 180^0$.

c) Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt QH tại G. Chứng minh ba điểm A, G, N thẳng hàng.

Lời giải.



a) Trong đường tròn (O) có $\widehat{MBK} = \widehat{BAK}$.

Xét ΔMBK và ΔMAB có:

$\widehat{MBK} = \widehat{BAK}$ và chung $\widehat{BMK}$

$$\Rightarrow \Delta MBK \sim \Delta MAB \Rightarrow \frac{BK}{AB} = \frac{MB}{MA}.$$

Tương tự chứng minh được:

$$\Delta MCK \sim \Delta MAC \Rightarrow \frac{CK}{AC} = \frac{MC}{MA}.$$

Do $MB; MC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $MB = MC$. Do đó:

$$\frac{BK}{AB} = \frac{CK}{AC} \Rightarrow AB \cdot CK = AC \cdot BK.$$

Trong (O) có $\widehat{ACB} = \widehat{ABx}$. Ta cũng có:

$MB = MC, OB = OC \Rightarrow OM$ là đường trung trực của $BC \Rightarrow N$ là trung điểm của BC.

Do BH là đường cao của ΔABC nên ΔBHC vuông tại H, mà N là trung điểm của BC nên $NB = NC = NH$ nên ΔNHC cân tại $N \Rightarrow \widehat{NHC} = \widehat{ACB}$. Do đó $\widehat{NHC} = \widehat{ABx}$.

Ta có:

$$\widehat{NHC} + \widehat{AHN} = 180^\circ; \widehat{ABx} + \widehat{ABM} = 180^\circ;$$

$$\widehat{NHC} = \widehat{ABx} \Rightarrow \widehat{AHN} = \widehat{ABM}.$$

b) Kẻ tia MO cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là S khác điểm $D \Rightarrow SN \perp BC \Rightarrow \widehat{FNS} = 90^\circ$

$\Rightarrow N$ thuộc đường tròn đường kính FS.

Trong (O) có: $\widehat{DAS} = 90^\circ$ hay $\widehat{FAS} = 90^\circ$

$\Rightarrow A$ thuộc đường tròn đường kính FS.

Do đó 4 điểm A, F, N, S cùng thuộc đường tròn đường kính FS. Suy ra tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔAFN là trung điểm của FS

Ta có I là trung điểm của FS, O là trung điểm của $DS \Rightarrow OI$ là đường trung bình của ΔSFD

$\Rightarrow OI \parallel DF \Rightarrow OI \parallel AD \Rightarrow \widehat{IOM} + \widehat{ADN} = 180^0$.

c) Gọi G' là giao điểm của AN và QH.

Ta chứng minh được:

$$\Delta ABH \sim \Delta BMN \Rightarrow \frac{AH}{BN} = \frac{AB}{BM}, \text{ mà } NB = NH$$

$\Rightarrow \dfrac{AH}{NH} = \dfrac{AB}{BM}$, mặt khác $\widehat{AHN} = \widehat{ABM}$, suy ra $\Delta AHN \sim \Delta ABM$. Do đó $\widehat{NAH} = \widehat{MAB}$ hay $\widehat{G'AH} = \widehat{EAB}$.

Ta chứng minh được:

$$\Delta AQC \sim \Delta AHB \Rightarrow \frac{AQ}{AH} = \frac{AC}{AB}$$

$$\Rightarrow \Delta AQH \sim \Delta ACB.$$

$$\Rightarrow \widehat{AHQ} = \widehat{ABC} \text{ hay } \widehat{AHG'} = \widehat{ABE}.$$

$$\Delta AHG' \sim \Delta ABE \Rightarrow \frac{AG'}{AE} = \frac{AH}{AB}.$$

Mà $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AN}{AM} \Rightarrow \dfrac{AG'}{AE} = \dfrac{AN}{AM} \Rightarrow EG' \parallel MN$.

Ta có $EG \parallel MN$, do đó E, G, G' thẳng hàng.

Mà $G, G' \in QH$, suy ra G' và G trùng nhau.

Vậy ba điểm A, G, N thẳng hàng.

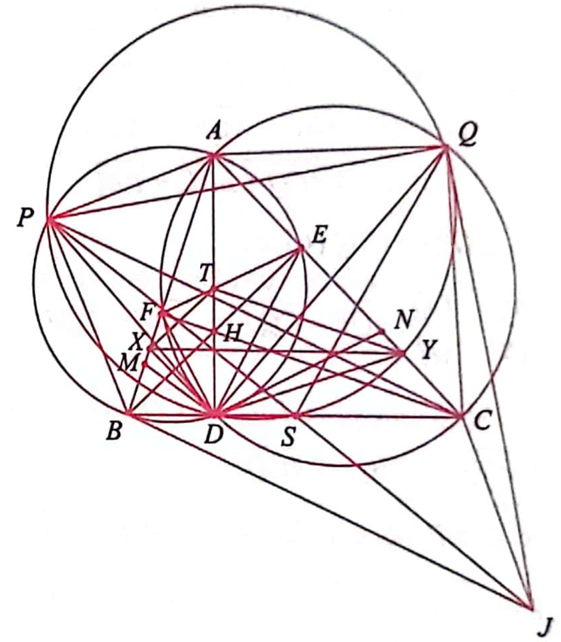
Bài 5. *Cho tam giác ABC nhọn có điểm A thay đổi và B, C cố định. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BF, CE.*

a) Chứng minh tứ giác $AMDN$ nội tiếp.

b) AD cắt EF tại T. Tiếp tuyến tại D của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC cắt AB tại X. Tiếp tuyến tại D của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB cắt AC tại Y. Chứng minh tứ giác $DXFT$ nội tiếp và XY đi qua trung điểm của đoạn DT.

c) Về phía ngoài tam giác ABC dựng hai tam giác đồng dạng APB và AQC sao cho $\widehat{APB} = \widehat{AQC} = 90^0$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PDQ luôn đi qua một điểm cố định khi điểm A thay đổi.

Lời giải.



a) Tứ giác $ABDE$ nội tiếp do đó:

$$\widehat{EDC} = \widehat{BAC}; \widehat{DEC} = \widehat{ABC}.$$

Tứ giác $AFDC$ nội tiếp do đó $\widehat{FDB} = \widehat{BAC}$.

$$\Delta DBF \sim \Delta DEC \,(\text{g.g}) \Rightarrow \frac{DB}{DE} = \frac{BF}{EC} = \frac{MB}{NE}$$

$$\Rightarrow \Delta DBM \sim \Delta DEN \,(\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{END}.$$

Khi đó tứ giác $AMDN$ nội tiếp.

b) Vì XD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC nên $\widehat{xDA} = \widehat{ACB}$.

Tứ giác $BFEC$ nội tiếp do đó $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$.

Vì vậy $\widehat{AFT}=\widehat{ADX}$ nên tứ giác $DXFT$ nội tiếp. Khi đó $\widehat{XTD}=\widehat{XFD}$.

Tương tự câu 1 ta có $\widehat{XFD}=\widehat{AFT}$. Do đó $\widehat{XTD}=\widehat{XDT}\Rightarrow XT=XD$. Tương tự: $YT=YD$.

Do đó XY là trung trực của TD nên XY đi qua trung điểm của đoạn DT.

c) Gọi S là trung điểm của BC. Lấy J đối xứng với P qua S $\Rightarrow$ tứ giác $BPCJ$ là hình bình hành nên $CJ\,//\,BP$; $CJ=BP$.

Vì $\Delta APB\sim\Delta AQC\Rightarrow\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AQ}{QC}\Rightarrow\dfrac{AQ}{QC}=\dfrac{AP}{CJ}$.

Ta có: $\widehat{QCJ}=360^0-\widehat{ACQ}-\widehat{ACB}-\widehat{BCJ}$

$$=360^0-\widehat{ACQ}-\widehat{ACB}-\widehat{PBC}$$
$$=360^0-\widehat{ABC}-\widehat{ACB}-2\widehat{ACQ}$$
$$=180^0-2\widehat{ACQ}+\widehat{BAC}=\widehat{PAQ}.$$

Khi đó: $\Delta APQ\sim CJQ$ (c.g.c)

$$\Rightarrow\frac{AQ}{QP}=\frac{CQ}{QJ};\widehat{AQP}=\widehat{CQJ}\Rightarrow\widehat{AQC}=\widehat{PQJ};$$

$\Delta AQC\sim\Delta PQJ$ (c.g.c) $\Rightarrow\widehat{PJQ}=\widehat{ACQ};\widehat{PQJ}=90^0$. Khi đó $\widehat{PSQ}=2\widehat{PJQ}=2\widehat{ACQ}$.

Tứ giác $ADBP$ nội tiếp nên $\widehat{ADP}=\widehat{ABP}=\widehat{ACQ}$

Tương tự $\widehat{ADQ}=\widehat{ACQ}$. Vì vậy $\widehat{PDQ}=2\widehat{ACQ}$.

Khi đó $\widehat{PDQ}=\widehat{PSQ}$ $\Rightarrow$ tứ giác $DPQS$ nội tiếp. Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác PDQ luôn đi qua trung điểm của BC cố định khi điểm A thay đổi.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN THÊM

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. Đường thẳng OA cắt các đường thẳng BE,CF lần lượt tại P,Q.

a) Chứng minh $\Delta HPQ\sim\Delta ABC$ và AH là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HPQ

b) Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại S. Chứng minh $\Delta APH\sim\Delta ABS$.

c) Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HPQ. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh ba điểm A,T,M thẳng hàng.

Bài 2. Cho tam giác ABC với $AB<AC$ nội tiếp (O) đường kính AK. Gọi H,M lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và trung điểm BC, trung trực của AH cắt AB,AC lần lượt tại F,E, đường thẳng qua O vuông góc với OA cắt AB,AC tại Q, P. Gọi I là giao điểm của QE và PF, S là điểm đối xứng với Q qua O, SI cắt AC tại T, AH cắt BC tại D.

a) Chứng minh rằng $AH=2OM$ và $\widehat{BAD}=\widehat{CAK}$.

b) Chứng minh CH song song với PF.

c) Trung trực PQ cắt AD tại G. Chứng minh $\widehat{GOT}=90^0$.

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. Đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt $HB,HC,(O)$ lần lượt tại $P,Q,T\,(T\neq A)$. Đường thẳng qua P vuông góc với BP cắt đường thẳng qua Q vuông góc với CQ cắt nhau tại điểm K. Gọi M là trung điểm BC,TM cắt (O) tại điểm S khác T.

a) Chứng minh tam giác PHQ cân tại H.

b) Chứng minh $\dfrac{HQ}{PQ}=\dfrac{SC}{BC}$ và ba điểm A,K,M thẳng hàng.

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. Lấy điểm M bất kỳ trên cung nhỏ BC. Đường thẳng MC,MB cắt BE,CF lần lượt tại L,K. Chứng minh đường thẳng EF đi qua trung điểm của đoạn LK.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10, THPT CHUYÊN, THÀNH PHỐ HÀ NỘI

NĂM HỌC 2023-2024

Môn: Toán (chuyên Toán); Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I. 1) *Giải phương trình*

$$\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}=2x-8.$$

2) *Cho a,b và c là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện $a^2-c^2=c$, $c^2-b^2=b$ và $b^2-a^2=a$. Chứng minh $(a-b)(b-c)(c-a)=1$.*

Lời giải. 1) ĐKXĐ: $x\geq\frac{7}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$(4-x)\left(\frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7}}+2\right)=0.$$

TH1: $4-x=0\Leftrightarrow x=4$.

TH2: $\frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7}}+2=0$ (vô nghiệm).

Kết hợp với ĐKXĐ ta được tập nghiệm phương trình là $S=\{4\}$.

2) Từ giả thiết, ta có:

$$a+b+c=a^2-c^2+c^2-b^2+b^2-a^2=0.$$

Mặt khác: $\quad b^2-a^2=a$

$$\Leftrightarrow(a-b)(a+b)=-a$$

$$\Rightarrow(a-b)c=a.$$

Tương tự: $(b-c)a=b,\ (c-a)b=c.$

$$\Rightarrow(a-b)(b-c)(c-a)abc=abc.$$

Do a,b,c đều khác 0, suy ra:

$$(a-b)(b-c)(c-a)=1.$$

Câu II. 1) *Cho ba số nguyên a,b và c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-2abc$ chia hết cho 6. Chứng minh abc chia hết cho 54.*

2) *Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $x^3y-x^2y-4x^2+5xy-y^2=0$.*

Lời giải. 1) Từ giả thiết ta thấy trong ba số a,b,c có ít nhất một số chẵn $\Rightarrow abc\,\vdots\,2$ (1).

Ta thấy trong ba số a,b,c tồn tại ít nhất một số chia hết cho 3. Thật vậy, nếu cả 3 số a, b, c đều không chia hết cho 3, suy ra:

$$a^2\equiv1\ (\text{mod}\,3),\ b^2\equiv1\ (\text{mod}\,3),\ c^2\equiv1\ (\text{mod}\,3)$$

$$a^2+b^2+c^2-2abc\equiv3-2abc\ (\text{mod}\,3)$$
$$\equiv-2abc\ (\text{mod}\,3)\not\equiv0\ (\text{mod}\,3),$$

(điều này mâu thuẫn với giả thiết

$a^2+b^2+c^2-2abc\,\vdots\,6$ nên $a^2+b^2+c^2-2abc\,\vdots\,3$).

Giả sử $a\,\vdots\,3\Rightarrow b^2+c^2\,\vdots\,3$. Do $b^2\equiv0,1\ (\text{mod}\,3)$, $c^2\equiv0,1\ (\text{mod}\,3)$ nên b và c chia hết cho 3. Suy ra $abc\,\vdots\,27$ (2).

Do $(2,27)=1$ nên từ (1) và (2) suy ra $abc\,\vdots\,54$.

2) Ta có: $x^3y-x^2y-4x^2+5xy-y^2=0$

$$\Leftrightarrow xy\left(x^2-x+1\right)=(2x-y)^2.$$

Giả sử p là ước nguyên tố chung của xy và $x^2-x+1\Rightarrow p=1$ (vô lí). Suy ra:

$$\left(xy,x^2-x+1\right)=1.$$

Do đó x^2-x+1 và xy là các số chính phương.

Suy ra: $\begin{cases}x^2-x+1=1\\ xy=(2x-y)^2\end{cases}$

hoặc $\begin{cases} x^2-x+1=(2x-y)^2 \\ xy=1 \end{cases}$.

Tìm được $x=1$ và $y=1$ hoặc $x=1$ và $y=4$.

Thử lại ta có hai cặp số (x, y) thỏa mãn bài toán là:

$$(x,y)=(1,1) \text{ và } (x,y)=(1,4).$$

Câu III. 1) *Tìm tất cả cặp số nguyên (x,y) sao cho xy là số chính phương và x^2+xy+y^2 là số nguyên tố.*

2) *Với các số thực không âm a,b và c thỏa mãn $a+2b+3c=1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=(a+6b+6c)(a+b+c).$$

Lời giải. 1) Đặt $xy=a^2$ $(a\in\mathbb{N})$. Suy ra:

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2 &= (x+y)^2-a^2 \\ &= (x+y+a)(x+y-a). \end{aligned}$$

Do $xy>0$ nên x và y cùng dấu.

TH1: $x>0, y>0 \Rightarrow x+y-a=1 \Rightarrow x+y=a+1.$

$$\Rightarrow (a+1)^2 \geq 4a^2 \Rightarrow a=1.$$

Tìm được $(x,y)=(1,1)$.

TH2: $x<0, y<0$. Tương tự TH1, tìm được:

$$(x,y)=(-1,-1).$$

Kết luận: $(x,y)=(1,1)$ hoặc $(x,y)=(-1,-1)$.

2) Theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$\frac{3}{2}P=\left(\frac{3}{2}a+9b+9c\right)(a+b+c)$$

$$\geq \left(\sqrt{\frac{3}{2}}a+3b+3c\right)^2$$

$$\geq (a+2b+3c)^2=1$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{2}{3}.$$

Mặt khác, khi $a=0; b=0; c=\frac{1}{3}$ thì $P=\frac{2}{3}$.

Suy ra $\min P=\frac{2}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\begin{aligned} 4P &= (a+6b+6c)(4a+4b+4c) \\ &\leq \frac{(5a+10b+10c)^2}{4} \\ &\leq \frac{(5a+10b+15c)^2}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4P \leq \frac{25(a+2b+3c)^2}{4}=\frac{25}{4} \Rightarrow P \leq \frac{25}{16}.$$

Mặt khác, khi $a=\frac{1}{4}; b=\frac{3}{8}; c=0$ thì $P=\frac{25}{16}$.

Suy ra $\max P=\frac{25}{16}$.

Câu IV. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB<AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cùng đi qua điểm H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng AD tại điểm Q. Gọi M và I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC và AH. Đường thẳng IM cắt đường thẳng EF tại điểm K.*

1) *Chứng minh tam giác AEK đồng dạng với tam giác ABM.*

2) *Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm S, đường thẳng SI cắt đường thẳng MQ tại điểm T. Chứng minh bốn điểm A, T, H và M cùng thuộc một đường tròn.*

3) *Tia TH cắt đường tròn (O) tại điểm P. Chứng minh ba điểm A, K và P là ba điểm thẳng hàng.*

Lời giải.

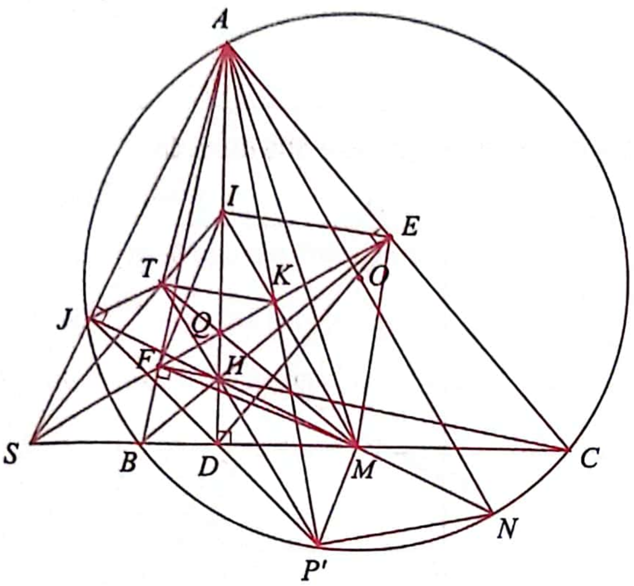
1) Chứng minh được $\Delta AEF \sim \Delta ABC$.

Suy ra $\widehat{AEK} = \widehat{ABM}$ (1). Lại có:

$$ME = MF = \frac{1}{2}BC,\ IE = IF$$

nên MI là trung trực của EF. Dẫn đến K là trung điểm của đoạn thẳng EF. Suy ra $\frac{EA}{BA} = \frac{EK}{BM}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta AEK \sim \Delta ABM$.



2) Ta có: $ID \perp SM$, $SK \perp IM$ (do MI là trung trực của EF) nên Q là trực tâm tam giác ISM, suy ra: $QI.QD = QT.QM$.

Do 4 điểm I, F, D, E cùng thuộc đường tròn Euler của ΔABC nên

$$QI.QD = QE.QF.$$

Do 4 điểm A, E, H, F cùng thuộc đường tròn nên

$$QE.QF = QA.QH.$$

Suy ra: $$QT.QM = QA.QH$$

$$\Rightarrow \Delta QTA \sim \Delta QHM.$$

Suy ra tứ giác $ATHM$ là tứ giác nội tiếp.

Do đó 4 điểm A, T, H và M cùng thuộc một đường tròn.

3) Gọi P' là giao điểm của AK và TH. Do A, T, H, M cùng thuộc một đường tròn nên

$$\widehat{P'TM} = \widehat{MAH}\ \left(= \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{HM}\right).$$

Xét tam giác vuông IEM có:

$$IE^2 = IK.IM = IA^2$$
$$\Rightarrow \Delta IKA \sim \Delta IAM$$
$$\Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{P'KM} = \widehat{MAH}.$$

Suy ra $\widehat{P'TM} = \widehat{P'KM}$, dẫn đến tứ giác $TKMP'$ là tứ giác nội tiếp (*).

Kẻ đường kính AN của (O). SA cắt (O) tại điểm thứ hai J. Khi đó $BHCN$ là hình bình hành $\Rightarrow H, M, N$ thẳng hàng.

Mặt khác, từ $SJ.SA = SB.SC = SE.SF$ suy ra J thuộc đường tròn đường kính $AH \Rightarrow AJ \perp JM$, mà $AJ \perp JN \Rightarrow J, H, N$ thẳng hàng. Suy ra bốn điểm N, M, H, J thẳng hàng.

Lại có: $\widehat{SJM} = \widehat{STM} = \widehat{SKM} = 90^0$. Từ (*) suy ra:

J, T, M, K, P' cùng thuộc một đường tròn.

Dẫn tới tứ giác $JTMP'$ nội tiếp.

Ta có: $\widehat{NJP'} = \widehat{P'TM} = \widehat{MAH} = \widehat{OAK} = \widehat{NAP'}$.

Suy ra tứ giác $JANP'$ nội tiếp. Suy ra $P' \in (O)$.

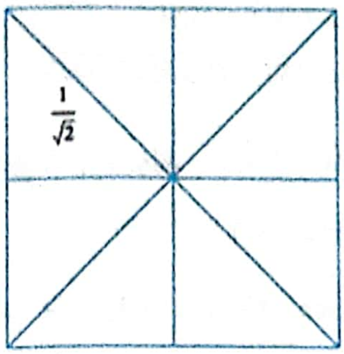
Do đó $P' \equiv P$. Suy ra ba điểm A, K, P là ba điểm thẳng hàng.

Câu V. *Cho 2023 điểm nằm trong một hình vuông cạnh 1. Một tam giác đều được gọi là phủ điểm M nếu điểm M nằm trong tam giác hoặc nằm trên cạnh của tam giác.*

1) Chứng minh tồn tại tam giác đều cạnh $\frac{1}{\sqrt{2}}$ phủ ít nhất 253 điểm trong 2023 điểm đã cho.

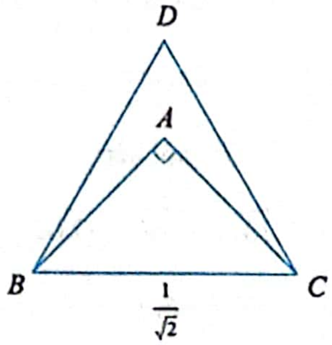
2) Chứng minh tồn tại tam giác đều cạnh $\frac{11}{12}$ phủ ít nhất 506 điểm trong 2023 điểm đã cho.

Lời giải. 1)



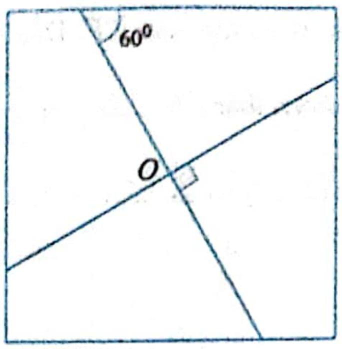
Chia hình vuông cạnh 1 đã cho thành 8 tam giác vuông cân như hình bên. Mỗi điểm trong 2023 điểm đã cho sẽ thuộc một trong 8 tam giác trên, suy ra một trong các tam giác sẽ chứa ít nhất $\left[\frac{2023}{8}\right]+1=253$ (điểm).

Gọi ABC là tam giác vuông cân tại A chứa 253 điểm đó. Dựng tam giác đều DBC như hình dưới.

