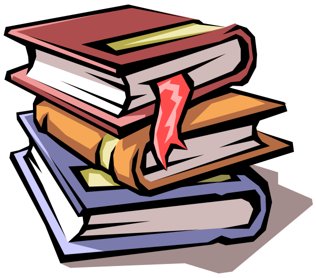
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



PHÂN DẠNG
TOÁN THỰC TẾ LUYỆN THI VÀO 10

(Liệu hệ tài liệu word môn toán SĐT (zalo) : 039.373.2038)

Tài liệu sưu tầm, ngày 15 tháng 8 năm 2023

Mục lục

CHUYÊN ĐỀ PHẦN TRĂM

Lí thuyết

Với a là giá ban đầu (giá gốc) của sản phẩm. Nếu:

- Giá sản phẩm tăng $r\%$ thì giá mới của sản phẩm là $a.(1+r\%)$
- Giá sản phẩm giảm $r\%$ thì giá mới của sản phẩm là $a.(1-r\%)$

Lưu ý: Nếu:

- Bài toán yêu cầu tìm giá gốc (giá ban đầu) của sản phẩm thì ta gọi x là giá gốc (giá ban đầu) sau đó tìm x.
- Bài toán yêu cầu tìm giá cuối cùng của sản phẩm thì ta sẽ đi tính trực tiếp (không gọi x).

BÀI TẬP

Bài 1. Giá bán 1 cái tivi giảm giá 2 lần, mỗi lần 10% so với giá đang bán, sau khi giảm giá 2 lần đó thì giá còn lại là 12150000 đồng. Hỏi nếu ngay từ đầu cũng giảm giá 2 lần, mỗi lần chỉ giảm giá 5% so với giá đang bán thì sau khi giảm giá 2 lần đó thì giá tivi này còn lại bao nhiêu tiền?

Đáp số: 13537500 *(đồng)*

Bài 2. Bác Bảy mua một con nghé và một con bê. Sau đó bác bán lại cho người bạn con nghé với giá 18 triệu, để hỗ trợ bạn, bác nói: "Tôi bán cho anh lỗ mất 20% rồi đấy!!!" Ít hôm sau ông bán con bê cho ông Ba xã bên với giá 18 triệu, Bác thầm nghĩ: "Bán đi con này mình lời 20% so với giá ban đầu!!!". Hỏi sau khi bán hai con, bác lời hay lỗ so với số tiền bác dùng để mua hai con?

Đáp số: bác Bảy lỗ 1 500 000 đồng.

Bài 3. Một người mua 3 đôi giày với hình thức khuyến mãi như sau : Nếu bạn mua một đôi giày với mức giá thông thường bạn sẽ nhận được giá giảm 30% khi mua đôi thứ hai và mua đôi thứ ba với nửa giá ban đầu. Bạn An đã trả tổng cộng là 1320000 đồng cho 3 đôi giày

a) Hỏi giá ban đầu của một đôi giày là bao nhiêu ?

b) Nếu cửa hàng đưa ra hình thức khuyến mãi thứ hai là giảm 20% mỗi đôi giày. Hỏi bạn An nên chọn hình thức khuyến mãi nào nếu mua 3 đôi giày ?

Đáp số: 600000 *đồng, An nên chọn hình thức khuyến mãi thứ nhất.*

Bài 4. Một siêu thị chạy chương trình khuyến mãi cho nước tăng lực có giá niêm yết là 9000 (đ/lon) như sau:

- Nếu mua 1 lon thì không giảm giá.
- Nếu mua 2 lon thì lon thứ hai được giảm 500 đồng
- Nếu mua 3 lon thì lon thứ hai được giảm 500 đồng và lon thứ ba được giảm giá 10%.
- Nếu mua trên 3 lon thì lon thứ hai được giảm 500 đồng, lon thứ ba được giảm 10% và những lon thứ tư trở đi đều được giảm thêm 2% trên giá đã giảm của lon thứ ba.

a) Hùng mua 3 lon nước tăng lực trên thì phải thanh toán số tiền là bao nhiêu?

b) Vương phải trả 422500 đồng để thanh toán khi mua những lon nước tăng lực trên. Vương đã mua bao nhiêu lon nước?

Đáp số: 25600 *đồng,* 53 *lon nước ngọt.*

Bài 5. Để giúp các bạn trẻ "khởi nghiệp", ngân hàng cho vay vốn ưu đãi với lãi suất 5% /năm. Một nhóm bạn trẻ vay 100 triệu đồng làm vốn kinh doanh hàng tiểu thủ công mỹ nghệ.

a) Hỏi sau một năm các bạn trẻ phải trả cho ngân hàng cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?
b) Các bạn trẻ kinh doanh hai đợt trong năm, đợt 1 sau khi trừ các chi phí thấy lãi được 18% so với vốn bỏ ra nên dồn cả vốn lẫn lãi để kinh doanh tiếp đợt 2, cuối đợt 2 trừ các chi phí thấy lãi 20% so với vốn đợt 2 bỏ ra. Hỏi sau 2 đợt kinh doanh, trả hết nợ ngân hàng, các bạn trẻ còn lãi được bao nhiêu tiền?

Đáp số: 105 (triệu đồng), $36,6$ (triệu đồng)

Bài 6. Hai trường A và B có 420 học sinh đậu vào lớp 10 đạt tỉ lệ 84%. Riêng trường A tỉ lệ đậu 80%, riêng trường B tỉ lệ đậu 90%. Tính số học sinh dự thi của mỗi trường?

Đáp số: trường A có 300 hs (học sinh) dự thi, trường B có 200 hs (học sinh)

Bài 7. Bạn Nam mua hai đôi giày và bán lại với giá của mỗi đôi là $1\,232\,000$ (đồng). Biết đôi thứ nhất Nam lời được 12% so với giá Nam đã mua đôi thứ nhất, đôi thứ 2 Nam lỗ 12% so với giá Nam đã mua đôi thứ hai. Hỏi sau khi bán hai đôi giày trên, Nam lời hay lỗ bao nhiêu tiền?

Đáp số: Nam bị lỗ và lỗ $36\,000$ (đồng)

Bài 8. Phòng học lớp $6A$ gắn máy lạnh. Lớp có 49 học sinh, trong đó có 40 bạn học bán trú. Biết rằng các bạn học bán trú thì đóng tiền điện 100%, các bạn không học bán trú thì đóng 50%. Trong tháng 4 lớp đã xài hết 700 Kwh điện, biết mỗi Kwh điện giá $2\,000$ đồng. Tính số tiền mỗi học sinh bán trú và không bán trú cần phải đóng (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).

Đáp số: $31460, 15730$

Bài 9. Năm học 2021-2022, học kì I, trường THCS A có 500 học sinh đạt loại khá và giỏi. Học kì II, số học sinh khá tăng 2%, số học sinh giỏi tăng 4% nên tổng số học sinh khá và giỏi là 513 học sinh. Nhà trường phát thưởng cho học sinh đạt thành tích cho học kì II như sau: mỗi học sinh giỏi là 15 quyển tập, mỗi học sinh khá là 10 quyển tập. Biết giá mỗi quyển tập bán trên thị trường là $9\,500$ đồng/quyển. Do mua số lượng lượng lớn công ty cung cấp có chính sách như sau: Nếu hóa đơn trên $40\,000\,000$ đồng thì được giảm giá 5%; nếu hóa đơn trên $50\,000\,000$ đồng thì được giảm giá 8%;nếu hóa đơn trên $60\,000\,000$ đồng thì được giảm giá 10%. Hỏi nhà trường phải trả số tiền mua tập làm phần thưởng là bao nhiêu?

Đáp số: 51653400 đồng.

Bài 10 Một công nhân làm việc với mức lương cơ bản là 200.000 ngàn đồng cho 8 giờ làm việc trong một ngày. Nếu trong một tháng người đó làm 26 ngày và tăng ca thêm 3 giờ/ngày trong 10 ngày thì người đó nhận được bao nhiêu tiền lương? Biết rằng tiền lương tăng ca bằng 150% tiền lương cơ bản.

Đáp số: 6.325.000 (đồng)

Bài 11. Trong tháng 12 năm 2021 khi Thành Phố Hồ Chí Minh cho các học sinh lớp 9 trở lại trường học trực tiếp sau những tháng ngày học trực tuyến, tôi đã về trường cũ để lãnh những phần thưởng mà tôi đã gặt hái được trong năm học vừa qua do dịch bệnh nên không đến nhận phần thưởng được. Vui mừng khi gặp lại thầy chủ nhiệm lớp 9. Qua trò chuyện, thầy cho tôi biết lớp tôi sỉ số cuối năm giảm $\frac{1}{21}$ so với đầu năm, toàn bộ lớp đều tham gia xét tuyển sinh lớp 10 và kết quả có 34 học sinh đã đậu vào lớp 10 công lập, đạt tỷ lệ 85%. Các bạn hãy tính sỉ số đầu năm của lớp tôi là bao nhiêu?

Đáp số: 42 học sinh.

Bài 12. Lan đi siêu thị mua một món hàng đang có chương trình khuyến mãi giảm giá 30%, do có thẻ khách hàng thường xuyên của siêu thị nên được giảm thêm 5% trên giá đã giảm, do đó Lan chỉ phải trả $166\,250$ đồng cho món hàng đó.

a) Hỏi giá món hàng đó nếu không khuyến mãi là bao nhiêu?

b) Nếu Lan không có thẻ khách hàng thân thiết nhưng món hàng đó được giảm 35%. Hỏi số tiền mà Lan được giảm có bằng lúc ban đầu không?

Đáp số: $250\,000$ đồng, Lan mua được giảm nhiều hơn lúc ban đầu.

Bài 13. Hãng viễn thông có ba phương án trả tiền cước điện thoại cho mỗi cuộc gọi như sau:

– Phương án I: Trả tổng cộng 99 *cent* cho 20 phút đầu, sau đó từ phút thứ 21 thì mỗi phút trả 5 *cent*.

– Phương án II: Kể từ lúc đầu tiên, mỗi phút trả 10 *cent*.

– Phương án III: Trả 25 *cent* tiền thuê bao, sau đó kể từ phút đầu tiên mỗi phút trả 8 *cent*.

Anh Toàn là nhân viên Sale bất động sản. Trung bình mỗi tháng thì anh Toàn thực hiện 200 cuộc gọi với 10% cuộc gọi 1 phút, 10% cuộc gọi 5 phút, 30% cuộc gọi 10 phút, 30% cuộc gọi 20 phút, 20% cuộc gọi 30 phút. Hỏi anh Toàn nên chọn phương án nào của hãng viễn thông để có lợi nhất?

Đáp số: anh Toàn nên chọn phương án I để có lợi nhất

Bài 14. Một cửa hàng bán loại bánh A như sau: nếu mua không quá 3 hộp thì giá 35 nghìn đồng mỗi hộp, nếu mua nhiều hơn 3 hộp thì bắt đầu từ hộp thứ tư trở đi giá mỗi hộp sẽ giảm đi 20% giá ban đầu.

a) Viết công thức tính y (số tiền mua bánh) theo x (số hộp bánh mua trong trường hợp nhiều hơn 3 hộp).

b) Lan và Hồng đều mua loại bánh A với số hộp nhiều hơn 3. Hỏi mỗi bạn mua bao nhiêu hộp biết rằng số hộp bánh Lan mua gấp đôi số hộp Hồng mua, đồng thời số tiền mua bánh của Lan nhiều hơn Hồng 140 nghìn đồng.

Đáp số: $y = 28000x + 21000$, $5, 10$.

Bài 15. Một lốc sữa có 4 hộp sữa, một thùng sữa có 12 lốc. Bạn An mang đủ tiền để mua 1 thùng sữa, nhưng đến nơi thì cửa hàng có chương trình khuyến mãi giảm giá 25% trên giá mỗi hộp sữa. Biết rằng với số tiền mang theo thì vừa đủ (không thừa, không thiếu) để An mua thêm được một số hộp sữa nữa so với dự định. Hãy tính số hộp sữa An đã mua.

Đáp số: 64 hộp.

Bài 16. Ông An gửi ngân hàng 2000000000 đồng với lãi suất $6{,}5\%$/năm.

a) Sau 2 năm, tổng số tiền vốn và lãi ông *An* nhận được là bao nhiêu?

b) Ông An dùng số tiền đã nhận (ở câu a) để đầu tư kinh doanh. Biết sau một thời gian đầu tư, số tiền ông An nhận được cả vốn lẫn lãi là 2608717500 đồng. Hỏi lợi nhuận ông An nhận được trong đợt đầu tư kinh doanh vừa rồi là bao nhiêu phần trăm?

Đáp số: $2\ 268450000$ đồng, 15%.

Bài 17. Một công nhân làm việc với mức lương cơ bản là 200000 cho 8 giờ làm việc trong một ngày. Nếu trong một tháng người đó làm 26 ngày và tăng ca thêm 3 giờ/ngày trong 10 ngày thì người đó nhận được bao nhiêu tiền lương? Biết rằng một giờ tiền lương tăng ca bằng 150% một giờ tiền lương cở bản.

Đáp số: $6\,325\,000$ đồng.

Bài 18. Cửa hàng lấy 1 thùng nước ngọt (24 lon) của đại lý phân phối với giá $192\ 000$ đồng và bán lẻ với giá $10\ 000$ đồng một lon.

a) Hỏi khi bán hết 1 thùng nước ngọt đó thì cửa hàng thu được lãi bao nhiêu phần trăm so với giá gốc?
b) Trong đợt khuyến mãi, do đại lý phân phối giảm giá nên cửa hàng cũng giảm giá nên còn $9\ 500$ đồng một lon và thu được lãi suất như cũ. Hỏi trong đợt này cửa hàng đã mua 1 thùng nước ngọt với giá bao nhiêu?

Đáp số: 25%, 182400 (đồng)

Bài 19. Tại một cửa hàng bán giày đồng giá đang có chương trình khuyến mãi sau: nếu mua đôi giày thứ nhất với mức giá thông thường thì sẽ được khuyến mãi 20% khi mua đôi giày thứ 2 và những đôi kể từ đôi thứ 3 trở đi thì chỉ bằng một nữa giá thông thường. Ban đầu, Nam định mua 3 đôi giày thì theo hóa đơn tính tiền, số tiền Nam phải trả là 1380000 đồng.

a) Hỏi giá ban đầu của đôi giày là bao nhiêu?
b) Tuy nhiên, lúc sau Nam có ý định mua thêm đôi nữa và nếu cửa hàng đưa ra hình thức khuyến mãi thứ 2 là giảm 35% trên tất cả các đôi. Bạn Nam nên chọn hình thức khuyến mãi nào nếu mua **4** đôi giày?

Đáp số: 600000, Nam nên chọn hình thức khuyến mãi 2 ($1560000 < 1680000$).

LÃI SUẤT NGÂN HÀNG

Lí thuyết:

Với a là số tiền gốc ban đầu, r là lãi suất mỗi kì (kì: có thể theo tháng, theo quý hoặc theo năm, đơn vị: $\%$).
Khi đó tiền lãi sau 1 kì là: $a.r$
Số tiền nhận được sau 1 kì: $a+a.r$

BÀI TẬP

Bài 1. Bà A gởi tiết kiệm ngân hàng một số tiền là 100 triệu với lãi suất là 10% trong một năm. Hỏi sau hai năm số tiền bà A rút được cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu. Biết rằng số tiền gởi vào năm đầu cộng số tiền lãi gộp vào để tính số tiền gởi trong năm thứ hai.

Đáp số: $121.000.000$ *đồng*

Bài 2. Ông An gửi tiết kiệm vào ngân hàng một số tiền là 100 triệu đồng với lãi suất $0,5\%$ một tháng. Hỏi sau tròn hai năm số tiền ông An nhận được là bao nhiêu. Biết trong thời gian gửi ông không rút tiền lãi ra.

Đáp số: $112.715.978$ *đồng*

Bài 3. Bà Hoa gửi tiết kiệm vào ngân hàng với số tiền ban đầu là 150 triệu đồng với lãi suất 5%/năm, kì hạn 6 tháng, lãi kép (tiền lãi được nhập vào tiền vốn ban đầu để tính lãi tiếp). Hỏi sau 5 năm, bà nhận được cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

Đáp số: $192.012.682$ *đồng*

Bài 4. Một người gửi tiết kiệm $200.000.000$ đồng vào tài khoản ngân hàng Nam Á với 2 sự lựa chọn. Lựa chọn 1: người gửi nhận được lãi suất 7% một năm. Lựa chọn 2: nhận ngay 3 triệu tiền thưởng với lãi suất 6% một năm. Hỏi lựa chọn nào tốt hơn sau 1 năm, sau 2 năm.

Đáp số: *sau 1 năm, lựa chọn 2 tốt hơn*
sau 2 năm, lựa chọn 1 tốt hơn

Bài 5. Ông Sáu gửi một số tiền vào ngân hàng theo mức lãi suất kỳ hạn 1 năm là 6%. Tuy nhiên sau thời hạn một năm ông Sáu không đến nhận tiền lãi mà để thêm một năm nữa mới lãnh. Khi đó số tiền lãi có được sau năm đầu tiên sẽ được ngân hàng cộng dồn vào số tiền gửi ban đầu để thành số tiền gửi cho năm kế tiếp với mức lãi suất cũ. Sau 2 năm ông Sáu nhận được số tiền là $112.360.000$ đồng (kể cả gốc lẫn lãi). Hỏi ban đầu ông Sáu đã gửi bao nhiêu tiền?

Đáp số: $100.000.000$ *đồng*

Bài 6. Một người gửi 200 triệu đồng vào ngân hàng trong thời hạn một năm lãnh lãi cuối kỳ. Vậy đến hết năm thứ hai người đó mới đến ngân hàng rút tiền cả vốn lẫn lãi là $231.125.000$ đồng. Biết sau 1 năm tiền lãi tự nhập thêm vào vốn và lãi suất không thay đổi. Hỏi lãi suất của ngân hàng đó là bao nhiêu $\%$ một năm.

Đáp số: $7,5\%$

Bài 7. Một học sinh 16 tuổi được hưởng tài sản thừa kế 200 triệu VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong một ngân hàng với kỳ hạn thanh toán 1 năm và học sinh này chỉ nhận số tiền nay khi đã đủ 18 tuổi. Khi đủ 18 tuổi, học sinh này nhận được số tiền là $228.980.000$. Hỏi lãi suất kì hạn 1 năm của ngân hàng này là bao nhiêu?

Đáp số: 7%

Bài 8. Bạn Nam gửi ngân hàng 20 triệu đồng, kì hạn 1 năm. Sau 1 năm,tổng số tiền Nam có trong ngân hàng là 21 triệu, hỏi sau 2 năm số tiền trong ngân hàng của Nam là bao nhiêu? Biết lãi suất ngân hàng không đổi, và Nam không rút tiền lãi sau năm thứ nhất.

Đáp số: $22.050.000$ *đồng*

Bài 9. Bạn Mai vay 200 triệu của ngân hàng trong thời hạn 2 năm, để mở một cửa hàng. Theo hợp đồng vay vốn, lãi suất vay trong 1 năm là 10%. Sau 1 năm, tiền lãi của năm đầu sẽ được cộng dồn vào vốn vay của năm sau.
a) Sau 2 năm, bạn Mai phải trả cho ngân hàng số tiền cả gốc và lãi là bao nhiêu?
b) Giá vốn trung bình của các sản phẩm là 120.000 đồng và bán với giá là 170.000 đồng. Sau 2 năm sản xuất và kinh doanh, để tiền lãi thu vào đủ thanh toán hết nợ với ngân hàng thì cửa hàng phải sản xuất và tiêu thụ được bao nhiêu sản phẩm?

Đáp số: *a)* $242.000.000$ *đồng* *b)* 4840 *sản phẩm*

Bài 10. Để giúp các bạn trẻ khởi nghiệp, ngân hàng cho vay vốn ưu đãi với lãi suất 5%/năm. Một nhóm bạn trẻ vay 100 triệu đồng làm vốn kinh doanh hàng mỹ nghệ.
a) Hỏi sau một năm các bạn trẻ phải trả cho ngân hàng cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu.
b) Các bạn trẻ kinh doanh hai đợt trong năm, đợt 1 sau khi trừ các chi phí thấy lãi được 18% so với vốn bỏ ra nên dồn cả vốn và lãi kinh doanh tiếp đợt 2. Cuối đợt 2 trừ các chi phí thấy lãi 20% so với vốn đợt 2 bỏ ra. Hỏi sau một năm, qua hai đợt kinh doanh, trả hết nợ ngân hàng các bạn trẻ còn lãi được bao nhiêu?

Đáp số: *a)* $105.000.000$ *đồng* *b)* $36.600.000$ *đồng*

HÀM SỐ BẬC NHẤT

Dạng 1: Thay số cơ bản tìm a, b

Bài 1: Ở các nước như Anh, Mỹ người ta thường tính nhiệt độ theo $^{\circ}F$ (Fahrenheit). Công thức để đổi từ $^{\circ}C$ sang $^{\circ}F$ có dạng y = ax + b trong đó x là số chỉ $^{\circ}C$ và y là số chỉ của $^{\circ}F$ tương ứng. Biết rằng nhiệt độ của nước đá đang tan ($0^{\circ}C$) tương ứng $32^{\circ}F$ và nhiệt độ của nước đang sôi ($100^{\circ}C$) tương ứng $212^{\circ}F$. Em hãy cho biết nhiệt độ của một người bình thường ($37^{\circ}C$) sẽ là bao nhiêu $^{\circ}F$?

Đáp số: Vậy nhiệt độ bình thường của con người là $98{,}6^{\circ}F$.

Bài 2: Cho rằng diện tích rừng nhiệt đới trên Trái Đất được xác định bởi hàm số bậc nhất y = ax + b ; trong đó y là đại lượng biểu thị diện tích rừng nhiệt đới, tính bằng đơn vị triệu hecta, x là đại lượng biểu thị số năm kể từ 1990. Năm 2000, diện tích rừng nhiệt đới trên Trái Đất là 672,3 triệu hecta. Bốn năm sau, diện tích rừng nhiệt đới trên Trái Đất là 653,9 triệu hecta.

a) Hãy xác định a, b.

b) Hãy tính diện tích rừng nhiệt đới vào năm 2022.

c) Vào năm nào thì diện tích rừng nhiệt đới trên Trái Đất chỉ còn lại 534,3 triệu hecta?

Đáp số: a) a = -4,6; b = 718,3

b) Vào năm 2022 thì diện tích rừng nhiệt đới là 571,1 triệu hecta.

c) Vào năm 2030 thì diện tích rừng nhiệt đới trên Trái Đất chỉ còn lại 534,3 triệu hecta.

Bài 3: Một tiệm bánh có chương trình giảm 5% trên tổng hóa đơn khi mua hàng chỉ trong ngày 09/01/2021, bạn My mua 5 hộp bánh bông lan cùng loại trong ngày 09/01/2021, số tiền bạn phải trả là 375 250 đồng. Ngày 12/01/2021, bạn Uyên mua 6 hộp bánh bông lan cùng loại với bạn My đã mua thì trả số tiền là 470 000 đồng. Biết số tiền phải trả (khi chưa có chương trình khuyến mãi) và số hộp bánh bông lan liên hệ bằng công thức: y = ax + b, y (đồng) là số tiền phải trả và x là số hộp bánh bông lan cùng loại. Lập công thức y theo x.

Đáp số: Vậy y = 75 000 x + 20 000

Bài 4: Yoga là một trong những biện pháp giúp cuộc sống trở nên tích cực hơn và đang lan tỏa trên khắp thế giới. Bên cạnh việc giúp kích thích thư giãn, cơ thể linh hoạt và tinh thần thoải mái cũng như trải nghiệm bất ngờ cho người tập. Và để thu hút thêm khách hàng thì các trung tâm yoga thường tư vấn cho khách hàng các gói thanh toán để khách hàng có nhiều quyền chọn lựa và hưởng các chế độ khuyến mãi như tặng áo thun tập, thảm tập, nước uống mỗi buổi tập, massage đá muối, số buổi tập với huấn luyện viên Ấn Độ, được tập ở nhiều phòng tập khác nhau,…

Ở trung tâm yoga Bình An. Khách hàng sẽ trả số tiền y (triệu đồng) khi đến tập yoga và nó phụ thuộc vào gói tập x (tháng) mà khách hàng chọn lựa. Mối liên hệ giữa hai đại lượng này được xác định bởi hàm số bậc nhất y = ax + b. Với gói 24 tháng thì số tiền thanh toán là 9,6 triệu đồng và gói 36 tháng thì số tiền thanh toán là 12,6 triệu đồng.

a) Hãy xác định hệ số của a và b?

b) Chị Lan muốn đăng kí gói tập 48 tháng ở trung tâm yoga Bình An thì số tiền cần thanh toán là bao nhiêu?