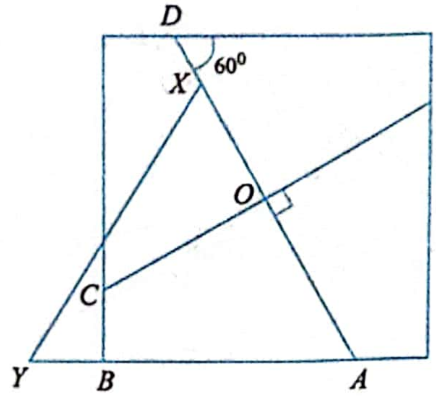


Tam giác DBC phủ ít nhất 253 điểm và có độ dài cạnh là $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) Gọi O là tâm hình vuông đã cho. Chia hình vuông thành 4 tứ giác như hình trên. Một trong 4 tứ giác này chứa ít nhất $\left[\frac{2023}{4}\right]+1=506$ điểm trong 2023 điểm đã cho.



Gọi $OABC$ là tứ giác chứa 506 điểm đó.



Vì $AD=\frac{2}{\sqrt{3}}>\frac{11}{12}$ nên trên đoạn AD có điểm X sao cho $AX=\frac{11}{12}$. Trên tia AB lấy điểm Y sao cho $AY=\frac{11}{12}$. Khi đó tam giác AXY là tam giác đều cạnh $\frac{11}{12}$ chứa tứ giác $OABC$.

$$(\text{Vì } BC=\frac{3-\sqrt{3}}{6}<\frac{5\sqrt{3}-6}{12}=BE).$$

Từ đó suy ra tam giác AXY phủ ít nhất 506 điểm đã cho.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

(GV THCS Giảng Võ, Hà Nội)

Giới thiệu

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN HÀ NỘI

NĂM HỌC 2023 – 2024

Môn: Toán (chuyên Tin)

(*Thời gian làm bài: 150 phút*)

Câu I (2,0 *điểm*)

1) Giải phương trình

$$2x+2=(5-x)\sqrt{3x-2}.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+3xy=9 \\ x^3+y^3=9 \end{cases}.$$

Câu II (2,0 *điểm*)

1) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh số $A=2^{p^2+2}-8$ chia hết cho 21.

2) Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn

$$x^3-y^3=2(x-y)^2+17.$$

Câu III (2,0 *điểm*)

1) Cho đa thức

$$f(x)=x^4+2x^3+3x^2+2022x+2023.$$

Chứng minh đa thức $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ.

2) Với các số thực a,b và c thỏa mãn $(a+1)(b+1)(c+1)=(a-1)(b-1)(c-1)$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|a|+|b|+|c|$.

Câu IV (3,0 *điểm*)

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B $(R<R'<OO')$. Gọi PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') với $P\in(O)$ và $Q\in(O')$. Đường thẳng PQ cắt đường thẳng OO' tại điểm S. Qua điểm S vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm E,F và cắt đường tròn (O') tại hai điểm G,H sao cho $SE<SF<SG<SH$.

1) Chứng minh đường thẳng OE song song với đường thẳng $O'G$.

2) Chứng minh $SA^2=SP.SQ$.

3) Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O) cắt đường thẳng OO' tại điểm M. Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O') cắt đường thẳng OO' tại điểm N. Đường thẳng ME cắt đoạn thẳng AB tại điểm I. Chứng minh $\frac{EA^2}{EB^2}=\frac{IA}{IB}$ và ba điểm N,I,H là ba điểm thẳng hàng.

Câu V (*1,0 điểm*)

Trên bàn có hai túi kẹo: túi thứ nhất có 18 viên kẹo, túi thứ hai có 21 viên kẹo. An và Bình cùng chơi một trò chơi như sau: mỗi lượt chơi, một bạn sẽ lấy đi 1 viên kẹo từ một túi bất kỳ hoặc là mỗi túi lấy đi 1 viên kẹo. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Người đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc, người còn lại là người thắng cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

(GV THCS Giảng Võ, Hà Nội)

Giới thiệu

THIẾT KẾ CHUỖI CÂU HỎI NHẰM PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ CHO HỌC SINH TRONG DẠY HỌC CHỦ ĐỀ "QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH" LỚP 10 THPT

LÊ THỊ HƯƠNG (*Sở GD&ĐT Quảng Trị*)
LÊ ĐỨC HẢI (*Sở GD&ĐT Quảng Trị*)
LÊ XUÂN ĐỨC (*GV THPT Hải Lăng, Quảng Trị*)

Chương trình giáo dục phổ thông 2018 định hướng dạy học phát triển năng lực và phẩm chất của người học. Năng lực giải quyết vấn đề (NLGQVĐ) là một trong các năng lực quan trọng trong học toán, chính vì vậy giáo viên cần có những phương pháp cụ thể nhằm nâng cao phát triển cho người học. Bài toán quy hoạch tuyến tính một chủ đề toán học có nhiều ứng dụng trong thực tế với tối ưu hoá một mục tiêu nào đó. Thông qua các bài tập của chủ đề này, học sinh có cơ hội giải quyết nhiều tình huống, vấn đề phát sinh từ thực tiễn, từ đó năng lực giải quyết vấn đề của mình được rèn luyện và phát triển. Bài viết bàn về việc phát triển năng lực giải quyết vấn đề cho học sinh trung học phổ thông trong dạy học môn Toán chủ đề Quy hoạch tuyến tính. Trong quá trình dạy học chủ đề này, giáo viên cần áp dụng các phương pháp dạy học linh hoạt để giúp học sinh tiếp cận vấn đề theo nhiều cách khác nhau, từ đó dễ dàng giải quyết vấn đề, phát triển năng lực giải quyết vấn đề.

1. MỞ ĐẦU

Năng lực giải quyết vấn đề (GQVĐ) toán học là một trong những năng lực cốt lõi, quan trọng cần phải rèn luyện và phát triển cho học sinh (HS) trong dạy học môn Toán, được xác định rõtrong chương trình giáo dục phổ thông 2018 (CTGDPT 2018) môn Toán. Hiệp hội giáo viên Toán của Mỹ đã khẳng định trong chương trình hành động của họ rằng "*Giải quyết vấn đề toán học phải là trọng tâm của dạy học Toán trong nhà trường*" (National Council of Teachers of Mathematics, 1980, tr.1).

Bài toán quy hoạch tuyến tính ở phổ thông là kiểu bài toán có ngữ cảnh thực tế, gắn liền với việc ứng dụng toán học, cụ thể là bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất vào thực tế cuộc sống. Học sinh thường gặp khó khăn khi đối mặt với những tình huống thực tế chứa đựng bài toán tối ưu như vậy.

Qua một năm thực hiện chương trình phổ thông 2018 học sinh lớp 10 lần đầu tiên được tiếp cận chương trình môn toán trên quan điểm, mục tiêu và chương trình mới nên không tránh khỏi những bỡ ngỡ. Đặc biệt là vận dụng các kiến thức toán học để giải quyết các bài toán thực tế. Học sinh không những chưa hiểu thấu đáo mà còn áp dụng nó một cách máy móc. Những khó khăn của học sinh chủ yếu là: không biết bắt đầu quá trình giải quyết vấn đề kiểu này từ đâu, tình huống có nhiều thông tin và ràng buộc… Để có thể dạy hiệu quả chủ đề này và giúp học sinh vượt qua những khó khăn đó, người giáo viên cần có những kiểu kiến thức khác nhau. Bên cạnh việc nắm vững kiến thức nội dung phổ biến, giáo viên cần có kiến thức đặc thù, kiến thức về việc học, kiến thức về việc dạy. Xem xét đánh giá và phát triển kiến thức của giáo viên để dạy học chủ đề quy hoạch tuyến tính là vấn đề cần thiết, nhằm giúp giáo viên hiểu sâu hơn việc dạy học chủ đề này.

Bài viết trình bày kết quả nghiên cứu một số giải pháp nhằm phát triển năng lực GQVĐ của học sinh khi dạy chủ đề bài toán tuyến tính trong CTPT2018, góp phần bổ sung cơ sở thực tiễn và giải pháp giúp học sinh vượt qua những khó khăn khi học chủ đề này. Dạy học theo tiếp cận năng lực và phẩm chất đang là vấn đề được quan tâm của giáo dục nước ta khi thực hiện CTGDPT 2018.

2. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

2.1. Năng lực giải quyết vấn đề và các thành tố của năng lực giải quyết vấn đề theo định hướng chương trình phổ thông mới

Theo *Đỗ Thị Hồng Minh*, *Bùi Minh Đức* có thể chia năng lực GQVĐ nói chung cũng như năng lực GQVĐ toán học nói riêng gồm 4 năng lực thành tố sau:

- "*Năng lực nhận biết và tìm hiểu vấn đề*: được thể hiện thông qua hai hành vi cơ bản là nhận biết vấn đề và hiểu thông tin trong vấn đề.
- *Năng lực thiết lập không gian vấn đề*: gồm hai hành vi cơ bản là: lựa chọn, sắp xếp, tích hợp thông tin với kiến thức đã học; xác định cách thức, quy trình, chiến lược giải quyết vấn đề.
- *Năng lực lập kế hoạch và trình bày giải pháp*: gồm hai hành vi cơ bản sau: lập tiến trình thực hiện cho giải pháp; thực hiện và trình bày giải pháp, điều chỉnh kế hoạch cho phù hợp với thực tiễn khi có sự thay đổi.
- *Năng lực đánh giá và phản ánh giải pháp*: đó là xem xét giải pháp đã thực hiện tối ưu hay chưa, điểm nào chưa hợp lí, thiếu lôgic; phản ánh, xác nhận những kiến thức và kinh nghiệm thu nhận được và đề xuất vấn đề tương tự" (*Đỗ Thị Hồng Minh & Bùi Minh Đức*, 2019).

Trong CTGDPT 2018, năng lực GQVĐ toán học gồm bốn thành tố sau:

(1) *Năng lực nhận biết, phát hiện được vấn đề:* xác định được các thông tin đã cho, thông tin cần tìm, tìm hiểu các mối quan hệ, các sự kiện trong vấn đề một cách đầy đủ, chính xác.

(2) *Năng lực lựa chọn, đề xuất được cách thức, giải pháp giải quyết vấn đề*: phân tích, sắp xếp, kết nối các thông tin phát hiện được với kiến thức đã biết và đưa ra giải pháp, lựa chọn giải pháp tốt nhất để GQVĐ.

(3) *Năng lực thực hiện quá trình GQVĐ*: sử dụng các kiến thức, kinh nghiệm, kĩ năng toán học tương thích để trình bày giải pháp và thực hiện GQVĐ, điều chỉnh giải pháp phù hợp với thực tiễn khi có sự thay đổi.

(4) *Năng lực kiểm tra, đánh giá, khái quát hóa và áp dụng thực tiễn:* đánh giá giải pháp đã thực hiện và vấn đề đặt ra; phản ánh được giá trị của giải pháp; xác nhận những kiến thức và kinh nghiệm có được sau khi GQVĐ; từ đó xây dựng nên vấn đề mới. (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018)

Tóm lại, trong bài viết này chúng tôi thống nhất theo quan điểm của CTGDPT 2018, năng lực GQVĐ toán học của học sinh trong dạy học toán THPT nói chung và trong dạy học toán lớp 10 nói riêng được cấu thành bởi các thành tố sau:

(1) *Năng lực nhận biết, phát hiện được vấn đề.*

(2) *Năng lực lựa chọn, đề xuất được cách thức, giải pháp giải quyết vấn đề.*

(3) *Năng lực thực hiện quá trình GQVĐ.*

(4) *Năng lực kiểm tra, đánh giá, khái quát hóa và áp dụng thực tiễn.*

2.2. Chu trình giải quyết vấn đề trong ngữ cảnh bài toán quy hoạch tuyến tính

Bài toán quy hoạch tuyến tính thuộc dạng toán giải quyết vấn đề toán học nên chu trình giải quyết vấn đề tổng quát có thể được áp dụng vào giải quyết bài toán. Tuy vậy, do tính đặc thù của bài toán quy hoạch tuyến tính, đặc biệt là tính tựa thuật toán trong cách giải quyết bài toán, nên cần thiết phải làm rõ hơn quy trình giải quyết vấn đề liên quan đến việc giải kiểu bài toán này, theo hướng giúp học sinh có định hướng tốt hơn và dễ dàng tìm ra lời giải hơn. Vì vậy, chúng tôi đề xuất chi tiết hoá quá trình giải quyết vấn đề đối với bài toán quy hoạch tuyến tính cho học sinh như sau:

1. Xác định mô hình

Bước 1a: *Xác định biến và ràng buộc*: định rõ các biến cần tối ưu hóa và ràng buộc giới hạn cho các biến này.

Bước 1b: *Xác định hàm mục tiêu*: Xác định hàm cần tối ưu, có thể là hàm lợi nhuận, chi phí hoặc hiệu suất.

2. Xây dựng mô hình tối ưu

Bước 2a: *Xây dựng Phương trình tối ưu*: Tạo ra một phương trình hoặc bộ phương trình biểu diễn mục tiêu và ràng buộc của bài toán.

Bước 2b: *Chuyển đổi về dạng chuẩn*: Thường sử dụng dạng chuẩn như dạng ma trận để có thể sử dụng các thuật toán giải tối ưu hóa.

3. Giải quyết bài toán

Bước 3a: *Sử dụng phần mềm hoặc thư viện*: Sử dụng các công cụ, phần mềm hoặc thư viện có sẵn để giải quyết bài toán tối ưu.

Bước 3b: *Thuật toán tối ưu*: Áp dụng thuật toán tối ưu phù hợp như Simplex, Gradient Descent, hoặc các phương pháp tối ưu khác.

4. Kiểm tra và đánh giá kết quả

Bước 4a: *Kiểm tra ràng buộc*: đảm bảo kết quả thu được đáp ứng các ràng buộc của bài toán.

Bước 4b: *Đánh giá kết quả*: Đánh giá mức độ tối ưu của kết quả và xem xét sự ảnh hưởng của biến đổi các tham số.

5. Tối ưu hóa tiếp

Bước 5a: *Điều chỉnh và cải tiến*: Dựa trên kết quả và đánh giá, thực hiện điều chỉnh, cải tiến để tối ưu hóa hơn.

Bước 5b: *Lặp lại quá trình*: Nếu cần, lặp lại các bước trên để đạt được kết quả tối ưu mong muốn.

6. Đưa ra giải pháp

Bước 6a: *Trình bày kết quả*: Hiển thị kết quả tối ưu được đạt được sau quá trình tối ưu hóa.

Bước 6b: *Triển khai và thực thi*: Triển khai giải pháp tối ưu vào thực tế (nếu áp dụng).

2.3 Thiết kế chuỗi câu hỏi nhằm giúp học sinh phát triển năng lực GQVĐ thông qua một số bài toán quy hoạch tuyến tính.

2.3.1. Khái niệm về chuỗi câu hỏi

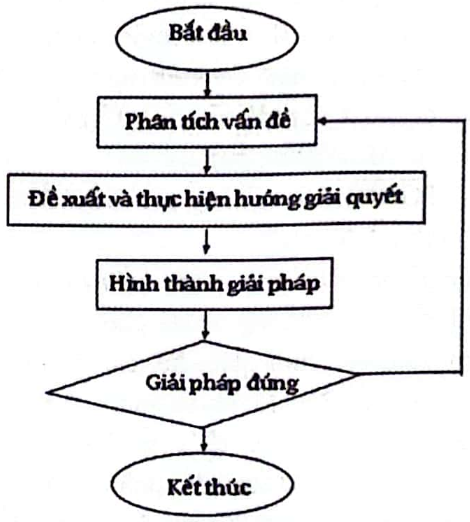
"Chuỗi câu hỏi" là một bộ gồm nhiều câu hỏi liên quan đến một chủ đề cụ thể hoặc một nội dung cụ thể. Chuỗi câu hỏi thường được sử dụng để khám phá một chủ đề một cách chi tiết, sâu sắc và có cấu trúc. Các câu hỏi trong chuỗi thường được thiết kế để đi từ những câu hỏi cơ bản và trực tiếp đến những câu hỏi phức tạp và trừu tượng hơn. Mỗi câu hỏi trong chuỗi này dẫn người đọc đến một góc nhỏ của vấn đề, việc xâu chuỗi các dữ kiện của bài toán trên sẽ có niềm tin giải quyết được vấn đề cần hướng tới giúp người đọc hoặc người nghe có cái nhìn tổng quan và sâu sắc hơn về bài toán đặt ra. Để tạo nên chuỗi câu hỏi khi giải quyết các bài toán quy hoạch tuyến tính, cơ sở để chúng tôi xây dựng là hướng học sinh thực hiện được các bước sau:

Bước	Nội dung
1	Tình huống thực tế
2	Chỉ ra các biến cần xác định của bài toán
3	Lập bảng tóm tắt lại bài toán theo ký hiệu các biến
4	Chỉ ra những ràng buộc đối với các biến
5	Chỉ ra đại lượng cần phải làm cho lớn nhất (nhỏ nhất)
6	Giải bài toán trong phạm vi toán học
7	Đưa ra kết luận đối với tình huống đưa ra

Từ những khó khăn của học sinh trong bước đầu tiếp xúc bài toán quy hoạch tuyến tính theo hướng tiếp cận năng lực và phẩm chất ở trên, chúng tôi đưa ra chuỗi câu hỏi với một số ví dụ nhằm giúp học sinh phát triển năng lực GQVĐ thông qua ví dụ về bài toán quy hoạch tuyến tính.

2.3.2 Các ví dụ minh hoạ theo quy trình

Quy trình này thường được lặp đi lặp lại để tìm ra giải pháp tối ưu hoặc gần tối ưu nhất cho bài toán quy hoạch tuyến tính.



Quy trình giải quyết vấn đề trong ngữ cảnh bài toán quy hoạch tuyến tính

Từ các phân tích trên, chúng tôi chọn ba ví dụ điển hình để minh hoạ khẳng định một lần nữa về sự cần thiết phải có một quy trình cụ thể với những chỉ dẫn để giúp học sinh vượt qua những sai lầm và khó khăn khi tiếp cận bài toán quy hoạch tuyến tính góp phần nâng cao năng lực GQVĐ cho học sinh.

Bài toán 1. *Cây xanh trong các đô thị sẽ giúp giữ cho không khí trong lành bằng cách hấp thụ khí cacbonic. Một thành phố có ngân sách tối đa là 2100 đôla cho việc trồng cây Bằng lăng và cây Long não. Diện tích đất dành cho việc trồng hai loại cây này tối đa là 450 mét vuông. Chi phí mua và trồng mỗi cây bằng lăng là 30 đôla và mỗi cây long não là 40 đôla. Diện tích cần thiết để trồng* *mỗi cây bằng lăng là 6 mét vuông và mỗi cây long não là 9 mét vuông. Biết rằng một cây bằng lăng có thể hấp thụ khoảng 300 kg khí cacbonic mỗi năm và một cây long não có thể hấp thụ khoảng 150 kg khí cacbonic mỗi năm. Hỏi thành phố nên trồng bao nhiêu cây mỗi loại để lượng khí cacbonic được hấp thụ lớn nhất?*

1) Tóm tắt lại bài toán bằng cách trả lời các câu hỏi sau và sử dụng các ký hiệu toán học:

Các biến cần phải xác định của bài toán là những biến nào?

Hãy hoàn thành thông tin cho bảng sau:

	Cây bằng lăng	***Cây long não***	***Tổng cộng***
Số lượng cây			
Chi phí mua trồng			
Diện tích đòi hỏi			
Lượng khí cacbonic hấp thụ			

Những ràng buộc (điều kiện) đối với các biến này là gì (viết dưới dạng một hệ các bất phương trình)?

Mục tiêu là làm cho tối ưu (lớn nhất) đại lượng nào?

2) Dựa vào những gợi ý ở trên, hãy trình bày một cách giải bài toán đưa ra.

3) Hãy trình bày một cách giải khác so với cách giải trên (nếu có thể).

4) Hãy đưa ra kết luận cuối cùng đối với bài toán đặt ra.

<table>
<tr><th>Chỉ dẫn</th><th>Mục tiêu</th></tr>
<tr><td>Số 1</td><td>Nhằm giúp cho học sinh tóm tắt được bài toán quy hoạch tuyến tính đã cho và từ nội dung yêu cầu trong câu hỏi định hướng điền các dữ liệu vào bảng tóm tắt nhằm thực hiện việc dạy học bài toán quy hoạch tuyến tính toán như thế nào.
Mục đích: Phát triển năng lực nhận biết, phát hiện được vấn đề;
Tiên nghiệm bài làm của HS điền được bảng sau:
<table>
<tr><th></th><th>Cây bằng lăng</th><th>Cây long não</th><th>Tổng cộng</th></tr>
<tr><td>Số lượng cây</td><td>x $(x \in \mathbb{N})$</td><td>y $(y \in \mathbb{N})$</td><td>$x+y$</td></tr>
<tr><td>Chi phí mua trồng</td><td>$30x$ (USD)</td><td>$40y$ (USD)</td><td>$30x+40y$ (USD)</td></tr>
<tr><td>Diện tích đòi hỏi</td><td>$6x$ (m^2)</td><td>$9y$ (m^2)</td><td>$6x+9y$ (m^2)</td></tr>
<tr><td>Lượng khí cacbonic hấp thụ</td><td>$300x$ (kg)</td><td>$150y$ (kg)</td><td>$300x+150$ (kg)</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Số 2</td><td>Biết được cách giải bài toán
Mục đích: Năng lực thực hiện quá trình GQVĐ; năng lực lựa chọn, đề xuất được cách thức, giải pháp giải quyết vấn đề;</td></tr>
<tr><td>Số 3</td><td>Ngoài cách giải đó, phát triển cách giải khác
Mục đích: Phát triển năng lực lựa chọn, đề xuất được cách thức, giải pháp giải quyết vấn đề;</td></tr>
<tr><td>Số 4</td><td>Mục đích: Phát triển năng lực kiểm tra, đánh giá, khái quát hóa và áp dụng thực tiễn.</td></tr>
</table>

Bài toán 2. *Bác An dự định trồng đậu và cà trên diện tích tối đa 8 sào. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và lãi khoảng 5 triệu đồng trên mỗi sào; còn nếu trồng cà thì cần 30 công và thu lãi khoảng 7 triệu đồng trên mỗi sào. Biết rằng số công bác An bỏ ra không quá 180. Hỏi bác An phải trồng mỗi loại cây trên diện tích bao nhiêu để số tiền thu về là nhiều nhất?*

1) Tóm tắt lại bài toán bằng cách trả lời các câu hỏi sau và sử dụng các ký hiệu toán học:

Các biến cần phải xác định của bài toán là những biến nào?

Hãy hoàn thành thông tin cho bảng sau:

	Đậu	***Cà***	**Tổng cộng**
Diện tích			
Ngày công			
Tiền lãi			

Những ràng buộc (điều kiện) đối với các biến này là gì (viết dưới dạng một hệ các bất phương *trình*)?

Mục tiêu là làm cho tối ưu (lớn nhất) đại lượng nào?

2) Dựa vào những gợi ý ở trên, hãy trình bày một cách giải bài toán đưa ra.

3) Hãy trình bày một cách giải khác so với cách giải trên (nếu có thể).

4) Hãy đưa ra kết luận cuối cùng đối với bài toán đặt ra.