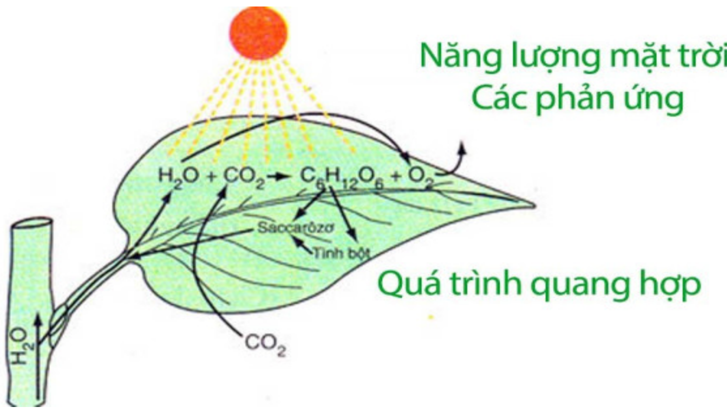
Đáp số: a) $a = \dfrac{1}{4}; b = \dfrac{18}{5}$

b) Số tiền cần thanh toán là 15,6 triệuđồng

Bài 5: Quang hợp là quá trình lá cây nhờ có chất diệp lục, sử dụng nước, khí Cacbonic (CO_2) và năng lượng ánh sáng mặt trời chế tạo ra tinh bột và nhả khí ôxi (O_2). Nếu tính theo khối lượng thì cứ 44 (kg) CO_2 sẽ tạo ra 32 (kg) O_2. Gọi x (kg) là khối lượng CO_2 được dùng trong quá trình quang hợp để tạo ra y (kg) O_2. Biết mối liên hệ giữa y và x được biểu diễn theo hàm số y = ax (a là hằng số).

a) Xác định a.

b) Một giống cây A trưởng thành tiêu thụ 22 (kg) CO_2 trong một năm để thực hiện quá trình quang hợp. Tính số cây A trưởng thành cần trồng để tạo ra 2 400 (kg) O_2 trong một năm (biết khả năng quang hợp của các cây A trưởng thành là như nhau).



Đáp số: a) $a = \dfrac{8}{11}$

b) Vậy để tạo ra 2 400 (kg) O_2 cần 3300 (kg) CO_2.

Bài 6: Diện tích rừng phủ xanh được cho bởi công thức S = at + b trong đó S (nghìn ha) và t (số năm) là số năm kể từ năm 2000. Biết rằng vào năm 2000, diện tích phủ xanh của một khu rừng là 3,14 nghìn ha và sau 10 năm thì diện tích phủ xanh đã tăng thêm 0,5 nghìn ha.

a) Hãy xác định a và b trong công thức trên.

b) Em dùng công thức trên để tính xem trong năm 2020, diện tích phủ xanh của rừng trên là bao nhiêu nghìn ha?

Đáp số: a) a = 0,05; b = 3,14

b) Năm 2020 diện tích phủ xanh là 4,14 nghìn ha.

Bài 7: Qua nghiên cứu, người ta nhận thấy rằng với mỗi người trung bình nhiệt độ môi trường giảm đi 1°C thì lượng calo cần tăng thêm khoảng 30 calo. Tại 21°C, một người làm việc cần sử dụng khoảng 3000 calo mỗi ngày. Người ta thấy mối quan hệ giữa hai đại lượng này là một hàm số bậc nhất y = ax + b (x: đại lượng biểu thị cho nhiệt độ môi trường và y: đại lượng biểu thị cho lượng calo).

a) Xác định hệ số a, b.

b) Nếu một người làm việc ở sa mạc Sahara trong nhiệt độ 50^oC thì cần bao nhiêu calo?

Đáp số: a) a = -30 , b = 3630

b) Calo cần thiết là 2130 calo

Bài 8: Em hãy tìm áp suất tổng cộng do khí quyển và nước tác dụng lên các sinh vật sống ở dưới biển sâu 20m so với mặt nước theo đơn vị pa vàatm biết rằng trọng lượng riêng của nước biển là 10300 N/m^3.Mọi vật chìm xuống nước đều chịu áp suất của nước. Nếu ở bề mặt đại dương (d = 0m) thì áp lực nước là p = 1 atmosphere (atm). Khi ta lặn sâu xuống thì chịu áp lực của nước biển tăng lên. Cứ mỗi 10m độ sâu thì áp suất độ sâu tăng thêm 1 atm. Nghĩa là, với d = 10m thì áp lực nước là 2 atm. Ở độ sâu d mét, người ta thấy mối liên hệ giữa hai đại lượng này là một hàm số bậc nhất p = a.d + b, trong đó d là đại lượng biểu thị cho độ sâu so với mực nước biển; p là đại lượng biểu thị cho áp lực nước.

a) Xác định hệ số a và b.

b) Một thợ lặn xuống biển và đo đồng hồ được 5 atm. Theo em người thợ lặn đó đang ở độ sâu bao nhiêu mét so với mực nước biển?

Đáp số: a) a = 0,1; b =1

b) 1,5 atm

Bài 9: Do hoạt động công nghiệp thiếu kiểm soát của con người làm cho nhiệt độ Trái Đất tăng dần lên một cách đầy lo ngại.Công thức dự báo nhiệt độ trung bình của trái đât như sau : T = at + b. Trong đó T (^oC) là nhiệt độ trung bình của trái đất mỗi năm, t : là số năm kể từ năm 1950. Vào năm 1950 nhiệt độ trung bình của trái đất là 15^0 C. Và sau 50 năm thì nhiệt độ trung bình của trái đất đã tăng thêm 1^0C.

a) Hãy xác định hệ số a,b

b) Em hãy tính nhiệt độ trung bình của trái đất trong năm 2022.

Đáp số: a) a = 0,02 ; b = 15

b) $16,44^0$ C

Bài 10: Công ty A thực hiện một cuộc khảo sát để tìm hiểu về mối liên hệ giữa y (sản phẩm) là số lượng sản phẩm T bán ra với x (đồng) là giá bán ra của mỗi sản phẩm T và nhận thấy rằng $y = ax + b$ (a, b là hằng số). Biết với giá bán là 400000 (đồng)/sản phẩm bán ra là 1200 (sản phẩm); với giá bán là 460000 (đồng)/sản phẩm thì số lượng sản phẩm bán ra là 1800 (sản phẩm).

a) Xác định a, b.

b) Bằng phép tính, hãy tính số lượng sản phẩm bán ra với giá bán là 440000 đồng.

Đáp số: a) Vậy $a = \dfrac{1}{100}$; $b = -2800$.

b) 1600 (sản phẩm).

Bài 11: Một ô tô có bình xăng chứa b (lít) xăng. Gọi y là số lít xăng còn lại trong bình xăng khi ô tô đã đi quãng đường x (km). y là hàm số bậc nhất có biến số là x được cho bởi công thức y = ax + b (a là lượng xăng tiêu hao khi ô tô đi được 1 km và a < 0) thỏa bảng giá trị sau:

x (km)	60	180
y (lít)	27	21

a) Tìm các hệ số a và b của hàm số số bậc nhất nói trên.

b) Xe ô tô có cần đổ thêm xăng vào bình xăng hay không ? khi chạy hết quãng đường x = 700 (km), nếu cần đổ thêm xăng thì phải đổ thêm mấy lít xăng ?

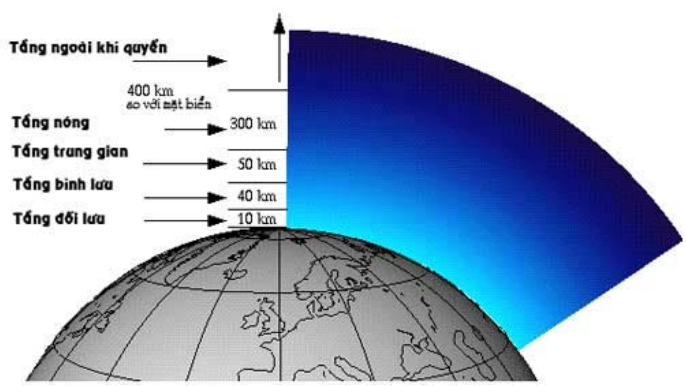
Đáp số: a) a = – 0,05 ; b = 30.

b) Xe ô tô cần đổ thêm 5 lít xăng vào bình xăng khi chạy hết quãng đường x = 700 (km)

Bài 12: Trong một tháng khoảng lợi nhuận y (đồng) của một cửa hàng thu được khi bán x hộp sữa loại 900g được cho bởi phương trình $y = ax + b$. Biết rằng trong tháng 10 cửa hàng bán được 95 hộp sữa thu lợi nhuận 4 870 000 đồng, Tháng 11 bán được 180 hộp sữa thu được lợi nhuận 9 120 000 đồng. Tính hệ số a và b?

Đáp số: a = 50 000; b = 120 000

Bài 13: Càng lên cao không khí càng loãng nên áp suất khí quyển càng giảm, ví dụ ở khu vực TP.Hồ Chí Minh có độ cao sát mực nước biển nên có áp suất khí quyển là p = 760 mmHg, còn ở thành phố Addis Ababa ở Ethiopia có độ cao h = 2355m thì có áp suất khí quyển là p = 571,6 mmHg. Với những độ cao không quá lớn, người ta nhận thấy mối liên hệ giữa độ cao và áp suất khí quyển có dạng hàm số bậc nhất p = a.h + b (a ≠ 0).



a) Xác định hệ số a, b

b) Hỏi ở cao nguyên Pleiku có độ cao 1000m so với mực nước biển thì có áp suất khí quyển là bao nhiêu?

Đáp số: a) a = -0,08; b = 760

b) Vậy ở cao nguyên Pleiku có độ cao 1000m thì có áp suất khí quyển là 680 mmHg

Bài 14: Do hoạt động của con người nhiệt độ trái đất ngày một tăng cao. Vào năm 1950 nhiệt độ trung bình trên bề mặt trái đất T (tính theo độ C) là 15^o C, sau đó 25 năm nhiệt độ này được ghi nhận là $15,5^o$ C.

a) Hãy lập công thức tính nhiệt độ trung bình trên bề mặt trái đất T (^{o} C) = a.t + b theo thời gian t(năm) từ năm 1950.(Năm 1950 tương ứng với t = 0)

b) Theo công thức vừa lập hãy cho biết nhiệt độ bề mặt trái đất tăng thêm 1^o C mất bao nhiêu năm?

Đáp số: a) a = 0,02; b = 15

b) 50 năm

Bài 15: Minh đến nhà sách mua một quyển tập và một quyển sách thì phải thanh toán số tiền là 25 000 đồng. Nếu Minh mua thêm 1 quyển tập cùng loại nữa thì số tiền phải thanh toán là 30 000 đồng. Biết rằng mối liên hệ giữa số tiền phải thanh toán y (đồng) cho nhà sách và số tập x (quyển) mà Minh mua là một hàm số bậc nhất có dạng y = ax + b (a ≠ 0).

a) Xác định các hệ số a và b.

b) Minh mang theo khi đến nhà sách là 70 000 đồng thì có thể mua được bao nhiêu quyển tập và giá của quyển sách mà Minh mua là bao nhiêu tiền?

Đáp số: a) a = 5 000; b = 20 000

b) Số tập mua được là 10 quyển với giá 5 000 đồng

Bài 16: Phương Định (nhân vật chính của truyện ngắn Những Ngôi sao xa xôi, của nhà văn Lê Minh Khuê) – một cô gái thanh niên xung phong giữa một vùng trọng điểm ở tuyến đường Trường Sơn. Công việc của cô là " đo khối lượng đất lấp vào hố bom, đếm bom chưa nổ và nếu cần thì phá bom". Trong lúc đơn vị trường ra đường vào lúc mặt trời lặn và làm việc có khi suốt đêm thì cô, tổ trinh sát mặt đường phải chạy trên cao điểm cả ban ngày, dưới cái nóng trên 30^0C. Theo nghiên cứu ta nhạ thấy rằng với mỗi người trung bình nhiệt độ môi trường giảm 1^0C thì lượng calo cần tăng thêm khoảng 30 calo. Tại 21^0C một người làm việc cần sử dụng khoảng 3000 calo mỗi ngày. Gọi x (°C) là nhiệt độ môi trường, y (calo) là lường calo tiêu thụ thì mối liên hệ giữa y và x là y = ax + b.

a/ Xác định a, b ?

b/ Hỏi nếu ở nhiệt độ môi trường là 35°C thì Phương Định cần bao nhiêu calo?

Đáp số: a/ a = -30 , b = 3630

b/ Nếu ở nhiệt độ môi trường là 35°C thì Phương Định cần: -30.35 + 3630 = 2580 calo

Bài 17: Một tiệm bánh có chương trình giảm 5% trên tổng hóa đơn khi mua hàng chỉ trong ngày 09/01/2021, bạn My mua 5 hộp bánh bông lan cùng loại trong ngày 09/01/2021, số tiền bạn phải trả là 375 250 đồng. Ngày 12/01/2021, bạn Uyên mua 6 hộp bánh bông lan cùng loại với bạn My đã mua thì trả số tiền là 470 000 đồng. Biết số tiền phải trả (khi chưa có chương trình khuyến mãi) và số hộp bánh bông lan liên hệ bằng công thức: $y = ax + b$, y (đồng) là số tiền phải trả và x là số hộp bánh bông lan cùng loại.

a) Viết hàm số biểu diễn y theo x.

b) Hỏi vào ngày 12/01/2021, bạn Nhân mua bao nhiêu hộp bánh bông lan cùng loại với bạn My? Biết số tiền Nhân trả là 320 000 đồng.

Đáp số: a) $y = 75000x + 20000$

b) Nhân mua 4 hộp

Bài 18 : Trong một tháng khoảng lợi nhuận y (triệu đồng) của một cửa hàng thu được khi bán x hộp sữa loại 900g được cho bởi phương trình y = ax + b. Biết rằng trong tháng 10 cửa hàng bán được 95 hộp sữa thu lợi nhuận 4 870 000 đồng, Tháng 11 bán được 180 hộp sữa thu được lợi nhuận 9 120 000 đồng.

a) Tính hệ số a và b ?

b) Do tình hình dịch SARS-COV -2 bùng phát đã ảnh hưởng tới việc kinh doanh của cửa hàng cụ thể trong tháng 12 lợi nhuận của cửa hàng đã giảm 28% so với tháng 11 . Hỏi tháng 12 cửa hàng bán được bao nhiêu hộp sữa ? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Đáp số: a) a = 50 000, b = 120 000

b) 129 hộp sữa

Bài 19: Cước điện thoại y (nghìn đồng) là số tiền mà người sử dụng điện thoại cần trả hàng tháng, nó phụ thuộc vào lượng thời gian gọi x (phút) của người đó trong tháng. Mối liên hệ giữa hai đại lượng này là một hàm số bậc nhất $y = ax + b$. Hãy tìm a, b biết rằng nhà bạn Nam trong tháng 3 đã gọi 120 phút với số tiền là 80 nghìn đồng và trong tháng 4 đã gọi ít hơn tháng ba 40 phút với số tiền là 58000 đồng.

Đáp số: $a = \frac{11}{20}; b = 14$

Bài 19: Một nhóm bạn học sinh thực hành môn công nghệ. Cô giáo giao cho nhóm quan sát và ghi lại chiều cao của cây mỗi tuần. Ban đầu cô đưa cho nhóm một loại cây non đã có chiều cao $2{,}56$ cm. Sau hai tuần quan sát thì chiều cao của cây tăng thêm $1{,}28$ cm. Gọi h (cm) là chiều cao của cây sau t (tuần) quan sát liên hệ bằng hàm số $h = at + b$.

a) Xác định hệ số a, b.

b) Hỏi sau bao nhiêu ngày kể từ ngày bắt đầu quan sát thì cây sẽ đạt chiều cao $6{,}76$ cm.

Đáp số: a) $a = 0{,}64$ và $b = 2{,}56$.

b) Vậy sau 46 ngày thì cây sẽ đạt chiều cao $6{,}76$ cm.

Bài 20. Một cửa hàng sách củ có một chính sách như sau: Nếu khách hàng đăng ký làm hội viên của cửa hàng thì mỗi năm phải đóng phí thành viên là 50000 đồng/năm. Biết rằng là hội viên thì khi thuê hai cuốn sách thì trả 60000 đồng (đã tính phí thành viên). Gọi s (đồng) là tổng số tiền mỗi khách hàng là hội viên phải trả trong một năm và t là số cuốn sách mà khách hàng thuê biết s là hàm số bậc nhất có dạng s = a.t + b

a) Tìm hệ số a và b

b) Nếu khách hàng không phải hội viên thì sẽ thuê sách với giá 10000 đồng/ cuốn sách. Nam là hội viên của cửa hàng sách, năm ngoái thì Nam đã trả cho cửa hàng sách tổng cộng 90000 đồng.Hỏi nếu Nam không là hội viên của cửa hàng sách thì số tiền phải trả là bao nhiêu ?

Đáp số: a) a = 5000; b = 50 000

b)Vậy nếu không là hội viên số tiền Nam phải trả là 8.10000= 80000 đồng.

Bài 21: Trong một tháng khoảng lợi nhuận y (đồng) của một cửa hàng thu được khi bán x hộp sữa loại 900g được cho bởi phương trình y = ax + b. Biết rằng trong tháng 10 cửa hàng bán được 95 hộp sữa thu lợi nhuận 4 870 000 đồng, tháng 11 bán được 180 hộp sữa thu được lợi nhuận 9 120 000 đồng. Tính hệ số a và b?

Đáp số: a = 50 000; b = 120 000

Bài 22: Mối liên hệ giữa chiều dài y (cm) của một sợi dây xích và số mắt xích x là một hàm số bậc nhất $y = ax + b$. Biết đoạn xích có 5 mắt xích thì dài 22 cm, đoạn xích có 8 mắt xích thì dài 34 cm.

a) Hãy xác định hệ số a; b.

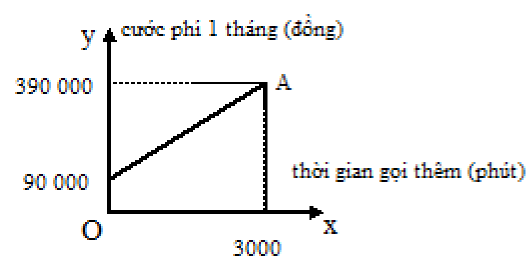
b) Hãy tính xem một sợi xích dài $1{,}5$ m thì gồm bao nhiêu mắt xích?

Đáp số: a) a = 4; b = 2

b) Vậy một sợi xích dài $1{,}5$ m thì gồm 37 mắt xích.

Dạng 2: Các bài toán nhìn đồ thị

Bài 1: Giá cước điện thoại di động của một công ty điện thoại trong 1 tháng được tính như sau: tiền thuê bao trả trước 90 000 đồng, Gọi từ 3 000 phút trở xuống không phải trả thêm tiền, trên 3 000 phút thì cứ 1 phút gọi thêm trả 100 đồng mỗi phút. Đồ thị trên hình minh họa thời gian x (phút) gọi thêm và số tiền cước y (đồng) tổng cộng phải trả trong 1 tháng, được xác định bởi công thức $y = ax + b$.



a) Xác định các hệ số a và b.

b) Nếu gọi thêm 2 000 phút thì tiền cước phải trả trong 1 tháng là bao nhiêu tiền ?

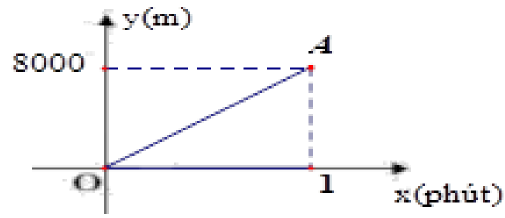
Đáp số: a) a = 100 ; b = 90 000

b) Số tiền cước phải trả: 290 000 (đồng)

Bài 2: Một máy bay cất cánh ở sân bay Tân Sơn Nhất và bay theo một đường thẳng hợp với mặt đất một góc 30^0 và có phương trình y = ax + b với a, b là hằng số, y(m) là độ cao so với mặt đất, x (phút) là thời gian bay và có đồ thị như hình vẽ.

a) Xác định hệ số a, b.

b) Tính quãng đường máy bay bay được sau 5 phút



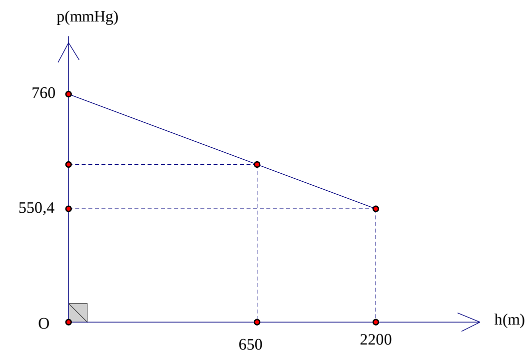
Đáp số: a) a = 8000 và b = 0

b) Quãng đường máy bay đi được trong 5 phút là 80 000 m

Bài 3: Càng lên cao không khí càng loãng nên áp suất khí quyển càng giảm. Ví dụ ở khu vực thành phố Hồ Chí Minh đều có độ cao sát mực nước biển nên có áp suất khí quyển là p = 760mmHg, còn ở thành phố Puebla ở Mexico có độ cao h = 2200 m thì có áp suất khí quyển là p = 550,4 mmHg. Với những độ cao không lớn lắm thì ta có công thức tính áp suất khí quyển tương ứng với độ cao so với mực nước biển là một hàm số bậc nhất p = ah + b có đồ thị như hình bên

a) Xác định hệ số a và b ?

b) Hỏi cao nguyên Lâm Đồng có độ cao 650 m so với mực nước biển thì có áp suất khí quyển là bao nhiêu mmHg ? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



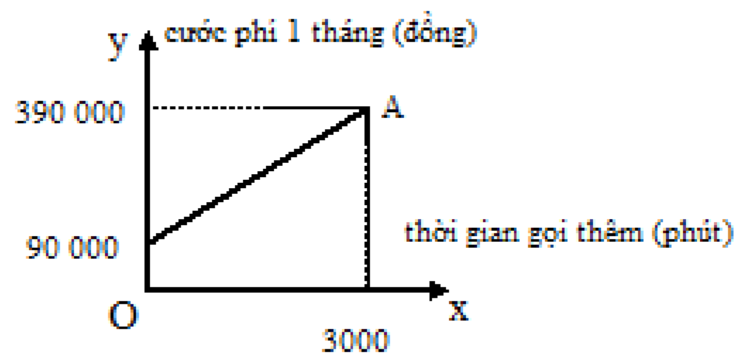
Đáp số: a) $a = -\dfrac{131}{1375}$ và b = 760

b) 698 mmHg

Bài 4 Giá cước điện thoại di động của một công ty điện thoại trong 1 tháng được tính như sau: tiền thuê bao trả trước 90000 đồng, Gọi từ 3000 phút trở xuống không phải trả thêm tiền, trên 3000 phút thì cứ 1 phút gọi thêm trả 100 đồng mỗi phút. Đồ thị trên hình minh họa thời gian *x* (phút) gọi thêm và số tiền cước *y* (đồng) tổng cộng phải trả trong 1 tháng, được xác định bởi công thức *y* = *ax* + b.

a) Xác định các hệ số a và b.

b) Nếu gọi thêm 2000 phút thì tiền cước phải trả trong 1 tháng là bao nhiêu tiền?



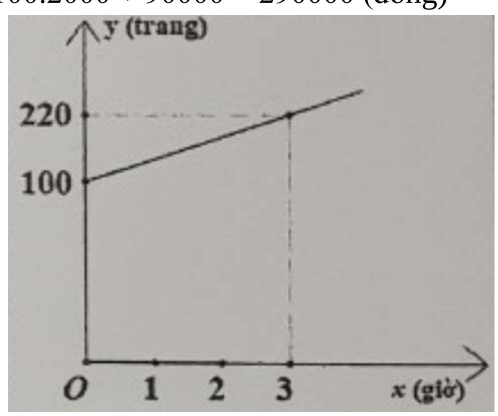
Đáp số: a) a = 100 ; b = 90 000

b) Số tiền cước phải trả: y = 100.2000 + 90000 = 290000 (đồng)

Bài 5:Hôm qua, bạn Phương đã đọc được 100 trang đầu một cuốn sách. Hôm nay, trong 3 giờ bạn đọc thêm 120 trang. Gọi x (giờ) là thời gian đọc sách trong ngày hôm nay, y (trang) là số trang sách đã đọc được trong x (giờ) (số trang sách đọc được mỗi giờ là không thay đổi). Mối liên hệ giữa y và x là một hàm số bậc nhất: y = ax + b có đồ thị như hình bên.

a) Xác định các hệ số a , b.

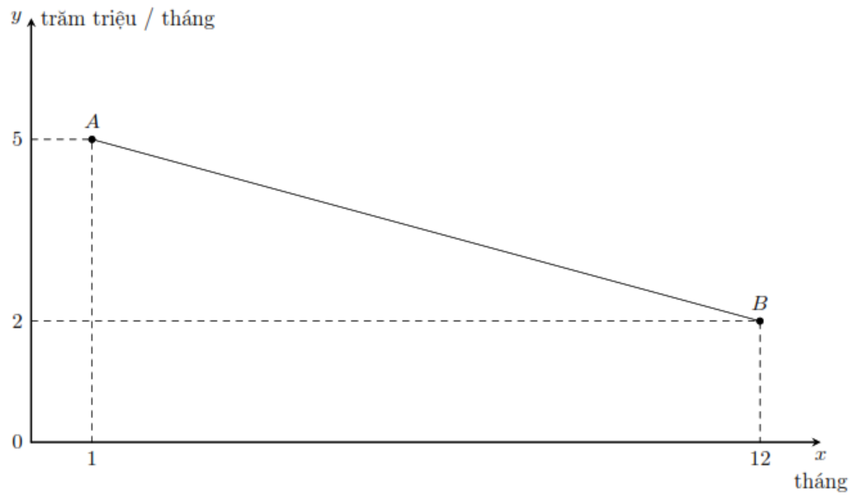
b) Nếu quyển sách 380 trang thì bạn Phương cần thêm bao nhiêu giờ để đọc hết quyển sách trên.