Bài toán 3. *Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 210g đường phèn, 9 lít nước và 24g hương liệu để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế được 1 lít nước cam cần 30g đường, 1 lít nước và 1g hương liệu. Để pha chế được 1 lít nước táo cần 10g đường, 1 lít nước và 4g hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để được số điểm thưởng là lớn nhất?*

1) Tóm tắt lại bài toán bằng cách trả lời các câu hỏi sau và sử dụng các ký hiệu toán học: *Các biến cần phải xác định của bài toán là những biến nào?*

Hãy hoàn thành thông tin cho bảng sau:

	Nước cam	***Nước cam***	***Tổng cộng***
Số lượng			
Đường			
Nước			
Hương liệu			
Điểm thưởng			

Những ràng buộc (điều kiện) đối với các biến này là gì (viết dưới dạng một hệ các bất phương trình)?

Mục tiêu là làm cho tối ưu (lớn nhất) đại lượng nào?

2) Dựa vào những gợi ý ở trên, hãy trình bày một cách giải bài toán đưa ra.

3) Hãy trình bày một cách giải khác so với cách giải trên.

4) Hãy đưa ra kết luận cuối cùng đối với bài toán đặt ra.

3. KẾT LUẬN

Đứng trước sự đổi mới căn bản và toàn diện của giáo dục nói chung và môn toán nói riêng, đòi hỏi người giáo viên phải đi đầu trên con đường kiến thiết tri thức. Đối với bài toán quy hoạch tuyến tính, giáo viên muốn dạy tốt chủ đề này cần định hướng dược các câu hỏi nhằm chỉ dẫn học sinh thực hiện giải bài toán với mục tiêu phù hợp tương ứng các chỉ dẫn đưa ra.

Kết quả nghiên cứu của bài báo cho thấy tính cấp thiết và tầm quan trọng năng lực giải quyết vấn đề của học sinh trong ứng dụng bài toán quy hoạch tuyến tính nói riêng và toán phổ thông nói chung thông qua giải quyết các bài toán thực tế. Từ đó, tạo hứng thú cho người học, cũng cố các kiến thức toán và phù hợp với xu thế ngày nay. Đưa ra những kết luận có ý nghĩa để thúc đẩy dạy học các bài toán thực tế, tăng cường tính ứng dụng toán học trong thực tiễn góp phần nâng cao chất lượng bộ môn Toán.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bộ GD-ĐT (2018a). *Chương trình giáo dục phổ thông - Chương trình tổng thể* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).

2. Bộ GD-ĐT (2018b). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT- BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).

3. G. Polya (2010). *Sáng tạo toán học.* NXB Giáo dục Việt Nam.

4. G. Polya (1997). *Giải một bài toán như thế nào?.* NXB Giáo dục Việt Nam.

5. Borko, H., & Putnam, R. (1996). Learning to teach. In D.C. Berliner, & R.C. Calfee (Eds.), Handbook of Educational Psychology. New York: Simon & Schuster Macmillan, 673-708.

6. Ball, D. L., Thames, M. H., Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5): 389-407.

TÍNH CHIA HẾT CỦA TỔNG VÀ HIỆU CÁC LŨY THỪA

NGUYỄN KIM SỐ
(Hội Toán học Hà Nội)

Trong các phép tính trên số nguyên thì phép chia là đặc biệt nhất. Phép chia có một số tính chất mà các phép toán khác không có. Ví dụ chúng ta có thể tiến hành cộng, trừ, nhân với số 0 nhưng phép chia thì không được. Phép cộng, trừ, nhân trên tập số nguyên cho ta số nguyên nhưng phép chia thì không hẳn vậy. Chính vì tính dị biệt đó mà trong lý thuyết số người ta đã xây dựng hẳn một lý thuyết về phép chia các số nguyên. Trong đó có sự góp mặt với rất nhiều công trình của các nhà toán học nổi tiếng như *Pierre de Fermat*, *Leonhard Euler*, *Johann Carl Friedrich Gauss*, … và cho tới tận bây giờ vẫn còn nguyên giá trị.

Khi làm việc với các bài toán liên quan đến phép chia hết, phép chia có dư thì khó khăn nhất đối với học sinh là những bài toán có chứa lũy thừa bởi việc phân tích, đánh giá rất phức tạp. Nhiều bài toán vượt ra ngoài khả năng tính toán của con người (hiện tại) bởi số liệu lớn. Khi đó chỉ còn cách vận dụng thông minh, khéo léo các tính chất, các định lý số học, … để chỉ ra tính đúng đắn của bài toán đã cho. Bài viết này sẽ tìm hiểu và khai thác một số bài toán như vậy. Trước tiên chúng ta nhắc lại một số kiến thức cần thiết.

1. Khái niệm đồng dư thức

Cho số nguyên dương m và các số nguyên a, b. Nếu khi chia a và b cho m ta được cùng một số dư thì ta nói a đồng dư với b theo modulo m. Kí hiệu $a \equiv b \pmod{m}$.

2. Định lý Fermat nhỏ

Cho p là số nguyên tố, khi đó với mọi số nguyên a thì $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Đặc biệt, nếu a không chia hết cho p thì:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

3. Định lý Euler

Cho n là số nguyên dương bất kỳ và a là số nguyên tố cùng nhau với n. Khi đó:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n},$$

trong đó $\varphi(n)$ là phi hàm Euler (được xác định là số các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n).

Chú ý. Nếu n có dạng phân tích chính tắc:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

thì $\varphi(n) = n\left(1-\dfrac{1}{p_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\dfrac{1}{p_k}\right).$

4. Bổ đề LTE (Lifting The Exponent Lemma)

• Cho p là số nguyên tố, a là số nguyên và α là số tự nhiên. Ta gọi p^α là lũy thừa đúng của a và α là số mũ đúng của p trong khai triển của a nếu $p^\alpha \mid a$ nhưng $p^{\alpha+1} \nmid a$. Khi đó ta ký hiệu:

$$p^\alpha \parallel a \text{ hoặc } v_p(a) = \alpha.$$

• Bổ đề LTE

+ Bổ đề cho số nguyên tố p lẻ

Cho $a, b \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ và p là số nguyên tố lẻ thỏa mãn: $p \mid (a-b)$ và $p \nmid a$, $p \nmid b$. Khi đó:

$$v_p\left(a^n-b^n\right)=v_p\left(a-b\right)+v_p\left(n\right).$$

Đặc biệt khi $2\nmid n$ và p là số nguyên tố lẻ sao cho $p\mid(a+b)$ và $p\nmid a,\ p\nmid b$. Khi đó:

$$v_p\left(a^n+b^n\right)=v_p\left(a+b\right)+v_p\left(n\right).$$

+ **Bổ đề cho số nguyên tố chẵn $p = 2$**

Cho $a,b\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}^*$ và thỏa mãn: $2\mid n$ và $2\nmid a,\ 2\nmid b$. Khi đó:

$$v_2\left(a^n-b^n\right)=v_2\left(a+b\right)+v_2\left(a-b\right)+v_2\left(n\right)-1.$$

Bây giờ chúng ta cùng xem xét dấu hiệu đặc trưng cũng như kết hợp sử dụng các kiến thức nêu trên để giải quyết một số bài toán dưới đây.

Bài toán 1. *Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n để 2024^n-1 chia hết cho n.*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng dãy $\{u_n\}$ xác định bởi:

$$\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=2024^{u_n}-1\end{cases}$$

sẽ thỏa mãn điều kiện $2024^{u_n}-1$ chia kết u_n.

Thật vậy:

Với $n = 1$, khi đó $u_1 = 1$ và hiển nhiên

$$2024^{u_1}-1=2023\ \vdots\ 1.$$

Giả sử bài toán đúng tới $n = k$, nghĩa là:

$$\left(2024^{u_k}-1\right)\text{ chia kết } u_k.$$

Khi đó ta có:

$$u_{k+1}=2024^{u_k}-1=v.u_k\ \ (v\in\mathbb{N}^*).$$

$$\Rightarrow 2024^{u_{k+1}}-1=2024^{v.u_k}-1$$

$$=\left(2024^{u_k}\right)^v-1\ \vdots\ (2024^{u_k}-1)$$

hay $\left(2024^{u_{k+1}}-1\right)\vdots\ u_{k+1}$. Nghĩa là khẳng định cũng đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp khẳng định đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Để ý rằng $\{u_n\}$ là dãy tăng vô hạn nên bài toán được chứng minh.

Với số tự nhiên $a > 2$, bằng cách quy nạp tương tự như trên chúng ta cũng xây dựng được một dãy tăng $\{u_n\}$ xác định bởi: $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=a^{u_n}-1\end{cases}$ sẽ thỏa mãn điều kiện $a^{u_n}-1$ chia kết u_n. Ta có kết quả tổng quát hơn.

Bài toán 2. *Cho a là một số tự nhiên lớn hơn 2. Khi đó luôn tồn tại vô số số nguyên dương n để a^n-1 chia hết cho n.*

Vấn đề đặt ra ở đây là tại sao a phải lớn hơn 2?

Câu trả lời không khó bởi lẽ với $a = 2$ thì dãy $\{u_n\}$ xác định như trên không phải là dãy tăng, cụ thể là $u_n=1,\forall n\in\mathbb{N}^*$, và khi đó bài toán không còn đúng nữa.

Bài toán 3. *Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên dương n nào để (2^n-1) chia hết cho n.*

Lời giải.

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. Cho p là một số nguyên tố lẻ, d là số nguyên dương nhỏ nhất để $(2^d-1)\vdots p$ và m là số nguyên dương thỏa mãn $(2^m-1)\vdots p$. Khi đó $m\vdots d$.

Chứng minh. Thật vậy, vì $m\geq d$ nên ta có biểu diễn: $m=k.d+r\ \ (0\leq r<d)$.

Khi đó: $(2^m-1)-(2^r-1)=2^m-2^r$

$$=2^{k.d+r}-2^r=2^r(2^{k.d}-1)$$

$$=2^r[\left(2^d\right)^k-1)]\ \vdots\ (2^d-1)$$

$$\Rightarrow(2^m-1)-(2^r-1)\ \vdots\ p\Rightarrow(2^r-1)\ \vdots\ p.$$

Do d là số nhỏ nhất và $0\leq r<d\Rightarrow r=0$.

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán:

Giả sử phản chứng: n là số nguyên, $n\geq 2$ mà $(2^n-1)\vdots\ n\ \Rightarrow n$ lẻ. Gọi p là ước số nguyên tố bé nhất của n, khi đó: $(2^n-1)\ \vdots\ p$.

Theo định lý Fermat bé thì $(2^{p-1}-1) \vdots p$.

Gọi d là số nguyên dương nhỏ nhất mà $(2^d-1) \vdots p$ thì theo bổ đề trên suy ra:

$$\begin{cases} n \vdots d \\ p-1 \vdots d \end{cases}.$$

Nhưng $(n; p-1) = 1$ vì n không có ước số nào bé hơn $p \Rightarrow d = 1$. Khi đó $(2^1-1) \vdots p \Rightarrow p = 1$. Mâu thuẫn! Vậy điều giả sử phản chứng là sai. Bài toán được chứng minh.

Đến đây có thể thấy chìa khóa để giải các bài toán trên dựa vào kết quả rất đơn giản: *Với mọi a, b nguyên, n nguyên dương và $a \neq b$ thì* $\left(a^n-b^n\right) \vdots (a-b)$. Điều đó gợi thêm cho chúng ta một ý tưởng về cách sử dụng bổ đề LTE để giải quyết một số bài toán liên quan đến tính chia hết của $\left(a^n-b^n\right)$ hoặc $\left(a^n+b^n\right)$.

Bài toán dưới đây là một ví dụ điển hình của ứng dụng bổ đề LTE trong giải toán mà việc sử dụng các phương pháp khác có thể không dễ chút nào.

Bài toán 4. *Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n để 2024^n+1 chia hết cho n.*

Lời giải. Để ý rằng $2024 + 1 = 2025 = 3^4.5^2$. Ta sẽ chứng minh tất cả các số n có dạng $n = 3^k$ đều thỏa mãn $(2024^n+1) \vdots n$.

Thật vậy, vì $n = 3^k$ là một số lẻ nên sử dụng bổ đề LTE ta có:

$$\begin{aligned} v_3\left(2024^n+1\right) &= v_3\left(2024+1\right)+v_3\left(n\right) \\ &= v_3\left(2025\right)+v_3\left(n\right) = 4+v_3\left(n\right) \\ &= 4+k. \end{aligned}$$

Rõ ràng: $4 + k > k \Rightarrow n = 3^k \mid \left(2024^n+1\right)$. Bài toán được chứng minh.

Ngoài ra chúng ta có thể xét các số n có dạng $n = 5^k$ cũng thu được kết quả tương tự.

Để kết lại cho bài viết này chúng tôi đưa ra một số bài tập tự luyện. Hi vọng rằng những nội dung ở trên sẽ giúp ích được các bạn, nhất là các em học sinh, sinh viên trong quá trình học tập cũng như nghiên cứu sau này.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tập 1. (*Tổng quát hóa của Bài toán* 1 *& Bài toán* 2)

Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a \geq 2 + b$. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n để a^n-b^n chia hết cho n.

Bài tập 2. (*Tổng quát hóa của Bài toán* 4)

Cho a là số nguyên dương lớn hơn 1 và không có dạng $2^m - 1$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$). Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n để (a^n+1) chia hết cho n.

Bài tập 3. (*Trích câu 3.b, đề thi chọn HSG lớp* 12, *tỉnh Vĩnh Long – năm học* 2019-2020)

Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n để $\left(2^n+1\right)$ chia hết cho n.

Bài tập 4. (*Trích đề thi vô địch toàn Liên Xô – lớp* 8, *năm* 1978)

Chứng minh rằng với bất kỳ số tự nhiên n nào thì $\left(1978^n-1\right)$ không thể chia hết cho $\left(1000^n-1\right)$.

Bài tập 5. (*Trích câu* 4, *đề thi IMO* 1999 *tại Bucharest - Romania*)

Tìm tất cả các cặp (n, p) nguyên dương và p là số nguyên tố sao cho:

$$n^{p-1} \mid (p-1)^n+1.$$

CÁC LỚP THCS

Bài T1/561 (Lớp 6). Cho biểu thức

$$S=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\ldots+\frac{2025}{4^{2025}}.$$

Chứng minh rằng $S<\frac{1}{2}$.

TẠ MINH HIẾU

(GV THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

Bài T2/561 (Lớp 7). Cho a, b là các số nguyên thỏa mãn $M=4a^2+b^2+2ab+4b+2$ chia hết cho 5. Tìm số dư khi chia $2023(a-b)+2024$ cho 5.

NGUYỄN NGỌC HÙNG

(GV THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Bài T3/561. Gọi H là tập hợp gồm 7 điểm phân biệt $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ bất kỳ thuộc hình tròn tâm O bán kính $R = 2024$. Với mỗi $i, j\in\{1,2,3,\ldots,7\}$, ký hiệu $d(A_i, A_j)$ là khoảng cách giữa hai điểm A_i, A_j. Gọi

$$\mu(H)=\min\{d(A_i,A_j)\,|\,1\le i,j\le 7\}.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của $\mu(H)$.

NGUYỄN VĂN CẢNH

(GV THCS Long Hậu, Cần Giuộc, Long An)

Bài T4/561. Cho tam giác ABC (AB khác AC) ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (O) với các cạnh BC, AB và AC. H là giao điểm của DE với BO, I là giao điểm của FE với AO. Qua E vẽ đường thẳng song song với BC cắt HI tại K. Chứng minh ba điểm A, K, D thẳng hàng.

ĐÀO QUỐC CHUNG

(GV THCS Vạn Phong, Diễn Châu, Nghệ An)

Bài T5/561. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $0<x\le y<z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{x}(y-z)+\frac{1}{y}(z+x)+\frac{1}{z}(y-x).$$

LẠI QUANG THỌ

(Phong GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/561. Không sử dụng công thức nghiệm cho phương trình bậc ba, giải phương trình sau trên tập số thực:

$$2x^3-6x+5=0.$$

TRẦN VĂN LÂM

(Thái Nguyên)

Bài T7/561. Không dùng máy tính hay bảng số, hãy tính $\sin 3^0$.

LÊ HUY

(TP. Bến Tre)

Bài T8/561. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) với M là trung điểm của BC và đường tròn (M, MB) cắt lại AB, AM, AC lần lượt tại P, K, Q. Tia KP cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác BMP tại E và tia KQ cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác CMQ tại F. Gọi J là trung điểm của EF. Chứng minh JM vuông góc với BC.

LA ĐẠI CƯƠNG

(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Bài T9/561. Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a + b + c = 100$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P=a^2b+b^2c+c^2a+abc.$$

HOÀNG NGỌC MINH

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/561. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1=5 \\ u_{n+1}=3u_n-2^n, \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $25 | u_p$.

BÙI VĂN PHÚC

(*GV THPT chuyên Hà Giang*)

Bài T11/561. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left((x+y)^2\right)=x^2+2xf(y)+\left(f(y)\right)^2,$$

với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

BÙI VĂN BÌNH

(*GV THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa*)

Bài T12/561. Gọi L là điểm Lemoine của tam giác ABC. M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. K là điểm đẳng giác của L đối với tam giác MNP. Chứng minh K thuộc đường thẳng Euler của tam giác ABC.

NGUYỄN MINH HÀ

(*Hà Nội*)

Bài L1/561 Hai điểm A, B nằm trên cùng một đường thẳng đi qua nguồn âm S và ở cùng một phía so với nguồn âm. Coi nguồn âm là đẳng hướng và môi trường không hấp thụ âm. Biết mức cường độ âm tại A là L_A = 50 dB, tại B là L_B = 30 dB. Cho C là một điểm trên đoạn AB mà $CB = 2CA$. Tính mức cường độ âm tại C là

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/561. Đoạn mạch AB gồm biến trở, cuộn cảm thuần và tụ điện mắc nối tiếp. Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện áp $u=U\sqrt{2}\cos\omega t$ (V). Khi $R=R_0$ thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB đạt cực đại bằng P_m. Khi $R=R_1$ hoặc $R=R_2$ thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB bằng nhau bằng 120 W và có hệ số công suất tương ứng là $k_1=0{,}6$ và $k_2=0{,}8$. Tính giá trị của P_m.

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/561 (For 6th grade). Let

$$S=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\ldots+\frac{2025}{4^{2025}}.$$

Show that $S<\frac{1}{2}$.

Problem T2/561 (For 7th grade). Let a, b be integers so that $M=4a^2+b^2+2ab+4b+2$ is divisible by 5. Find the remainder when divide $2023(a-b)+2024$ by 5.

Problem T3/561. Let H be a set of arbitrary 7 different points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 lying inside or on the circle O with diameter R = 2024. For each pair $i,j\in\{1,2,3,\ldots,7\}$, denote $d(A_i, A_j)$ the distance between two points A_i, A_j. Let

$$\mu(H)=\min\left\{d(A_i,A_j)\,|\,1\le i,j\le 7\right\}.$$

Find the maximum value of $\mu(H)$.

Problem T4/561. Given a triangle ABC with the lengths of AB and AC are different and (O) is its incircle. Let D, E, F respectively be the touch points between (O) and BC, AB, AC. Let H be the intersection between DE and BO, and I the intersection between FE and AO. The line passing through E and parallel to BC intersects HI at K. Show that A, K, D are collinear.

Problem T5/561. Given real numbers x, y, z satisfying $0<x\le y<z$. Find the minimum value of the expression

$$P=\frac{1}{x}(y-z)+\frac{1}{y}(z+x)+\frac{1}{z}(y-x).$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/561. Without using the cubic formula, find the real roots of the equation

$$2x^3-6x+5=0.$$

Problem T7/561. Without using a calculator or a mathematical table, compute $\sin 3^0$.

(*Xem tiếp theo trang 38*)

Bài T1/557. *Tìm các cặp số nguyên $(a;\, b)$ thỏa mãn $a^4 - 3a^2 = 3 + 2^b$.*

Lời giải. Với a; b là các số nguyên thì $a^4 - 3a^2 - 3$ là số nguyên nên $a^4 - 3a^2 - 3 = 2^b$ phải là số nguyên.

Nếu b là số nguyên âm thì 2^b là phân số, suy ra b là số nguyên không âm.

Nếu b là số nguyên dương thì 2^b là số chẵn, từ đó $a^2(a^2 - 3) - 3$ là số chẵn.

Nếu a là số chẵn thì $a^2(a^2 - 3)$ là số chẵn nên $a^2(a^2 - 3) - 3$ là số lẻ, không thỏa mãn. Nếu a là số lẻ thì $a^2 - 3$ là số chẵn nên $a^2(a^2 - 3) - 3$ là số lẻ, không thỏa mãn. Vậy b không thể là số nguyên dương và chỉ có thể $b = 0$. Với $b = 0$ thì

$$3 + 2^b = 3 + 1 = 4$$

và có $\qquad a^2(a^2 - 3) = 4.$

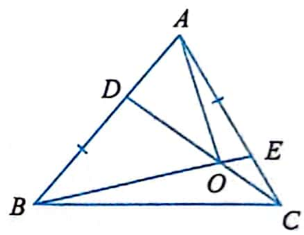
Do $a^2 > a^2 - 3$ và $a^2 \geq 0$ nên từ $a^2(a^2 - 3) = 4.1$ chỉ xảy ra $a^2 = 4$ và $a^2 - 3 = 1$, suy ra $a = 2$ hoặc $a = -2$. Thử lại thấy $b = 0$ và $a = 2$ hoặc $a = -2$ đều thỏa mãn đề bài. Vậy bài toán có hai nghiệm $(a;\, b)$ là $(2;\, 0)$ và $(-2;\, 0)$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng. **Phú Thọ:** *Vũ Huy Hoàng*, 6A, THCS Hùng Vương, TX. Phú Thọ; *Phan Hoàng Dương*, *Nguyễn Linh Vân*, 6C, THCS Thị Trấn 2, Yên Lập; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Duy Mạnh Lương*, 6A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Nghệ An:** *Ngô Hoàng Bách*, *Nguyễn Đức Bảo Nam*, 6A, *Võ Huyền Trang*, 6C, *Nguyễn Hồ Khánh Ngân*, 6D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Nguyễn Sỹ Bảo Long*, *Phạm Nguyễn Nguyệt Linh*, *Nguyễn Kim Tuấn Kiệt*, 6B, *Nguyễn Thị Kim Ngân*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Phạm Đan Lê*, *Ngô Đức Hiếu*, *Đồng Văn Hoàng Phong*, *Hoàng Thị Phương Chi*, *Đào Thị Diệu Huyền*, *Nguyễn Nam Quân*, *Võ Quang Thành Công*, *Nguyễn Minh Quân*, *Trần Đình Việt Anh*, *Nguyễn Lương Đại*, *Nguyễn Trương Tú Anh*, *Nguyễn Thị Hà Bảo Chi*, *Trịnh Thị Tường Vy*, *Phan Đăng Khôi*, *Nguyễn Hoàng Vương*, 6D, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** *Liên Vương Long*, 6A1, THCS Nguyễn Nghiêm, TP Quảng Ngãi; *Huỳnh Diễm Quỳnh*, 6B, THCS Phạm Văn Đồng, *Trần Văn Phụng*, 6C, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/557. *Cho tam giác ABC. Các điểm D, E lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC. Gọi O là giao điểm của BE và CD. Biết rằng $AE = BD$, $\dfrac{AD}{CE} = \dfrac{10}{9}$, diện tích các tam giác ABC và OBC lần lượt là 10cm^2 và 3cm^2. Tính tỷ số $\dfrac{AD}{BD}$.*

Lời giải. Đặt $S_{OAC} = x$.



Ta có:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{S_{OAC}}{S_{OBC}} = \frac{x}{3}$$

và $\dfrac{AE}{CE} = \dfrac{S_{OAB}}{S_{OBC}} = \dfrac{10 - x - 3}{3} = \dfrac{7 - x}{3}$ (*).

Do đó $\dfrac{AD}{BD} \cdot \dfrac{AE}{CE} = \dfrac{x}{3} \cdot \dfrac{7 - x}{3}$.

Vì $\dfrac{AD}{BD} \cdot \dfrac{AE}{CE} = \dfrac{AE}{CE} \cdot \dfrac{AD}{BD} = 1 \cdot \dfrac{10}{9}$, suy ra:

$$\frac{x}{3} \cdot \frac{7-x}{3} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) = 0.$$

Ta được $x = 2$ và $x = 5$. Thay vào (*) ta có:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{2}{3} \text{ hoặc } \frac{AD}{BD} = \frac{5}{3}.$$

Nhận xét. Có một bạn gửi lời giải nhưng lại tính nhầm ra đáp số sai.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/557. *Tìm hệ thức liên hệ giữa các số a, b, c (không phụ thuộc vào x, y, z) biết*

$$a = b\frac{z}{y} + c\frac{y}{z},\ b = c\frac{y}{x} + a\frac{x}{y},\ c = a\frac{x}{z} + b\frac{z}{x}.$$

Lời giải. Từ $a = b\frac{z}{y} + c\frac{y}{z}$, ta có:

$$a^3 = \left(b\frac{z}{y}\right)^3 + \left(c\frac{y}{z}\right)^3 + 3bc\left(b\frac{z}{y} + c\frac{y}{z}\right)$$
$$= \left(b\frac{z}{y} + c\frac{y}{z}\right)\left(b^2\frac{z^2}{y^2} + c^2\frac{y^2}{z^2} - bc\right) + 3abc$$
$$= a\left(b^2\frac{z^2}{y^2} + c^2\frac{y^2}{z^2} - bc\right) + 3abc.$$

Suy ra: $a^3 = ab^2\frac{z^2}{y^2} + ac^2\frac{y^2}{z^2} + 2abc$ (1).

Biến đổi tương tự, ta có:

$$b^3 = bc^2\frac{y^2}{x^2} + ba^2\frac{x^2}{y^2} + 2abc \quad (2);$$

$$c^3 = ca^2\frac{x^2}{z^2} + cb^2\frac{z^2}{x^2} + 2abc \quad (3).$$

Cộng theo vế của (1), (2), (3), ta có:

$$a^3 + b^3 + c^3 = ab^2\frac{z^2}{y^2} + ac^2\frac{y^2}{z^2} + bc^2\frac{y^2}{x^2} + ba^2\frac{x^2}{y^2} + ca^2\frac{x^2}{z^2} + cb^2\frac{z^2}{x^2} + 6abc.$$

Mặt khác:

$$abc = \left(b\frac{z}{y} + c\frac{y}{z}\right)\left(c\frac{y}{x} + a\frac{x}{y}\right)\left(a\frac{x}{z} + b\frac{z}{x}\right)$$
$$= 2abc + \left(ab^2\frac{z^2}{y^2} + ac^2\frac{y^2}{z^2} + bc^2\frac{y^2}{x^2} + ba^2\frac{x^2}{y^2} + ca^2\frac{x^2}{z^2} + cb^2\frac{z^2}{x^2}\right).$$

Cho nên:

$$ab^2\frac{z^2}{y^2} + ac^2\frac{y^2}{z^2} + bc^2\frac{y^2}{x^2} + ba^2\frac{x^2}{y^2} + ca^2\frac{x^2}{z^2} + cb^2\frac{z^2}{x^2} = -abc.$$

Từ đó, ta nhận được: $a^3 + b^3 + c^3 = 5abc$.

Nhận xét. Bài này rất ít các bạn tham gia gửi bài. Một cách làm khác như sau: Từ ba hệ thức đã cho, tính được: $\frac{z}{y} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2b}; \frac{y}{x} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c};$

$$\frac{x}{y} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}.$$

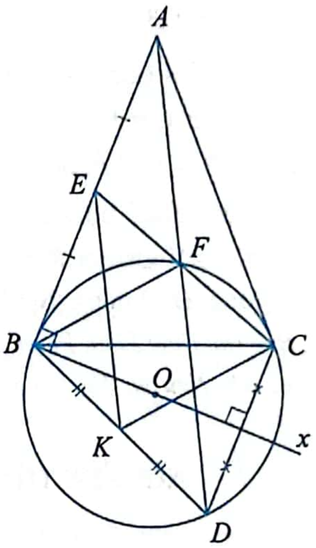
Do $\frac{z}{y}.\frac{y}{x}.\frac{x}{z} = 1$ nên dẫn đến hệ thức giữa a, b, c không phụ thuộc x, y, z. Tuy nhiên, với cách này kết quả đưa ra còn quá phức tạp. Tuyên dương các bạn sau:

Hưng Yên: *Lê Tuấn Hiệp*, 8C, THCS Đoàn Thị Điểm, Yên Mỹ; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/557. *Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ tia Bx vuông góc với BA. Gọi D là điểm đối xứng của C qua Bx, E là trung điểm của cạnh AB. CE cắt AD tại F. Chứng minh tứ giác BDCF nội tiếp trong một đường tròn.*

Lời giải.



Cách 1. Theo giả thiết ta có ΔDBC cân tại B. Gọi K là trung điểm của BD. Ta có:

$$\frac{\widehat{CBD}}{2} = \widehat{CBx} = 90° - \widehat{CBA} = \frac{\widehat{BAC}}{2}.$$

Từ đó suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta BDC$ (g.g).

Vì E, K lần lượt là trung điểm của AB, BD, theo tính chất tam giác đồng dạng, ta có:

$$\Delta\, CEA \backsim \Delta\, CKB.$$

Do đó $\widehat{CKB} = \widehat{CEA}$. Suy ra tứ giác $BKCE$ là tứ giác nội tiếp.

Mặt khác, EK là đường trung bình của tam giác ABD nên $KE \,//\, AD$. Ta có:

$$\widehat{DFC} = \widehat{AFE} = \widehat{FEK} \quad (1).$$

Vì tứ giác $BKCE$ nội tiếp nên $\widehat{CEK} = \widehat{CBK}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CFD} = \widehat{CBD}$, do đó tứ giác $BDCF$ là tứ giác nội tiếp.

Cách 2. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD, vì tam giác BCD cân tại B nên $O \in BX$. Suy ra AB, AC tiếp xúc với đường tròn (O) tại B, C tương ứng. Gọi F_1 là giao điểm thứ hai của AD với (O), E_1 là giao điểm của CF_1 với AB. Dễ thấy $\widehat{F_1BE_1} = \widehat{BCF_1}$, suy ra:

$$\Delta E_1BF_1 \backsim \Delta E_1CB \text{ (g.g)},$$

dẫn tới $E_1F_1.\, E_1C = E_1B^2$ (3).

Mặt khác, từ $\widehat{ABC} = \widehat{BDC}$ ta có $\widehat{BAC} = \widehat{DBC}$.

Suy ra $\widehat{AF_1E_1} = \widehat{CF_1D} = \widehat{CBD} = \widehat{E_1AC}$.

Suy ra $\Delta AE_1F_1 \backsim \Delta CE_1A$ (g.g), từ đó ta có:

$$E_1F_1.\, E_1C = E_1A^2 \ \ (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra $E_1A = E_1B$, do đó $E_1 \equiv E$, nên $F_1 \equiv F$. Tức là tứ giác $BDCF$ nội tiếp.

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt đều đến từ trường THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An:** *Hoàng Văn Nhân*, 9C, *Bùi Thị Thùy Linh*, *Phạm Xuân Hoàng*, *Nguyễn Văn Lâm*, 9A, *Nguyễn Thị Băng Tâm*, *Nguyễn Tất Han*, 8C.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/557. *Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn* $a < b$ *và* $\frac{1+ab}{b-a} \le \sqrt{3}$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P = \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{a(a+b)}$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $\sqrt{3}b \ge \sqrt{3}a + ab + 1$ tương đương với $\frac{\sqrt{3}b}{a} \ge \sqrt{3} + b + \frac{1}{a}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ở vế phải, ta có:

$$\frac{\sqrt{3}b}{a} \ge \sqrt{3} + b + \frac{1}{a} \ge 3\sqrt[3]{\sqrt{3}.\frac{b}{a}}.$$

Dẫn tới $\frac{b}{a} \ge 3$. Từ đây suy ra:

$$P = \frac{(1-ab)^2 + (a+b)^2}{a(a+b)}$$
$$\ge \frac{(a+b)^2}{a(a+b)} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$
$$\ge 4.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{a} = b = \sqrt{3}$, đồng thời $1 - ab = 0$. Hệ phương trình này tương đương với $a = \frac{\sqrt{3}}{3}, b = \sqrt{3}$.

Giá trị nhỏ nhất của P là 4, đạt được khi

$$a = \frac{\sqrt{3}}{3}, b = \sqrt{3}.$$

Nhận xét. Ngoài cách giải trên, từ giả thiết ta suy ra

$$\sqrt{3}b - 1 \ge a\left(b + \sqrt{3}\right) > 0 \text{ nên } \frac{1}{a} \ge \frac{b+\sqrt{3}}{\sqrt{3}b - 1}.$$

Từ đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được:

$$\frac{b}{a} \ge \frac{b^2 + \sqrt{3}b}{\sqrt{3}b - 1} = \frac{b^2 + 3 + \sqrt{3}b - 3}{\sqrt{3}b - 1}$$
$$\ge \frac{2\sqrt{3}b + \sqrt{3}b - 3}{\sqrt{3}b - 1} = 3.$$

Từ đây thì tương tự như lời giải trên, ta suy ra $P \ge 4$. Ngoài ra thì bất đẳng thức $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right) = \left(1+a^2\right)\left(b^2+1\right) \ge (a+b)^2$ thu được từ bất đẳng thức Bunhyakovsky.

Bài toán này dễ, nhưng không có nhiều học sinh tham gia giải. Tất cả các lời giải tới toà soạn đều đúng, tuy nhiên có một lời giải bị nhầm số trong phần kết luận dấu bằng xảy ra. Các bạn cần thật cẩn thận kiểm tra kĩ lưỡng lại rồi mới gửi bài.

Các bạn sau có lời giải đúng: *Nguyễn Chánh Thiện*, 9/12, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3, **TP. Hồ Chí Minh;** *Phạm Xuân Hoàng*, *Nguyễn Văn Lâm*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**, *Lương Thanh Nhã*, 9B, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi.**

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T6/557. *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{x^4-4x^3+6x^2-3x}+3\sqrt{x-1}+x=5+\sqrt[3]{2}.$$

Lời giải. Điều kiện $x\ge 1$. Phương trình tương đương với

$$\sqrt[3]{(x-1)^4+x-1}+3\sqrt{x-1}+x-1=4+\sqrt[3]{2}.$$

Đặt $t=x-1,\quad t\ge 0$. Phương trình trở thành:

$$\sqrt[3]{t^4+t}+3\sqrt{t}+t=4+\sqrt[3]{2}\quad (*)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{t^4+t}-\sqrt[3]{2}\right)+3\left(\sqrt{t}-1\right)+(t-1)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{t^4+t-2}{\sqrt[3]{\left(t^4+t\right)^2}+\sqrt[3]{2\left(t^4+t\right)}+\sqrt[3]{4}}+\frac{3(t-1)}{\sqrt{t}+1}+(t-1)=0$$

$$\Leftrightarrow(t-1)\left(\frac{t^3+t^2+t+2}{\sqrt[3]{\left(t^4+t\right)^2}+\sqrt[3]{2\left(t^4+t\right)}+\sqrt[3]{4}}+\frac{3}{\sqrt{t}+1}+1\right)=0.$$

Vì $t\ge 0$ nên

$$\frac{t^3+t^2+t+2}{\sqrt[3]{\left(t^4+t\right)^2}+\sqrt[3]{2\left(t^4+t\right)}+\sqrt[3]{4}}+\frac{3}{\sqrt{t}+1}+1>0,$$

ta được $t-1=0\Leftrightarrow t=1$ hay $x-1=1$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=2$.

Nhận xét. 1) Dễ thấy

$$t^4+t-2=(t-1)\left(t^3+t^2+t+2\right).$$

2) Trong các bài toán có chứa căn thức, ta rất hay sử dụng các đẳng thức:

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}\quad (A,B\ge 0;\ A+B>0);$$

$$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\frac{A+B}{\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}\quad \left(A^2+B^2>0\right);$$

$$\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\frac{A-B}{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}\quad \left(A^2+B^2>0\right).$$

3) Hầu hết các bạn có bài giải đúng và làm theo cách trên. Một số bạn không sử dụng phép đặt $t=x-1,\quad t\ge 0$ nên việc biến đổi phức tạp hơn.

4) Có thể thấy vế trái của phương trình (*), hàm số $f(t)=\sqrt[3]{t^4+t}+3\sqrt{t}+t$ đơn điệu tăng và

$$f(1)=4+\sqrt[3]{2}=\text{VP};$$

$$t>1\Rightarrow f(t)>\text{VP};\quad t<1\Rightarrow f(t)<\text{VP}.$$

Do đó $t=1$ là nghiệm duy nhất của (*).

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Hà Tĩnh: *Bùi Văn Dũng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Băng Tâm*, 8C, *Hoàng Thái Thượng*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương , *Ngô Văn Trường*, 10A1, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai; **Quảng Bình:** *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, *Nguyễn Thanh Hải*, *Đỗ Thị Thanh Thảo*, *Đoàn Ngọc Duy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Gia Lai:** *Nguyễn Gia Bảo*, 10A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, TP. Pleiku; **Phú Thọ:** *Trần Ngọc Tú*, *Nguyễn Tiến Mạnh*, 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Sóc Trăng:** *Trương Vĩnh Thọ*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Đà Nẵng:** *Huỳnh Bá Anh Tuấn*, lớp 11, THPT Hoàng Hoa Thám, Sơn Trà.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/557. *Tính các góc của tam giác ABC biết*

$$5\cot A+8\cot B+9\cot C=12\quad (1).$$

Lời giải (Của *Bùi Văn Dũng* và *Phạm Thị Mỹ Hạnh*). Trước tiên ta chứng minh

Bổ đề *Trong mọi tam giác ABC ta luôn có*

$$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1.\quad (*)$$

Chứng minh. Vì $\widehat{A}+\widehat{B}=180^0-\widehat{C}$ nên

$$\cot(A+B)=\cot\left(180^0-C\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}=-\cot C$$

$$\Leftrightarrow\cot A\cot B-1=-\cot A\cot C-\cot B\cot C$$

$$\Leftrightarrow\cot A\cot B+\cot A\cot C+\cot B\cot C=1.$$

Vậy bổ đề được chứng minh.

Kết hợp bổ đề với giả thiết (1), ta có:

$$(5\cot A+8\cot B+9\cot C)^2=144$$

$$\Leftrightarrow 25\cot^2 A+64\cot^2 B+81\cot^2 C+80\cot A\cot B+90\cot A\cot C+144\cot B\cot C$$

$$=144(\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot A\cot C)$$

$$\Leftrightarrow 25\cot^2 A+64\cot^2 B+81\cot^2 C-64\cot A\cot B-54\cot A\cot C=0$$

$$\Leftrightarrow 16(\cot A-2\cot B)^2+9(\cot A-3\cot C)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\cot A=2\cot B=3\cot C.$$

Sử dụng đẳng thức (1) của đầu bài, ta đi đến:

$$\cot A = 1, \cot B = \frac{1}{2}, \cot C = \frac{1}{3}.$$

Vậy ta có đáp số: $\widehat{A} = 45^o$,

$$\widehat{B} = \text{arccot}\frac{1}{2} \approx 63^o26'5.82'' \approx 63^o26',$$

$$\widehat{C} = \text{arccot}\frac{1}{3} \approx 71^o33'54.18'' \approx 71^o34'.$$

Nhận xét. Bạn *Huỳnh Trần Gia Huy* biến đổi chân phương hơn nên hơi dài hơn cách trên một chút, nhưng là cách giải tốt. Một số bạn sử dụng bất đẳng thức hoặc biến đổi dẫn đến lời giải dài.

Các bạn có tên dưới đây có lời giải tốt:

Hà Tĩnh: *Bùi Văn Dũng* 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Ngô Văn Trường*, 10A1, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh. **Quảng Bình**: *Đoàn Ngọc Duy*, *Nguyễn Thanh Hải*, *Đỗ Thị Thanh Thảo*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T8/557. *Cho tam giác ABC với $\max\{\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}\} < 120^0$. M là điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{BMC} = \widehat{CMA} = \widehat{AMB} = 120^0$. Chứng minh rằng:*

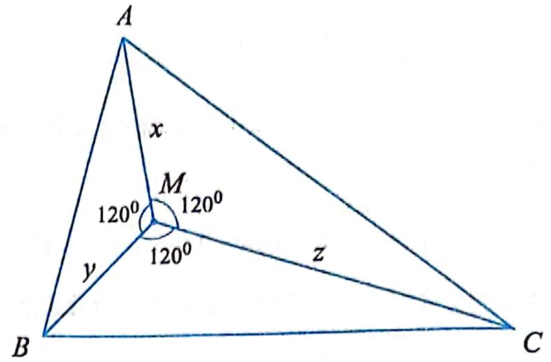
$$\left(\frac{MB+MC-MA}{BC}\right)^2 + \left(\frac{MC+MA-MB}{CA}\right)^2 + \left(\frac{MA+MB-MC}{AB}\right)^2 \geq 1.$$

Lời giải. Đặt $MA = x; MB = y; MC = z$. Sử dụng định lý hàm số côsin cho các tam giác MBC, MCA, MAB ta có: $BC^2 = y^2 + yz + z^2$,

$$CA^2 = z^2 + zx + x^2,\ AB^2 = x^2 + xy + y^2.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh ở đề ra trở thành:

$$\frac{(y+z-x)^2}{y^2+yz+z^2} + \frac{(z+x-y)^2}{z^2+zx+x^2} + \frac{(x+y-z)^2}{x^2+xy+y^2} \geq 1\ (*).$$



Áp dụng bất đẳng thức Schwarz ta có:

$$\frac{(y+z-x)^2}{y^2+yz+z^2} + \frac{x^2}{x(x+y+z)} \geq \frac{(y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx};$$

$$\frac{(z+x-y)^2}{z^2+zx+x^2} + \frac{y^2}{y(x+y+z)} \geq \frac{(z+x)^2}{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx};$$

$$\frac{(x+y-z)^2}{x^2+xy+y^2} + \frac{z^2}{z(x+y+z)} \geq \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta thu được:

$$\frac{(y+z-x)^2}{y^2+yz+z^2} + \frac{(z+x-y)^2}{z^2+zx+x^2} + \frac{(x+y-z)^2}{x^2+xy+y^2} + 1$$
$$\geq \frac{(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2}{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx} = 2.$$

Từ đó ta có:

$$\frac{(y+z-x)^2}{y^2+yz+z^2} + \frac{(z+x-y)^2}{z^2+zx+x^2} + \frac{(x+y-z)^2}{x^2+xy+y^2} \geq 1.$$

Bất đẳng thức (*) được chứng minh. Dễ dàng kiểm tra đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$, lúc đó tam giác ABC đều và M là tâm của tam giác đều ABC.

Nhận xét. Điểm M nói trong đề bài được gọi là *điểm Torricelli* của tam giác ABC. Các bài giải gửi về Toà soạn đều trình bày tương tự như lời giải trên. Các bạn sau có lời giải tốt:

Nghệ An: *Ngô Văn Trường*, 10A1, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai; **Quảng Bình:** *Đoàn Ngọc Duy*, *Nguyễn Thanh Hải*, *Đỗ Thị Thanh Thảo*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế:** *Trương Duy Thái*, 10T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Quảng Ngãi:** *Lương Thanh Nhã*, 9B, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hoà.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/557. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số f(x) trên khoảng* $(0;\ +\infty)$:

$$f(x)=\frac{8(x^2+x)^3+(2x+1)^3}{(2x^2+2x+1)^3}.$$

Lời giải. Cách 1. Viết lại hàm số $f(x)$ dưới dạng:

$$f(x)=\left(\frac{2x^2+2x}{2x^2+2x+1}\right)^3+\left(\frac{2x+1}{2x^2+2x+1}\right)^3=a^3+b^3$$

với $a=\dfrac{2x^2+2x}{2x^2+2x+1}, b=\dfrac{2x+1}{2x^2+2x+1}$.

Vì $x\in(0;\ +\infty)$ nên $a>0$, $b>0$ và $a^2+b^2=1$.

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$(a^3+b^3)(a+b)\ge(a^2+b^2)^2=1\Rightarrow a^3+b^3\ge\frac{1}{a+b};$$

$$2=(a^2+b^2)(1^2+1^2)\ge(a+b)^2\Rightarrow a+b\le\sqrt{2}.$$

Do đó: $a^3+b^3\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Cách 2 (Của bạn *Huỳnh Bá Anh Tuấn*). Ta có:

$$f'(x)=\frac{24(x^2+x)^2(2x+1)+6(2x+1)^2}{(2x^2+2x+1)^3}-\frac{3\left[8(x^2+x)^3+(2x+1)^3\right](2x+2)}{(2x^2+2x+1)^4}.$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1, x=-\frac{1}{2}, x=0, x=\frac{1}{\sqrt{2}}, x=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1.$

Ta có bảng biến thiên của hàm $f(x)$:

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	1

Vậy $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ khi $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Cách 3 (Của bạn *Phạm Thị Mỹ Hạnh*). Theo bất đẳng thức Holder, ta có:

$$2f^2(x)=\left[\left(\frac{2x^2+2x}{2x^2+2x+1}\right)^3+\left(\frac{2x+1}{2x^2+2x+1}\right)^3\right]\times$$

$$\times\left[\left(\frac{2x^2+2x}{2x^2+2x+1}\right)^3+\left(\frac{2x+1}{2x^2+2x+1}\right)^3\right](1+1)$$

$$\ge\left(\sqrt[3]{\left(\frac{2x^2+2x}{2x^2+2x+1}\right)^3.\left(\frac{2x^2+2x}{2x^2+2x+1}\right)^3.1}+\right.$$

$$\left.+\sqrt[3]{\left(\frac{2x+1}{2x^2+2x+1}\right)^3.\left(\frac{2x+1}{2x^2+2x+1}\right)^3.1}\right)$$

$$=\left(\left(\frac{2x^2+2x}{2x^2+2x+1}\right)^2+\left(\frac{2x+1}{2x^2+2x+1}\right)^2\right)$$

$$=\frac{4x^4+8x^3+8x^2+4x+1}{4x^4+8x^3+8x^2+4x+1}=1$$

$\Rightarrow f(x)\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy $\min\limits_{x\in(0;+\infty)} f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Nhận xét. 1) Lời giải bài toán theo cách 1 và cách 3 là tương đối ngắn gọn. Đa số các bạn giải theo cách 1, chỉ có bạn *Tuấn* giải theo cách 2 và bạn *Hạnh* giải cả hai cách là cách 1 và cách 3. Riêng cách 2 dùng đạo hàm yêu cầu kỹ năng biến đổi (tính đạo hàm) và kỹ năng giải phương trình $(f'(x)=0)$ thuần thục.