Đáp số: a) a = 40, b = 100

b) Vậy bạn Phương cần thêm 7giờ

Bài 6: Do ảnh hưởng của tình hình dịch bệnh, thu nhập của một công ty bị giảm dần trong năm 2021. Các số liệu thống kê được thể hiện bằng đồ thị như hình vẽ bên.



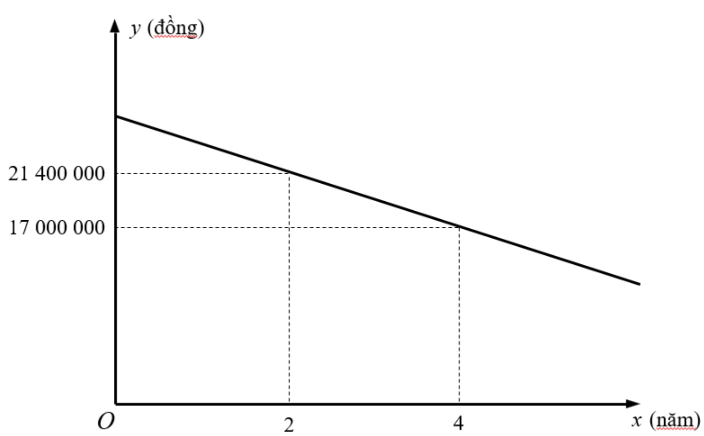
a) Tìm hàm số thể hiện sự liên quan của đại lượng y (trăm triệu/ tháng) theo đại lượng x (tháng).

b) Biết một sản phẩm bán được thì công ty có lợi nhuận là 100 ngàn đồng, em hãy tính số sản phẩm mà công ty bán được trong tháng 9 năm 2021 (làm tròn đến hàng đơn vị).

Đáp số: a) $a = \dfrac{-3}{11}; b = \dfrac{58}{11}$

b) Số sản phẩm bán ra trong tháng 9: $\dfrac{31}{11}.100000:100 \approx 2818$ (sản phẩm)

Bài 7: Đầu năm 2018, anh Nghĩa mua lại một chiếc máy tính xách tay cũ đã sử dụng qua 2 năm với giá là 21 400 000 đồng. Cuối năm 2019, sau khi sử dụng được thêm 2 năm nữa, anh Nghĩa mang chiếc máy tính đó ra cửa hàng để bán lại. Cửa hàng thông báo mua lại máy với giá chỉ còn 17 000 000 đồng. Anh Nghĩa thắc mắc về sự chênh lệch giữa giá mua và giá bán nên được nhân viên cửa hàng giải thích về mối liên hệ giữa giá trị của một chiếc máy tính xách tay với thời gian nó được sử dụng. Mối liên hệ đó được thể hiện dưới dạng một hàm số bậc nhất: y = ax + b có đồ thị như sau:



a) Xác định các hệ số a và b.

b) Xác định giá ban đầu của chiếc máy tính xách tay nêu trên khi chưa qua sử dụng.

Đáp số: a) a = -2 200 000; b = 25 800 000

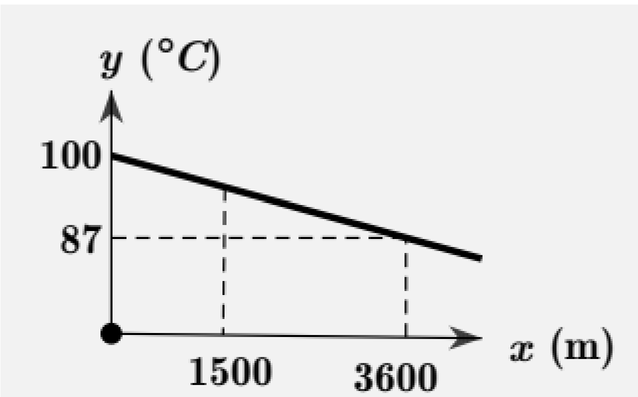
b) Ta có hàm số y = – 2 200 000.x + 25 800 000

Vậy giá ban đầu của chiếc máy tính xách tay nêu trên khi chưa qua sử dụng là :25 800 000 (đồng)

Bài 8: Chị A là công nhân may mặc của Xí nghiệp X. Người ta nhận thấy số áo x (cái áo) may được trong một tháng và số tiền y (đồng) nhận được trong tháng đó liên hệ với nhau bởi hàm số $y = ax + b$ có đồ thị như trong hình vẽ. Hỏi nếu muốn nhận lương $14.000.000$ đồng thì chị A phải may bao nhiêu cái áo?

Đáp số: 1 500 cái áo

Bài 9: Nhiệt độ sôi của nước không phải lúc nào cũng là $100^0 C$ mà phụ thuộc vào độ cao của nơi đó so với mực nước biển. Chẳng hạn Thành phố Hồ Chí Minh có độ cao xem như ngang với mực nước biển $(x = 0m)$ thì nước có nhiệt độ sôi là $y = 100^0 C$ nhưng ở thủ đô La Paz của Bolivia, Nam Mỹ có độ cao x = 3600m so với mực nước biển thì nhiệt độ sôi của nước là $y = 87^0 C$. Ở độ cao trong khoảng vài km, người ta thấy mối liên hệ giữa hai đại lượng này là một hàm số bậc nhất $y = ax + b$ có đồ thị như hình sau:



x : là đại lượng biểu thị cho độ cao so với mặt nước biển

y : là đại lượng biểu thị nhiệt độ sôi của nước.

a) Xác định các hệ số a và b.

b) Thành phố Đà Lạt có độ cao 1 500m so với mực nước biển. Hỏi nhiệt độ sôi của nước ở thành phố này là bao nhiêu?

Đáp số: a) $a = \dfrac{-13}{3600}$; $b = 100$

b) $\approx 94,6^0 C$

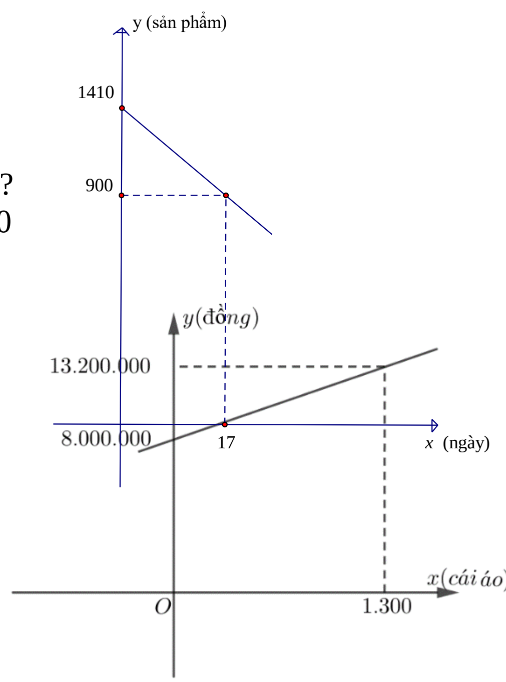
Bài 10:. Một xí nghiệp cần bán thanh lý b sản phẩm. Số sản phẩm y còn lại sau x ngày bán được xác định bởi hàm số $y = ax + b$ có đồ thị như bên.

a) Hãy dựa vào đồ thị xác định a, b và hàm số y.

b) Xí nghiệp cần bao nhiêu ngày để bán hết số sản phẩm cần thanh lý?

Đáp số: a) $a = -30; b = 1410 \Rightarrow y = -30x + 1410$

b) 47 ngày



BÀI TẬP THỰC TẾ HÀM BẬC HAI

Bài 1. Một vật rơi tự do từ độ cao so với mặt đất là 120 mét. Bỏ qua sức cản không khí, quãng đường chuyển động s (mét) của vật rơi sau thời gian t được biểu diễn gần đúng bởi công thức: $s = 5t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây.

a) Sau 3 giây vật này cách mặt đất bao nhiêu mét ?

b) Sau bao lâu kể từ khi bắt đầu rơi thì vật này chạm mặt đất ? *(Làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị)*

Đáp số: $a)\ 75m,\ b) \approx 5s$

Bài 2. Ngày $28/09/2018$, sau trận động đất $7,5$ độ Richter, cơn sóng thần (tiếng Anh là Tsunami) cao hơn $6\ \mathrm{m}$ đã tràn vào đảo Sulawesi của In đô nê xi a, tàn phá thành phố Palu, gây thiệt hại vô cùng to lớn. Tốc độ của cơn sóng thần và chiều sâu của đại dương, nơi bắt đầu của sóng thần, liên hệ bởi công thức $v = \sqrt{dg}$. Trong đó, $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$, d là chiều sâu của đại dương tính bằng m, v là vận tốc của sóng thần tính bằng m/s

a) Biết độ sâu trung bình tại Thái Bình Dương là $4000\,\mathrm{m}$, hãy tính tốc độ trung bình của các con sóng thần xuất phát từ đáy của Thái Bình Dương.

b) Theo tính toán của các nhà khoa học địa chất, vận tốc của đợt sóng thần ngày $28/09/2018$ có vận tốc là $800\ \mathrm{km/h}$, hãy tính chiều sâu của đại dương, nơi tâm chấn động đất gây ra sóng thần là bao nhiêu m?

Đáp số: $V_{tr} = 3V_n$

Bài 3. Bi sắt (tên quốc tế là pétanque) được ghi nhận là đã xuất hiện từ năm 9000 trước Công Nguyên khi một bộ viên bi bằng đá và viên đích được tìm ở Thổ Nhĩ Kỳ. Bi sắt hiện đại ra đời vào năm 1907 tại Ciotat, vùng Provence miền Nam nước Pháp. Sau đó môn thể thao này lan rộng tới các nước trên thế giới và ở Thái Lan, Việt Nam, Campuchia, Lào, Nhật Bản có nhiều người chơi môn này. Vân tốc lăn v (tính bằng m/s) của một vật thể có khối lượng m (tính bằng kg) được tác động bởi một lực E_k (gọi là năng lượng kinetic energy, tính bằng Joule) được cho bởi công thức $v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$. Cần sử dụng năng lượng Kinetic E_k bao nhiêu Joule để vận tốc của một viên bi nặng $800g$ là $10m/s$?

Đáp số: $V_{tr} = 3V_n$

Bài 4. Tốc độ của một chiếc ca nô và độ dài đường sóng nước để lại sau đuôi của nó được cho bởi công thức $v = 5\sqrt{d}$. Trong đó $d(\mathrm{m})$ là độ dài đường sóng nước để lại sau đuôi ca nô, v là vận tốc ca nô $(\mathrm{m/s})$.

a) Tính vận tốc ca nô biết độ dài đường sóng nước để lại sau đuôi ca nô dài $7+4\sqrt{3}\,(\text{m})$.

b) Khi ca nô chạy với vận tốc 54 km/h thì đường sóng nước để lại sau đuôi ca nô dài bao nhiêu mét?

Đáp số: $V_{tr}=3V_n$

Bài 5. Một xe ôtô chuyển động theo hàm số $S=30t+4t^2$, trong đó S (km) là quãng đường xe đi được trong thời gian t (giờ); t là thời gian chuyển động của tính từ lúc 7h00 sáng. Xem như xe chuyển động đều trên một đoạn đường thẳng và không nghỉ.

a) Hỏi từ lúc 7h30 phút đến lúc 8h15 phút đã đi được quãng đường dài bao nhiêu km?

b) Đến lúc mấy giờ thì xe đi được quãng đường dài 34km (tính từ lúc 7h00)?

Đáp số: $V_{tr}=3V_n$

Bài 6. Khi càng lên cao thì áp suất khí quyển càng giảm do không khí loãng dần. Để tính áp suất khí quyển ở độ cao không quá cao so với mặt nước biển thường sử dụng công thức: $P=760-\dfrac{2h}{25}$. Trong đó, P là áp suất khí quyển ($mmHg$); h là độ cao so với mực nước biển (m). Hỏi thành phố Bảo Lộc ở độ cao $1200m$ so mực nước biển thì áp suất của khí quyển là bao nhiêu $mmHg$?

Đáp số: $V_{tr}=3V_n$

Bài 7. Để đổi từ nhiệt độ F (Fahrentheit) sang độ C (Celsius), ta dùng công thức sau: $C=\dfrac{5}{9}(F-32)$

a) Hãy tính nhiệt độ C khi biết nhiệt độ F là 30^oF.

b) Hãy viết biểu thức biểu diễn hàm số bậc nhất F theo biến số C. Tính nhiệt độ F khi biết nhiệt độ C là 25^oC.

Đáp số: $V_{tr}=3V_n$

Bài 8. Càng lên cao không khí càng loãng nên áp suất khí quyển càng giảm. Với những độ cao không lớn lắm thì ta có công thức tính áp suất khí quyển tương ứng với độ cao so với mực nước biển như sau:

$$p=760-\frac{2h}{25}.$$

Trong đó p là áp suất khí quyển (mmHg), h là độ sao so với mực nước biển (m).

Ví dụ các khu vực ở Thành phố Hồ Chí Minh đều có độ cao sát với mực nước biển ($h=0$ m) nên có áp suất khí quyển là $p=760$ mmHg.

a) Hỏi Thành phố Đà Lạt ở độ cao 1500 m so với mực nước biển thì có áp suất khí quyển là bao nhiêu mmHg?

b) Dựa vào mối liên hệ giữa độ cao so với mực nước biển và áp suất khí quyển người ta chế tạo ra một loại dụng cụ đo áp suất khí quyển gọi là "cao kế". Một vận động viên leo núi dùng "cao kế" đo được áp suất khí quyển là 540 mmHg. Hỏi vận động viên leo núi đang ở độ cao bao nhiêu mét so với mực nước biển?

Đáp số: $V_{tr} = 3V_n$

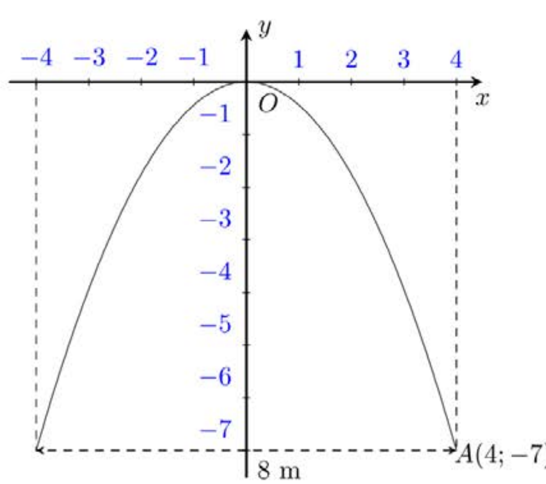
Bài 9. Một tiệm bánh có chương trình giảm giá 5% trên tổng hóa đơn khi mua hàng chỉ trong ngày $09/01/2021$, bạn My mua 5 hộp bánh bông lan cùng loại trong ngày $09/01/2021$, số tiền bạn phải trả là 375250 đồng. Ngày $12/01/2021$, bạn Uyên mua 6 hộp bánh bông lan cùng loại với bạn My đã mua thì trả số tiền là 470000 đồng. Biết số tiền phải trả (khi chưa có chương trình khuyến mãi) và số hộp báng bông lan liên hệ bằng công thức $y = ax + b$, y (đồng) là số tiền phải trả và x là số hộp bánh bông lan cùng loại.

a) Viết hàm số biểu diễn y theo x

b) Hỏi ngày $12/01/2021$, bạn Nhân mua bao nhiêu hộp bánh bông lan cùng loại với bạn My? Biết số tiền Nhân trả là 320000 đồng.

Đáp số: $V_{tr} = 3V_n$

Bài 10. Trường tiểu học Lushan do kiến trúc sư Zaha Hadid thiết kế là nơi học tập của 120 học sinh. Các khu nhà được thiết kế với mái vòm hình parabol theo công thức $(P): y = ax^2$ và được định hướng để cung cấp điều kiện ánh sáng tối ưu nhất.



Biết rằng cổng có độ cạo 7m và chiều rộng 8m. Hãy xác định phương trình của parabol (P).

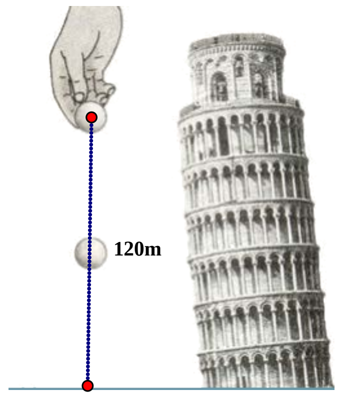
Đáp số: $V_{tr} = 3V_n$

Bài 11. Một vật rơi tự do từ độ cao so với mặt đất là 120 mét. Bỏ qua sức cản không khí, quãng đường chuyển động s (mét) của vật rơi sau thời gian t được biểu diễn gần đúng bởi công thức: $s = 5t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây.

a) Sau 3 giây vật này cách mặt đất bao nhiêu mét ?

b) Sau bao lâu kể từ khi bắt đầu rơi thì vật này chạm mặt đất ? *(Làm tròn kết quả đến chữ số hàng đơn vị)*

Đáp số: $V_{tr} = 3V_n$



BÀI TẬP XÁC ĐỊNH THỜI GIAN

Bài 1. Quy tắc sau đây cho ta biết CAN, CHI của năm X nào đó. Để xác định CAN, ta cần tìm số dư r trong phép chia X cho 10 và tra vào bảng 1. Để xác định CHI, ta tìm số dư s trong phép chia X cho 12 và tra vào bảng 2.

Ví dụ: Năm 1982 có CAN là Nhâm, có CHI là Tuất.

Bảng 1

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
CAN	Canh	Tân	Nhâm	Quý	Giáp	Ất	Bính	Đinh	Mậu	Kỷ

Bảng 2

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
CHI	Thân	Dậu	Tuất	Hợi	Tí	Sửu	Dần	Mão	Thìn	Tỵ	Ngọ	Mùi

a) Em hãy sử dụng quy tắc trên để xác định CAN, CHI của năm 2021;

b) Bạn Loan nhớ rằng mẹ bạn ấy sinh năm Giáp Thìn nhưng không rõ là năm bao nhiêu.

Bài 2. UTC là một chuẩn quốc tế về ngày giờ. Thế giới có 24 múi giờ, vị trí địa lý khác nhau thì giờ ở các địa điểm đó có thể khác nhau. Giờ UTC được xem như giờ gốc. Thế giới có 12 múi giờ nhanh và 12 múi giờ chậm. Cụ thể, kí hiệu UTC+7 dành cho khu vực có giờnhanh hơn giờ UTC 7 giờ, kí hiệu UTC-3 dành cho khu vực có giờ chậm hơn giờ UTC 3 giờ.

Ví dụ: Vị trí địa lý Việt Nam thuộc múi giờ UTC+7 nên nếu giờ UTC là 8 giờ thì giờ tại Việt Nam ở thời điểm đó là : 8+7=15 giờ.

a) Nếu ở Việt Nam là 23 giờ 30 phút ngày 02/03/2020 thì ở Tokyo (UTC+ 9) là ngày giờ nào?

b) Minh đang sống tại Việt Nam, Lan đang sống tại Los Angeles. Nếu thời gian ở chỗ Minh là 17 giờ 20 phút ngày 05/03/2020 thì ở chỗ Lan là 2 giờ 20 phút ngày 05/03/2020. Hỏi múi giờ ở Los Angeles là múi giờ nào?

Bài 3. Theo âm lịch thì do một chu kỳ quay của Mặt Trăng quanh Trái Đất là khoảng 29,53 ngày nên một năm âm lịch chỉ có khoảng 354 ngày (làm tròn). Do vậy, cứ sau một vài năm âm lịch thì người ta phải bổ sung một tháng (tháng nhuận) để đảm bảo năm âm lịch tương đối phù hợp với chu kỳ của thời tiết, là yếu tố phụ thuộc vào chu kỳ quay của Trái Đất xung quanh Mặt Trời.

Cách tính năm nhuận âm lịch như sau:

Lấy số năm chia cho 19, nếu số dư là một trong các số: 0; 3; 6; 9 ; 11; 14; 17 thì năm âm lịch đó có tháng nhuận.

Ví dụ:

2017 là năm nhuận âm lịch vì 2017 chia cho 19 dư 3.

2015 không phải năm nhuận âm lịch vì 2015 chia cho 19 dư 1

a) Em hãy sử dụng quy tắc trên để xác định năm 1995 và 2030 có phải năm nhuận âm lịch hay không?

b) Năm nhuận dương lịch là năm chia hết cho 4. Ngoài ra, Những năm chia hết cho 100 chỉ được coi là năm nhuận dương lịch nếu chúng cũng chia hết cho 400 (ví dụ 1600 là năm nhuận dương lịch nhưng 1700 không phải năm nhuận dương lịch). Trong các năm từ năm 1895 đến năm 1930, năm nào vừa là năm nhuận âm lịch vừa là năm nhuận dương lịch.

Bài 4. Để biết được ngày n tháng t năm 2020 là thứ mấy trong tuần. Đầu tiên, đi tính giá trị biểu thức $T = n + H$, ở đây H được xác định như sau:

Tháng t	10	5	2;8	3;11	6	9;12	1;4;7
H	-3	-2	-1	0	1	2	3

Sau đó lấy T chia cho 7 ta được số dư r ($0 \le r \le 6$)

Nếu r = 0 thì ngày đó là ngày thứ Bảy

Nếu r = 1 thì ngày đó là ngày Chủ Nhật

Nếu r = 2 thì ngày đó là ngày thứ Hai

Nếu r = 3 thì ngày đó là ngày thứ Ba

…

Nếu r = 6 thì ngày đó là ngày thứ Sáu

a) Hãy sử dụng quy tắc trên để xác định ngày 30/04/2020 là ngày thứ mấy?
b) Bé An sinh vào tháng 12/2020. Biết rằng ngày sinh của bé An là một bội số của 5 và là Chủ Nhật. Hỏi ngày sinh của bé An là ngày mấy?

Bài 5. Bạn Khánh Linh tổ chức sinh nhật lần thứ 14 vào thứ tư ngày 2 tháng 12 năm 2020 .Hỏi bạn Khánh Linh sinh vào thứ mấy ? Giải thích .

Bài 6. Trong một tháng nào đó có 3 ngày thứ năm trùng vào ngày chẵn. Hỏi ngày 26 tháng đó là thứ mấy trong tuần?

Bài 7. Thế giới có 24 múi giờ, vị trí địa lý khác nhau thì giờ ở các địa điểm đó có thể khác nhau. Giờ UTC được xem như giờ gốc. Thế giới có 12 múi giờ nhanh và 12 múi giờ chậm. Cụ thể, kí hiệu UTC + 7 dành cho khu vực có giờ nhanh hơn giờ UTC 7 giờ, kí hiệu UTC – 3 dành cho khu vực có giờ chậm hơn giờ UTC 3 giờ.

a) Việt Nam thuộc múi giờ UTC+7. Nếu ở Việt Nam là 20h30p ngày 3/5/2021 thì ở Peru (UTC–5) là ngày giờ nào?

b) Bình đang sống tại Peru, Nghị đang sống ở Malaysia. Nếu thời gian ở chỗ Nghị là 18h35p ngày 9/5/2021 thì ở chỗ Bình là 5h35p ngày 9/5/2021. Hỏi múi giờ ở Malaysia là múi giờ nào?

Bài 8. Để tìm hàng CHI của một năm ta dùng công thức sau rồi đối chiếu kết quả với bảng sau:

$$\text{Hang CHI} = \text{So du cua}\left(\frac{\text{Nam - 4}}{12}\right)+1$$

Hàng Chi	Tý	Sửu	Dần	Mão	Thìn	Tỵ	Ngọ	Mùi	Thân	Dậu	Tuất	Hợi
Mã số	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Để tìm hàng CAN của một năm ta dùng công thức sau rồi đối chiếu kết quả với bảng sau:

Hàng Can = Chữ số tận cùng của năm dương lịch trừ đi 3

(Nếu chữ số tận cùng của năm đang xét nhỏ hơn 3 thì ta sẽ cộng thêm 10 rồi trừ 3)

Hàng Can	Giáp	Ất	Bính	Đinh	Mậu	Kỷ	Canh	Tân	Nhâm	Quý
Mã số	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$10(0)$

a) Dựa vào cách tính trên, em hãy cho biết CAN CHI năm 2022 là gì?

b) Năm Kỷ Mùi $\left(\overline{19ab}\right)$ $\left(50 \le \overline{ab} \le 99\right)$ Trung Quốc đưa quân tấn công Việt Nam trên toàn tuyến biên giới giữa hai nước (còn gọi là chiến tranh biên giới). Đây là một cuộc chiến tuy ngắn nhưng vô cùng khốc liệt. Với tinh thần bảo vệ từng tất đất của Tổ Quốc, quân và dân Việt Nam đã anh dũng đẩy lùi sự bành trướng của phương Bắc (theo wikipedia). Hỏi Kỷ Mùi năm đó là năm bao nhiêu?

BÀI TẬP VỀ NHÀ

BÀI 1. Bạn Phú dự định trong khoảng thời gian từ ngày mùng 2 tháng 1 đến ngày 28 tháng 2 sẽ giải mỗi ngày một bài toán. Thực hiện đúng kế hoạch được một thơi gian , vào khoảng cuối tháng (tháng 1 có 31 ngày) Thì Phú được nghỉ tết và bạn tạm nghỉ giải Toán nhiều ngày liên tiếp. Sau tết trong tuần đầu , Phú chỉ giải được 14 bài ; sau đó Phú cố gắng giải 4 bài mỗi ngày và đến 29 tháng 2 (năm 2020 tháng 2 chỉ có 29 ngày) thì Phú cũng hoàn thành kế hoạch đã định. Hỏi bạn Phú đã nghỉ giải Toán ít nhất bao nhiêu ngày?

BÀI 2. . Quy ước về cách tính năm nhuận:

- Đối với những năm không là năm tròn thế kỷ (có 2 chữ số cuối khác “00”): Nếu năm đó chia hết cho 4 thì là năm nhuận, nếu không chia hết cho 4 thì là không năm nhuận.

- Đối với những năm là năm tròn thế kỷ (có 2 chữ số cuối là “00”): Nếu năm đó chia hết cho 400 thì là năm nhuận, nếu không chia hết cho 400 thì là không năm nhuận.

Ví dụ: Năm 2019 không là năm nhuận vì 2019 không chia hết cho 4;

Năm 1900 không là năm nhuận vì 1900 là năm tròn thế kỷ nhưng không chia hết cho 400.

Năm 2016 là năm nhuận vì không là năm tròn thế kỷ và chia hết cho 4.

Năm 2000 là năm nhuận vì 2000 chia hết cho 400.

Hỏi:Năm 2020 là có phải là năm nhuận hay không? Vì sao?

Ngày 20/11/2019 là thứ 4. Hỏi ngày 20/11/2000 là thứ mấy?

BÀI 3. Quy ước về cách tính năm nhuận:

- Đối với những năm không là năm tròn thế kỷ (có 2 chữ số cuối khác “00”): Nếu năm đó chia hết cho 4 thì là năm nhuận, nếu không chia hết cho 4 thì là không năm nhuận.

- Đối với những năm là năm tròn thế kỷ (có 2 chữ số cuối là “00”): Nếu năm đó chia hết cho 400 thì là năm nhuận, nếu không chia hết cho 400 thì là không năm nhuận.

Ví dụ: Năm 2019 không là năm nhuận vì 2019 không chia hết cho 4;

Năm 1900 không là năm nhuận vì 1900 là năm tròn thế kỷ nhưng không chia hết cho 400.

Năm 2016 là năm nhuận vì không là năm tròn thế kỷ và chia hết cho 4.

Năm 2000 là năm nhuận vì 2000 chia hết cho 400.

Hỏi:Năm 2020 là có phải là năm nhuận hay không? Vì sao?

Ngày 20/11/2019 là thứ 4. Hỏi ngày 20/11/2000 là thứ mấy?

ĐÁP ÁN

BÀI TẬP TÍNH TIỀN ĐIỆN-TIỀN NƯỚC

Bài 1. Giả sử cách tính tiền nước sinh hoạt cho 1 người ở TP. Hồ Chí Minh như sau:

Mức 1 cho 4m^3 dầu tiên là 7000 đồng/ m^3;
Mức 2 cho 3m^3 tiếp theo là 10000 đồng/ m^3;
Mức 3 cho số m^3 còn lại là 12500 đồng/ m^3.
- Số tiền nước phải trả cho ba mức này gọi là A.
- Thuế VAT: $B = A.10\%$.
- Thuế môi trường: $C = A.15\%$.
Tổng số tiền phải trả là : $T = A + B + C$.
Tháng 9/2018 gia đình cô Bảy có 2 người phải trả hết số tiền: $T = 207500$ đồng. Hỏi gia đình cô Bảy dùng hết bao nhiêu m^3 nước

Đáp số: $15,64\left(m^3\right)$

Bài 2. Giá nước sinh hoạt của hộ gia đình được tính như sau:

Mức nước tiêu thụ (m^3)	Dưới $10m^3$	$11m^3 – 20m^3$	$21m^3 – 30m^3$	Trên $31m^3$
Giá tiền (đồng/m^3)	6000	7100	8600	16000

Tháng vừa qua, gia đình An thanh toán hết 200.100 đồng tiền nước. Hỏi gia đình An đã sử dụng bao nhiêu m3 nước. Biết rằng thuế giá trị gia tăng là 10% và thuế bảo vệ môi trường 5%.

Đáp số: $25\,m^3$.

Bài 3. Giá nước sinh hoạt của hộ gia đình được tính như sau: Tháng 11 gia đình An sử dụng hết 45 m^3 nước và phải trả bao nhiêu tiền?

Mức sử dụng	Giá tiền
Đến $10m^3$	6.000 đồng/m^3
Từ $11m^3$ đến $20m^3$	7.100 đồng/m^3
Từ $21m^3$ đến $30m^3$	8.600 đồng/m^3
Từ $31m^3$ trở lên	12.000 đồng/m^3

Đáp số: 379.000 đồng

Bài 4. Cách tính tiền nước sinh hoạt được tính như sau:

Mức sử dụng	$4\,\text{m}^3$ đầu tiền	Từ $5\,\text{m}^3$ đến $7\,\text{m}^3$	Trên $8\,\text{m}^3$
Giá tiền	7.000 đồng /m^3	10.000 đồng /m^3	…

Tháng vừa qua, gia đình bạn Mai sử dụng hết 17 m^3, và số tiền phải đóng là 239.800 đồng bao gồm 10% thuế VAT. Hỏi giá tiền 1m3 ở mức 3 là bao nhiêu.

Đáp số: 16.000 đồng

Bài 5. Giá nước sinh hoạt của một gia đình được tính như sau: Số tiền phải trả trong hóa đơn đã bao gồm thuế 5% giá trị gia tăng và 10% thuế bảo vệ môi trường. Gia đình An trong tháng 3 đã trả theo hóa đơn là 318.550 đồng. Hỏi gia đình An đã sử dụng bao nhiêu m^3 nước.

Mức sử dụng	Giá tiền
Đến 10m³	6.000 đồng/m³
Từ 11m³ đến 20m³	7.100 đồng/m³
Từ 21m³ đến 30m³	8.600 đồng/m³
Từ 31m³ trở lên	12.000 đồng/m³

Đáp số: 35 m^3.

Bài 6. Trong tháng 9 gia đình bạn An đã sử dụng hết 18 m^3 nước máy. Biết rằng định mức tiêu thụ nước được tính theo bảng sau (Chưa tính thuế VAT và phí bảo vệ môi trường):

Khối lượng sử dụng (m³)	Giá tiền (đồng/m³)
Đến 8m³	5.300
Từ 9m³ đến 15m³	10.200
Từ 16m³ trở lên	11.400

Hỏi trong tháng 9 gia đình bạn An phải trả bao nhiêu tiền, biết số tiền sử dụng nước phải tính thêm 10% thuế VAT và 8% phí bảo vệ môi trường ‘

Đáp số: 174.640 đồng.

Bài 7. Giá nước sinh hoạt tại TP. HCM được quy định như sau:

Đối tượng (hộ gia đình sử dụng vào mục đích sinh hoạt)	Giá nước (đồng/m³)	Giá tiền khách hàng phải trả (đã tính thuế GTGT và phí BVMT)
Đến 4m³/người/tháng	5300	6095
Trên 4m³ đến 6m³/người/tháng	10200	11730
Trên 6m³/người/tháng	11400	13110

Gia đình bạn An có 4 người, nhận phiếu ghi chỉ số nước trong tháng 3 như sau: chỉ số cũ là 704 và chỉ số mới là 734. Hỏi gia đình bạn An phải trả bao nhiêu tiền?

Đáp số: 270.020 đồng.

Bài 8. Giá bán nước sạch tại thành phố Hồ Chí Minh được quy định như sau:

Định mức tiêu thụ	0 – 4m³	4m³ đến 6m³	Trên 6m³
Giá tiền (Đồng/m³)	5300	10200	11400

Nhà Hà có 4 người, trong một tháng đã sử dụng hết 27 m^3 nước. Hỏi Hà phải trả bao nhiêu tiền? Biết rằng phải đóng thêm thuế giá trị gia tăng và phí bảo vệ môi trường là 15%.

Đáp số: 279.800 đồng.

Bài 9. Theo quyết định của Bộ Công Thương ban hành, giá bán lẻ điện sinh hoạt kể từ ngày 1/7/2017 sẽ dao động trong khoảng từ 1484 đến 2503 đồng/Kwh tùy bậc thang. Dưới đây là bảng giá điện áp dụng ngày 1/7/2017:

Mức sử dụng (KWh)	Giá tiền (đồng)
0-50	1484
51-100	1533
101-200	1786
201 trở lên	2242

Gia đình bạn An trung bình mỗi tháng tiêu thụ 129KWh thì số tiền phải trả là bao nhiêu?

Đáp số: 202.644 đồng.

Bài 10. Trong tháng 10 năm 2017, gia đình An đã tiêu thụ hết 98Kwh số điện. Biết bảng giá điện sinh hoạt dành cho hộ gia đình như sau:

Mức sử dụng điện	Từ 0 đến 50 Kwh	Từ 51 đến 100 Kwh
Đơn giá tiền	1484 đồng/Kwh	1533 đồng/Kwh

Em hãy tính số tiền mà gia đình An phải trả, biết rằng số tiền điện phải trả trong hóa đơn đã bao gồm 10% thuế VAT.

Đáp số: 162.562 đồng.

Bài 11. Tháng 2 gia đình bạn An dùng hết 95 KW.h thì phải trả 156.750 đồng, trong đó bao gồm tiền điện và 10% thuế VAT. Tháng 4 do thời tiết nóng nên lượng điện tiêu thụ tăng lên 25KW.h so với tháng trước. Biết rằng số điền từ 101 KW.h đến 200 KW.h thì tiền điện tăng 500 đồng/1 KW.h . Hỏi tháng này gia đình bạn An phải trả bao nhiêu tiền, biết số tiền phải trả bao gồm 10% thuế VAT.

Đáp số: 228.800 đồng.

Bài 12. Để khuyến khích tiết kiệm điện, giá điện sinh hoạt được tính theo kiểu lũy tiến theo bảng giá sau:
Mức 1: Tính cho 50 số điện đầu tiên.
Mức 2: Tính cho số điện thứ 51 đến 100, mỗi số điện đắt hơn 100 đồng so với mức 1.
Mức 3: Tính cho số điện thứ 101 đến 200, mỗi số điện đắt hơn 200 đồng so với mức 2.
Mức 4: Tính cho số điện thứ 201 đến 300, mỗi số điện đắt hơn 500 đồng so với mức 3.
Mức 5: Tính cho số điện thứ 301 đến 400, mỗi số điện đắt hơn 250 đồng so với mức 4.
Mức 6: Tính cho số điện thứ 401 trở lên, mỗi số điện đắt hơn 80 đồng so với mức 5.

Ngoài ra, người sử dụng còn phải trả thêm 10% thuế giá trị gia tăng. Tháng vừa rồi nhà An dùng hết 185 số điện và phải trả 328.625 đồng. Hỏi mỗi số điện ở mức 1 giá bao nhiêu?

Đáp số: 1.450 đồng.

Bài 13. Để khuyến khích tiết kiệm điện, giá điện sinh hoạt được tính theo kiểu lũy tiến, nghĩa là nếu người sử dụng càng dùng nhiều điện thì giá mỗi số điện (1kWh) càng tăng lên theo các mức như sau:
Mức một: Tính cho 100 số điện đầu tiền;
Mức hai: Tính cho số điện thứ 101 đến 150, mỗi số đắt hơn 150 đồng so với mức thứ nhất;
Mức ba: Tính cho số điện thứ 151 đến 200, mỗi số đắt hơn 200 đồng so với mức thứ hai;
v.v…
Ngoài ra, người sử dụng còn phải trả thêm 10% thuế giá trị gia tăng (thuế VAT).
Tháng vừa qua, nhà Tuấn dùng hết 165 số điện và phải trả 95.700 đồng. Hỏi mỗi số điện ở mức thứ nhất giá là bao nhiêu?

Đáp số: 450 đồng.

Bài 14. Các nhà sản xuất cho biết khi để một cái tivi ở trạng thái "chờ" (tắt tivi bằng remote) thì trong một giờ tivi vẫn tiêu thụ một lượng điện năng là 1Wh. Giả thiết rằng mỗi hộ gia đình ở thành phố có một tivi và xem 6 giờ mỗi ngày. Em hãy tính, nếu tất cả các hộ gia đình đều tắt tivi ở trạng thái "chờ" thì mỗi tháng (tính là 30 ngày) cả thành phố đã không tiết kiệm bao nhiêu tiền. Biết rằng giá điện trung bình là 1.800 đồng/KWh và thành phố có khoảng 1,7 triệu hộ gia đình.

Đáp số: 1.652.400.000 đồng.

Bài 15. Để khuyến khích tiết kiệm điện, giá điện sinh hoạt được tính theo lũy tiến, nghĩa là nếu người sử dụng càng dùng nhiều điện thì giá mỗi kwh điện càng tăng lên. Dưới đây là biểu giá điện sau khi điều chỉnh (chưa tính thuế giá trị gia tăng VAT 10%).

Mức sử dụng trong tháng (kwh)	0 – 50	51 – 100	101 – 200
Đơn giá (đồng/kwh)	1484	1533	1786

Trong tháng qua hộ A đã phải trả tất cả 303.457đồng. Hộ A đã sử dụng bao nhiêu kwh?

Đáp số: 70kwh.

BÀI TẬP VI-ET

Bài 1. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2-x-12=0$. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{x_1+1}{x_2}+\dfrac{x_2+1}{x_1}$.

Bài 2. Cho phương trình $x^2+5x-7=0$ có 2 nghiệm là x_1,x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$

Bài 3. Cho phương trình $3x^2-2x-2=0$ có 2 nghiệm là x_1,x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $D=\dfrac{x_1}{x_2-1}+\dfrac{x_2}{x_1-1}$

Bài 4. Cho phương trình: $20x^2+5x-2020=0\ -\ 2020=0$. Không giải phương trình trên, hãy tính giá trị của biểu thức sau: $A=\dfrac{x_1}{x_2}(1-x_2)+\dfrac{x_2}{x_1}(1-x_1)$.

Bài 5. Cho phương trình: $3x^2+2x-9=0$ có hai nghiệm là x_1,x_2. Không giải phương trình trên, hãy tính giá trị của biểu thức $A=(3x_1-2x_2)(3x_2-2x_1)$

Bài 6. Cho phương trình $x^2-7x+12=0$ có 2 nghiệm là x_1,x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A={x_1}^2+{x_2}^2-x_1-x_2$

Bài 7. Cho phương trình $x^2-3x+1=0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A=x_1^3+x_2^3$.

Bài 8. Gọi x_1, x_2 là nghiệm (nếu có) của phương trình $x^2+3x-10=0$. Không giải phương trình, hãy tính các biểu thức sau: $A=\dfrac{x_1+2}{x_2}+\dfrac{x_2+2}{x_1}$.

Bài 9. Cho phương trình $x^2+(m+1)x-m-2=0$ (m là tham số)

a) Chứng tỏ phương trình luôn có nghiệm với mọi tham số m.
b) Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm m để $x_1^2+x_2^2=5$

Bài 10. Cho phương trình: $6x^2+6x-13=0$ có hai nghiệm là x_1, x_2.Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức: $A=\dfrac{x_1-x_2-1}{x_2}+\dfrac{x_2-x_1-1}{x_1}$.

Bài 11. Cho phương trình $2x^2-3x-7=0$ có 2 nghiệm là x_1,x_2 . Không giải phương trình: Tính $A=x_1^2+x_2^2-x_1-x_2$

PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. Các bài toán về chuyển động.

Bài 1. Một ôtô tải và xe máy khởi hành cùng một lúc từ A tới B. Xe ô tô đi với vận tốc lớn hơn xe máy là $20\,km/h$. Do đó ôtô đến B sớm hơn xe máy 25 phút. Tính vận tốc mỗi xe, biết rằng khoảng cách giữa A và B là $100\,km$.

__Đáp số:__ Vận tốc xe ô tô: $100\,km/h$; Vận tốc xe máy: $80\,km/h$.

Bài 2. Hai người đi xe đạp xuất phát cùng một từ A đến B. Vận tốc của họ hơn kém nhau $3\,km/h$ nên họ đến B sớm muộn hơn nhau 30 phút. Tính vận tốc mỗi người, biết rằng quãng đường AB dài $30\,km$..

__Đáp số:__ Vận tốc xe A: $3\,km/h$; Vận tốc xe B: $6\,km/h$.

Bài 3. Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau $60\,km$. Sau đó 1 giờ, người khác đi xe máy từ cũng từ A đến B và đến B sớm hơn người đi xe đạp 1 giờ 40 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp biết rằng vận tốc xe máy bằng 3 lần vận tốc xe đạp.

__Đáp số:__ $15\,km/h$.

Bài 5. Ôtô thứ nhất khởi hành từ A đến B cách nhau $240\,km$. Một giờ sau, ôtô thứ hai cũng khởi hành từ A đến B với vận tốc lớn hơn ôtô thụ nhất là $10\,km/h$ nên đuổi kịp ôtô thứ nhất ở chính giữa quãng đường AB. Tính vận tốc mỗi xe.

__Đáp số:__ Vận tốc xe thứ nhất: $30\,km/h$; Vận tốc xe thứ hai: $40\,km/h$.

Bài 6. Người đi xe đạp từ A đến B dài $60\,km$. Sau đó 2 giờ có một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc gấp 5 lần vận tốc xe đạp.Tìm vận tốc mỗi người biết rằng hai người gặp nhau tại địa điểm cách B 37,5km.

__Đáp số:__ Vận tốc xe máy: $45\,km/h$; Vận tốc xe đạp: $9\,km/h$.

Bài 4. Hai ôtô khởi hành cùng một lúc từ A đến B cách nhau $280\,km$, đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau hai giờ. Tìm vận tốc của mỗi ôtô biết rằng vận tốc của ôtô xuất phát từ A lớn hơn vận tốc ôtô xuất phát từ B là $20\,km/h$.

__Đáp số:__ Vận tốc xe A: $80\,km/h$; Vận tốc xe B: $60\,km/h$.

Bài 7. Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc $35\,km/h$ thì đến chậm mất 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc $50\,km/h$ đến nơi sớm hơn 1 giờ. Tính quãng đường AB và thời gian dự định lúc đầu.

__Đáp số:__ Thời gian dự định: $8\,h$; Quãng đường AB: $350\,km$.

Bài 8. Một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc $24\,km/h$. Lúc từ B về A, người đó có công việc bận cần đi theo con đường khác dễ đi nhưng dài hơn lúc đi là $5\,km$. Do vận tốc lúc về là $30\,km/h$. Nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 40 phút. Tính quãng đường lúc đi.

Đáp số: *Quãng đường* $AB: 100km$.

Bài 9. Hai canô cùng khởi hành một lúc và chạy từ A đến B. Ca nô 1 chạy với vận tốc $20\,km/h$, ca nô 2 chạy với vận tốc $24\,km/h$. Trên đường đi canô 2 dừng lại 40 phút, sau đó tiếp tục chạy với vận tốc như cũ và đến bến B cùng lúc với canô 1. Tính chiều dài quãng sông AB (cho biết vận tốc dòng nước không đáng kể).

Đáp số: *Quãng sông* $AB: 80km$.

Bài 10. Một người điều khiển xe máy đi trên quãng đường AB hết 2 giờ. Biết rằng $\frac{1}{5}$ đoạn đường đầu người đó đi với vận tốc là $30\,km/h$ và đoạn đường còn lại đi với vận tốc $40\,km/h$. Tính quãng đường AB.

Đáp số: *Quãng đường* $AB: 75km$.

2. Các bài toán về năng suất.

Bài 1. Hai vòi nước cùng chảy vào bể thì sau 1 giờ 20 phút thì bể đầy. Nếu mở vòi thứ I chảy trong 10 phút và vòi thứ II chảy trong 12 phút thì đầy $\frac{2}{15}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì bao nhiêu lâu mới đầy bể ?

Đáp số: *Vòi thứ I:* 120 *phút; Vòi thứ II:* 240 *phút.*

Bài 2. Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước trong 4 giờ 48 phút sẽ đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất trong 3 giờ và vòi thứ hai trong 4 giờ thì được $\frac{3}{4}$ bể nước. Hỏi mỗi vòi chảy một mình trong bao lâu thì mới đầy bể?

Đáp số: *Vòi thứ nhất:* 12 *giờ; Vòi thứ hai:* 8 *giờ.*

Bài 3. An và Bình cùng làm chung một công việc trong 7 giờ 20 phút thì xong. Nếu An làm trong 5 giờ và Bình làm trong 6 giờ thì cả hai người làm được $\frac{3}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình làm công việc đó thì trong mấy giờ xong ?

Đáp số: *Mỗi người làm một mình trong* 14 *giờ* 40 *phút thì xong.*

Bài 4. Hai người thợ cùng làm chung một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ, người thứ hai làm 6 giờ thì họ làm được 25% công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó một mình thì trong bao lâu xong công việc?

Đáp số: *Người thứ nhất:* 24 *giờ; Người thứ hai:* 48 *giờ.*

Bài 5. Hai người làm chung một công việc thì xong trong 5 giờ 50 phút. Sau khi cả hai người cùng làm được 5 giờ. Người thứ nhất phải đi làm việc khác, nên người kia làm tiếp 2 giờ nữa mới xong công việc. Hỏi nếu làm một mình mỗi người làm trong bao lâu?

Đáp số: *Người thứ nhất:* 10 *giờ; Người thứ hai:* 13 *giờ* 20 *phút.*

Bài 6. Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể cạn (không có nước) thì sau $4\frac{4}{5}$ giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất và 9 giờ sau mới mở thêm vòi thứ hai thì sau $\frac{6}{5}$ giờ nữa mới đầy bể. Hỏi nếu ngay từ đầu chỉ mở vòi thứ hai thì sau bao lâu mới đầy bể?

Đáp số: *8 giờ.*

Bài 7. Hai người thợ cùng làm một công việc, nếu làm riêng mỗi người nửa công việc thì tổng cộng số giờ làm việc là 12 giờ 30 phút. Nếu hai người làm chung thì hai người chỉ làm trong 6 giờ thì xong công việc. Hỏi mỗi người làm riêng thì mất bao lâu xong việc ?

Đáp số: *Người thứ nhất: 15 giờ; Người thứ hai: 10 giờ.*

Bài 8. Hai lớp $9A$ và $9B$ cùng tu sửa khu vườn của nhà trường trong 4 ngày xong. Nếu mỗi lớp tu sửa một mình muốn hành thành công việc ấy thì lớp $9A$ cần ít thời gian hơn lớp 9B là 6 ngày. Hỏi mỗi lớp làm một mình thì trong bao lâu hoàn thành công việc ?

Đáp số: *Lớp 9A: 6 ngày; Lớp 9B: 12 ngày.*

Bài 9. Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì thời gian người thứ nhất hoàn thành công việc ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người làm bao lâu để xong công việc?

Đáp số: *Người thứ nhất: 4 giờ; Người thứ hai: 6 giờ.*

Bài 10. Hai tổ sản xuất nhận chung một công việc. Nếu làm chung trong 4 giờ thì hoàn thành $\frac{2}{3}$ công việc. Nếu để mối tổ làm riêng thì tổ 1 làm xong công việc trước tổ 2 là 5 giờ. Hỏi mỗi tổ làm một mình thì trong bao lâu xong công việc?

Đáp số: *Tổ 1: 10 giờ; Tổ 2: 15 giờ.*

3. Các bài toán về cấu tạo số - tìm số.

Bài 1. Có hai số tự nhiên, biết rằng tổng của hai số bằng 59; hai lần số này bé hơn ba lần số kia là 7. Tìm hai số đó.

Đáp số: *34 và 25*

Bài 2. Tìm hai số biết tổng và tích của chúng lần lượt là -17 và 72.

Đáp số: *-8 và -9*

Bài 3. Tìm hai số tự nhiên, biết tổng của chúng bằng 1006 và nếu lấy số lớn chia số nhỏ thì được thương là 2 và số dư là 124.

Đáp số: *712 và 294*

Bài 4. Tìm hai số biết tổng bằng 17 và tổng bình phương bằng 157.

Đáp số: *11 và 6*

Bài 5. Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết chữ số hàng đơn vị lớn gấp ba lần chữ số hàng chục và nếu đổi chỗ các chữ số cho nhau thì được số mới lớn hơn số ban đầu 18 đơn vị.

Đáp số: 13

Bài 6. Cho một số có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì được một số lớn hơn số đã cho là 63. Tổng của số đã cho và số mới tạo thành bằng 99. Tìm số đã cho.

Đáp số: 18

Bài 7. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết chữ số hàng chục hơn chữ số hàng đơn vị là 5. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì được một số bằng $\frac{3}{8}$ số ban đầu.

Đáp số: 72

Bài 8. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết chữ số hàng đơn vị gấp hai lần chữ số hàng chục. Nếu thêm chữ số 1 xen vào giữa hai chữ số đấy thì ta được một số mới lớn hơn số ban đầu là 370.