Danh sách các bạn giải đúng bài này là:

Đà Nẵng: *Huỳnh Bá Anh Tuấn*, 11, THPT Hoàng Hoa Thám, Sơn Trà; **Quảng Bình:** *Phạm Thị Thanh Hải, Đỗ Thị Thanh Thảo*, 12 Toán 1, *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Nghệ An:** *Ngô Văn Trường*, 10A1, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai, *Phạm Xuân Hoàng, Hoàng Thái Thượng*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Thừa Thiên Huế:** *Trương Duy Thái*, 10T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Ngãi:** *Lương Thanh Nhã*, 9B, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/557. *Tìm các số nguyên tố a, b, c, d thỏa mãn phương trình*

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{6\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{a-b\sqrt[3]{c}}{d}}.$$

Lời giải (Dựa trên lời giải của bạn *Đỗ Tiến Dũng*, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa - Vũng Tàu**).

Xét phương trình $\cos 4x=\cos 3x$ (1). Ta có:

$(1)\Leftrightarrow 8\cos^4 x-8\cos^2 x+1=4\cos^3 x-3\cos x$

$\Leftrightarrow(\cos x-1)(8\cos^3 x+4\cos^2 x-4\cos x-1)=0$ (2).

Vì $\frac{2\pi}{7},\frac{4\pi}{7}$ và $\frac{6\pi}{7}$ là nghiệm của (1) nên từ (2) suy ra:

$$t_1=2\cos\frac{2\pi}{7},\ t_2=2\cos\frac{4\pi}{7},\ t_3=2\cos\frac{6\pi}{7}$$

là 3 nghiệm của phương trình:

$$t^3+t^2-2t-1=0.$$

Theo định lý Viète ta có:

$$\begin{cases}t_1+t_2+t_3=-1\\ t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=-2\\ t_1t_2t_3=1\end{cases}\quad(3).$$

Đặt $A=\sqrt[3]{t_1}+\sqrt[3]{t_2}+\sqrt[3]{t_3}$; $B=\sqrt[3]{t_1t_2}+\sqrt[3]{t_2t_3}+\sqrt[3]{t_1t_3}$.

Sử dụng các hệ thức ở (3) ta nhận được:

$$A^3=3AB-4;\ B^3=3AB-5.$$

Do đó: $A^3B^3=(3AB-4)(3AB-5)$

$\Rightarrow(AB-3)^3=-7\Rightarrow AB=3-\sqrt[3]{7}$

$\Rightarrow A^3=3AB-4=3\left(3-\sqrt[3]{7}\right)-4=5-3\sqrt[3]{7}.$

Vậy $a=5;\ b=3;\ c=7;\ d=2.$

Nhận xét. Chỉ có hai bạn tham gia giải bài toán này. Tuy nhiên chỉ có bạn *Dũng* có lời giải đúng

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/557. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2f(x)+y)=3x+f(f(y)-x)$ (1) với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.*

Lời giải (Theo đa số các bạn). Giả sử $f(t)$ thỏa mãn (1). Trong (1) thay y bởi $-2f(x)$ ta thu được:

$$f(0)-3x=f(f(-2f(x))-x),\forall x\in\mathbb{R}\quad(2).$$

Từ (2) suy ra f là toàn ánh. Ta chứng minh f là đơn ánh.

Giả sử $f(a)=f(b)$. Do f là toàn ánh nên tồn tại $c\in\mathbb{R}$ để $f(c)=a+b$.

Từ (1), thay x bởi a và y bởi c ta thu được:

$$f(2f(a)+c)=3a+f(f(c)-a)\quad(3).$$

Và thay x bởi b và y bởi c ta thu được:

$$f(2f(b)+c)=3b+f(f(c)-b)\quad(4).$$

Ta có:

$$f(f(c)-a)=f(a+b-a)=f(b)=f(a)=f(f(c)-b)$$

nên từ (3) và (4) suy ra $a=b$, tức f là đơn ánh.

Trong (1) cho $x=0$ ta thu được:

$$f(2f(0)+y)=f(f(y)),\forall y\in\mathbb{R}$$

hay $f(y)=y+2f(0)$. Thế vào (1) ta thu được $f(0)=0$, tức $f(x)=x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét. Đây là dạng phương trình hàm một biến với cặp biến tự do chứa hệ thức sinh bởi hàm hợp. Đa số các bạn đều có cách giải tương tự dựa vào tính toàn ánh và đơn ánh của f cho kết quả đúng. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bình Định:** *Trần Ngọc Tuyên*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Phước Lương, Nguyễn Viết Thành*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nam Định:** *Phạm Mạnh Định*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 10T1, *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Hải*, 12T1, *Đỗ Thị Thanh Thảo, Đoàn Ngọc Duy, Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Ngọc Gia Bảo*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Lê Thành Đạt*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/557. *Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm và BE, CF là các đường cao của tam giác. M, N lần lượt là trung điểm của AH, EF. P đối xứng với N qua BC.*

a) Chứng minh rằng $\widehat{BMP}=\widehat{NMC}$.

b) Gọi K là giao điểm thứ hai của AN và (O).

Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác PBF, PCE cùng đi qua một điểm trên MK.

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Tấn Nguyên Chương*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**).

Trong lời giải này các kí hiệu XYZ và (XYZ) theo thứ tự chỉ đường thẳng đi qua ba điểm thẳng hàng X, Y, Z và đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng (XYZ); kí hiệu XX chỉ tiếp tuyến tại X của đường tròn (XYZ).

Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC. H là giao điểm của đường cao BE, CF. X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của AH, BC, EF. Khi đó*

1) *X, Y, Z thẳng hàng và $XYZ \perp EF$.*

2) $\widehat{XEY} = \widehat{XFY} = 90°$.

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC, (O_1), (O_2) là các đường tròn theo thứ tự tiếp xúc với BC tại B và C. N là giao điểm khác A của (O_1) và (O_2). P là điểm đối xứng của N qua BC. Khi đó*

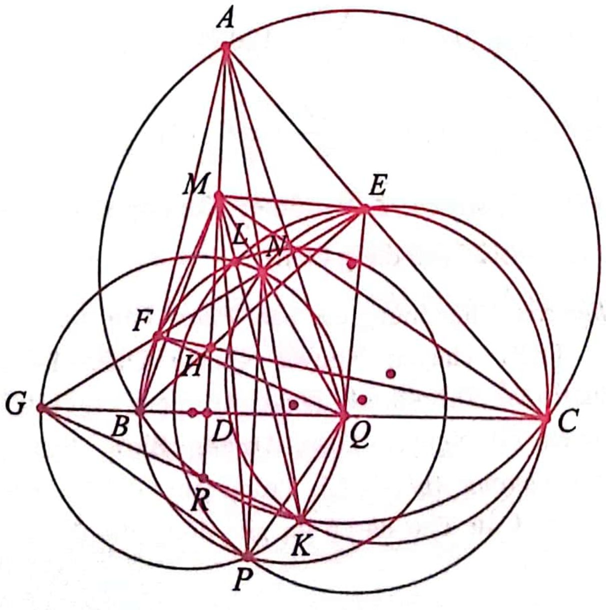
1) *N thuộc trung tuyến xuất phát từ A của tam giác ABC.*

2) *P thuộc đường đối trung xuất phát từ A của tam giác ABC.*

Phép chứng minh các bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây.

Trở lại giải bài toán T12.

1) Gọi Q là trung điểm của BC.



Theo bổ đề 1, M, N, Q thẳng hàng và $MNQ \perp EF$. Lại theo bổ đề 1, chú ý rằng $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90°$, ta có:

$$QB^2 = QF^2 = \overline{QM}.\overline{QN} = QE^2 = QC^2.$$

Vậy các đường tròn (MNB) và (MNC) theo thứ tự tiếp xúc với BC tại B và C.

Do đó, theo bổ đề 2, MP là đường đối trung xuất phát từ M của tam giác MBC.

Điều đó có nghĩa là $\widehat{BMP} = \widehat{CMN}$. -

2) Gọi D, G theo thứ tự là giao điểm của AH, EF và BC; R là giao điểm thứ hai của AH và (O); L là giao điểm thứ hai của MK và (GNQ).

Dễ thấy các tam giác AEF và ABC đồng dạng.

Từ đó, chú ý rằng N, Q theo thứ tự là trung điểm của EF, BC, suy ra: $\widehat{NAB} = \widehat{NAF} = \widehat{QAC}$.

Do đó AN là đường đối trung của tam giác ABC.

Vậy tứ giác $ABKC$ điều hòa.

Từ đó, chú ý rằng $(GDBC) = -1$, suy ra:

$$R(AKBC) = -1 = R(DGBC) = R(AGBC).$$

Vậy R, K, G thẳng hàng.

Từ đó, theo hệ thức Maclaurin, suy ra:

$$\overline{GD}.\overline{DQ} = \overline{GB}.\overline{GC} = \overline{GK}.\overline{GR}.$$

Nói cách khác D, Q, K, R cùng thuộc một đường tròn. Kết hợp với $\widehat{RDQ} = 90°$, suy ra:

$$\widehat{GKQ} = \widehat{RKQ} = 90°.$$

Kết hợp với $\widehat{GPQ} = \widehat{GNQ} = \widehat{FNQ} = 90°$, suy ra K, P, N, G, Q, L cùng thuộc một đường tròn (1).

Dễ thấy $\overline{ML}.\overline{MK} = \overline{MN}.\overline{MQ} = ME^2$.

Điều đó có nghĩa là ME tiếp xúc với (EKL) (2).

Dễ thấy B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Do đó:

$$\begin{aligned}(EC, EN) &\equiv (EC, EF) \equiv (BC, BF) \equiv (BC, BA) \\ &\equiv (KC, KA) \equiv (KC, KN) (\bmod \pi).\end{aligned}$$

Nói cách khác E, C, N, K cùng thuộc một đường tròn (3).

Từ (1), (2) và (3), chú ý rằng tam giác MAE cân tại M; AM, NP cùng vuông góc với B; N và P đối xứng với nhau qua BC, suy ra:

$(LP,LE)\equiv(LP,LK)+(LK,LE)$

$\equiv(NP,NK)+(EK,EE)(\text{mod}\,\pi)$

$\equiv(NP,NK)+(EK,EM)$

$\equiv(NP,NK)+(EK,EC)+(EA,EM)(\text{mod}\,\pi)$

$\equiv(NP,NK)+(NK,NC)+(AM,AE)$

$\equiv(NP,NC)+(AM,AE)(\text{mod}\,\pi)$

$\equiv(NP,BC)+(BC,NC)+(AM,BC)+(BC,AE)(\text{mod}\,\pi)$

$\equiv\frac{\pi}{2}+(BC,NC)+\frac{\pi}{2}+(BC,AE)$

$\equiv(BC,NC)+(BC,EC)(\text{mod}\,\pi)$

$\equiv(PC,BC)+(BC,AE)\equiv(PC,EC)$

$\equiv(CP,CE)(\text{mod}\,\pi)$.

Do đó L thuộc (PCE). Tương tự, L thuộc (PBF). Vậy các đường tròn (PBF), (CPE) cùng đi qua điểm L thuộc MK (đpcm).

Nhận xét. 1) Bài toán này tương đối khó, có 9 bạn tham gia giải. Một vài bạn sử dụng phép nghịch đảo tâm A phương tích $\overline{AB}.\overline{AF}=\overline{AC}.\overline{AE}$ cũng cho lời giải khá gọn gàng.

2) Xin nêu tên tất cả các bạn: **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Viết Thành*, *Nguyễn Phước Lương*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Hải*, *Đỗ Thị Thanh Thảo*, *Đoàn Ngọc Duy*, 12T1; *Phạm Thị Mỹ Hạnh*, 12T2; *Hoàng Kim Lộc*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Lê Thành Đạt*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH HÀ

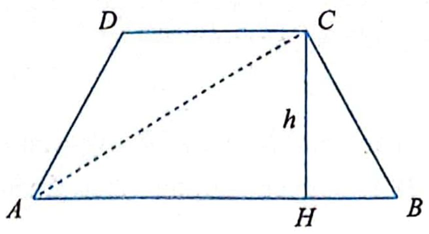
Bài L1/557. *Các điểm A, B, C, D trên mặt nước tạo thành hình thang cân ABCD (đáy AB, CD). Biết AB = 50 cm, CD = 30 cm, đường cao hình thang h = 20 cm. Tại hai điểm A, B người ta đặt hai nguồn sóng kết hợp, dao động ngược pha nhau và phát sóng có bước sóng λ = 3 cm. Tính số điểm có biên độ dao động cực đại trên đáy nhỏ CD.*

Lời giải. Tại các điểm có cực đại : $\frac{\Delta d}{\lambda}=k+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow AC=20\sqrt{5}$ cm; $BC=10\sqrt{5}$ cm (hình vẽ).

$$\frac{AC-BC}{\lambda}\approx7,45\Rightarrow-7,95<k<6,95.$$

Vậy trên CD có 14 điểm cực đại.



Nhận xét. Chúc mừng các bạn *Phạm Văn Anh*, 12 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Huỳnh Bá Anh Tuấn*, 11, THPT Hoàng Hoa Thám, Sơn Trà, **Đà Nẵng**; *Hoàng Ngọc Gia Huy*, 11 lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** đã có lời giải đúng cho đề ra kì này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/557. *Điện năng từ một trạm phát điện được đưa đến một khu dân cư bằng đường dây truyền tải một pha. Nếu điện áp tại nơi truyền tải tăng từ U lên 2U thì số hộ dân được trạm cung cấp đủ công suất điện tăng từ 93 hộ lên 120 hộ. Coi rằng công suất điện truyền đi từ trạm phát không đổi, công suất tiêu thụ điện của mỗi hộ dân như nhau và không đổi. Hệ số công suất trên đường truyền tải không đổi. Khi tăng điện áp tại nơi truyền tải lên 3U thì số hộ dân được trạm phát cung cấp đủ công suất điện là bao nhiêu?*

Lời giải. Công suất hao phí khi truyền tải:

$$\Delta\mathscr{P}=R\frac{\mathscr{P}^2}{U^2}.$$

Lúc đầu, điện áp U: $\mathscr{P}=\Delta\mathscr{P}+93\mathscr{P}_1$ (1).

Khi điện áp $2U$: $\mathscr{P}=\frac{\Delta\mathscr{P}}{4}+120\mathscr{P}_1$ (2).

Khi điện áp $3U$: $\mathscr{P}=\frac{\Delta\mathscr{P}}{9}+x\mathscr{P}_1$ (3).

Từ (1), (2) suy ra: $\Delta\mathscr{P}=36\mathscr{P}_1$. Kết hợp với (3) ta được: $x=125$ (hộ dùng điện).

Nhận xét. Chúc mừng các bạn: *Phạm Văn Anh*, 12 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Đỗ Thị Thanh Thảo*, 12 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**, *Nguyễn Ngọc Phương Anh*, 10A1, Trung tâm GDTX, Quận Ô Môn, **Cần Thơ** đã có lời giải đúng cho đề ra kì này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

GIỚI THIỆU MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ FERMAT BÉ

TRƯƠNG VĂN CƯỜNG (*GV THCS Nguyễn Khuyến, Chư Sê, Gia Lai*)
TRẦN THỊ THANH MINH (*GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Gia Lai*)
TRẦN MINH VŨ (*GV THPT Trần cao Vân, Gia Lai*)

Pierre de Fermat
(1601-1665)

Nhắc đến *Fermat*, tên đầy đủ là *Pierre de Fermat*, là một nhà toán học Pháp, thì ai cũng nhớ đến ông với định lý Fermat lớn nổi tiếng. Bài toán làm đau đầu nhiều nhà toán học trong gần 300 năm, nó được phát biểu như sau:

Với mọi số nguyên dương n lớn hơn 2, phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên dương (x, y, z).

Bài toán ban đầu được ông phát biểu bên lề một cuốn sách và nói rằng đã chứng minh xong nó, tuy nhiên lề sách quá hẹp để viết đủ chứng minh chi tiết. Và kết quả, để chứng minh được định lý Fermat lớn, nhà toán học người Anh, *Andrile Wiles* phải mất 8 năm ròng rã làm việc cùng cộng sự, bài công bố chứng minh đầu tiên dài gần 200 trang!

Sự nổi tiếng của định lý Fermat lớn đó cũng không làm lu mờ đi một định lý rất nổi tiếng của ông, là định lý Fermat bé, một trong những định lý quan trọng bậc nhất trong Số học sơ cấp. *Fermat* phát biểu định lý này trong một bức thư gửi *Bessy* vào năm 1640 (xem [1]), và nói rằng không viết chứng minh vì nó quá dài!

Như vậy, *Fermat* phát biểu hai định lý, một bé và một lớn, một có cách chứng minh quá dài và một có cách chứng minh ngắn (dài hơn một cái lề sách). Cả hai làm cho các nhà toán học đương thời và đời sau hứng thú, đến tận bây giờ chúng ta còn đam mê nó, đặc biệt là các nhà làm toán, các thầy dạy toán và các em học sinh chuyên toán.

Trong bài viết này chúng tôi sẽ giới thiệu một vài ứng dụng của định lý Fermat bé, như tìm chữ số tận cùng của một số tự nhiên lớn, tìm số nguyên tố, tìm số dư của các số hạng trong dãy số Fibonacci và giải phương trình nghiệm nguyên.

1. Định lý và các cách chứng minh

Định lý 1.1 (Định lý Fermat bé). *Cho p là số nguyên tố, khi đó với mọi số nguyên a không là bội của p ta có:*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad (1.1).$$

Nhận xét 1. Phương trình (1.1) đúng với mọi số nguyên tố p và mọi số nguyên a không là bội của p. Những số p thỏa mãn (1.1) mà không phải là số nguyên tố thì chúng ta gọi nó là số giả nguyên tố.

Nhận xét 2. Từ phương trình (1.1) ta suy ra:

$$a^p \equiv a \pmod{p} \quad (1.2),$$

do vậy phương trình (1.2) cũng dùng để phát biểu cho định lý trên.

Nhận xét 3. Với p là số nguyên tố nhỏ, thì việc chứng minh định lý 1.1 là tương đối dễ dàng. Chẳng hạn ta biến đổi:

$$a^3 - a = a(a-1)(a+1).$$

Khi đó vì nó là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên nó chia hết cho 3.

Tương tự như vậy:

$$a^5 - a = a(a^2-1)(a^2+1),$$

do đó ta chỉ xét số dư là 2 và 3 khi lấy a chia cho 5. Mà hiển nhiên khi đó a^2+1 chia hết cho 5.

Trên đây là các nhận xét nhỏ để chúng ta tiếp cận đến cách chứng minh của định lý. Bây giờ chúng ta đi chứng minh đẳng thức (1.2) với những cách đặc trưng nhất.

Chứng minh 1. Ta sẽ chứng minh (1.2) bằng phương pháp quy nạp theo a và cố định số nguyên tố p lẻ.

Rõ ràng với $a=1$ thì (1.2) đúng.

Giả sử mệnh đề đúng với $a=k\ge 2$ nghĩa là ta có $A_k=k^p-k\equiv 0 \pmod p$.

Ta sẽ chứng minh (1.2) đúng với $a=k+1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}A_{k+1}-A_k&=\left((k+1)^p-k-1\right)-\left(k^p-k\right)\\&=(k+1)^p-k^p-1=\sum_{l=1}^{p-1}C_p^l k^l.\end{aligned}$$

Ta để ý rằng với mọi $l\in\{1,2,...,p-1\}$, ta có C_p^l là số nguyên dương và

$$C_p^l=\frac{p(p-1)(p-2)...(p-l)}{l!}.$$

Bởi vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho bất kỳ số nguyên nào từ 1 đến l, do đó bắt buộc $\dfrac{(p-1)(p-2)...(p-l)}{l!}$ là số nguyên và vì vậy $C_p^l\equiv 0 \pmod p$ hay $A_{k+1}-A_k\equiv 0 \pmod p$.

Tương tự vậy ta sẽ chứng minh (1.2) đúng với $a=k-1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}A_{k-1}-A_k&=\left((k-1)^p-k+1\right)-\left(k^p-k\right)\\&=(k-1)^p-k^p+1\\&=\sum_{l=1}^{p-1}(-1)^l C_p^l k^l.\end{aligned}$$

Vì $C_p^l\equiv 0 \pmod p$ nên $A_{k-1}-A_k\equiv 0 \pmod p$.

Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Lưu ý 1. Kết quả $C_p^l\equiv 0 \pmod p$ với mọi số nguyên tố p là một kết quả đơn giản nhưng cực kỳ hiệu quả trong việc giải các bài toán chia hết.

Chứng minh 2. Ta đã biết $\{0,1,2,...,p-1\}$ là hệ thặng dư đầy đủ modulo p. Do đó với a không là bội của p thì $\{0,a,2a,...,(p-1)a\}$ là hệ thặng dư đầy đủ modulo p. Suy ra các số dư khi chia cho p của $\{0,a,2a,...,(p-1)a\}$ là $\{0,1,2,...,p-1\}$. Như vậy:

$$a.2a...(p-1)a\equiv 1.2...(p-1) \pmod p$$

hay $\quad a^{p-1}.(p-1)!\equiv (p-1)! \pmod p$.

Vì $(p-1)!$ không chia hết cho p. Ta suy ra $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$. Ta có điều phải chứng minh.

Hệ quả 1.2. *Cho n là số nguyên và được phân tích thành tích của các số nguyên tố $p_1,p_2,...,p_k$, nghĩa là $n=p_1p_2...p_k$. Khi đó giả sử $(p_j-1)\,|\,(n-1),\forall j\in\{1,2,...,k\}$ thì với mọi số nguyên a ta có $a^n-a\equiv 0 \pmod n$.*

Chứng minh. Nếu a không là bội của n, khi đó theo định lý 1.1 ta có:

$$a^{p_j-1}\equiv 1 \pmod{p_j},\forall j\in\{1,2,...,k\}.$$

Từ đó vì $(p_j-1)\,|\,(n-1),\forall j\in\{1,2,...,k\}$ nên $a^{n-1}\equiv 1 \pmod{p_j},\forall j\in\{1,2,...,k\}$. Suy ra:

$$a^{n-1}\equiv 1\left(\bmod \prod_{j=1}^{k}p_j\right).$$

Ta có điều phải chứng minh.

2. Một vài ứng dụng của định lý Fermat bé

2.1. Bài toán chia hết

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên a ta có a^3+5a chia hết cho 6.*

Lời giải. Ta chỉ cần chứng minh kết quả trên đúng với những số nguyên a không là bội của 6. Và cũng bởi vì $a^3+5a=a^3-a+6a$ nên ta sẽ chứng minh $a^3-a\equiv 0 \pmod 6$.

Điều đó được suy ra từ định lý Fermat bé, hay từ nhận xét 3, vì a^3-a là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho cả 2 và 3. Mà bởi vì 2 và 3 là các số nguyên tố nên ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 2. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên thì a^5 và a có chữ số tận cùng giống nhau.*

Lời giải. Xét số tận cùng của các số nguyên thì ta xét số dư của nó khi chia cho 10. Vì vậy bài toán là chứng minh $a^5-a\equiv 0 \pmod{10}$.