Đáp số: 48

Bài 9. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng chục lớn hớn chữ số hàng đơn vị là 2 và nếu viết thêm chữ số bằng chữ số hàng chục vào bên phải thì được một số lớn hơn số ban đầu là 682.

Đáp số: 75

Bài 10. Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Tổng của hai chữ số của nó bằng 10; tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là 12. Tìm số đã cho.

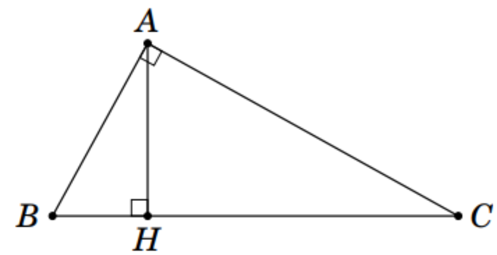
Đáp số: 28

HỆ THỨC LƯỢNG

Lí thuyết:

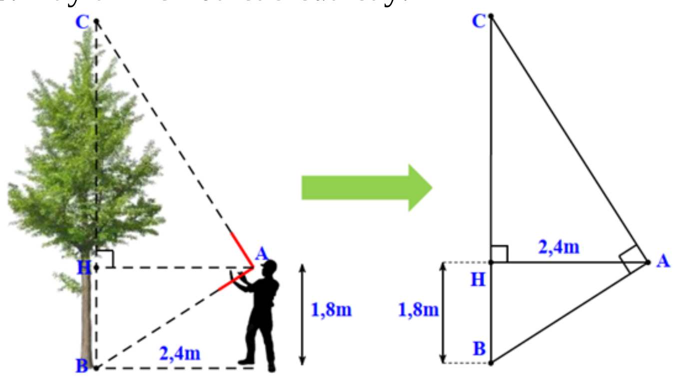
Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Khi đó ta có các hệ thức sau

- ☑ $BC^2 = AB^2 + AC^2$; ☑ $AH \cdot BC = AB \cdot AC$;
- ☑ $BH \cdot BC = AB^2$; ☑ $CH \cdot BC = AC^2$;
- ☑ $BH \cdot CH = AH^2$; ☑ $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.



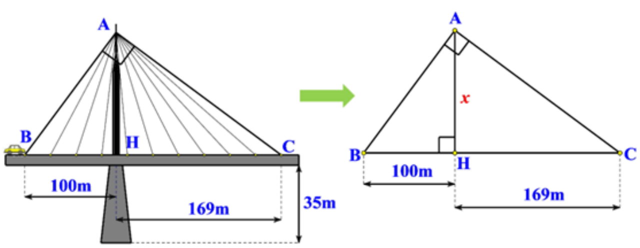
BÀI TẬP

Bài 1. Một người dùng cách ngắm thước eke để đo chiều cao của một cái cây với cách đo được mô phỏng trong hình dưới đây. Chiều cao tính từ chân đến mắt quan sát là $180cm$ và người này đứng thẳng cách gốc cây $240cm$. Hãy tính chiều cao của cây.



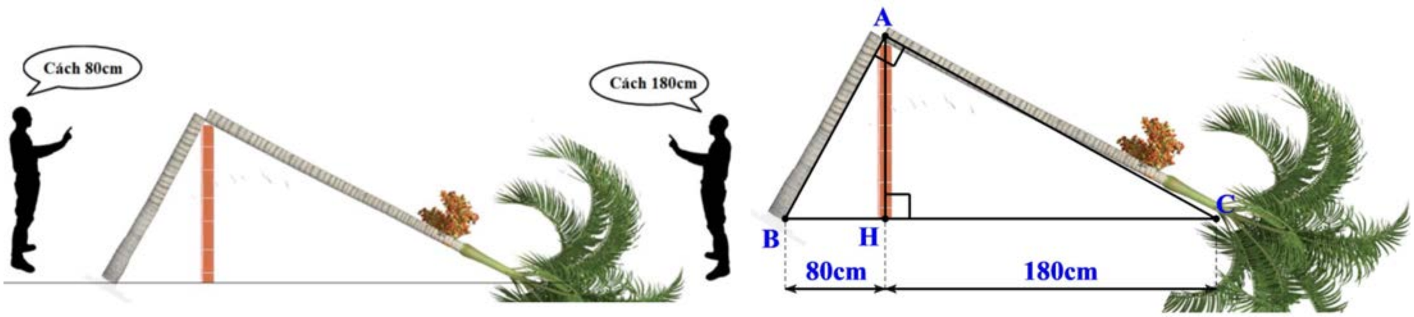
Đáp số: $5m$

Bài 2. Cầu dây văng dạng rẻ quạt như hình vẽ bên dưới. Khoảng cách từ dây văng ngoài cùng đến trụ tháp lần lượt là $100m$ và $169m$. Tính chiều cao của trụ tháp tính từ mặt nước biết cầu cách mặt nước $35m$ và hai dây văng ngoài cùng của một trụ tháp tạo thành một góc vuông.



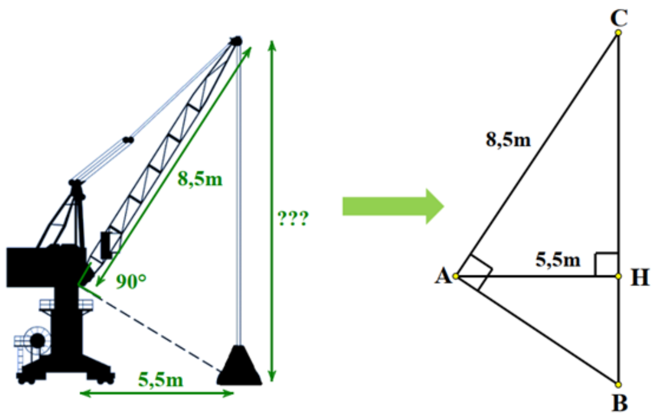
Đáp số: $130m$

Bài 3. Một cây cau bị bão quật ngã vào bức tường và gãy ngang thân vô tình tạo thành một tam giác vuông. Hai người ở hai bên bức tường đo được khoảng cách từ gốc cau đến tường và khoảng cách từ ngọn cau đến tường lần lượt là $80cm$ và $180cm$. Tính chiều cao của bức tường và chiều cao của cây cau (không tính phần tàu lá) khi chưa bị bão quật ngã.



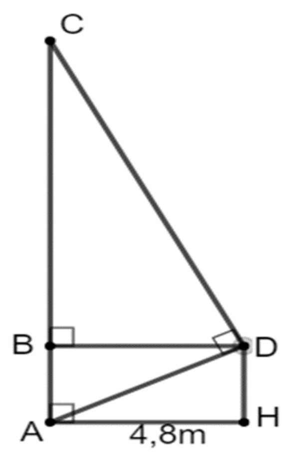
Đáp số: tường cao $120m$. *cây cao* $360,6m$

Bài 4. Một cần cẩu có cánh tay dài $8,5m$ đang nâng một vật lên cao như hình vẽ bên dưới. Biết vật cách cách thân cần cẩu là $5,5m$. Hãy tính độ cao tối đa mà cần cẩu có thể nâng vật đó lên. Làm tròn kết quả đến hàng chục.



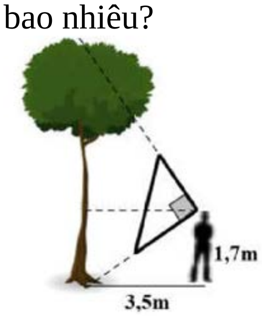
Đáp số: $11{,}15m$

Bài 5. Một người thợ sử dụng thước ngắm có góc vuông đứng ở vị trí DH để đo chiều cao AC của một cây dừa, với các kích thước đo được như hình bên biết $\widehat{ADC} = 90^\circ$. Khoảng cách từ vị trí gốc cây đến vị trí chân của người thợ là $4,8m$ và từ vị trí chân đứng thẳng trên mặt đất đến mắt của người ngắm là $1,6m$. Hỏi các kích thước trên thì người thợ đo được chiều cao của cây đó là bao nhiêu? (làm tròn mét)



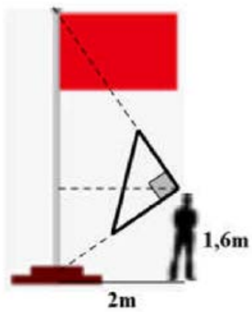
Đáp số: $14,4m$

Bài 6. Một người thợ sử dụng thước ngắm có góc vuông để đo gián tiếp chiều cao của một cái cây. Khoảng cách từ vị trí gốc cây đến vị trí chân của người thợ là $3,5m$ và từ vị trí chân đứng thẳng trên mặt đất đến mắt của người ngắm là $1,7m$. Hỏi với các kích thước trên thì người thợ đo được chiều cao của cây đó là bao nhiêu?



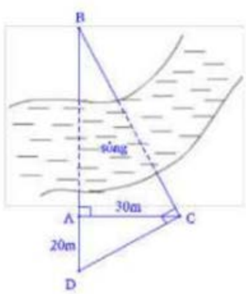
Đáp số: $8,9m$

Bài 7. Một học sinh cầm cây thước êke đứng cách cột cờ $2m$. Bạn ấy lần lượt nhìn theo hai cạnh góc vuông của cây êke thì thấy đỉnh và chân cột cờ (Hình vẽ). Biết mắt học sinh cách mặt đất $1,6m$. Hãy tính chiều cao của cột cờ.



Đáp số: $4,1m$

Bài 8. Muốn tính khoảng cách từ điểm A đến điểm B bên kia bờ sông, ông Việt vạch một đường vuông góc với AB. Trên đường vuông góc này lấy một đoạn thẳng $AC = 30m$, rồi vạch CD vuông góc với phương BC cắt AB tại D (xem hình vẽ). Đo $AD = 20m$, từ đó ông Việt tính được khoảng cách từ A đến B. Em hãy tính độ dài AB.



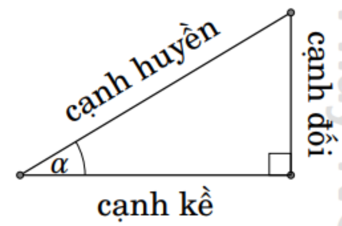
Đáp số: $45m$

TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

A Kiến thức cần nhớ

a) Tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông

- ☑ $\sin\alpha = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}$; ☑ $\cos\alpha = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}$;
- ☑ $\tan\alpha = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}$; ☑ $\cot\alpha = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$.



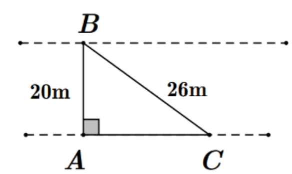
b) Hai góc α, β phụ nhau $(\alpha+\beta=90^\circ)$ thì $\sin\alpha=\cos\beta$, $\cos\alpha=\sin\beta$, $\tan\alpha=\cot\beta$, $\cot\alpha=\tan\beta$.

c) Tính chất

- ☑ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; ☑ $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;
- ☑ $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; ☑ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$.

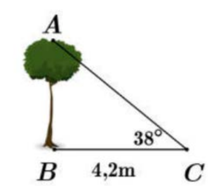
BÀI TẬP

Bài 1. Một khúc sông rộng $20m$. Một chiếc thuyền qua sông từ B qua A, bị dòng nước đẩy xiên nên phải chèo $26m$ mới sang được bên bờ kia. Hỏi dòng nước đã đẩy chiếc thuyền lệch
đi một góc bao nhiêu? (góc làm tròn đến độ)



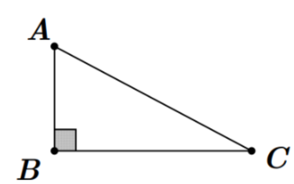
Đáp số: $39^\circ42'$

Bài 2. Một cái cây có bóng trên mặt đất dài $4,2m$. Cho biết tia nắng qua ngọn cây nghiêng một góc 38° so với mặt đất. Tính chiều cao của cây (làm tròn đến mét).



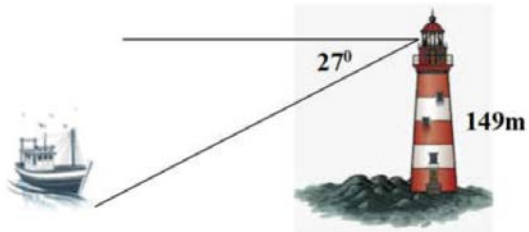
Đáp số: $3,28m$

Bài 3. Một xe máy đi từ vị trí ở điểm A đến vị trí ở điểm B trong vòng 1 giờ (hình vẽ), sau đó xe quay 90° rồi đi đến đến C trong vòng 30 phút. Khi quay trở về vị trí ở điểm A xe không đi đường cũ nữa mà xe đi thẳng đến điểm A từ điểm C. Tính quãng đường AC biết vận tốc của xe luôn giữ $60\,km/h$ và xe chuyển động đều trên đường thẳng.



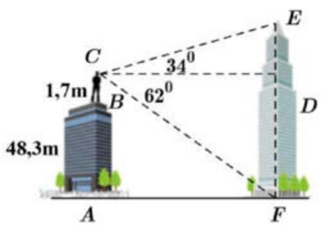
Đáp số: $67km$

Bài 4. Một người quan sát ở ngọn hải đăng cao $149m$ so với mực nước biển, nhìn thấy một con tàu ở xa với một góc nghiêng xuống là 27°. Hỏi tàu đang cách ngọn hải đăng bao nhiêu mét.



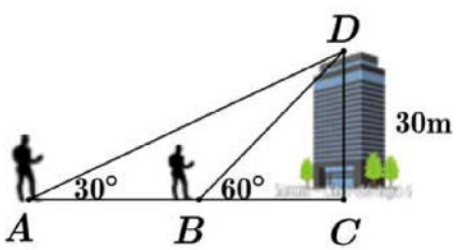
Đáp số: $292m$

Bài 5. Từ nóc một tòa chung cư cao $48,3m$; An cao $1,7m$ nhìn thấy chân và đỉnh của một tòa tháp cao với các góc hạ và nâng lần lượt là 62° và 34°. Em hãy giúp An tính chiều cao của tòa tháp?



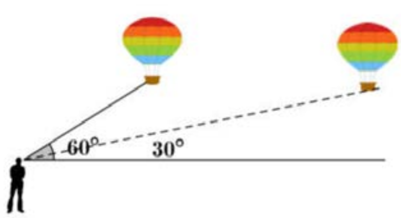
Đáp số: $83,725m$

Bài 6. Bạn Hùng đang đứng gần tòa nhà cao $30m$ thì nhìn thấy nóc tòa nhà với gốc nâng 30°. Hùng đi về phía tòa nhà cho đến khi nhìn thấy nóc tòa nhà với gốc nâng bằng 60°. Tính quãng đường mà bạn Hùng đã đi được $51,96$?



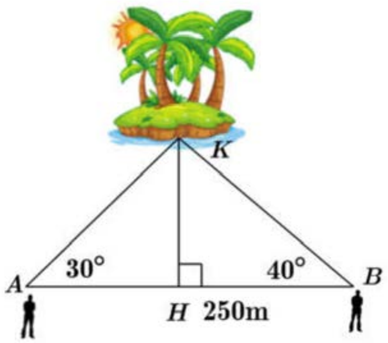
Đáp số: $34,66m$

Bài 7. Một học sinh có khoảng cách từ mắt đến mặt đất là $1,2m$ bắt đầu quan sát một quả khinh khí cầu với góc nâng 60°. Một lúc sau lại nhìn thấy quả khí cầu với góc nâng 30°. Hỏi giữa hai lần quan sát thì quả khí cầu đã bay được bao nhiêu mét? Cho biết độ cao của quả khí cầu luôn không đổi và bằng $80m$.



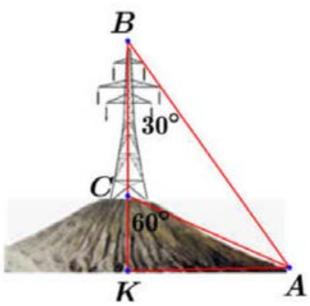
Đáp số: $91m$

Bài 8. Hai ngư dân đứng ở một bên bờ sông cách nhau $250m$ cùng nhìn thấy cù lao trên sông với các góc nâng lần lượt là 30° và 40°. Tính khoảng cách d từ bờ sông đến cù lao.



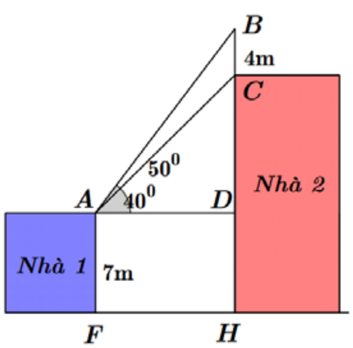
Đáp số: $85,45m$

Bài 9. Trên một ngọn đồi có một tháp BC cao $100m$. Từ đỉnh tháp B và chân tháp C nhìn xuống điểm A ở chân đồi dưới các góc tương ứng bằng 30° và 60° so với phương thẳng đứng. Hãy sác định chiều cao CK của ngọn đồi.



Đáp số: $50m$

Bài 10. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten thẳng cao $4m$. Từ vị trí quan sát A cao $7m$ so với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten lần lượt dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang. Tính chiều cao CH của tòa nhà.

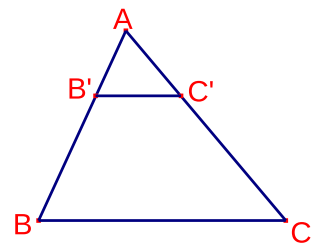


Đáp số: $16,5m$

ĐỊNH LÍ TALET- TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

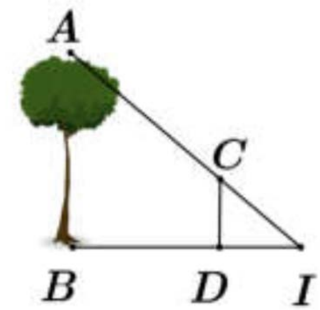
Lí thuyết:

Trên hai cạnh AB, AC của tam giác ABC lấy hai điểm B′, C′ sao cho B′C′//BC. Khi đó theo định lý Talet ta có: $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$.



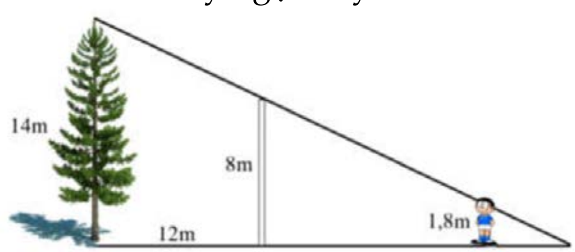
BÀI TẬP

Bài 1. Để đo chiều cao của một cái cây bằng ánh nắng mặt trời, bạn An cắm một cọc CD thẳng đứng cách cây $24m$. Khi bóng của cây trùng với bóng của cọc bạn An đánh dấu vị trí I. Đo khoảng cách ID được $1,6m$, biết cọc có chiều cao $1,2m$. Hỏi chiều cao AB của cây.



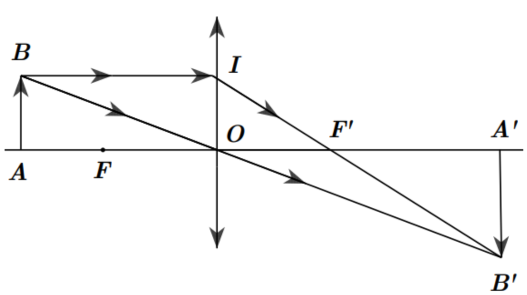
Đáp số: $19,2m$

Bài 2. Một cây có chiều cao $14m$, mọc ở phía sau một bức tường cao $8m$ và cách bức tường $12m$. Hỏi người quan sát có chiều cao $1,8m$ phải đứng cách bức tường bao nhiêu mét để có thể nhìn thấy ngọn cây?



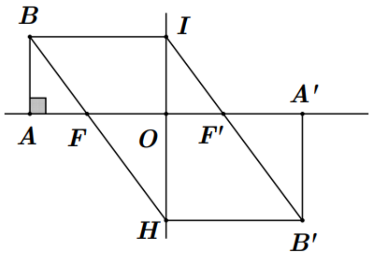
Đáp số: $12,4m$

Bài 3. Một vật sáng AB có dạng mũi tên đặt vuông góc với trục chính của thấu kính cho ảnh thật $A'B'=12cm$, ảnh cách thấu kính một đoạn $OA'=30cm$. Thấu kính có tiêu cự $OF=OF'=10cm$. Xác định chiều cao AB.



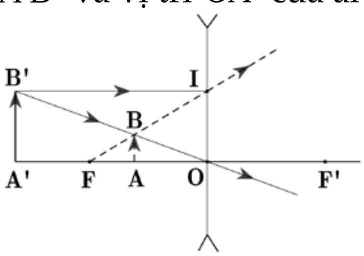
Đáp số: $6cm$

Bài 4. Một vật sáng AB cao $6cm$ đặt vuông góc trục chính của thấu kính hội tụ, cách thấu kính một đoạn $OA=15cm$. Thấu kính có tiêu cự $OF=OF'=10cm$. Xác định $A'B'$ và vị trí OA' của ảnh.



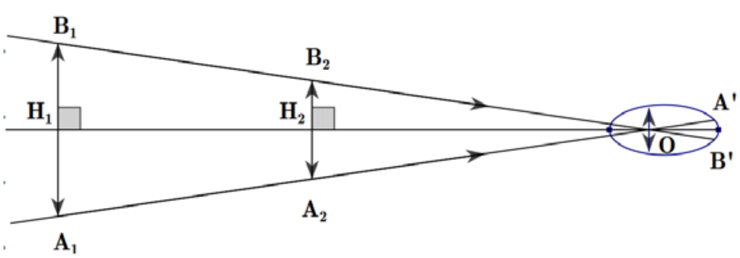
Đáp số: $A'B' = 12cm, OA' = 30cm$

Bài 5. Một vật sáng $AB = 6cm$ có dạng mũi tên đặt vuông góc trục chính của thấu kính, cách thấu kính một đoạn $OA = 10cm$. Thấu kính có tiêu cự $OF = OF' = 15cm$. Xác định kích thước $A'B'$ và vị trí OA' của ảnh.



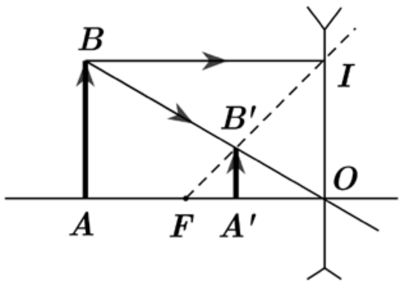
Đáp số: $A'B' = 18cm, OA' = 30cm$

Bài 6. (ĐỀ MINH HỌA SỐ 9 NĂM 2018) Mắt nhìn hai vật A_1B_1 và A_2B_2 ở xa, gần khác nhau nhưng do chiều cao ảnh của chúng trên màng lưới bằng nhau (hình minh họa) nên mắt nhìn thấy hai vật đó có chiều cao như nhau. Cho biết vật $A_2B_2 = 1,2m$ và ở cách mặt đoạn $OH_2 = 2m$, vật A_1B_1 cách mắt đoạn $OH_1 = 500m$. Hỏi vật A_1B_1 có chiều cao bao nhiêu?



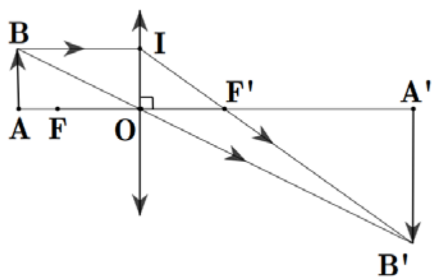
Đáp số: $A_1B_1 = 300m$

Bài 7. Một vật sáng AB đặt vuông góc với trục chính của một thấu kính phân kỳ cho ta một ảnh ảo $A'B'$, biết tiêu cự của thấu kính là $OF = 10cm$, độ lớn của vật $AB = 10cm$ và $FA' = 4cm$. Tính độ lớn $A'B'$ của ảnh.



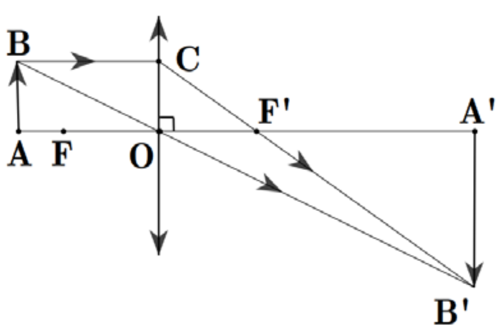
Đáp số: $A'B' = 4cm$

Bài 8. Một vật sáng AB cao $2cm$ đặt trước một thấu kính hội tụ và cách quang tâm O của thấu kính $15cm$. Sau thấu kính thu được một ảnh $A'B'$ rõ nét trên màn và cao $6cm$. Tính khoảng cách từ màn đến quang tâm O.



Đáp số: $OA' = 45cm$

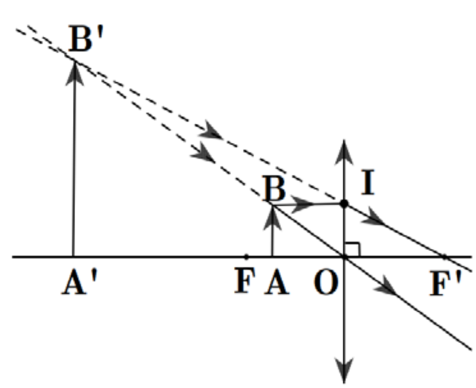
Bài 9. Đặt một vật AB đặt vuông góc với trục chính của một thấu kính hội tụ có tiêu cự là $12cm$. Biết vật cách thấu kính là $18cm$. Hãy so sánh ảnh thật $A'B'$ với vật AB.