Theo định lý Fermat bé thì $a^5-a\equiv 0 \pmod 5$. Và hiển nhiên a^5 và a có cùng tính chẵn lẽ nên $a^5-a\equiv 0 \pmod 2$. Vì 2 và 5 là hai số nguyên tố nên ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 3. *Tìm số dư khi chia 3^{2024} cho 43.*

Lời giải. Ta sẽ làm giảm lũy thừa xuống bằng cách để ý rằng 43 là số nguyên tố và

$$2024=48.42+8.$$

Theo định lý Fermat bé thì $3^{42}\equiv 1 \pmod{43}$. Vì vậy $3^{2024}\equiv 3^8 \pmod{43}$. Tiếp tục hạ bậc xuống, ta có: $3^8=81^2; 81\equiv 38 \pmod{43}$

$$\Rightarrow 3^8\equiv (38)^2 \pmod{43}.$$

Ta suy ra $3^{2024}\equiv 25 \pmod{43}$. Như vậy số dư cần tìm là 25.

Thí dụ 4. *Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $48^{p^2}+1$ chia hết cho p^2.*

Lời giải. Giả sử p là số nguyên tố thỏa mãn đề bài. Rõ ràng 48 không là bội của p, khi đó theo định lý Fermat bé, ta có:

$$48^p\equiv 48 \pmod p \Rightarrow 48^{p^2}\equiv 48^p \pmod p.$$

Vì vậy theo yêu cầu bài toán:

$$48^{p^2}\equiv -1 \pmod p \Rightarrow 48^p\equiv -1 \pmod p$$

$$\Rightarrow 48\equiv -1 \pmod p \Rightarrow 49\equiv 0 \pmod p.$$

Ta suy ra $p=7$, thử lại thấy thỏa mãn, vì vậy $p=7$ là giá trị cần tìm.

Thí dụ 5 (TST Thừa Thiên Huế, 2021). *Cho p là số nguyên dương, đặt $S(p)=\sum_{i=1}^{p} i^{2022}$.*

a) Chứng minh rằng $S(7)$ không chia hết cho 7.

b) Tìm tất cả số nguyên tố $p, p<2022$ sao cho $S(p)$ không chia hết cho p.

Lời giải.

a) Ta có $2022\equiv 0 \pmod 6$ vì vậy theo định lý Fermat bé, ta có $i^{2022}\equiv 1 \pmod 7, \forall i\in\{1,2,...,6\}$ cho nên:

$S(7)=\sum_{i=1}^{7} i^{2022}\equiv 1+1+1+1+1+1+0 \pmod 7$ hay $S(7)\equiv 6 \pmod 7$. Vậy $S(7)$ không chia hết cho 7.

b) Giả sử p là số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $p=2$ thì hiển nhiên

$$S(2)=1^{2022}+2^{2022}\equiv 1 \pmod 2,$$

nên $S(2)$ không chia hết cho 2.

- Nếu p là số nguyên tố lẻ. Thực hiện phép 2022 chia $p-1$, ta được: $2022 = k(p-1)+r$ với $0\le r<p-1$. Khi đó:

$$S(p)\equiv \sum_{i=1}^{p-1}(i^{p-1})^k i^r \pmod p$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{p-1} i^r \pmod p \quad (1).$$

Lúc này nếu $r=0$ thì $S(p)\equiv p-1 \pmod p$.

Bây giờ ta xét khả năng $0<r<p-1$. Ta sẽ chứng minh $S(p)\equiv 0 \pmod p$.

Thật vậy, $\{1,2,...,p-1\}$ là hệ thặng dư thu gọn modulo p nên với a là một cấp nguyên thủy modulo p thì $a^r, a^{2r},...,a^{(p-1)r}$ cũng là một hệ thặng dư thu gọn modulo p theo một thứ tự nào đó. Cho nên ta có:

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^r \equiv \sum_{i=1}^{p-1} \left(a^r\right)^i \pmod p$$

hay $$\sum_{i=1}^{p-1} i^r \equiv \frac{a^{rp}-a^r}{a^r-1} \pmod p \ (2).$$

Lúc này vì $0<r<p-1$ nên p không là ước của a^r-1 và a^r không là bội của p nên theo định lý Fermat bé ta có:

$$a^{rp} \equiv a^r \pmod p \Leftrightarrow a^{rp}-a^r \equiv 0 \pmod p.$$

Do đó theo (2) ta được $\sum_{i=1}^{p-1} i^r \equiv 0 \pmod p$ và từ (1) ta suy ra $S(p) \equiv 0 \pmod p$.

Do đó những số nguyên tố p thỏa mãn yêu cầu bài toán là những số mà $p-1$ là ước của 2022. Vì phân tích $2022 = 2.3.337$ cho nên xảy ra các trường hợp sau với lưu ý $p-1$ là số chẵn:

$p-1=2;\ p-1=2.3;\ p-1=2.337.$.

Kiểm tra với tính nguyên tố, ta chỉ nhận $p=3; p=7,$ kết hợp với nhận xét ban đầu $p \in \{2,3,7\}$.

2.2. Ứng dụng cho dãy số

Thí dụ 6. *Cho dãy số Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ với các số hạng được định nghĩa theo công thức:*

$$F_1=1;\ F_2=1;\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n, n\in\mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng với p là các số nguyên tố có dạng $5m\pm1$ thì $F_{p-1} \equiv 0 \pmod p$.

Lời giải. Áp dụng cách tìm công thức tổng quát của dãy số Fibonacci, ta có:

$$F_{p-1} = \frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{p-1} - \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{p-1}\right]$$

$$\Rightarrow 2^{p-1}F_{p-1} = \frac{1}{\sqrt5}\left(\sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^i(\sqrt5)^i - \sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^i(-\sqrt5)^i\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt5}\Big[(C_{p-1}^0 + C_{p-1}^1(\sqrt5)^1 + \dots + C_{p-1}^{p-1}(\sqrt5)^{p-1})$$
$$-(C_{p-1}^0 + C_{p-1}^1(-\sqrt5)^1 + \dots + C_{p-1}^{p-1}(-\sqrt5)^{p-1})\Big]$$

$$= \frac{2\left(C_{p-1}^1(\sqrt5)^1 + C_{p-1}^3(\sqrt5)^3 + \dots + C_{p-1}^{p-2}(\sqrt5)^{p-2}\right)}{\sqrt5}$$

$$= 2\left(C_{p-1}^1 + C_{p-1}^3 5 + \dots + C_{p-1}^{p-2} 5^{\frac{p-3}{2}}\right) = 2\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} C_{p-1}^{2i+1} 5^i.$$

Với lưu ý rằng với mọi $0<k\le p-1$ ta có:

$$C_p^k \equiv 0 \pmod p \Rightarrow C_{p-1}^k + C_{p-1}^{k-1} \equiv 0 \pmod p.$$

Do đó:

$$1 = C_{p-1}^0 \equiv -C_{p-1}^1 \pmod p \Rightarrow C_{p-1}^1 \equiv -1 \pmod p;$$

$$C_{p-1}^2 \equiv 1 \pmod p;\ C_{p-1}^3 \equiv -1 \pmod p; \dots$$

hay là $C_{p-1}^{2k+1} \equiv -1 \pmod p$. Ta suy ra:

$$2^{p-1}F_{p-1} \equiv -2\left(1+5+5^2+\dots+5^{\frac{p-3}{2}}\right) \pmod p$$

$$\Rightarrow 2^{p-1}F_{p-1} \equiv -2\left(\frac{5^{\frac{p-1}{2}}-1}{4}\right) \pmod p.$$

Tới đây, vì $(p,2)=1; (p,5)=1$ nên

$$5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow 5^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod p.$$

Chứng minh hoàn tất.

Thí dụ 7. *Cho dãy số (u_n) với các số hạng được định nghĩa theo công thức:*

$$u_0=1;\ u_1=-1;\ u_{n+1}=6u_n+5u_{n-1}, n\ge1.$$

Chứng minh rằng $u_{2012} \equiv 2010 \pmod{2011}$.

Lời giải. Ý tưởng lời giải là từ công thức số hạng tổng quát của dãy số (xác định qua các nghiệm của phương trình đặc trưng) ta xác định nghiệm nguyên thỏa mãn điều kiện bài toán. Dễ thấy số hạng tổng quát của dãy số (u_n) có hệ số vô tỷ nên ta xét dãy phụ (v_n) được xác định như sau:

$$v_0=1;\ v_1=-1;\ v_{n+1}=6u_n+au_{n-1}, n\ge1.$$

Mục đích của ta là để phương trình đặc trưng:

$$x^2-6x-a=0$$

có nghiệm nguyên và $v_n \equiv u_n \pmod{2011}, \forall n$.

Ta chọn $a = 2016$ và kiểm tra được phương trình $x^2 - 6x - 2016 = 0$ có nghiệm $x = -42$; $x = 48$. Vì vậy ta được số hạng tổng quát của dãy (v_n) là:

$$v_n = \frac{41.48^n + 49.(-42)^n}{90}.$$

Bởi vì 2011 là số nguyên tố nên $(2011, 90) = 1$ và $2010 \equiv -1 \pmod{2011}$ từ đó ta chỉ cần chứng minh:

$$41.48^{2012} + 49.(-42)^{2012} + 90 \equiv 0 \pmod{2011}.$$

Áp dụng định lý Fermat bé ta có:

$$\begin{aligned} &41.48^{2012} + 49.(-42)^{2012} + 90 \\ &\equiv 41.48^2 + 49.(-42)^2 + 90 \pmod{2011} \\ &\equiv 94464 + 86436 + 90 \pmod{2011} \\ &\equiv 0 \pmod{2011}. \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Thí dụ 8. *Cho dãy số $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ với các số hạng được định nghĩa theo công thức:*

$$u_1 = 5;\ u_2 = 11;\ u_{n+1} = 2u_n - 3u_{n-1},\ \forall n \geq 2.$$

Chứng minh rằng $u_{2002} \equiv 0 \pmod{11}$.

Lời giải. Ta xét dãy phụ (v_n) được xác định như sau:

$$v_1 = 5; v_2 = 11; v_{n+1} = 2v_n + av_{n-1},\ \forall n \geq 1.$$

Mục đích là để phương trình đặc trưng:

$$x^2 - 2x - a = 0$$

có nghiệm nguyên và $v_n \equiv u_n \pmod{11}$.

Ta chọn $a = 8$ và kiểm tra được phương trình

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

có nghiệm $x_1 = -2; x_2 = 4$. Vì vậy ta được số hạng tổng quát: $v_n = \dfrac{7.4^n - 6.(-2)^n}{8}$.

Bởi vì 11 là số nguyên tố và $(11, 8) = 1$ nên ta chỉ cần chứng minh:

$$7.4^{2002} - 6.(-2)^{2002} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Áp dụng định lý Fermat bé, vì $2002 = 200.10 + 2$, nên ta có:

$$\begin{aligned} 7.4^{2002} - 6.(-2)^{2002} &\equiv 7.4^2 - 6.2^2 \pmod{11} \\ &\equiv 88 \pmod{11} \equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

2.3. Bài toán tìm nghiệm nguyên

Như chúng ta đã biết, phương trình sau không có nghiệm nguyên dương $x^3 + y^3 = z^3$.

Cụ thể hơn điều đó có nghĩa là với mọi số nguyên dương x và y, $x^3 + y^3$ không là lập phương của bất kỳ số nguyên dương z nào.

Trong bài viết này, với các số nguyên tố p_i với $i = \overline{1, n}$ chúng tôi sẽ thiết lập nghiệm của phương trình dạng: $x^m + y^m = \prod_{i=1}^{n} p_i f(x, y)$, trong đó f là một đa thức cho trước.

Bổ đề 2.3.1. *Cho p là số nguyên tố có dạng $6k + 5$, $k \in \mathbb{N}$. Khi đó nếu x, y là các số nguyên thỏa mãn $x^3 + y^3 \equiv 0 \pmod{p}$ thì*

$$x + y \equiv 0 \pmod{p}.$$

Chứng minh. Dễ dàng thấy được nếu $x \equiv 0 \pmod{p}$ thì $y \equiv 0 \pmod{p}$ nên suy ra $x + y \equiv 0 \pmod{p}$.

Xét trường hợp $x \not\equiv 0 \pmod{p}$, $y \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Áp dụng định lý Fermat bé ta có:

$x^{p-1} \equiv y^{p-1} \pmod{p}$ hay $x^{6k+4} \equiv y^{6k+4} \pmod{p}$ (1).

Khi đó nếu $p = 3(2k+1) + 2$ thì ta có:

$x^3 \equiv -y^3 \pmod{p} \Rightarrow x^{6k+3} \equiv -y^{6k+3} \pmod{p}$ (2).

Nhân cả hai vế cho x, $x \not\equiv 0 \pmod{p}$ ta được

$$\Rightarrow x^{6k+4} \equiv -xy^{6k+3} \pmod{p}\ (3).$$

Từ (1) và (3), ta có: $x^{6k+4} \equiv y^{6k+4} \pmod{p}$

và $x^{6k+4} \equiv -xy^{6k+3} \pmod{p}$

ta suy ra : $y^{6k+4} \equiv -xy^{6k+3} \pmod{p}$

$$\Leftrightarrow y^{6k+3}(y + x) \equiv 0 \pmod{p}\ (4).$$

Vì $y \not\equiv 0 \pmod{p}$ nên từ (4) ta suy ra:

$$x = y \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Hệ quả 2.3.2. Với p là số nguyên tố có dạng $6k+5, k \in \mathbb{N}$. Nếu q là số nguyên tố thỏa mãn $2 < q < p$ thì trên $\mathbb{N}$ phương trình

$$x^3 + y^3 = p\left(xy + q^2\right)$$

có nghiệm $x = \dfrac{p-q}{2}; y = \dfrac{p+q}{2}$

hoặc $x = \dfrac{p+q}{2}; y = \dfrac{p-q}{2}$.

Thí dụ 9. *Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^3 + y^3 = 3xy + 3$.*

Lời giải. Nếu $x \equiv 0 \pmod{3}$ thì ta suy ra $y \equiv 0 \pmod{3}$, khi đó vế trái của phương trình đã cho chia hết cho 27 còn vế phải thì không. Do đó $x, y \not\equiv 0 \pmod{3}$. Theo định lý Fermat bé ta có $x^2 \equiv 1 \pmod{3}; y^2 \equiv 1 \pmod{3}$ và vì $x^3 + y^3 \equiv 0 \pmod{3}$ nên theo bổ đề 2.3.1 ta được $x + y \equiv 0 \pmod{3}$. Ta giả sử $x + y = 3k, k \in \mathbb{Z}$. Khi đó vì $x^3 + y^3 = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$ nên ta được $k\left(x^2 - xy + y^2\right) = xy + 1$.

Do $x^2 - xy + y^2 \geq xy$ nên nếu $|k| > 1$ thì

$$|k|\left(x^2 - xy + y^2\right) \geq 2|xy| \geq |xy + 1|$$

nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Ta chỉ còn kiểm tra các trường hợp:

Khi $k = 0$ thì $x + y = 0$, ta được:

$$x = 1; y = -1 \text{ hoặc } x = -1; y = 1.$$

Khi $k = 1$ thì $x + y = 3$, ta được:

$$x = 1; y = 2 \text{ hoặc } x = 2; y = 1.$$

Khi $k = -1$ thì $x + y = -3$, thay vào ta được phương trình vô nghiệm.

Thí dụ 10 (TST Thái Lan 2013). *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình*

$$x^3 + y^3 = 4\left(x^2 y + y^2 x - 5\right).$$

Lời giải. Nếu $x \equiv 0 \pmod{2}$ thì suy ra $y \equiv 0 \pmod{2}$, khi đó vế trái của phương trình đã cho chia hết cho 8 còn vế phải thì không. Do đó $x, y \not\equiv 0 \pmod{2}$. Theo định lý Fermat bé và giả thiết ta có:

$$\begin{cases} x \equiv y \pmod{2} \\ x^3 \equiv -y^3 \pmod{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 \equiv x^2 y \pmod{2} \\ x^3 \equiv -y^3 \pmod{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{2}$. Vì $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ nên ta suy ra: $x + y \equiv 0 \pmod{2}$.

Lại sử dụng biến đổi:

$$x^3 + y^3 = (x+y)\left[(x+y)^2 - 3xy\right]$$

và $x^3 + y^3 \equiv 0 \pmod{4}$ nên ta được:

$$x + y \equiv 0 \pmod{4}.$$

Giả sử tồn tại $m \in \mathbb{N}$ để $x + y = 4m$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với:

$$m\left(x^2 + y^2 - xy\right) = 4mxy - 5$$

$$\Leftrightarrow m\left(x^2 + y^2 - 5xy\right) = -5.$$

Điều này có nghĩa là chỉ xảy ra hai trường hợp:

$$\begin{cases} m = 1 \\ x^2 + y^2 - 5xy = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 3 \\ x = 3; y = 1. \end{array}\right.$$

Hoặc là $\begin{cases} m = 5 \\ x^2 + y^2 - 5xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ xy = \dfrac{401}{7} \end{cases}$.

Vậy phương trình có nghiệm:

$$x = 1; y = 3 \text{ hoặc } x = 3; y = 1.$$

Thí dụ 11. *Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^3 + y^3 = 911(xy + 49)$.*

Lời giải. Áp dụng hệ quả 2.3.2, ta được các nghiệm: $x = 459, y = 452$ hoặc $x = 452, y = 459$.

Thí dụ 12. (TST Thái Lan 2013 ngày 7). *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn phương trình: $x^3\left(y^3 + z^3\right) = 2012(xyz + 2)$.*

Lời giải. Ta biến đổi phương trình đã cho như sau:

$$x\left[x^2\left(y^3+z^3\right)-2012yz\right]=2^3.503,\ (1).$$

Điều đó có nghĩa là x không có ước số nguyên tố nào ngoài các ước có thể là 2 và 503.

Nếu như $x=2^2$ thì $x^3\equiv 0 \pmod{16}$. Do đó $x^3\left(y^3+z^3\right)\equiv 0 \pmod{16}$, trong khi đó:

$$2012(xyz+2)=2^2.503.xyz+2^3.503$$
$$\not\equiv 0 \pmod{16}.$$

Tương tự vậy, nếu như $x=503$, $x=2.503$ hoặc $x=2^2.503$ thì $x^3\equiv 0 \left(\bmod 503^3\right)$. Do đó:

$$x^3\left(y^3+z^3\right)\equiv 0 \left(\bmod 503^2\right),$$

trong khi đó: $2012(xyz+2)=2^2.503.xyz+2^3.503$

$$\not\equiv 0 \left(\bmod 503^2\right).$$

Từ những lập luận trên, ta có thể suy ra $x=1$ hoặc $x=2$. Ta chỉ còn xét hai phương trình sau

$$y^3+z^3=2012(yz+2) \quad (2);$$
$$y^3+z^3=503(yz+1) \quad (3).$$

Vì $503\equiv 5 \pmod 6$ cho nên theo bổ đề 2.3.1 ta có $y+z$ chia hết cho 503. Giả sử tồn tại số nguyên dương t để cho $y+z=503t$. Khi đó:

$$y^3+z^3=(y+z)\left[(y-z)^2+yz\right]$$
$$=503t\left[(y-z)^2+yz\right].$$

Ta có: $(2)\Leftrightarrow t\left[(y-z)^2+yz\right]=4(yz+2)$

$$\Leftrightarrow t(y-z)^2+(t-4)yz=8 \quad (4);$$

$$(3)\Leftrightarrow t\left[(y-z)^2+yz\right]=(yz+1)$$

$$\Leftrightarrow t(y-z)^2+(t-1)yz=1 \quad (5).$$

• Xét (4), rõ ràng là $t-4\le 0$, vì nếu như $t-4\ge 1$ thì từ (4) ta phải có $1\le(t-4)yz\le 8\Rightarrow y,z\le 8\Rightarrow y+z\le 16$. Điều này mâu thuẫn với $y+z=503t$. Vì vậy $1\le t\le 4$. Từ (2) ta có $y^3+z^3 \vdots 2$ nên y và z có cùng tính chẵn, lẻ. Suy ra $y+z\equiv 0 \pmod 2$, do đó $t=2$ hoặc $t=4$.

- Với $t=2$, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases}y+z=503.2\\ 2(y-z)^2-2yz=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+z=1006\\ (y-z)^2-yz=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y+z=1006\\ 1006^2-5yz=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+z=1006\\ yz=\dfrac{1006^2-4}{4}\end{cases}.$$

Hệ này không có nghiệm nguyên.

- Với $t=4$, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases}y+z=503.4\\ 4(y-z)^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+z=2012\\ (y-z)^2=2\end{cases}.$$

Hệ này không có nghiệm nguyên.

• Xét (5), rõ ràng là $t-1\le 0$, vì nếu như $t-1\ge 1$ thì từ (5) ta phải có $0\le(t-1)yz\le 1\Rightarrow y,z\le 1$. Điều này mâu thuẫn với $y+z=503t$.

Vì vậy $t=1$, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases}y+z=503\\ (y-z)^2=1\end{cases}.$$

Giải hệ này ta có nghiệm:

$$y=252; z=251 \text{ hoặc } y=251; z=252.$$

Vậy các bộ số nguyên dương (x, y, z) cần tìm là:

(2, 252, 251), (2, 251, 252).

3. Bài tập tương tự

Bài 1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^3+y^3=2013$.

Bài 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^3+y^3=2xy+8.$$

Bài 3 (*IMO 1997*). Chứng minh rằng với phương trình sau không có nghiệm nguyên dương $x^3+y^3+z^3=2003$.

Bài 4 (*Thi HSG Quảng Bình, lớp 9, 2020*). Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$$x^3+y^3=x^2+y^2+42xy.$$

Bài 5 (*Thi THPT chuyên Tin, Gia Lai, 2020*). Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$$x^3\left(y^3+z^3\right)=2020(xyz+2).$$

Bài 6. Giải phương trình với nghiệm nguyên

$$x^3 + y^3 = 7(14xy + 3).$$

Bài 7 (*IMO, SL 2014*). Tìm số nguyên tố p và các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^{p-1} + y$ và $x + y^{p-1}$ đều là lũy thừa với số mũ nguyên dương của p.

Bài 8. Tìm số nguyên dương a, b, n và số nguyên tố p sao cho $a^{2013} + b^{2013} = p^n$.

Bài 9. Cho p là các số nguyên tố lẻ. Với mỗi số nguyên dương k, đặt $S_k = 1^k + 2^k + ... + (p-1)^k$. Chứng minh rằng $S_k \equiv p-1 \pmod{p}$ nếu $k \equiv 0 \pmod{p-1}$ và trong các trường hợp còn lại thì $S_k \equiv 0 \pmod{p}$.

Bài 10 (*TST Lào Cai, vòng 1, 2021*).

a) Cho n là một số nguyên dương thỏa mãn $n > 1$ và $2^n + 1 \equiv 0 \pmod{n}$. Chứng minh rằng

$$n \equiv 0 \pmod{3}.$$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $3^x - 1 = y.2^x$.

Bài 11 (*TST Lào Cai, vòng 2, 2021*). Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho

$$(5^p - 2^q)(5^q - 2^p) \equiv 0 \pmod{pq}.$$

Bài 12 (*TST Phú Yên 2021*). Cho a là số nguyên bất kỳ, chứng minh tồn tại hai số nguyên p, q của $a^{2021} - 1$ sao cho $(p-1)(q-1)$ chia hết 2021.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lê Thanh Hiền, *Ứng dụng của dãy số Fibonacci trong toán sơ cấp*, Luận văn thạc sĩ khoa học 2015.

[2] Trần Nam Dũng (Chủ biên), *Các phương pháp giải toán qua các kỳ thi Olympic*, Gặp gỡ Toán học – Vật lý, TP. Hồ Chí Minh 2020.