Đáp số: $A'B' = 3AB$

Bài 10. Bác Năm dùng kính lúp để soi một vật nhỏ thì thấy ảnh của vật đó trong kính lúp lớn gấp 5 lần vật và kính đặt cách mắt $40cm$. Tính tiêu cự của thấu kính.

Đáp số: $OF = 50cm$



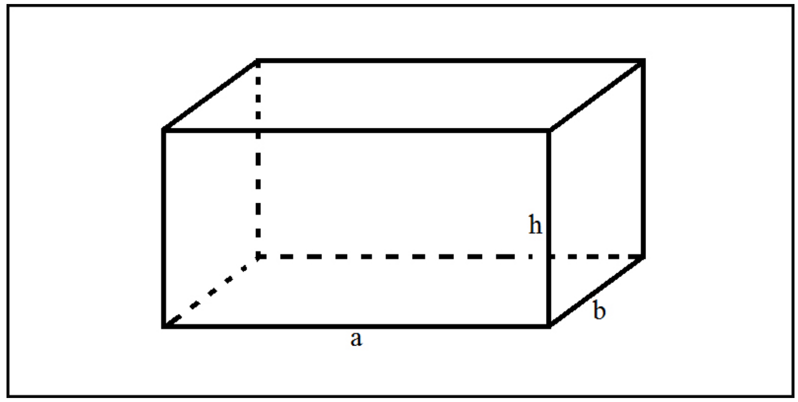
HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

Lý thuyết:

$V_{HHCN} = D.R.C$ *(D: dài, R: rộng, C: cao)*

Hình lập phương: *là hình hộp chữ nhật có ba kích thước: dài, rộng, cao bằng nhau.*

$V_{HLP} = canh^3$



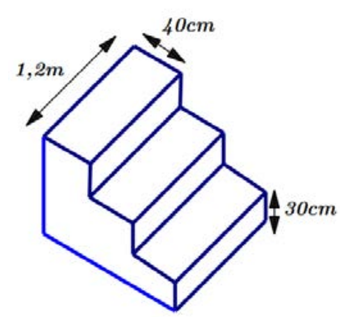
Bài 1. Một căn phòng hình hộp chữ nhật gồm một cửa ra vào và hai cửa sổ. Biết căn phòng có chiều rộng là $4m$, chiều dài là $8m$ và chiều cao là $3,6m$, cửa ra vào có kích thước là $1,2m \times 2m$ và mỗi cửa sổ có kích thước là $1,2m \times 1,5m$. Chủ nhà sơn nước các tường và trần nhà. Tính diện tích được sơn.

Đáp số: $112,4m^2$

Bài 2. Một căn phòng dài $4,5m$, rộng $3,7m$ và cao $3m$. Người ta muốn quét vôi trần nhà và bốn bức tường. Biết rằng tổng diện tích các cửa là $5,2m^2$. Hãy tính diện tích cần quét vôi.

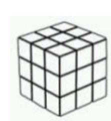
Đáp số:. $60,65m^2$

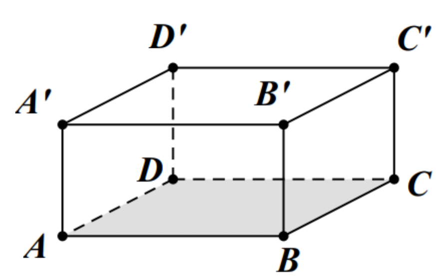
Bài 3. An muốn trải một tấm thảm hình chữ nhật cho một bậc tam cấp (gồm 3 bậc thang) của nhà mình có kích thước như hình bên dưới. Mỗi bậc thang cao $30cm$, dài $40cm$, rộng $1,2m$. Hãy tính diện tích tấm thảm cần có để phủ toàn bộ các bề mặt của bậc tam cấp.



Đáp số: $2,52\left(m^2\right)$.

Bài 4. Khối Rubic hình lập phương có kích thước $5,7cm \times 5,7cm \times 5,7cm$ được đựng trong một hộp hình khối chữ nhật có diện tích đáy lòng hộp là $17,1cm \times 28,5cm$ và hộp chứ đầy được 60 khối Rubic. Tính chiều cao AA′ của lòng hình hộp.





Đáp số:. $22,8cm$

Bài 5. Một thùng container nhập khẩu chứa vừa đủ 80 thùng hàng có số đo $2m\times 1,4m\times 2,2m$ và 120 thùng hàng có hình lập phương với số đo cạnh là $250cm$. Hỏi thể tích của thùng container là bao nhiêu m^3.

Đáp số: $2367,8m^3$

Bài 6. Rượu vang trước khi được đóng chai để mang ra bán được chứa vào ba thùng gỗ sồi dạng hình hộp chữ nhật có kích thước lọt lòng là $7dm\times 3dm\times 2dm$. Hỏi lượng rượu vang đã cho, đóng được vào bao nhiêu chai $750ml$.

Đáp số: 168

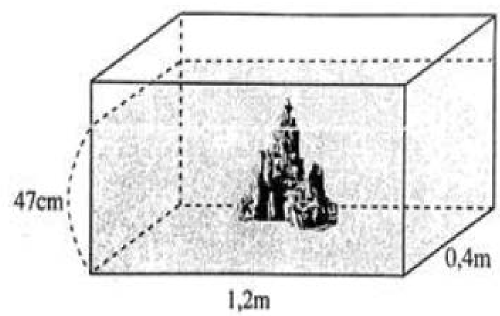
Bài 7. Bình xăng của xe con là một hình hộp chữ nhật có kích thước $48cm\times 56cm\times 20cm$. Cho biết mức độ tiêu hao nhiên liệu của xe là chạy $100km$ cần hết $8,7$ lít xăng. Hỏi nếu đổ đầy bình xăng của xe con thì xe có thể chạy được một quãng đường bao nhiêu km?

Đáp số: $\approx 618km$

Bài 8. Một bình chứa nước hình hộp chữ nhật có diện tích đáy là $20dm^2$ và chiều cao $5dm$. Người ta rót hết nước trong bình ra những chai nhỏ có thể tích là $0,35dm^3$ được tất cả 200 chai. Hỏi lượng nước có trong bình chiếm bao nhiêu phần trăm thể tích bình?

Đáp số: $=70\%$

Bài 9. Một bể cá cảnh hình hộp chữ nhật có chiều dài $1,2m$, chiều rộng $0,4m$ và chiều cao $0,6m$. Mực nước trong bể cao $35cm$. Sau khi thả hòn Non Bộ vào trong bể thì mực nước trong bể cao $47cm$. Tính thể tích hòn Non Bộ.



Đáp số: $0,0576m^3$

Bài 10. Một cái thùng hình lập phương cạnh $7dm$ có chứa nước với độ sâu của nước là $4dm$. Người ta thả 25 viên gạch có chiều dài $2dm$, chiều rộng $1dm$ và chiều cao $0,5dm$ vào thùng. Hỏi nước trong thùng dâng lên cách miệng thùng bao nhiêu dm? (giả thiết toàn bộ gạch ngập trong nước và chúng hút nước không đáng kể).

Đáp số: $\approx 4,51dm$

HÌNH TRỤ

Lí thuyết:

- Diện tích xung quanh

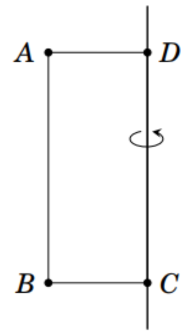
$$\boxed{S_{xq} = 2\pi rh}$$

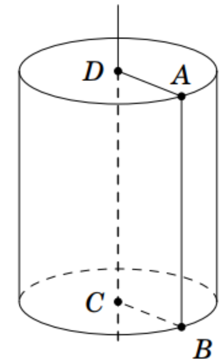
- Diện tích toàn phần

$$\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{hai đáy}} = 2\pi rh + 2\pi r^2}$$

- Thể tích hình trụ

$$\boxed{V = Sh = \pi r^2 h}$$



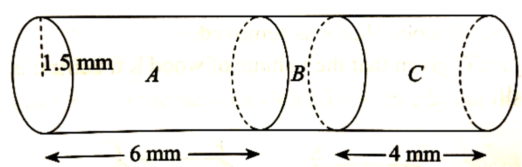


BÀI TẬP

Bài 1: Có hai cốc thủy tinh hình trụ, cốc thứ nhất phía bên trong có đường kính đáy là 30cm, chiều cao 20cm, đựng đầy nước, cốc thứ hai bên trong có đường kính đáy là 40cm, chiều cao 12cm. Hỏi nếu đổ hết nước từ cốc thứ nhất sang cốc thứ hai nước có bị tràn ra ngoài không? Tại sao? (xem như bề dày của đáy cốc không đáng kể)

Đáp số: đổ hết nước từ lọ 1 sang lọ 2 thì không bị tràn.

Bài 2: Hình vẽ biểu diễn một sợi dây chuyền có dạng hình trụ. Phần A và C được làm bằng bạc trong khi phần B được làm bằng vàng. Thể tích của sợi dây chuyền là $80\ \text{mm}^3$.



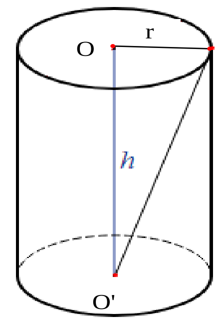
a) Tìm độ dài của phần B theo mm, làm tròn đến 4 chữ số sau dấu thập phân.

b) Tìm khối lượng theo gam của sợi dây chuyền đã cho biết khối lượng riêng của bạc và vàng lần lượt là $10{,}49\ \text{g/cm}^3$ và $19{,}3\ \text{g/cm}^3$. (làm tròn đến 2 chữ số phần thập phân, biết thể tích hình trụ bằng diện tích đáy nhân đường cao)

Đáp số: a) Độ dài của phần B là khoảng: 1,3177mm.

b) Khối lượng dây chuyền khoảng: 0,92 gam.

Bài 3: Hình lăng tròn có công thức tính thể tích là: $V = \pi.r^2.h$ trong đó: V là thể tích, r là bán kính đường tròn đáy, h là chiều cao của hình trụ và $\pi = 3{,}14$.



a) Một cái hồ hình trụ tròn có bán kính 3m người ta đo khoảng cách từ tâm đáy hồ đến miệng hồ dài 5m. Tính chiều cao của hồ.

b) Tính thể tích nước cần để đổ đầy hồ?

Đáp số: a) 4m

b) $113,04\,m^2$ nước để đầy hồ.

Bài 4 : Vì dịch Covid 19 kéo dài nên anh Mến đi học nghề cơ khí làm nghề tay trái. Hôm nay anh được giao làm một cái thùng xách nước từ tấm thiếc với kích thước như sau: đường kính đáy thùng 26cm; chiều cao thùng 24cm; tay cầm là một khúc gỗ hình hộp chữ nhật có kích thước dài 26cm; rộng 4cm; cao 4cmđặt sát mép miệng thùng. Để thùng được sử dụng lâu, anh Mến đã sơn một lớpsơn chống rỉ sét bên trong thùng.

a) Tính diện tích bề mặt quét sơn.

b) Tính thể tích nước khi thùng chứa đầy nước (làm tròn đến số thập phân thứ hai)

Đáp số: a) Diện tích bề mặt quét sơn bên trong thùng là 793π cm^2.

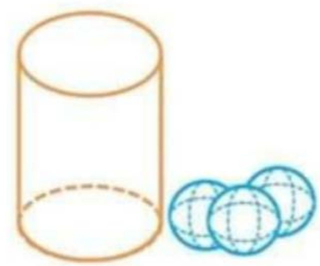
b) Thể tích nước khi thùng chứa đầy thùng nước là $\approx 12326{,}3$ cm^3

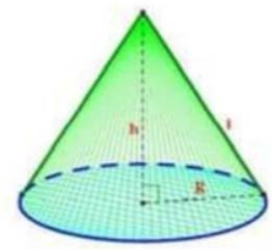
Bài 5: Một xe lu san đường (loại một trống lu) có đường kính trống lu là 0,96m và chiều dài trống lu là 169cm. Người ta sử dụng loại xe lu này để làm phẳng một sân bóng đá hình chữ nhật có kích thước 120m x 90m. Cho rằng sân bóng cần được lăn 5 lần thì đạt tiêu chuẩn và mỗi trống lu chỉ lăn được tối đa với công suất 10000 vòng/tuần. Cần sử dụng ít nhất bao nhiêu xe lu để có thể hoàn thành công việc trong một tuần (biết rằng mỗi xe đều lăn hết công suất cho phép và các xe lu chỉ lăn trên phần sân riêng biệt).

Đáp số: Vậy cần dùng ít nhất 2 xe

Bài 6: Một cốc nước hình trụ có chiều cao 15cm, bán kính đáy là 3cm và lượng nước ban đầu trong cốc cao 12cm. Thả chìm hoàn toàn vào cốc nước 3 viên bi thủy tinh hình cầu có cùng bán kính là 2cm thì nước bị tràn ra ngoài. (Giả sử độ dày của thành cốc và đáy cốc không đáng kể)

a) Tính thể tích nước bị tràn ra ngoài (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai). Cho biết công thức tính thể tích hình trụ: $V = \pi R^2 h$ trong đó R là bán kính đáy và h là chiều cao hình trụ, thể tích của hình cầu được tính theo công thức $V = \frac{4}{3}.\pi.r^3$ với r là bán kính hình cầu.





b) Thể tích nước tràn ra ngoài bằng bao nhiêu phần trăm của khối nón có chiều cao bằng chiều cao của hình trụ, bán kính đáy bằng đường kính hình cầu? Biết công thức tính thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi(2r)^2 h$

Đáp số: a) Thể tích nước tràn ra ngoài là: 15,71 *(cm^3)*

b) So với khối nón thì thể tích nước tràn ra ngoài chiếm: 6,25%

Bài 7: Các ống hút nhựa thường khó phân hủy và gây hại cho môi trường. Mỗi ngày có 60 triệu ống hút thải ra môi trường gây hậu quả nghiêm trọng. Ngày nay người ta chủ động sản xuất các loại ống hút dễ phân hủy. Tại tỉnh Đồng Tháp có cơ sở chuyên sản xuất ống hút "thân thiện với môi trường" xuất khẩu ra thị trường thế giới và được nhiều nước ưa chuộng. Ống hút được làm từ bột gạo, các màu chiết xuất từ củ dền, lá dứa, bông sen, bông điên điển, $\ldots$.

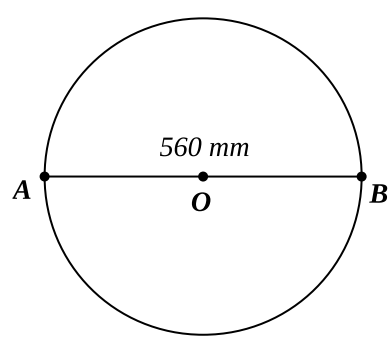
a) Một ống hút hình trụ, đường kính 12 mm, bề dày ống 2 mm, chiều dài ống 180 mm. Em hãy tính xem để sản xuất mỗi ống thì thể tích bột gạo được sử dụng là bao nhiêu.

b) Một hộp đựng ống hút bằng nhựa có dạng hình hộp chữ nhật kích thước $24cm \times 11cm \times 18cm$ thì chứa được tối đa bao nhiêu ống hút như trên?

Đáp số: a) Thể tích phần bột gạo để làm 1 ống hút là: 11304 mm^3

b) Vậy hộp có thể đựng tối đa là 233 ống.

Bài 8: Để chứa xăng hoặc dầu, người ta chế tạo ra các thùng phuy bằng sắt (hình vẽ) dạng hình trụ có 2 đáy là hình tròn có đường kính 560 mm.



a) Tính diện tích của một mặt đáy của thùng phuy. (Làm tròn kết quả đến dm^2)

b) Biết thùng phuy chứa được khoảng 200 lít dầu. Tính chiều cao h của thùng phuy và diện tích sắt để làm thùng phuy, giả thiết diện tích các chô hàn không đáng kể? (Làm trò n kết quả đến dm^2)

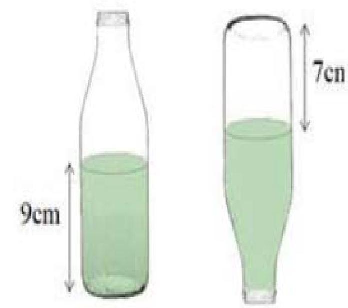
Đáp số: a) Diện tích mặt đáy của thùng phuy là: $\approx 25\left(dm^2\right)$.

b) Diện tích sắt để làm thùng phuy là: $\approx 95\left(dm^2\right)$

Bài 9: Một xe chở xăng dầu, bên trên có chở một bồn chứa hình trụ chiều dài 2,6 mét và đường kính đáy là 1,4 mét. Theo tiêu chuẩn an toàn, thì bồn chỉ chứa tối đa 80% thể tích khi xe di chuyển trên đường. Vậy bồn đó có thể chứa được nhiều nhất là bao nhiêu lít nhiên liệu ? (làm tròn đến hàng đơn vị)

Đáp số: Vậy nhiên liệu trên xe được chở tối đa là : 3200 lít

Bài 10: Có một chai đựng nước suối như trong hình vẽ. Bạn An đo đường kính của đáy chai bằng 6cm, đo chiều cao của phần nước trong chai được 9cm rồi lật ngược chai và đo chiều cao của phần hình trụ không chứa nước được 7cm (hình minh họa)



a) Tính thể tích lượng nước trong chai

b) Tính thể tích chai

Đáp số: a) Thể tích lượng nước có trong chai là: 216ml
b) Thể tích chai nước là: 384ml

HÌNH NÓN

Lí thuyết:

- Diện tích xung quanh

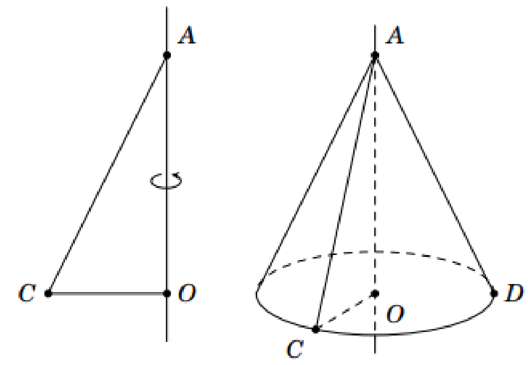
$$\boxed{S_{xq} = \pi r l}$$

- Diện tích toàn phần

$$\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = \pi r l + \pi r^2}$$

- Thể tích hình nón

$$\boxed{V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} \pi r^2 h}$$



- Diện tích xung quanh

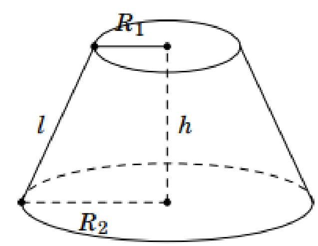
$$\boxed{S_{xq} = \pi (R_1 + R_2) l}$$

- Diện tích toàn phần

$$\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{hai đáy}} = \pi (R_1 + R_2) l + \pi \left(R_1^2 + R_2^2\right)}$$

- Thể tích hình nón cụt

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \pi h \left(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2\right)}$$



BÀI TẬP

Bài 1. Cái mũ của chú hề với đường sinh dài $30cm$, đường kính của vành nón dài $35cm$ và độ dài $a = 10cm$. Hãy tính tổng diện tích vải cần để là nên cái mũ (không kể riềm, mép, phần thừa).

Đáp số: $1492,3\ cm^2$

Bài 2. Một cây bút chì dạng hình trụ có đầu nhọn dạng hình nón, biết chu vi là $8\pi\ \ (cm)$ và chiều cao đầu nhọn $h = 2cm$. Hãy tính

a) Bán kính của cây bút chì.

b) Số đo độ dài đường sinh của đầu nhọn cây bút chì.

Đáp số: $r = 4\ cm,\ l = 2\sqrt{5}\ cm$

Bài 3. Nón lá là hình ảnh thân thuộc của người phụ nữ Việt Nam tuy mộc mạc, mong manh, lam lũ nhưng không kém phần duyên dáng. Biết chiếc nón có đường sinh dài $30cm$, độ cao $15cm$.

a) Hãy tính bán kính r của đường tròn đáy chiếc nón.

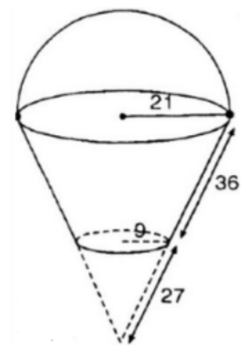
b) Hãy tính góc tạo bởi đường sinh của nón lá với mặt đất.

Đáp số: $r \approx 26\ cm,\ \alpha = 30^{\circ}$

Bài 4. Một chiếc bánh ốc quế đựng kem Ý có dạng một hình nón với kích thước $R = 3cm$, $h = 10cm$. Cho biết $1cm^3$ bánh quế có khối lượng bằng $0,12gam$. Tính khối lượng bánh ốc quế của một cây kem. Biết $\pi = 3,14$.

Đáp số: $15,8\pi$ *gam*

Bài 5. Một cái xô cát bằng nhựa có dạng hình nón cục có kích thước như hình vẽ.

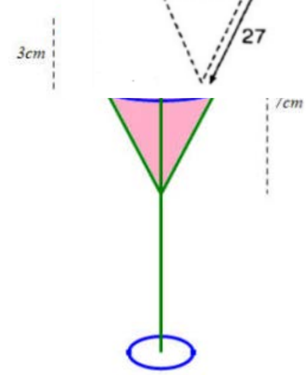


a) Hãy tính diện tích xung quanh của xô cát.

b) Khi xô chứa đầy cát thì dung tích của nó là bao nhiêu?

Đáp số: *a)* 1080π *(đvdt), b)* 237π *(đvtt)*

Bài 6. Cho cốc rượu như hình vẽ, phần phía trên có dạng hình nón có chiều cao $7cm$, có đáy là đường tròn bán kính $4cm$. Biết trong cốc đang chứa rượu với mực nước đang cách miệng cốc là $3cm$. Tính thể tích phần còn lại của cốc.

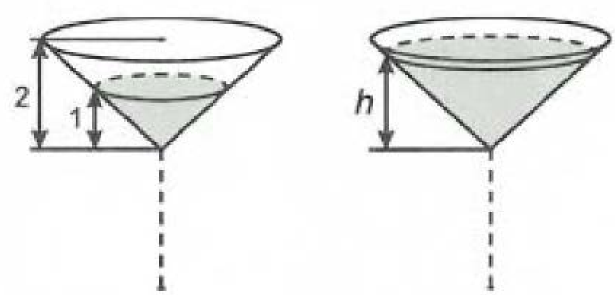


Đáp số: $\dfrac{496}{49}\pi$

Bài 7. Người thợ gia công của một cơ sở chất lượng cao X cắt một miếng tôn hình tròn với bán kính $60cm$ thành ba miếng hình quạt bằng nhau. Sau đó người thợ ấy quấn và hàn ba miếng tôn đó để được ba cái phễu hình nón. Hỏi thể tích V của mỗi cái phiếu đó bằng bao nhiêu?

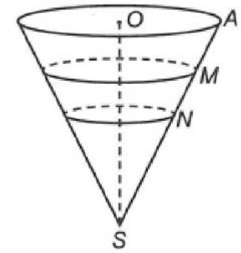
Đáp số: $\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ *lít*

Bài 8. Hai chiếc ly đựng chất lỏng giống hệt nhau, mỗi chiếc có phần chứa chất lỏng là một hình khối nón có chiều cao $2dm$ (mô tả như hình vẽ). Ban đầu chiếc ly thứ nhất chứa đầy chất lỏng, chiếc ly thứ hai để rỗng. Người ta chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai sao cho độ cao của một chất lỏng trong ly thứ nhất còn $1dm$. Tính chiều cao h của cột chất lỏng trong ly thứ hai sau khi chuyển (độ cao của cột chất lỏng tính từ đỉnh của khối nón đến mặt chất lỏng – lượng chất lỏng coi như không hao hụt khi chuyển. Tính gần đúng h với sai số không quá $0,01dm$).



Đáp số: $h \approx 1,91$ *dm*

Bài 9. Một bể nước lớn của khu công nghiệp có phần chứa nước là một khối nón đỉnh S phía dưới (hình vẽ), đường sinh $SA = 27m$. Có một lần lúc bể chứa đầy nước, người ta phát hiện nước trong bể không đạt vệ sinh nên lãnh đạo khu công nghiệp cho thoát hết nước để làm vệ sinh bể chứa. Công nhân cho thoát nước ba lần qua một lỗ ở đỉnh S. Lần thứ nhất khi mực nước tới điểm M thuộc SA thì dừng, lần thứ hai khi mực nước tới điểm N thuộc SA thì dừng, lần thứ ba mới thoát hết nước. Biết rằng lượng nước mỗi lần thoát bằng nhau. Tính độ dài đoạn MN.



Đáp số: $9\sqrt[3]{9}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$ *m.*

Bài 10. Một chiếc kem gồm hai phần: phần phía dưới là một khối nón có chiều cao gấp đôi bán kính đáy; phần phía trên là một nữa khối cầu có đường kính bằng đường kính khối nón bên dưới. Thể tích phần kem phía trên bằng $200cm^3$, thể tích của cả chiếc kem đã cho bằng?

Đáp số: $400\ cm^3$

Bài 11. Một cây kem có phần bánh hình nón, người ta đựng đầy kem trong phần bánh và thêm một nửa hình cầu kem phía trên (xem hình). Đường kính của hình tròn đáy (phía bên trong bánh hình nón) là 4cm và độ dài đường sinh bên trong hình nón là 8cm.

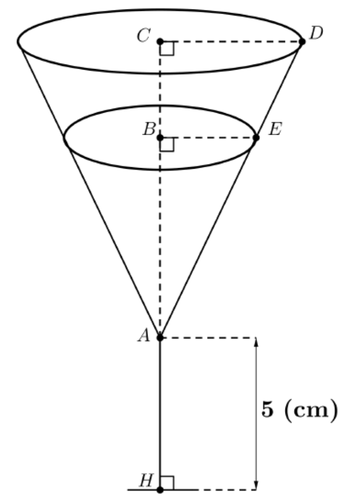
Tính thể tích của phần kem.

Cho biết : - Thể tích hình nón: V = $\frac{1}{3}\pi R^2 h$

(với R: bán kính đường tròn đáy; h: chiều cao hình nón)

- Thể tích hình cầu: V = $\frac{4}{3}\pi R^3$ (với R là bán kính hình cầu)

Đáp số: Thể tích phần kem: $\approx 49\left(cm^3\right)$



Bài 12. Một chiếc ly với phần bầu ly có dạng hình nón (như hình vẽ). Sau khi rót vào ly 60 (ml) nước thì chiều cao của lượng nước trong ly bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao bầu ly ($BA = \frac{2}{3}CA$). Công thức thể tích hình nón là $V_{nón} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (r là bán kính đường tròn đáy, h là chiều cao hình nón).

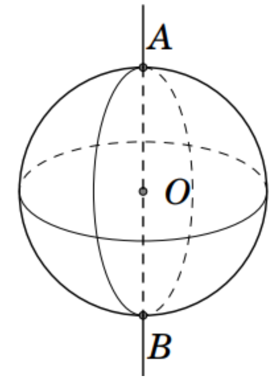
a. Tính tỉ lệ thể tích của phần nước đổ vào và thể tích bầu ly.

b. Biết chiều cao thân ly là HA = 5 (cm) và bán kính miệng ly là CD = 4 (cm). Tính chiều cao của chiếc ly (đoạn CH) (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Đáp số: a) Thể tích nước đổ vào : 60ml , Thể tích bầu ly: 202,5ml

b) Vậy chiều cao cái ly là 17cm

HÌNH CẦU



Lí thuyết:

- Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2$ hay $S = \pi d^2$ (R là bán kính; d là đường kính).
- Thể tích hình cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

BÀI TẬP

Bài 1. Một chậu nuôi cá có dạng hình cầu như hình vẽ, An muốn thay nước cho chậu cá thì lượng nước An phải đổ vào là bao nhiêu lít. Biết lượng nước đổ vào phải bằng $\frac{2}{3}$ thể tích của chậu nuôi cá và công thức tính thể tích của mặt cầu là $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Đáp số: $3716,9cm^3$

Bài 2. Ngày 4-6-1783, anh em nhà Mông-gôn-fi-ê (người Pháp) phát minh ra khinh khí cầu dùng không khí nóng. Coi khinh khí cầu này là hình cầu có đường kính $11m$ $11m$. Hãy tính diện tích vải dùng để làm khinh khí cầu đó?

Đáp số: $380,1\ m^2$

Bài 3. Một quả cầu địa lý có thể tích $60dm^2$. Tính bán kính quả cầu.

Đáp số: $r = 2,4\ dm$

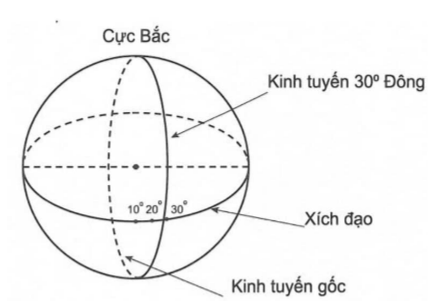
Bài 4. Một hồ cá cảnh bằng thủy tinh có dạn một hình cầu có đường kính $34cm$. Mặt nước chứa trong hồ cá có bán kính $15cm$.

a) Tính diện tích mặt nước của hồ cá.

b) Tính chiều cao nước có trong hồ cá.

Đáp số: $706,9\ cm^2$, $h = 25\ cm$.

Bài 5. Cho quả địa cầu có độ dài đường kính tuyến 30° Đông là $40\pi\ cm$ (tham khảo hình vẽ). Độ dài đường xích đạo là



Đáp số: 80π

Bài 6. Quả bóng đá được dùng thi đấu tại các giải bóng đá Việt Nam tổ chức có chu vi của thiết diện qua tâm là $68,5cm$. Quả bóng được ghép nối bởi các miếng da hình lục giác đều màu trắng và đen, mỗi miếng có diện tích là $49,83cm^2$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu miếng da để làm quả bóng trên?

Đáp số: ≈ 30 *miếng.*

Bài 7. Cần ít nhất bao nhiêu nước để đổ đầy bình nuôi cá cảnh như hình vẽ, biết bình nuôi cá cảnh có dạng một phần của hình cầu và có thể tích bằng $\frac{5}{6}$ thể tích của một hình cầu có bán kính $18cm$.

Đáp số: $6480\pi\ cm^3$

Bài tập 8. Có 240 quả tạ bằng thép có hình dạng cầu, bán kính $1dm$. Có thể đạt được hay không 240 quả tạ này vào một hình lập phương cạnh $1m$.

Đáp số: *Không thể đựng.*

Bài tập 9. Một viên bi sắt có dạng hình cầu, bán kính $1.5cm$. Tính thể tích của viên bi.

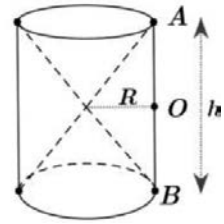
Đáp số: $\frac{9}{2}\pi\ cm^2$

Bài tập 10. Một quả địa cầu có dạng hình cầu, bán kính $30cm$. Tính diện tích mặt của quả địa cầu.

Đáp số: $3600\pi\ cm^2$

TOÁN THỰC TẾ KẾT HỢP NHIỀU HÌNH

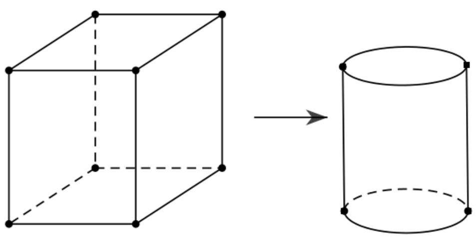
Bài 1. Với chiếc đồng hồ cát cho ta hai hình nón đối đỉnh nhau với các số đo như hình vẽ. Em hãy so sánh tổng các thể tích của hai hình nón và thể tích của hình trụ. (Biết công thức hình nón $V_n = \frac{1}{3}S_d.h_n$ và thể tích hình trụ là $V_{tr} = S_d.h_{tr}$.)



Đáp số: $V_{tr} = 3V_n$

Bài 2. Một thùng chứa nước hình hộp chữ nhật với đáy có kích thước $3m \times 2,4m$, chiều cao thùng nước là $2m$ chưa đầy nước. Người ta bơm hết lượng nước từ bồn đã cho sang một bồn nước hình trụ có bán kính đường tròn đáy là $2m$. Hỏi thùng hình trụ có độ cao mực nước là bao nhiêu.

Đáp số: $\approx 1,15m$.

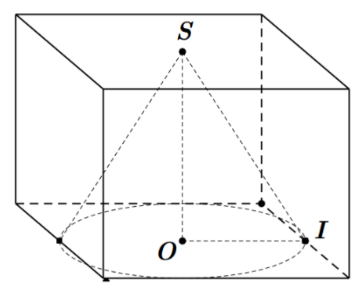


Bài 3. Một hình nón được đặt vào trong một hình lập phương có cạnh bằng 1 như hình. Tính

a) Bán kính đáy của hình nón.

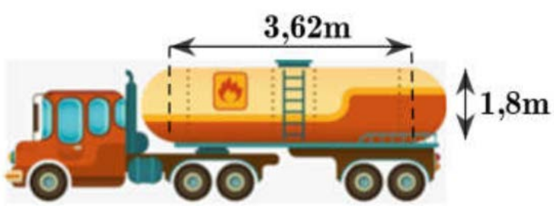
b) Độ dài đường sinh của hình nón.

c) Biết công thức tính thể tích hình nón là $V_n = \frac{1}{3}S_d.h_n$ (với S_d là diện tích đáy hình nón, h_d là chiều cao của hình nón). Hãy tính thể tích phần còn lại của khối lập phương.



Đáp số: $r = 0,5; l = 1,11; V \approx 0,7$.

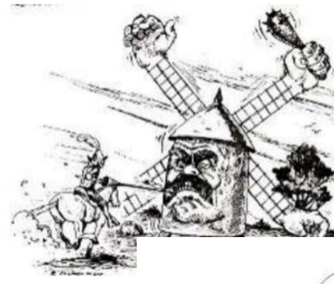
Bài 4. Một thùng chứa xăng gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ như hình vẽ. Hãy tính thể tích của thùng chứa theo các kích thước như hình vẽ.



Đáp số: $\approx 12,27m^3$.

Bài 5. Cối xay gió của Đôn – ki – hô – tê có dạng một hình nón. Chiều cao của hình nón là 42cm và thể tích của nó là $17600cm^3$. Em hãy giúp chàng Đôn – ki – hô – tê tính:

a) Bán kính của hình nón.
b) Diện tích gạch cần để xây ngôi nhà hình trụ bên dưới, biết nhà có chiều cao $250cm$.



Đáp số: $r = 20cm; S = 10000cm^3$

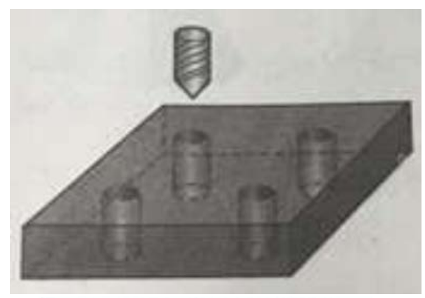
Bài 6. Một người dùng một cái gáo hình bán cầu có bán kính đáy là $3cm$, để múc nước đổ vào trong một thùng hình trụ có chiều cao $3cm$, bán kính đáy bằng $12cm$. Hỏi người ấy sau bao nhiêu lần đổ thì nước đầy thùng?

Đáp số: 24

Bài 7. Một bình chứa nước hình hộp chữ nhật có diện tích đáy là $20dm^2$ và chiều cao $3dm$. Người ta rót hết nước trong bình ra những chai nhỏ có thể tích là $0,35dm^3$ được tất cả 200 chai. Hỏi lượng nước có trong bình chiếm bao nhiêu phần trăm thể tích bình?

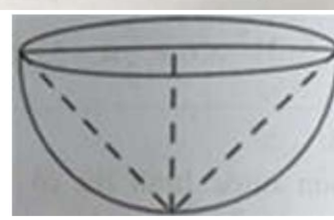
Đáp số: $\approx 86\%$

Bài 8. Một tấm kim loại được khoan thủng bốn lỗ như hình vẽ (lỗ khoan dạng hình trụ), tấm kim loại dày $2cm$, đáy của nó là hình vuông có cạnh là $5cm$. Đường kính của mũi khoan là $8mm$. Hỏi thể tích phần còn lại của tấm kim loại là bao nhiêu?



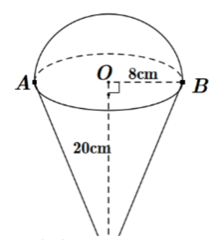
Đáp số: $\approx 46cm^2$

Bài 9. Một chiếc bát gỗ có cấu trúc một hình bán cầu đặc có bán kính $9cm$ và chiều cao hình nón bằng $9cm$.
a) Tính diện tích xung quanh của bát gỗ.
b) Tính thể tích gỗ để tiện một chiếc bát gỗ.



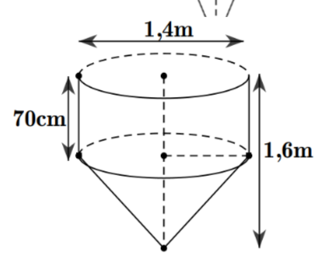
Đáp số: $a) \approx 509cm^2; b) \approx 1,5cm^3$

Bài 10. Người ta gắn một hình nón có bán kính đáy $R = 8cm$, độ dài đường cao $h = 20cm$ vào một nửa hình cầu có bán kính bằng bán kính hình nón (theo hình bên dưới). Tính giá trị gần đúng thể tích của hình tạo thành.



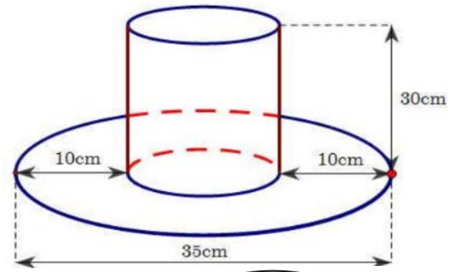
Đáp số: $\approx 1769cm^3$

Bài 11. Một dụng cụ có dạng hình trụ, phần còn lại có dạng hình nón. Các kích thước có trên hình vẽ, em hãy tính:
a) Thể tích của dụng cụ này.
b) Tính số đo đường sinh của hình nón.
c) Diện tích mặt ngoài dụng cụ này (không tính nắp đậy).



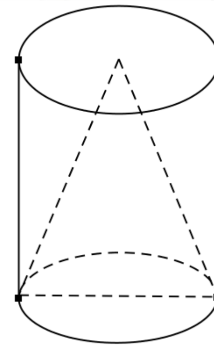
Đáp số: $a) \approx 1,5m^3; b) \approx 1,14m; c) \approx 5,6m^2$

Bài 12. Một cái mỹ bằng vãi của nhà ảo thuật với kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần để làm cái mũ đó biết rằng vành mũ hình tròn và ống mũ hình trụ.



Đáp số: $\approx 2200cm^2$

Bài 13. Một khối gỗ hình trụ cao $40cm$, người ta tiện thành một hình nón có cùng chiều cao và bán kính đáy với khối gỗ hình trụ ban đầu. Biết phần gỗ bị bỏ đi có thể tích là $820cm^3$.



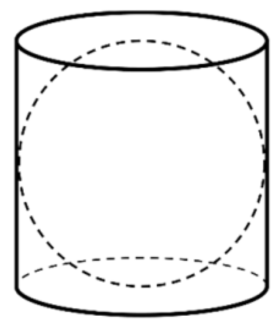
a) Tính thể tích khối gỗ hình trụ.

b) Tính diện tích xung quanh của khối gỗ hình nón. Biết: $V_{tr} = S_d.h_{tr}$. $V_n = \frac{1}{3}S_d.h_n$.

Diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq} = \pi rl$. với r là bán kính đáy của hình nón; l là độ dài đường sinh.

Đáp số: $a)1230cm^3; b) \approx 2774cm^2$

Bài 14. Một quả bóng hình cầu có đường kính $10cm$ được đặt vừa khít vào một chiếc hộp giấy cứng hình trụ. Hãy tính diện tích bề mặt (không nắp) của chiếc hộp giấy cứng. Biết rằng hình trụ có bán kính đường tròn đáy là r và chiều cao là h thì công thức tính diện tích xung quanh của nó là $S_{xq} = 2\pi rh$.



Đáp số: $\approx 628cm^2$

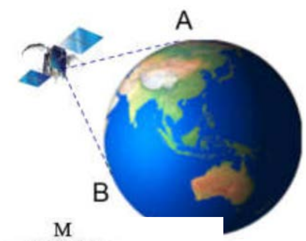
ĐỘ DÀI CUNG – DIỆN TÍCH QUẠT

Lí thuyết

Độ dài cung AB: $l_{AB} = \dfrac{\pi\alpha^o}{180^o}$

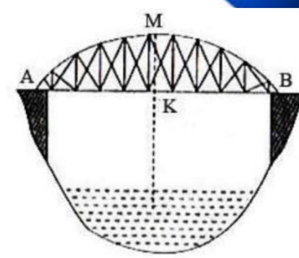
Diện tích quạt: $S_{quat} = \dfrac{\pi R^2.\alpha^o}{360^o}$

Bài 1. Vệ tinh viễn thông Vinasat-1 của Việt Nam cách mặt đất khoảng 35768km (hình 2). Tính đường kính vùng phủ sóng tối đa trên mặt đất (xem như cung AB) biết bán kính Trái đất khoảng 6400km.



Đáp số: $18.155km$

Bài 2. Một chiếc cầu được thiết kế như hình vẽ bên có độ dài $AB = 40$m, chiều cao $MK = 3$m. Hãy tính chiều dài của cung AMB.

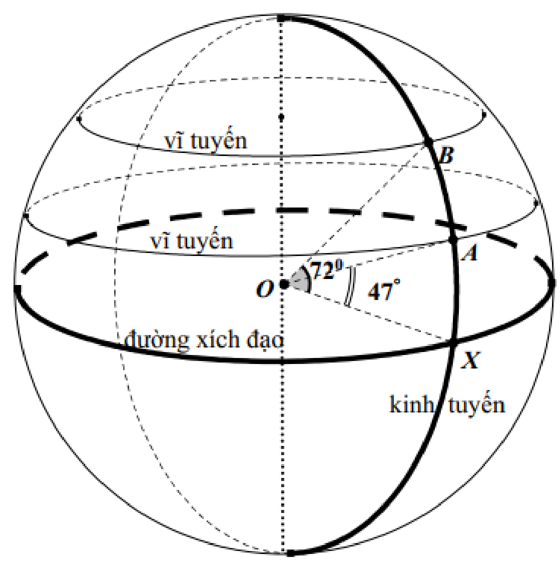


Đáp số: $40,6m$.

Bài 3. Cuối năm học, các bạn lớp 9A chia làm hai nhóm, mỗi nhóm chọn một khu vườn sinh thái ở Bắc bán cầu để tham quan. Khi mở hệ thống định vị GPS, họ phát hiện một sự trùng hợp khá thú vị là hai vị trí mà hai nhóm chọn đều nằm trên cùng một kinh tuyến và lần lượt ở các vĩ tuyến 47^o và 72^o .

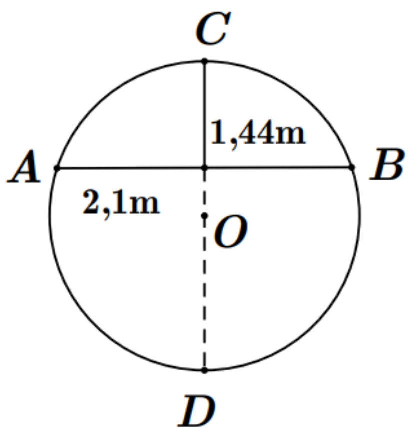
a) Tính khoảng cách (làm tròn đến hàng trăm) giữa hai vị trí đó, biết rằng kinh tuyến là một cung tròn nối liền hai cực của trái đất và có độ dài khoảng $20\ 000km$.

b) Tính (làm tròn đến hàng trăm) độ dài bán kính và đường xích đạo của trái đất. Từ kết quả của bán kính (đã làm tròn), hãy tính thể tích của trái đất, biết rằng trái đất có dạng hình cầu và thể tích của hình cầu được tính theo công thức $V = \dfrac{4}{3}.3,14.R^3$ với R là bán kính hình cầu.



Đáp số: *a)* $2800\ (km)$ *đồng*, $1097\ 509\ 547\ 000\ (km^3)$.

Bài 4. Trong công viên Golden Gate Park, thành phố San Francisco của nước Mỹ có 1 khu vườn được xây dựng theo lối kiến trúc Nhật Bản. Bao gồm những lối đi, ao cá, vườn trà gợi lên nét đẹp châu Á giữa lòng thành phố hiện đại. Tiêu biểu cho lối kiến trúc đó là cầu Taiko Bashi. Cầu Taiko Bashi là 1 cung tròn với dây cung là 4,2m, điểm cao nhất của cầu là 1,44 m so với chân cầu. Em hãy tính bán kính của đường tròn.



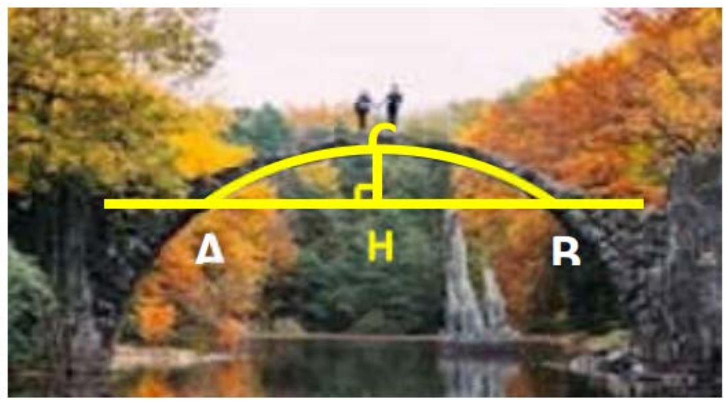
Đáp số: $\approx 4.2m$.

Bài 5. Cầu Rakotzbrücke được dựng lên bằng đá (hình bên), mà người Đức xem như một tác phẩm nghệ thuật. Biết *C* là điểm chính giữa của cung *AB*, $CH \perp AB$ tại *H*, $CH = 3m, AB = 16m$.

a) Tính số đo độ của cung *CB* và cung *ACB*.

b) Tính độ dài đường kính của đường tròn chứa cung *ACB*.

c) Tính độ dài cung *ACB*



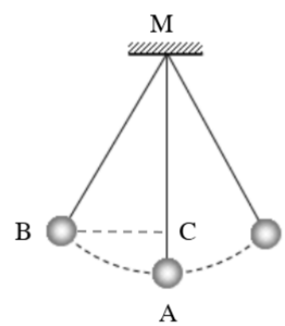
Đáp số:

$a) Sd\overset{\frown}{CB} \approx 41,112^o, Sd\overset{\frown}{ACB} \approx 82,224^o$

$b) \dfrac{73}{6} m$

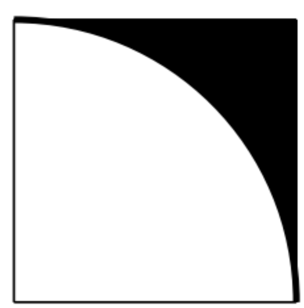
$c) l_{\overset{\frown}{ACB}} \approx 17,46m$

Bài 6. Một con lắc được cột cố định một đầu dây vào điểm *M* trên đầu gỗ. Con lắc chuyển động từ vị trí *A* tới vị trí *B* và hình chiếu của *B* trên *MA* là *C*. Cho biết độ dài dây treo con lắc $MA = 1m$ và $AC = 10cm$. Tính khoảng cách BC.



Đáp số: $BC \approx 0,44m$

Bài 7. Với một tấm ván hình vuông cạnh 1m, một người thợ mộc vẽ $\dfrac{1}{4}$ đường tròn có bán kính là cạnh hình vuông (xem hình), rồi cắt bỏ phần ván nằm ngoài $\dfrac{1}{4}$ hình tròn (phần bôi đen trên hình vẽ). Tính diện tích phần ván cắt bỏ đó.

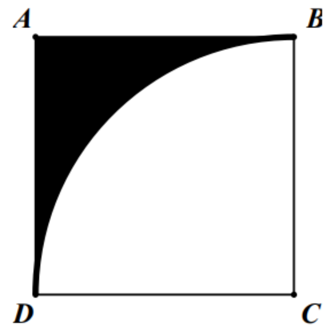


Đáp số: $S \approx 0,79m^2$

Bài 8. Bạn Hoa muốn làm cây quạt giấy mà khi mở rộng hết cỡ thì số đo góc chỗ tay cầm là 120^o chiều dài mỗi cây nan tre tính từ chỗ gắn đinh nẹp (để cố định các nan tre lại) đến rìa ngoài quạt là $25cm$, khoảng cách từ rìa giấy bên trong đến đinh nẹp là $4cm$ (chỗ cầm tay, không bọc giấy. Tính diện tích phần giấy để làm quạt (dán cả 2 mặt).

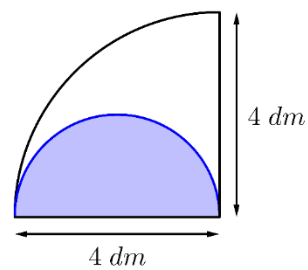
Đáp số: $S \approx 1275,9cm^2$

Bài 9. Một miếng gạch hình vuông có các đỉnh là A, B, C, D; độ dài cạnh là 20cm (xem hình vẽ). Cung BD là một cung tròn của đường tròn tâm C, bán kính là CD. Em hãy tính diện tích hình được giới hạn bởi AB, AD và cung BD.



Đáp số: $\approx 0,0086\left(m^2\right)$.

Bài 10. Một viên gạch trang trí nội thất có họa tiết như hình vẽ với hai màu tô đen và không tô đen. Em hãy tính diện tích phần không tô đen với các kích thước trên hình vẽ và lấy $\pi \approx 3,14$.



Đáp số: $6,28\ \ dm^2$.