[3] Văn Phú Quốc, *Số học*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2015.

[4] Nicolai. Vorobiev, *Fibonacci numbers*, Springer Basel AG Originally published by Birkhauser Verlag, 2002.

****

PROBLEMS . . . *(Tiếp theo trang 21)*

Problem T8/561. Given an acute triange ABC with $AB < AC$ and M is the midpoint of BC. Suppose that the circle (M, MB) intersects AB, AM, AC agian at P, K, Q respectively. The ray KP intersects the circumcircle of BMP again at E and the ray KQ intersects the circumcircle of CMQ again at F. Let J be the midpoint of EF. Show that JM is perpendicular to BC.

Problem T9/561. Given positive integers a, b, c satisfying $a + b + c = 100$. Find the maximum and the minimum values of the expression

$$P = a^2b + b^2c + c^2a + abc.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/561. Given the sequence (u_n) determined as following

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Find all the prime numbers p so that $25 | u_p$.

Problem T11/561. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying $f\left((x+y)^2\right) = x^2 + 2xf(y) + \left(f(y)\right)^2$, for every $x, y \in \mathbb{R}$.

Problem T12/561. Let L be the Lemoine point of the triangle ABC. Suppose that M, N, P respectively be the midpoints of BC, CA, AB. Let K be the isogonal conjugate of L with respective to the triangle MNP. Show that K belongs to the Euler line of ABC.

Dr. NGUYEN PHU HOANG LAN

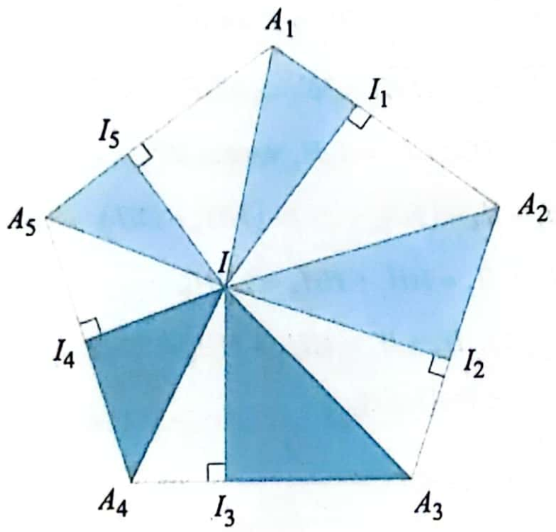
(University of Education, VNU, Hanoi)

ĐỊNH LÝ "LẦU NGŨ GIÁC" hay ĐỊNH LÝ "CỐI XAY GIÓ"

LỤC ĐỨC BÌNH
(12/43 Hai Bà trưng, TX.Quảng Trị, Quảng Trị)
NGUYỄN HỮU CƯỜNG
(Lầu 19-39 Lê Duẩn, P. Bến Nghé, Q.1, TP. Hồ Chí Minh)

Trong bài viết này chúng tôi xin giới thiệu một kết quả đẹp về ngũ giác đều mà chúng tôi tạm gọi là định lý "*Lầu ngũ giác*" hay định lý "*Cối xay gió*". Sau đây là nội dung kết quả này.

ĐỊNH LÝ. *Cho ngũ giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có chu vi P, diện tích S và điểm I nằm trong ngũ giác. Gọi I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên các cạnh $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1$ (các hình chiếu đều thuộc các cạnh tương ứng).*



Khi đó

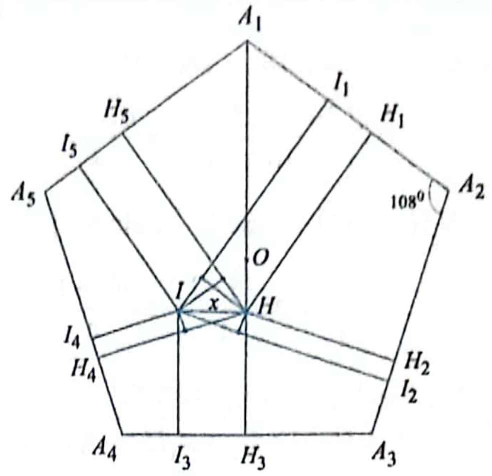
a) $A_1I_1 + A_2I_2 + A_3I_3 + A_4I_4 + A_5I_5$

$$= A_2I_1 + A_3I_2 + A_4I_3 + A_5I_4 + A_1I_5 = \frac{P}{2};$$

b) $S_{IA_1I_1} + S_{IA_2I_2} + S_{IA_3I_3} + S_{IA_4I_4} + S_{IA_5I_5}$

$$= S_{IA_2I_1} + S_{IA_3I_2} + S_{IA_4I_3} + S_{IA_5I_4} + S_{IA_1I_5} = \frac{S}{2}.$$

Chứng minh.



Hình 1

Gọi H là hình chiếu của I trên A_1O. Không mất tính tổng quát giả sử $A_1O < A_1H$.

a) Gọi H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 lần lượt là hình chiếu của H trên các cạnh $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1$ (h.1). Xét hiệu:

$$(A_1I_1 + A_2I_2 + A_3I_3 + A_4I_4 + A_5I_5)$$
$$-(A_1H_1 + A_2H_2 + A_3H_3 + A_4H_4 + A_5H_5)$$
$$= (A_1I_1 - A_1H_1) + (A_2I_2 - A_2H_2)$$
$$+(A_3I_3 - A_3H_3) + (A_4I_4 - A_4H_4) + (A_5I_5 - A_5H_5)$$
$$= -I_1H_1 + I_2H_2 + I_3H_3 + I_4H_4 - I_5H_5 \quad (1).$$

Đặt $IH = x$, ta có:

$$\widehat{HII_1} = \widehat{HA_1A_2} = 54^0 \Rightarrow I_1H_1 = x\sin 54^0;$$

$$\widehat{HII_2} = \widehat{I_1II_2} - \widehat{HII_1} = 72^\circ - 54^0 = 18^0$$

$$\Rightarrow I_2H_2 = x\sin 18^0;\ I_3H_3 = x.$$

$$\widehat{IHH_5} = 54^0 \Rightarrow I_5H_5 = x\sin 54^0;$$

$$\widehat{H_4HH_5} = 72^0 \Rightarrow \widehat{IHH_4} = 18^0 \Rightarrow I_4H_4 = x\sin 18^0.$$

Suy ra: $VT(1) = -x\sin 54^0 + x\sin 18^0 + x$

$$+x\sin 18^0 - x\sin 54^0.$$

Vì $\sin 2.18^0 = \cos 3.18^0$

$\Leftrightarrow 2\sin 18^0 \cos 18^0 = 4\cos^3 18^0 - 3\cos 18^0$

$\Leftrightarrow 2\sin 18^0 = 4\cos^2 18^0 - 3$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 18^0 + 2\sin 18^0 - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}.$

Lại có $\sin 54^0 = \cos 2.18^0 = 2\cos^2 18^0 - 1$

$$= 2\left(\frac{10+2\sqrt{5}}{16}\right) - 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

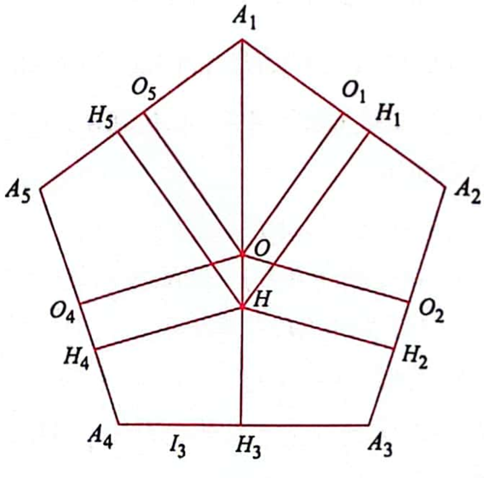
Từ đó: $VT(1) = x\left(1 + 2\sin 18^\circ - 2\sin 54^\circ\right)$

$$= x\left(1 + 2.\frac{\sqrt{5}-1}{4} - 2.\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) = 0.$$

Vậy $A_1I_1 + A_2I_2 + A_3I_3 + A_4I_4 + A_5I_5$

$$= A_1H_1 + A_2H_2 + A_3H_3 + A_4H_4 + A_5H_5 \quad (2)$$

Tiếp theo gọi O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 lần lượt là hình chiếu của O trên các cạnh $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1$ (h.2).



Hình 2

Ta có: $(A_1H_1 + A_2H_2 + A_3H_3 + A_4H_4 + A_5H_5)$

$$-(A_1O_1 + A_2O_2 + A_3O_3 + A_4O_4 + A_5O_5)$$

$$= O_1H_1 + O_2H_2 + O_3H_3 - O_4H_4 - O_5H_5$$

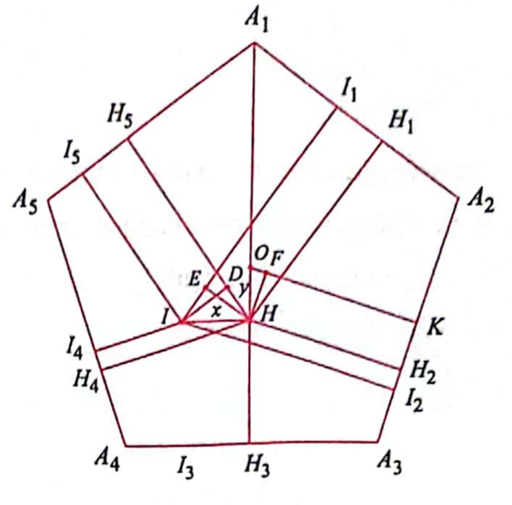
$$= (O_1H_1 - O_5H_5) + (O_2H_2 - O_4H_4) = 0.$$

Suy ra: $A_1H_1 + A_2H_2 + A_3H_3 + A_4H_4 + A_5H_5$

$$= A_1O_1 + A_2O_2 + A_3O_3 + A_4O_4 + A_5O_5 = \frac{P}{2} \quad (3).$$

Từ (2) và (3) suy ra điều phải chứng minh.

b) Ký hiệu diện tích tam giác ABC là S_{ABC}, diện tích tứ giác $ABCD$ là S_{ABCD}. Đặt $OH = y$ (h.3).



Hình 3

Trước hết ta có: $\widehat{OHF} = 18^0 \Rightarrow OF = y\sin 18^0$

$\Rightarrow HH_2 = FK = R\cos 36^0 - y\sin 18^0;$

$\widehat{A_2OK} = 36^0 \Rightarrow OK = R\cos 36^0;$

$\widehat{DIH} = 36^\circ; \widehat{EHI} = 36^\circ \Rightarrow \Delta EIH = \Delta DHI$

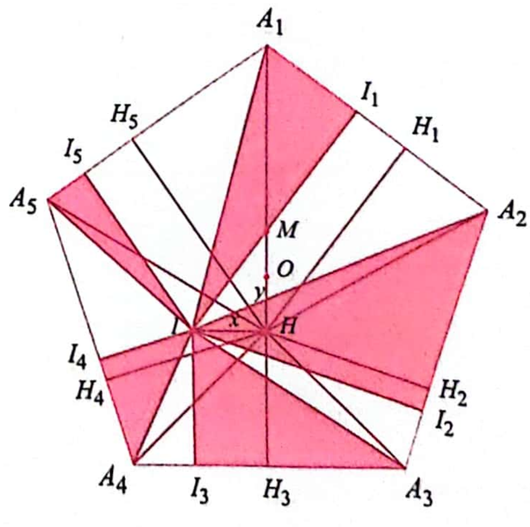
$\Rightarrow EI = DH; I_1H_1 = I_5H_5 = x\cos 36^0;$

$II_1 + II_5 = (HH_1 + EI) + (HH_5 - DH)$

$\Rightarrow II_1 + II_5 = HH_1 + HH_5 = 2HH_1.$

Tương tự: $II_2 + II_4 = HH_2 + HH_4 = 2HH_2.$

Tiếp theo (h.4) ta có:



Hình 4

$$S_{IA_1I_1} - S_{HA_1H_1} = S_{A_1IM} - S_{HH_1I_1M}$$

$$= S_{A_1IM} + S_{IHM} - S_{HH_1I_1M} - S_{IHM}$$

hay: $\quad S_{IA_1I_1} - S_{HA_1H_1} = S_{A_1HI} - S_{HII_1H_1} \quad (1).$

Tương tự:

$$S_{IA_2I_2} - S_{HA_2H_2} = S_{A_2HI} + S_{HII_2H_2} \quad (2)$$
$$S_{IA_3I_3} - S_{HA_3H_3} = -S_{A_3HI} + S_{HII_3H_3} \quad (3)$$
$$S_{IA_4I_4} - S_{HA_4H_4} = -S_{A_4HI} + S_{HII_4H_4} \quad (4)$$
$$S_{IA_5I_5} - S_{HA_5H_5} = S_{A_5HI} - S_{HII_5H_5} \quad (5).$$

Tiếp tục có:

$$-S_{HII_1H_1} - S_{HII_5H_5} = -\frac{1}{2}I_1H_1\left(II_1 + HH_1\right) - \frac{1}{2}I_5H_5\left(II_5 + HH_5\right)$$
$$= -2I_1H_1.HH_1 = -2x.\cos 36^0.HH_1$$
$$= -2x.\cos 36^0.\cos 36^0\, A_1H$$
$$= -2x.\cos^2 36^0\left(R + y\right);$$

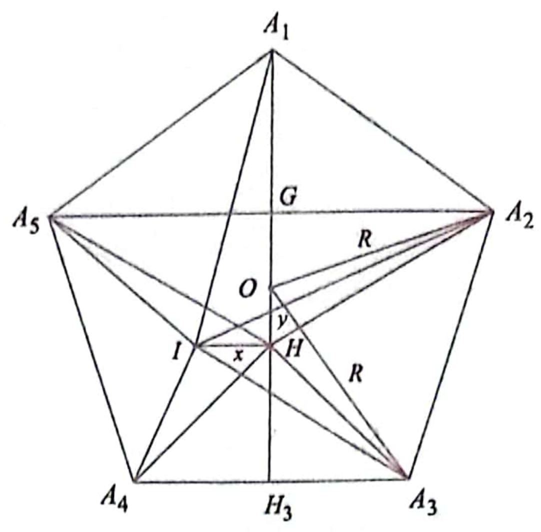
$$S_{HII_2H_2} + S_{HII_4H_4} = 2x\sin 18^0.HH_2$$
$$= 2x\sin 18^0\left(R\cos 36^0 - y\sin 18^0\right);$$

$$S_{HII_3H_3} = x.HH_3 = x.\left(OH_3 - y\right)$$
$$= x\left(R\cos 36^0 - y\right).$$

Suy ra:

$$-S_{HII_1H_1} - S_{HII_5H_5} + S_{HII_2H_2} + S_{HII_4H_4} + S_{HII_3H_3}$$
$$= x\Big[R\cos 36^0\left(-2\cos 36^0 + 2\sin 18^0 + 1\right) - y\left(2\cos^2 36^0 + 2\sin^2 18^0 + 1\right)\Big]$$
$$= x\left[R\cos 36^0\left(-2.\frac{\sqrt{5}+1}{4} + 2\frac{\sqrt{5}-1}{4} + 1\right) - y\left(2.\frac{6+2\sqrt{5}}{16} + 2.\frac{6-2\sqrt{5}}{16} + 1\right)\right]$$
$$\Rightarrow -S_{HII_1H_1} - S_{HII_5H_5} + S_{HII_2H_2} + S_{HII_4H_4} + S_{HII_3H_3} = -\frac{5xy}{2} \quad (6).$$

Mặt khác (h.5):



Hình 5

$$S_{A_1IH} = \frac{1}{2}x\left(R + y\right);$$

$$S_{A_2IH} + S_{A_5IH} = 2\left(\frac{1}{2}x.GH\right) = x\left(OG + OH\right)$$
$$= x\left(R\cos 72^0 + y\right);$$

$$-S_{A_3HI} - S_{A_4HI} = -2\left(\frac{1}{2}x.H_2H\right)$$
$$= -x\left(OH_2 - OH\right)$$
$$= -x\left(R\cos 36^0 - y\right).$$

Suy ra:

$$S_{A_1IH} + S_{A_2IH} + S_{A_5IH} - S_{A_3HI} - S_{A_4HI} =$$
$$= \frac{1}{2}x\left(R + y\right) + x\left(R\cos 72^\circ + y\right) - x\left(R\cos 36^\circ - y\right)$$
$$= \frac{5xy}{2} + xR\left(\frac{1}{2} + \sin 18^\circ - \cos 36^\circ\right)$$
$$= \frac{5xy}{2} + xR\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$$
$$\Rightarrow S_{A_1IH} + S_{A_2IH} + S_{A_5IH} - S_{A_3HI} - S_{A_4HI} = \frac{5xy}{2} \quad (7).$$

Từ (1) + (2) + (3) + (4) + (5) và áp dụng (6) + (7) ta được:

$$S_{IA_1I_1} + S_{IA_2I_2} + S_{IA_3I_3} + S_{IA_4I_4} + S_{IA_5I_5}$$
$$= S_{HA_1H_1} + S_{HA_2H_2} + S_{HA_3H_3} + S_{HA_4H_4} + S_{HA_5H_5} \; (*).$$

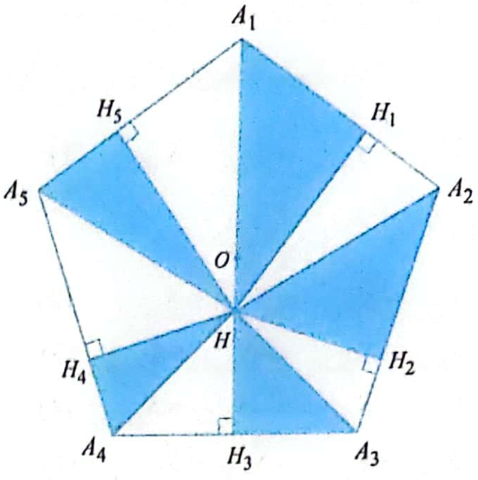
Tiếp theo (h.6) do A_1H_3 là trục đối xứng của ngũ giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5$ nên ta có:

$$S_{HA_1H_1} = S_{HA_1H_5};\ S_{HA_2H_2} = S_{HA_5A_4};$$
$$S_{HA_3H_3} = S_{HA_4H_3};\ S_{HA_4H_4} = S_{HA_3H_2};$$
$$S_{HA_5H_5} = S_{HA_2H_1}.$$

Suy ra:

$$S_{HA_1H_1} + S_{HA_2H_2} + S_{HA_3H_3} + S_{HA_4H_4} + S_{HA_5H_5} = \frac{S}{2} \quad (**).$$

Từ (*) và (**) ta có điều phải chứng minh.



Hình 6

****

TIN TỨC:

CUỘC SỐNG HIỆN TẠI CỦA THIÊN TÀI TOÁN 9 TUỔI ĐỖ ĐẠI HỌC, 15 TUỔI HỌC TIẾN SĨ

***Wang Pok Lo* (sinh năm 2005) là thiên tài Toán đỗ đại học năm 9 tuổi. Sau 10 năm, hiện chàng trai là nghiên cứu sinh tiến sĩ ngành Khoa học sức khỏe cộng đồng tại Đại học Edinburgh (Anh).**

Wang Pok Lo là thiên tài Toán học người Anh gốc Hong Kong. 1 tuổi, nam sinh thuộc nhiều bài thơ tiếng Trung và thành thạo tính toán tuổi lên 2. Quá trình học tại Tiểu học Towerbank, *Pok* hoàn thành chương trình phổ thông ở tuổi lên 8.

Biết tài năng của con, bố mẹ mua sách giáo khoa để *Pok* tự học Toán cơ bản. 9 tuổi, *Pok* đỗ vào khoa Toán của Đại học Mở (Anh). Để trở thành sinh viên đại học, lúc này, *Pok* phải tham gia thêm vòng phỏng vấn và thuyết trình.

Khi được hỏi cảm nhận đỗ đại học, *Pok* cho hay: "Tôi bất ngờ vì các thí sinh đều giỏi. Tuy nhiên, tôi nghĩ điều quan trọng phải khiêm tốn với những thành tích bản thân đạt được. Tôi sẽ luôn phát huy điểm mạnh và hạn chế điểm yếu".

Wang Pok Lo hiện là nghiên cứu sinh tiến sĩ năm cuối tại Đại học Edinburgh (Anh). Ảnh: Edinburgh News

Ngoài ra, *Pok* còn vượt qua kỳ thi Toán cao cấp ở tuổi 11. 2 năm sau, nam sinh tiếp tục gây ấn tượng khi là thí sinh nhỏ tuổi đạt chứng chỉ hạng nhất Toán học ở Anh. Sau 4 năm đại học, ở tuổi 13, *Pok* tốt nghiệp ngành Toán tại Đại học Mở (Anh).

Sau khi có bằng cử nhân, *Pok* học lên thạc sĩ tại Đại học Edinburgh (Anh). Tháng 12/2019, nam sinh tốt nghiệp thạc sĩ ngành Thống kê Y tế. Gia đình ủng hộ, *Pok* học tiếp tiến sĩ tại Đại học Edinburgh. "Tôi sẽ lập kế hoạch học tập cho chương trình tiến sĩ. Tôi cảm thấy háo hức vì được tiếp xúc với người giỏi hơn mình", nam sinh cho hay.

Chia sẻ với *Edinburgh News*, năm 2024, *Pok* đặt mục tiêu hoàn thành bằng tiến sĩ. Nam sinh cho biết, sau khi tốt nghiệp tiến sĩ sẽ học tiếp ngành Tim mạch và Thần kinh để tương lai trở thành bác sĩ, nhằm 'giúp đỡ sức khỏe của xã hội nói chung'.

Không chỉ chăm học và thích nghiên cứu, *Pok* còn dành thời gian chơi piano và nghe nhạc cổ điển. Đối với nam sinh, âm nhạc là liều thuốc thư giãn sau những giờ học tập và làm việc căng thẳng.

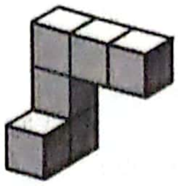
Trong mắt thầy cô *Pok* là học sinh đặc biệt. Bởi niềm đam mê Toán của nam sinh là nguồn cảm hứng cho thầy cô. "Nhà trường tự hào về Pok và những thành tích em đạt được", ông *John Wood* - Hiệu trưởng Trường Trung học Cộng đồng Queensferry (Scotland, Anh), chia sẻ.

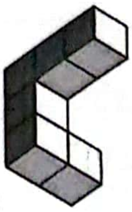
Nguồn: *Báo Vietnamnet*

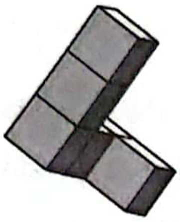
TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

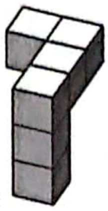
BÀI SỐ 102

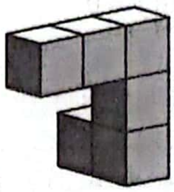
PROBLEM. *Anne has glued together some cubes and has obtained the solid shown on the below. She turns it around to check it out from different sides. Which view can she not obtain?*

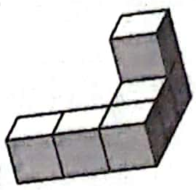



(A)


(B)


(C)


(D)


(E)

Solution. We can check directly that Anne can obtain the view $\underline{B}$, C, D, and E and cannot obtain the view A. Therefore, the answer is A.

Remark. The exercise is selected from an IKMC math past paper for grade 7 and grade 8.