CHUYÊN ĐỀ:
THỰC TẾ - LOGIC –DIRICHLE

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Nguyên tắc này mang tên nhà toán học người Đức Peter Gustav Dirichlet còn gọi là "nguyên tắc lòng chim câu" được phát biểu hết sức đơn giản như sau:

Nếu nhốt $n+1$ con thỏ vào n cái lồng $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ thì thế nào cũng có một lồng chứa ít nhất hai con thỏ

Nếu nhốt n con thỏ vào k cái lồng (với $n, k \in \mathbb{N}^*$, n lớn hơn và không chia hết cho k) thì thế nào cũng có một cái lồng chứa ít nhất $\left[\frac{n}{k}\right]+1$ con thỏ.

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

ĐỀ BÀI TỪ BÀI 1 ĐẾN BÀI 50

Bài 1. Để phục vụ cho lễ khai mạc World Cup 2018, ban tổ chức giải đấu chuẩn bị 25000 quả bóng, các quả bóng được đánh số từ 1 đến 25000. Người ta dùng 7 màu: Đỏ, Da cam, Vàng, Lục, Lam, Chàm, Tím để sơn các quả bóng (mỗi quả được sơn 1 màu). Chứng minh rằng trong 25000 quả bóng nói trên tồn tại 3 quả bóng cùng màu được đánh số là a, b, c mà a chia hết cho b, b chia hết cho c và $abc > 17$

Bài 2. Một tứ giác lồi có độ dài bốn cạnh đều là số tự nhiên sao cho tổng ba số bất kì trong chúng chia hết cho số còn lại. Chứng minh rằng tứ giác đó có ít nhất hai cạnh bằng nhau.

Bài 3.

Tập hợp $A=\{1;2;3;...;3n-1;3n\}$ (n là số nguyên dương) được gọi là tập hợp ***cân đối*** nếu có thể chia A thành n tập hợp con $A_1, A_2, ..., A_n$ và thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) Mỗi tập hợp A_i $(i=1,2,...,n)$ gồm ba số phân biệt và có một số bằng tổng của hai số còn lại.

ii) Các tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$ đôi một không có phần tử chung.

a) Chứng minh rằng tập $A=\{1;2;3;...;92;93\}$ không là tập hợp ***cân đối***.

b) Chứng minh rằng tập $A=\{1;2;3;...;830;831\}$ là tập hợp ***cân đối***.

Bài 4.

Trên mặt phẳng cho 2013 điểm tùy ý sao cho khi 3 điểm bất kỳ thì tồn tại 2 điểm mà khoảng cách giữa 2 điểm đó luôn bé hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn có bán kính bằng 1 chứa ít nhất 1007 điểm(kể cả biên).

Bài 5. Chứng minh rằng: Nếu ba điểm A, B, C không có điểm nào nằm bên ngoài đường tròn (O) sao cho ΔABC có ba góc nhọn thì chu vi của đường tròn ngoại tiếp ΔABC không lớn hơn chu vi (O)

Bài 6. Cho tập hợp A gồm 21 phần tử là các số nguyên khác nhau thỏa mãn tổng của 11 phần tử bất kỳ lớn hơn tổng của 10 phần tử còn lại. Biết các số 101 và 102 thuộc tập hợp A. Tìm tất cả các phần tử của tập hợp A.

Bài 7. Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu Đỏ, Xanh, Vàng. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm A, B được tô bởi cùng một màu mà $AB = 1$.

Bài 8. Cho bảng vuông 13x13. Người ta tô màu đỏ ở S ô vuông của bảng sao cho không có 4 ô đỏ nào nằm ở 4 góc của một hình chữ nhật. Hỏi giá trị lớn nhất của S có thể là bao nhiêu?

Bài 9. Tất cả các điểm trên mặt phẳng đều được tô màu, mỗi điểm được tô bởi một trong 3 màu xanh, đỏ, tím. Chứng minh rằng khi đó luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân, có 3 đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó cùng màu hoặc đôi một khác màu.

Bài 10. Tính số các ô nhỏ nhất phải quét sơn trên một bảng 5×5 để cho bất kỳ ô vuông 3×3 nào đó trên bảng này cũng chứa ít nhất 4 ô đó quét sơn.

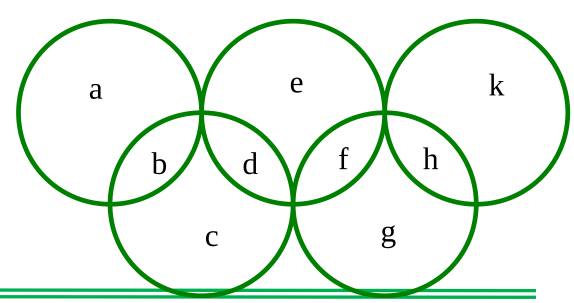
Bài 11. Cho sáu đường tròn có bán kính bằng nhau và có điểm chung. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một trong những đường tròn này chứa tâm đường tròn khác.

Bài 12. Cho 17 số tự nhiên mà các chữ số của mỗi số được lấy từ tập hợp $\{0;1;2;3;4\}$. Chứng minh rằng ta có thể chọn được 5 số trong 17 số đã cho sao cho tổng của 5 số này chia hết cho 5.

Bài 13. Cho 100 điểm trên mặt phẳng sao cho trong bất kỳ 4 điểm nào cũng có ít nhất 3 điểm thẳng hàng. Chứng minh rằng ta có thể bỏ đi một điểm trong 100 điểm đó để 99 điểm còn lại cùng thuộc 1 đường thẳng.

Bài 14.

Trên biểu tượng Olympic có 9 miền được ký hiệu $a, b, \dots, k$ (*như hình minh họa*). Người ta điền 9 số $1, 2, \dots, 9$ vào 9 miền trên sao cho mỗi miền được điền bởi một số, miền khác nhau được điền bởi số



khác nhau và tổng các số trong cùng một hình tròn đều bằng 14.

a. Tính tổng các số trong các miền *b, d, f* và *h.*

b. Xác định cách điền thỏa mãn yêu cầu trên.

Bài 15.

Cho 100 điểm trên mặt phẳng sao cho trong bất kỳ bốn điểm nào cũng có ít nhất ba điểm thẳng hàng. Chứng minh rằng ta có thể bỏ đi một điểm trong 100 điểm đó để 99 điểm còn lại cùng thuộc một đường thẳng.

Bài 16. Trên bảng ban đầu ghi số 2 và số 4. Ta thực hiện cách viết thêm các số lên bảng như sau: nếu trên bảng đã có hai số, giả sử là $a,b;\ a\neq b$, ta viết thêm lên bảng số có giá trị là $a+b+ab$. Hỏi với cách thực hiện như vậy, trên bảng có thể xuất hiện số 2016 được hay không? Giải thích.

Bài 17. Cho $a_1<a_2<......<a_n$, n là số tự nhiên không âm, a là các số nguyên dương và không có 2 số nào liên tiếp. Đặt $S=a_1+a_2+......+a_n$. Chứng minh rằng luôn tồn tại một số chính phương b thỏa mãn $S_n\le b\le S_{n+1}$

Bài 18. Từ 625 số tự nhiên liên tiếp $1,2,3,...,625$ chọn ra 311 số sao cho không có hai số nào có tổng bằng 625. Chứng minh rằng trong 311 số được chọn, bao giờ cũng có ít nhất một số chính phương.

Bài 19. Cho dãy số n, n+1, n+2, …, 2n với n nguyên dương. Chứng minh trong dãy có ít nhất một lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên.

Bài 20. Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A,độ dài cạnh huyền bằng 2015. Trong tam giác ABC lấy 2031121 điểm phân biệt bất kỳ. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm có khoảng cách không lớn hơn 1.

Bài 21.Chứng minh rằng trong 2^{n+1} - 1 số nguyên bất kỳ đều tồn tại 2n số có tổng là một số chẵn.

Bài 22. Trên một đường tròn, lấy 1000 điểm phân biệt, các điểm được tô màu xanh và màu đỏ xen kẽ nhau. Mỗi điểm được gán với một giá trị là một số thực khác không, giá trị của mỗi điểm màu xanh bằng tổng giá trị của hai điểm màu đỏ kề với nó, giá trị của mỗi điểm màu đỏ bằng tích giá trị của hai điểm màu xanh kề với nó. Tính tổng giá trị của 1000 điểm trên

Bài 23. Trong hình vuông cạnh bằng 1 có 2019 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính bằng $\frac{1}{91}$ nằm trong hình vuông đó mà không chứa điểm nào trong 2019 điểm đã cho.

Bài 24. Tập hợp $A=\{1;2;3;...;3n-1;3n\}$ (n là số nguyên dương) được gọi là tập hợp ***cân đối*** nếu có thể chia A thành n tập hợp con $A_1, A_2,..., A_n$ và thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) Mỗi tập hợp A_i $(i=1,2,...,n)$ gồm ba số phân biệt và có một số bằng tổng của hai số còn lại.

ii) Các tập hợp $A_1, A_2,..., A_n$ đôi một không có phần tử chung.

a) Chứng minh rằng tập $A=\{1;2;3;...;92;93\}$ không là tập hợp ***cân đối***.

b) Chứng minh rằng tập $A=\{1;2;3;...;830;831\}$ là tập hợp ***cân đối***.

Bài 25.

Trong một hộp có 2010 viên sỏi. Có hai người tham gia trò chơi, mỗi người lần lượt phải bốc ít nhất là 11 viên sỏi và nhiều nhất là 20 viên sỏi. Người nào bốc viên sỏi cuối cùng sẽ thua cuộc. Hãy tìm thuật chơi để đảm bảo người bốc đầu tiên luôn là người thắng cuộc.

Bài 26. Cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_{100}$. Tại mỗi đỉnh A_k ($k=1,2,...,100$), người ta ghi một số thực a_k sao cho giá trị tuyệt đối của hiệu hai số trên hai đỉnh kề nhau chỉ bằng 2 hoặc 3. Tìm giá trị lớn nhất có thể được của giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số ghi trên mỗi cặp đỉnh của đa giác đã cho, biết rằng các số ghi tại các đỉnh đã cho đôi một khác nhau.

Bài 27.

Cho hình vuông *ABCD* và *2018* đường thẳng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

1) Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông.

2) Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai phần có tỉ lệ diện tích bằng $\frac{1}{3}$.

Chứng minh rằng trong *2018* đường thẳng đó có ít nhất *505* đường thẳng đồng quy.

Bài 28. Cho 2014 số nguyên dương không lớn hơn 2014 và có tổng bằng 4028. Chứng minh rằng từ 2014 số đó luôn chọn được các số mà tổng của chúng bằng 2014

Bài 29. Cho đường tròn bán kính 1 và ba điểm A,B,C tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại điểm M nằm trên đường tròn sao cho $MA+MB+MC\geq 3$.

Bài 30. Trong một giải đấu thể thao có n độ tham dự $n\geq 2$, luật đấu như sau: Hai đội bất kỳ luôn đấu với nhau đúng 1 trận. Sau một trận, đội thắng được 2 điểm, đội thua 0 điểm và hòa nhau cả hai đội được 1 điểm. Sau giải đấu các đội xếp hạng théo thứ tự từ cao xuống thấp (bằng điểm xếp cùng hạng). Hỏi điểm chênh lệch lớn nhất có thể giữa các đội xếp thứ hạng liền nhau là bao nhiêu ?

Bài 31. Một giải đấu bóng chuyền có n đội tham gia ($n\in\mathbb{N},n\geq 2$), luật đấu như sau: Mỗi đội đấu với tất cả các đội khác đúng một trận. Sau một trận đấu, đội thắng được 2 điểm, đội thua được 0 điểm; còn nếu hai đội hòa nhau thì mỗi đội được 1 điểm.

Sau giải đấu các đội xếp hạng theo điểm số từ cao xuống thấp (hai đội bằng điểm nhau xếp cùng hạng). Hỏi sự chênh lệch về điểm lớn nhất có thể giữa các đội xếp thứ hạng liền nhau là bao nhiêu?

Bài 32. Có bao nhiêu tập hợp con A của tập hợp $S=\{1,2,3...2018\}$ thỏa mãn điều kiện A có ít nhất hai phần tử và nếu $x\in A,y\in A,x>y$ thì $\dfrac{y^2}{x-y}\in A$.

Bài 33. Trên một bảng ô vuông, ở mỗi ô người ta điền toàn bộ dấu $+$. Sau đó, thực hiện quá trình đổi dấu (dấu + sang dấu $-$, dấu $-$sang dấu +) lần lượt theo các bước sau:

Bước 1: Các ô ở dòng thứ i đều được đổi dấu i lần, $i=1,2,......,2019$

Bước 2: Các ô ở cột thứ j đều được đổi dấu $3j+1$lần, $j=1,2,.....,2019$

Tính số dấu còn lại trên bảng ô vuông sau khi thực hiện quá trình đổi dấu trên.

Bài 34.

Cho tập hợp *A* gồm 41 phần tử là các số nghuên khác nhau thỏa mãn tổng của 21 phần tử bất kỳ lớn hơn tổng của 20 phần tử còn lại. Biết các số 401 và 402 thuộc tập *A*. Tìm tất cả các phần tử của tập hợp *A*.

Bài 35.

Cho M là tập tất cả 4039 số nguyên liên tiếp từ -2019 đến 2019.Chứng minh rằng trong 2021 số đôi một phân biệt được chọn bất kỳ từ M luôn tồn tại ba số phân biệt có tổng bằng 0.

Bài 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm $M\left(a;b\right)$ được gọi là điểm nguyên nếu cả a và b là số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại điểm I trong mặt phẳng tọa độ và 2019 số thực dương

$R_1; R_2; ....; R_{2019}$ sao cho có đúng k điểm nguyên nằm trong đường tròn $\left(I; R_k\right)$ với mọi k là số nguyên dương không vượt quá 2019

Bài 37. Huyện KS có 33 công ty, huyện KV có 100 công ty. Biết rằng, mỗi công ty của huyện KS hợp tác với ít nhất 97 công ty huyện KV. Chứng minh rằng có ít nhất một công ty của huyện KV hợp tác với tất cả các công ty của huyện KS.

Bài 38.

Hai phụ nữ An, Chi và hai người đàn ông Bình, Danh là các vận động viên. Một người là vận động viên bơi lội, người thứ hai là vận động viên trượt băng, người thứ ba là vận động viên thể dục dụng cụ và người thứ tư là vận động viên cầu lông. Có một ngày nọ, họ ngồi xung quanh một cái bàn vuông (mỗi người ngồi cạnh một người). Biết rằng

(i) Chi và Danh ngồi cạnh nhau

(ii) Vận động viên thể dục dụng cụ ngồi đôi diện Bình

(iii) Vận động viên bơi lội ngồi bên trái An

(iv) Một người phụ nữ ngồi bên trái vận động viên trượt băng

Hãy cho biết mỗi người là vận động viên chơi môn gì ?

Bài 39.

Viết lên bảng 2019 số $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; ....; \frac{1}{2018}; \frac{1}{2019}$. Từ các số đã viết, xóa đi 2 số bất kỳ x, y rồi viết lên bảng số $\frac{xy}{x+y+1}$ (các số còn lại trên bảng giữ nguyên). Tiếp tục thực hiện thao tác trên cho đến khi bảng chỉ còn lại đúng một số. Hỏi số đó bằng bao nhiêu ?

Bài 40. Trong một buổi tổ chức lễ tuyên dương các học sinh có thành tích học tập xuất sắc của một huyện, ngoại trừ bạn An, hai người bất kỳ đều bắt tay nhau. An chỉ bắt tay với những người mình quen. Biết rằng một cặp (hai người) chỉ bắt tay không quá một lần và có tổng cộng 420 bắt tay. Hỏi bạn An có bao nhiêu người quen trong buổi lễ tuyên dương đó

Bài 41.*Chứng minh rằng tồn tại một bội của số 1993 chỉ chứa toàn số 1.*

Bài 42.Chứng minh rằng : Với 17 số nguyên bất kỳ bao giờ cũng tồn tại 1 tổng có 5 số chia hết cho 5

Bài 43.Có hay không một số có dạng $19931993....1993000....00 \vdots 1994$

Bài 44. Một tứ giác lồi có độ dài bốn cạnh đều là số tự nhiên sao cho tổng ba số bất kì trong chúng chia hết cho số còn lại. Chứng minh rằng tứ giác đó có ít nhất hai cạnh bằng nhau.

Bài 45. Trên mặt phẳng cho 5 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào cùng thuộc một đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua ba điểm trong năm điểm đã cho và hai điểm còn lại có đúng một điểm nằm bên trong đường tròn.

Bài 46. Để tiết kiệm chi phí vận hành đồng thời du khách đi tham quan hết 18 danh lam, thắng cảnh trong tỉnh K, công ty du lịch lữ hành KH đã thiết lập các tuyến 1 chiều như sau: Nếu đi từ tỉnh A đến B và từ B đến C thì sẽ không có tuyến từ A đến C. Hỏi có bao nhiêu cách thiết lập để đi hết 18 địa danh trên ?

Bài 47.

Trung tâm thành phố Việt Trì có tát cả 2019 bóng đèn chiếu sáng đô thị, chia gồm 3 loại: Đèn ánh sáng trắng có 671 bóng, đèn ánh sáng vàng nhạt có 673 bóng, đèn ánh sáng đỏ có 675 bóng. Vào dịp giỗ tổ Hùng Vương, người ta thực hiện việc thay bóng đèn theo quy luật sau: Mỗi lần tháo bỏ 2 bóng đèn khác loại và thay vào đó bằng 2 bóng đèn thuộc loại còn lại. Hỏi đến một lúc nào đó có thể tất cả các bóng đèn của trung tâm thành phố đều là cùng một loại không.

Bài 48.

1. Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để $2018+n^2$ là số chính phương.
2. Mười đội bóng chuyền tham gia giải bóng chuyền VTV cup 2018. Cứ hai đội trong giải đấu đó thi đấu với nhau đúng một trận. Đội thứ nhất thắng x_1 trận và thua y_1 trận, đội thứ hai thắng x_2 trận và thua y_2 trận,…, đội thứ mười thắng x_{10} trận và thua y_{10} trận. Biết rằng trong một trận đấu bóng chuyền không có trận hòa. Chứng minh rằng: $x_1^2+x_2^2+...+x_{10}^2=y_1^2+y_2^2+...+y_{10}^2$.

Bài 49.

Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.

Bài 50.

Cho $t_1=1.2.3, t_2=2.3.4, t_3=3.4.5, ...t_n=n(n+1)(n+2)$. Chứng minh rằng $4T_n+1$là số chính phương với $T_n=t_1+t_2+t_3+.....+t_n$ (n là số tự nhiên khác 0)

<u>ĐÁP ÁN TỪ BÀI 01 ĐẾN BÀI 50</u>

Bài 1.

Xét tập $A=\{1;2;3;........;2500\}$ và tập $B=\{1;3;3.2;3.2^2;......;3.2^{13}\}$

Do $3.2^{13}=24576<250000\Rightarrow B\subset A$

Tập B có 15 phần tử. Do mỗi quả bóng được sơn một màu mà có 7 màu nên theo nguyên lý Dirichle trong tập B tồn tại 3 quả bóng cùng màu.

Giả sử 3 quả bóng được đánh số $a>b>c$ thì a chia hết cho b, b chia hết cho c và $abc\ge 18>17$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Bài 2.

Gọi độ dài các cạnh của tứ giác là a, b, c, d (a, b, c, d$\in\mathbb{N}^*$). Giả sử không có 2 cạnh nào của tứ giác bằng nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử a > b > c > d. (*)

Do tứ giác lồi nên a < b + c +d

$\Rightarrow$ a < b + c + d < 3a

$\Rightarrow$ 2a < a + b + c + d < 4a

Từ giả thiết của bài toán suy ra a + b + c + d chia hết cho các số a, b, c, d nên ta có : a + b + c + d = 3a (1)

Đặt a + b + c + d = mb với m$\in\mathbb{N}^*$ (2)

a + b + c + d = nc với n$\in\mathbb{N}^*$ (3)

Do a > b > c $\Rightarrow$ n > m > 3 $\Rightarrow$ n $\ge$ 5, m $\ge$ 4

Cộng (1), (2), (3) được

3(a + b + c + d) = 3a + mb + nc $\ge$ 3a +4b + 5c

$\Rightarrow$ (b – d) + 2(c – d) $\le$ 0 , mâu thuẫn (*)

$\Rightarrow$ Tứ giác có ít nhất 2 cạnh bằng nhau.

Bài 3.

Giả sử $A=\{1;2;3;...;93\}$ là tập hợp **cân đối** , khi đó mỗi tập A_i $\left(i=\overline{1,31}\right)$ có dạng $\{x_i;y_i;x_i+y_i\}$, như vậy tổng ba phần tử trong A_i là số chẵn. Do đó tổng các phần tử của tập A là số chẵn.

Mặt khác tổng các phần tử trong A bằng: $1+2+3+...+93=\dfrac{93.94}{2}=93.47$ (là số lẻ). Mâu thuẫn này chỉ ra A là tập không **cân đối**.

Nhận xét: Nếu tập $S_n=\{1;2;3;...;n\}$, với n chia hết cho 3 là tập hợp **cân đối** thì tập $S_{4n}=\{1;2;3;...;4n\}$ và $S_{4n+3}=\{1;2;3;...;4n+3\}$ cũng là tập hợp **cân đối**.

Chứng minh. Từ tập S_{4n} ta chọn ra các tập con ba phần tử sau:

$$\{1;2n+n;2n+n+1\};\{3;2n+n-1;2n+n+2\};\{5;2n+n-2;2n+n+3\};...;\{2n-1;2n+1;4n\}.$$

Rõ ràng các tập con này đều thỏa mãn có một phần tử bằng tổng hai phần tử còn lại.

Còn lại các số sau trong tập S_{4n} là $2,4,6,...,2n$. Tuy nhiên vì tập S_n **cân đối** nên tập $\{2;4;6;...;2n\}$ cũng **cân đối** . Vậy S_{4n} là tập **cân đối.**

Tương tự từ tập S_{4n+3} ta chọn ra các tập con ba phần tử sau:

$$\{1;2n+n+2;2n+n+3\};\ \{3;2n+n+1;2n+n+4\};\ldots;\ \{2n+1;2n+2;4n+3\}.$$

Và còn lại các số là $2,4,6,...,2n$, suy ra S_{4n+3} là tập **cân đối.**

Trở lại bài toán. Ta có

$$\begin{aligned}831&=4.207+3\\207&=4.51+3\\51&=4.12+3\\12&=4.3\end{aligned}$$

Chú ý là tập $\{1;2;3\}$ là **cân đối** nên theo nhận xét trên ta xây dựng được các tập hợp **cân đối** theo quy trình sau: $\{1;2;3\}\to\{1;2;...;12\}\to\{1;2;...;51\}\to\{1;2;...;207\}\to\{1;2;...;831\}$.

Do đó tập $A=\{1;2;3;...;831\}$ là tập hợp **cân đối** (đpcm).

Bài 4.

Gọi các điểm là : A_1; A_2; A_3; …; A_i; A_{i+1} ; A_{2012}; A_{2013}. Ta chia các cặp điểm như sau: (A_1; A_{2013});

(A_2; A_{2012}); …(A_i; A_{2013-i})…;(A_{1006}; A_{1008}) , và điểm A_{1007}.

Xét điểm A_{1007} với các cặp điểm đã cho, theo giả thiết trong mỗi cặp điểm tồn tại một điểm A_m sao cho đoạn thẳng $A_{1007}A_m$ có độ dài nhỏ hơn 1. Không mất tính tổng quát giả sử các điểm A_1; A_2; …; A_{1006} có khoảng cách đến điểm A_{1007} nhỏ hơn 1, suy ra các điểm A_1; A_2; …; A_{1006} nằm trong đường tròn tâm A_{1007} bán kính bằng 1.

Vậy tồn tại đường tròn có bán kính bằng 1 chứa 1007 điểm trong 2013 điểm đã cho. (đpcm).

Bài 5.

*Gọi đường tròn ngoại tiếp ΔABC là (I), I nằm trong ΔABC
Nếu A, B, C nằm trên (O) thì (I) và (O) trùng nhau.

*Nếu (O) đựng (I) hoặc (O) và(I) tiếp xúc trong với nhau thì đường kính của (I) nằm trong (O) suy ra chu vi của (I) nhỏ hơn chu vi của (O).

*Nếu (O) và (I) cắt nhau tại M, N. Vì ΔABC có ba góc nhọn nên số đo cung nhỏ MN< 180^0 . Suy ra cung lớn MN>180^0, ắt tồn tại đường kính của (I) nằm trong (O). Vậy chu vi của (I) nhỏ hơn chu vi của (O)

Bài 6.

Giả sử $A=\{a_1;a_2;a_{3;}...;a_{21}\}$ với $a_1;\ a_2;\ a_{3;}...;\ a_{21}\in\mathbb{Z}$ và

$a_1<a_2<a_3<...<a_{21}$.

Theo giả thiết ta có $a_1+a_2+a_3+...+a_{11}>a_{12}+a_{13}+...+a_{21}$

$\Leftrightarrow a_1>a_{12}-a_2+a_{13}-a_3+...+a_{21}-a_{11}$ (1)

Mặt khác với $x;y\in Z$ và nếu $y>x$ thì $y\