TỪ VỰNG

cube : *khối lập phương*

NGUYEN PHU HOANG LAN

(*University of Education, VNU, Hanoi*)

****

BÀI DỊCH SỐ 100

BÀI TOÁN. *Cho năm điểm mắt lưới trên một lưới ô vuông. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm sao cho trung điểm của đoạn thẳng tạo bởi hai điểm đó cũng là điểm mắt lưới.*

Lời giải. Cố định mặt phẳng toạ độ trên lưới ô vuông. Khi đó toạ độ các điểm mắt lưới là các số nguyên chẵn hoặc các số nguyên lẻ, ví dụ:

$$A(2;-4), B(4;3), C(-2;5), \ldots$$

Và với ví dụ trên, trung điểm của đoạn thẳng BC có toạ độ: $\left(\frac{4+(-2)}{2};\frac{3+5}{2}\right)=(1;4)$.

Do đó trong trường hợp này trung điểm của đoạn thẳng BC cũng là điểm mắt lưới.

Bằng cách quan sát này, ta thấy trường hợp "tồi nhất" xảy ra khi bốn điểm đầu tiên có toạ độ nằm trong các dạng sau:

(lẻ; lẻ), (lẻ; chẵn), (chẵn; lẻ), (chẵn; chẵn).

Nhưng dạng toạ độ của điểm thứ năm phải là một trong bốn dạng trên, nên chẳng hạn ta chọn toạ độ điểm thứ năm có dạng (lẻ ; chẵn). Khi đó trung điểm của đoạn thẳng nối điểm thứ hai và điểm thứ năm cũng là điểm mắt lưới.

Nhận xét. Kì này hai bạn *Nguyễn Quốc Hoàng Anh*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** và bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** có bài dịch tốt, gửi bài về Toà soạn sớm. Xin hoan nghênh hai bạn.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 81. *Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số* $y = x^2\sqrt{2-|x|}$.

Cách 1. Sử dụng bất đẳng thức.

Ta có $y = x^2\sqrt{2-|x|} \geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 0$ hoặc $x = \pm 2$. Vậy $\min\limits_{[-2;2]} y = 0$.

Ta có: $y = \sqrt{x^4(2-|x|)} = \frac{1}{2}\sqrt{|x|.|x|.|x|.|x|.(8-4|x|)}$

$$\leq \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{|x|+|x|+|x|+|x|+(8-4|x|)}{5}\right]^5} = \frac{64\sqrt{10}}{125}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow |x| = 8 - 4|x| \Leftrightarrow x = \pm\frac{8}{5}$.

Vậy $\max\limits_{[-2;2]} y = \frac{64\sqrt{10}}{125}$.

Cách 2. Sử dụng tính chất hàm số chẵn.

TXĐ: $D = [-2;2]$. Ta có hàm số $y = x^2\sqrt{2-|x|}$ là hàm số chẵn. Vậy ta tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2\sqrt{2-|x|}$ trên $[0;2]$.

Ta có: $y = x^2\sqrt{2-x} \Rightarrow y' = \frac{8x-5x^2}{2\sqrt{2-x}}$ với $x \in (0;\ 2)$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5}$; Ta cũng có:

$$y(0) = y(2) = 0; y\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{64\sqrt{10}}{125}.$$

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} y = \frac{64\sqrt{10}}{125}$, $\min\limits_{[0;2]} y = 0$.

Vậy $\max\limits_{[-2;2]} y = \frac{64\sqrt{10}}{125}$, $\min\limits_{[-2;2]} y = 0$.

Cách 3. Sử dụng $y = |u(x)| \Rightarrow y' = \frac{u'.u}{|u|}$.

Ta có: $y = x^2\sqrt{2-|x|} \Rightarrow y' = 2x\sqrt{2-|x|} + x^2.\frac{-\frac{x}{|x|}}{2\sqrt{2-|x|}}$

$$= 2x\sqrt{2-|x|} - \frac{x|x|}{2\sqrt{2-|x|}} = \frac{8x-5x|x|}{2\sqrt{2-|x|}}$$

xác định trên $(-2;2)\setminus\{0\}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{8}{5}$.

Ta có: $y(-2) = y(0) = y(2) = 0$;

$$y\left(-\frac{8}{5}\right) = y\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{64\sqrt{10}}{125}.$$

Vậy $\max\limits_{[-2;2]} y = \frac{64\sqrt{10}}{125}$, $\min\limits_{[-2;2]} y = 0$.

Cách 4. Sử dụng $|u| = \begin{cases} u & \text{khi } u \geq 0 \\ -u & \text{khi } u < 0 \end{cases}$.

Ta có: $y = \begin{cases} x^2\sqrt{2-x} & \text{khi } x \in [0;2] \\ x^2\sqrt{2+x} & \text{khi } x \in [-2;0) \end{cases}$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} \dfrac{8x-5x^2}{2\sqrt{2-x}} & \text{khi } x \in [0;2) \\ \dfrac{8x+5x^2}{2\sqrt{2+x}} & \text{khi } x \in (-2;0) \end{cases}.$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{8}{5}$; y' không xác định tại $x = \pm 2$.

Ta có: $y(-2) = y(0) = y(2) = 0$;

$$y\left(-\frac{8}{5}\right) = y\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{64\sqrt{10}}{125}.$$

Vậy $\max\limits_{[-2;2]} y = \frac{64\sqrt{10}}{125}$, $\min\limits_{[-2;2]} y = 0$.

Cách 5. Đặt $t = |x|$ với $t \in [0;2]$. Khi đó:

$f(t) = t^2\sqrt{2-t} \Rightarrow f'(t) = \frac{8t-5t^2}{2\sqrt{2-t}}$, với $t \in (0;2)$

$\Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{8}{5}$.

Ta có: $f(0) = f(2) = 0; f\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{64\sqrt{10}}{125}$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} f(t) = \frac{64\sqrt{10}}{125}$, $\min\limits_{[0;2]} f(t) = 0$.

Vậy $\max\limits_{[-2;2]} y = \frac{64\sqrt{10}}{125}$, $\min\limits_{[-2;2]} y = 0$.

Cách 6. Đặt $t = \sqrt{2-|x|}$ với $t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$. Khi đó:

$$t^2 = 2 - |x| \Rightarrow x^2 = (2-t^2)^2 \Rightarrow f(t) = (2-t^2)^2 t$$
$$= t^5 - 4t^3 + 4t \Rightarrow f'(t) = 5t^4 - 12t^2 + 4.$$

Với $t\in(0;\sqrt{2})\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Ta có $f(0)=f(\sqrt{2})=0; f\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)=\dfrac{64\sqrt{10}}{125}$.

Suy ra $\max\limits_{[0;\sqrt{2}]} f(t)=\dfrac{64\sqrt{10}}{125}$, $\min\limits_{[0;\sqrt{2}]} f(t)=0$.

Vậy $\max\limits_{[-2;2]} y=\dfrac{64\sqrt{10}}{125}$, $\min\limits_{[-2;2]} y=0$.

Cách 7. Đặt $|x|=2\cos t$ với $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$f(t)=4\cos^2 t\sqrt{2-2\cos t}=8\cos^2 t\sin\dfrac{t}{2}$

$$\Rightarrow f'(t)=-16\cos t\sin t\sin\frac{t}{2}+4\cos^2 t\cos\frac{t}{2}$$
$$=4\cos t\cos\frac{t}{2}\left(-8\sin^2\frac{t}{2}+\cos t\right)$$
$$=4\cos t\cos\frac{t}{2}(5\cos t-4) \text{ với } t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

$\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=\arccos\dfrac{4}{5}$. Ta có:

$$f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0; f\left(\arccos\frac{4}{5}\right)=\frac{64\sqrt{10}}{125}.$$

Suy ra: $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f(t)=\dfrac{64\sqrt{10}}{125}$, $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f(t)=0$.

Vậy $\max\limits_{[-2;2]} y=\dfrac{64\sqrt{10}}{125}$, $\min\limits_{[-2;2]} y=0$.

Cách 8. Bình phương hai vế ta có $y^2=x^4(2-|x|)$.

Đặt $t=|x|$ với $t\in[0;2]$. Khi đó:

$$f(t)=-t^5+2t^4\Rightarrow f'(t)=-5t^4+8t^3.$$

Với $t\in(0;2)$ thì $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{8}{5}$.

Ta có: $f(0)=f(2)=0; f\left(\dfrac{8}{5}\right)=\dfrac{8192}{3125}$.

Suy ra $\max\limits_{[0;2]} f(t)=\dfrac{8192}{3125}$, $\min\limits_{[0;2]} f(t)=0$.

Vậy $\max\limits_{[-2;2]} y=\dfrac{64\sqrt{10}}{125}$, $\min\limits_{[-2;2]} y=0$.

TRẦN ĐỨC PHƯƠNG

(GV THPT Giao Thủy, Nam Định)

Nhận xét. Hai bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** và *Huỳnh Bá Anh Tuấn*, 11, THPT Hoàng Hoa Thám, Sơn Trà, **Đà Nẵng** cũng đóng góp một số cách giải tương tự cách 1, cách 2, cách 5 trong các cách trên. Xin hoan nghênh hai bạn.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải bài toán 82 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.4.2024.

BÀI TOÁN 83. *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng* $\dfrac{a^3}{bc}+\dfrac{b^3}{ca}+\dfrac{c^3}{ab}\geq a+b+c$.

MAI VĂN NĂM

(GV THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Bình)

***

SAI LẦM . . .

(Tiếp theo trang 47)

Lời giải của bạn Dung: PT đường tròn (C) là $(x-2)^2+(y+3)^2=25$. Suy ra (C) có tâm $I(2;-3)$ bán kính $R=5$. Gọi $\vec{n}=(a;b)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ. Vì Δ đi qua điểm $A(-3;7)$ nên Δ có PT: $a(x+3)+b(y-7)=0$

$$\Leftrightarrow ax+by+3a-7b=0.$$

Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I,\Delta)=R\Leftrightarrow\frac{|a.2+b.(-3)+3a-7b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5$$

$$\Leftrightarrow\frac{|5a-10b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5\Leftrightarrow\frac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$$

$$\Leftrightarrow|a-2b|=\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow(a-2b)^2=a^2+b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2-4ab+4b^2=a^2+b^2\Leftrightarrow -4ab+3b^2=0$$

$\Rightarrow -4a+3b=0$. Chọn $a=3\Rightarrow b=4$ suy ra PT của Δ là $3x+4y-19=0$. Vậy đường tròn (C) đã cho có một tiếp tuyến đi qua điểm $A(-3;7)$ là $3x+4y-19=0$.

Theo em, lời giải của hai bạn Tuấn và Dung đã đúng chưa? Lời giải của em như thế nào?

THÂN VĂN DỰ

(GV THPT Lạng Giang số 1, Bắc Giang)

BÀI TOÁN 89 (Cuộc thi toán học mùa đông tại Bulgaria, 1995). *Tìm tất cả các tham số thực p để miền giá trị của hàm số* $\frac{2(1-p)+\cos x}{p-\sin^2 x}$ *chứa khoảng* [1;2].

Lời giải. Đặt $\cos x = y$. Bài toán trở thành: Tìm các giá trị thực của p sao cho với mọi $k \in [1;\ 2]$ phương trình $\frac{2(1-p)+y}{p-1+y^2}=k$ có ít nhất một nghiệm $y_0 \in [-1;\ 1]$, tức là tìm các giá trị thực của $q = 1 - p$ sao cho với mọi $k \in [1;\ 2]$ phương trình $ky^2 - y - q(k+2) = 0$ có ít nhất một nghiệm $y_0 \in [-1;\ 1]$ với $y_0^2 \neq q$.

Nếu $y_0^2 = q$ thì $-y_0 - 2q = 0 \Leftrightarrow y_0 = -2q$

$$\Rightarrow 4q^2 = q \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q_1 = 0 \\ q_2 = \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Nếu $q = 0$ thì nghiệm của phương trình $ky^2 - y = 0$ là $y_1 = 0$ và $y_2 = \frac{1}{k}$. Ta có $y_2 = \frac{1}{k} \in [-1;1]$ và $y_0^2 \neq q = 0$. Vậy $q = 0$ thỏa mãn bài toán.

Nếu $q = \frac{1}{4}$ thì nghiệm của phương trình $ky^2 - y - \frac{1}{4}(k+2) = 0$ là $y_2 = -\frac{1}{2}$ và $y_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{k}$. Ta có $y_2 \in [-1;1]$ chỉ khi $k = 2$.

Vậy $q = \frac{1}{4}$ không thỏa mãn bài toán.

Giả sử $q \neq 0$ và $q \neq \frac{1}{4}$. Khi đó phương trình

$$ky^2 - y - q(k+2) = 0$$

có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 1 + 4qk(k+2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow q \geq -\frac{1}{4k(k+2)}, \forall k \in [1;2].$$

Suy ra: $q \geq -\frac{1}{32}$. Đỉnh S của parabol $g(y) = ky^2 - y - q(k+2)$ có hoành độ $x_S = \frac{1}{2k} \in (0;1] \subset [-1;1]$. Vì vậy phương trình $g(y) = 0$ có ít nhất một nghiệm $y_0 \in [-1;\ 1]$ khi và chỉ khi ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau đúng:

$$g(-1) \geq 0 \text{ và } g(1) \geq 0.$$

Từ đây dễ thấy $q \leq \frac{k+1}{k+2}, \forall k \in [1;2]$.

Suy ra $q \leq \frac{2}{3}$, tức là $q \in \left[-\frac{1}{32}; \frac{2}{3}\right]$ và $q \neq \frac{1}{4}$.

Từ đó: $p \in \left[\frac{1}{3}; \frac{33}{32}\right]$ và $p \neq \frac{3}{4}$.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào giải đúng được bài này.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.4.2024.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 91. *Hãy tìm tất cả các bộ ba số hữu tỷ (a, b, c) là những nghiệm của phương trình*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP: ĐÁP ÁN NÀO?

(Đề đăng trên TH&TT số 557, tháng 11 năm 2023)

Phân tích sai lầm. Với $m=\frac{1}{9}$, PT(1) có ba nghiệm phân biệt $x=0; x=-\frac{7}{9}; x=\frac{10}{9}$ không lập thành một cấp số nhân. Vậy $m=\frac{1}{9}$ không thỏa mãn. Do đó phần thử lại, phải kiểm tra PT(1) có ba nghiệm phân biệt khác 0 hay không.

Lời giải đúng như sau.

PT hoành độ giao điểm là:

$$x^3-3mx^2+2m(m-4)x+9m^2-m=0 \quad (1).$$

Giả sử PT(1) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3. Khi đó $x_1x_2x_3=-9m^2+m$. Mà $x_1x_3=x_2^2$, suy ra:

$$x_2^3=-9m^2+m \Rightarrow x_2=\sqrt[3]{-9m^2+m}.$$

Do x_2 là nghiệm của (1), ta có:

$$\left(\sqrt[3]{-9m^2+m}\right)^3-3m\left(\sqrt[3]{-9m^2+m}\right)^2+$$
$$+2m(m-4)\sqrt[3]{-9m^2+m}+9m^2-m=0$$
$$\Leftrightarrow -m\sqrt[3]{-9m^2+m}\left[3\sqrt[3]{-9m^2+m}-2(m-4)\right]=0$$
$$m=0; m=\frac{1}{9}; 3\sqrt[3]{-9m^2+m}=2(m-4) \ (2).$$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 8m^3+147m^2+357m-512=0$

$$\Leftrightarrow 8m^3+147m^2+357m-512=0$$
$$\Leftrightarrow m=1;\ m=\frac{-155\pm 3\sqrt{849}}{16}.$$

Thử lại: Với $m=0$, PT(1) có một nghiệm (loại).

Với $m=1$, PT(1) có ba nghiệm phân biệt khác 0 (thỏa mãn); Với $m=\frac{1}{9}$, PT(1) có ba nghiệm phân biệt: $x=0; x=-\frac{7}{9}; x=\frac{10}{9}$ (loại);

Với $m=\frac{-155+3\sqrt{849}}{16}$, PT(1) có một nghiệm (loại); Với $m=\frac{-155-3\sqrt{849}}{16}$, PT(1) có ba nghiệm phân biệt khác 0 (thỏa mãn).

Vậy $m=1; m=\frac{-155-3\sqrt{849}}{16}$.

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng.

KIHIVI

TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN ĐI QUA MỘT ĐIỂM

Trong giờ bài tập toán tại lớp 10A2. Thầy giáo đưa ra bài toán sau:

Bài toán. *Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn* $(C): (x-2)^2+(y+3)^2=25$ *biết tuyến đi qua điểm* $A(-3;7)$.

Sau một thời gian suy nghĩ, bạn *Tuấn* đã xung phong lên bảng làm.

Lời giải của bạn Tuấn.

Đường tròn $(C): (x-2)^2+(y+3)^2=25$. Suy ra đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$ bán kính $R=5$.

Đường thẳng Δ có hệ số góc k và đi qua điểm $A(-3;7)$. Phương trình đường thẳng Δ là:

$$y=k(x+3)+7 \Leftrightarrow kx-y+3k+7=0.$$

Đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C)

$$\Leftrightarrow d(I,\Delta)=R \Leftrightarrow \frac{|k.2-(-3)+3k+7|}{\sqrt{k^2+1}}=5$$
$$\Leftrightarrow \frac{|5k+10|}{\sqrt{k^2+1}}=5 \Leftrightarrow \frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$$
$$\Leftrightarrow |k+2|=\sqrt{k^2+1} \Leftrightarrow (k+2)^2=k^2+1$$
$$\Leftrightarrow k^2+4k+4=k^2+1 \Leftrightarrow k=-\frac{3}{4}.$$ PT Δ là:

$$-\frac{3}{4}x-y-\frac{9}{4}+7=0 \Leftrightarrow 3x+4y-19=0.$$

Vậy đường tròn (C) đã cho có một tiếp tuyến đi qua điểm $A(-3;7)$ là $3x+4y-19=0$.

Sau khi bạn *Tuấn* làm xong, bạn *Dung* nói em có một cách khác để giải bài toán này

(Xem tiếp trang 45)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 561 (3.2024)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

20 **Đề ra kỳ này**
Problems in This Issue
T1/561, ..., T12/561, L1/561, L2/561

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIÊN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM

Năm 2010
Khổ $19 \times 26{,}5$
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2012
Khổ $19 \times 26{,}5$
Giá bìa: 152.000 đồng

Năm 2014
Khổ $19 \times 26{,}5$
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ $19 \times 26{,}5$
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ $19 \times 26{,}5$
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ $19 \times 26{,}5$
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ $19 \times 26{,}5$
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ $19 \times 26{,}5$
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ $19 \times 26{,}5$
Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021
Khổ $19 \times 26{,}5$
Giá bìa: 240.000 đồng

Năm 2022
Khổ $19 \times 26{,}5$
Giá bìa: 260.000 đồng

Năm 2023
Khổ $19 \times 26{,}5$
Giá bìa: 260.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội

- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

THƯ NGỎ

Bạn đọc thân mến!

Trong 60 năm qua, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ không ngừng phát triển và đã trở thành người bạn thân thiết của nhiều thế hệ học sinh, giáo viên và bạn đọc yêu toán trên cả nước. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã nhận nhiều Giấy khen, Huân huy chương và những phần thưởng cao quý khác mà Đảng và Nhà nước trao tặng. Điều này có được là nhờ công sức của các nhà toán học, các nhà sư phạm, các ủy viên hội đồng biên tập, các công tác viên và bạn đọc yêu toán trên cả nước. Thay mặt Ban biên tập, chúng tôi xin cảm ơn bạn đọc gần xa, các nhà khoa học và các cộng tác viên về những đóng góp to lớn đó.

Để kỷ niệm 60 năm thành lập và phát triển Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (dự kiến trong tháng 12 năm 2024), từ tháng 4.2024, Ban biên tập sẽ mở chuyên mục: ***Những hồi ức, những kỷ niệm về Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.*** Nội dung các bài trong chuyên mục này sẽ viết về những hồi ức, những kỷ niệm, gắn bó của bạn đọc với Toán học và Tuổi trẻ; những ảnh hưởng, đóng góp của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đối với phong trào học toán, giải toán trên toàn quốc.

Bài viết có thể viết trên giấy hoặc đánh máy vi tính (nên bằng chương trình soạn thảo văn bản w... Trên bài viết cần ghi rõ: Họ tên, địa chỉ, số điện thoại. Bài viết không quá 4 trang đánh máy.

Bài viết có thể gửi về Tòa soạn:

- Gửi file word theo địa chỉ email: *toanhoctuoitrevietnam@gmail.com*

- Gửi bài theo đường Bưu điện. Phong bì có dán tem, gửi về địa chỉ: *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 1... Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội.*

- Hoặc đến Toà soạn Tạp chí gửi trực tiếp.

Ban biên tập mong muốn nhận được các bài viết từ bạn đọc. Trân trọng cám ơn!

TH&T...

CUỘC THI VIẾT CHUYÊN ĐỀ TOÁN CHÀO MỪNG 60 NĂM TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Để chào mừng 60 năm thành lập và phát triển Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Ban biên tập tổ chức cuộc thi viết chuyên đề Toán cho bậc THCS và THPT.

• **Đối tượng dự thi:** Giáo viên đã hoặc đang dạy ở bậc THCS, THPT, Giảng viên, Sinh viên ở các trường Đại học, Cao đẳng và bạn đọc yêu thích Toán.

• **Nội dung bài dự thi:** Là các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán; các chuyên đề ôn tập, ôn thi cuối cấp; những tìm tòi, sáng tạo trong việc dạy học Toán (bậc THCS, THPT).

• **Thể lệ cuộc thi:** Mỗi người tham gia cuộc thi được gửi không quá 3 bài dự thi khác nhau. Các bài dự thi có thể là các sáng kiến kinh nghiệm đã đăng ký, hoặc đạt giải ở Trường, Phòng, Sở,... nhưng chưa từng được xuất bản thành sách, báo, tạp chí và cũng chưa tham gia cuộc thi nào khác.

Kết quả cuộc thi sẽ được công bố trên TH&TT tháng 11 năm 2024 (Số 569). Các bài hay có thể được chọn đăng trên Tạp chí hoặc in thành sách. Các tác giả được hưởng nhuận bút theo quy định của Tạp chí. Bài viết tham dự cuộc thi thuộc bản quyền của TH&TT.

• **Thời hạn gửi bài dự thi:** Trước ngày 15/10/2024.

• **Quy cách bài dự thi:** Bài dự thi được đánh máy vi tính, nên dùng chương trình soạn thảo văn bản word (có file). Trên mỗi bài dự thi ghi rõ: Họ và tên, địa chỉ Trường, xã (phường), huyện (quận), tỉnh (thành phố), số điện thoại. Bài dự thi không quá 15 trang đánh máy. Trên cùng của trang 1 mỗi bài dự thi ghi rõ:

Bài dự thi viết chuyên đề Toán
chào mừng 60 năm TH&TT.

• **Cách gửi bài dự thi:** Bài dự thi gửi về Tòa soạn TH&TT bằng cách:

- Gửi file word theo địa chỉ email:

toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

- Gửi bài theo đường Bưu điện. Phong bì có dán tem, gửi về địa chỉ:

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
187B Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội.

- Hoặc đến Toà soạn Tạp chí gửi trực tiếp.

• **Giải thưởng:** Những người đoạt giải sẽ được nhận Giấy chứng nhận và Tặng phẩm của Tạp chí.

TH&TT

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT3M24
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2024

Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng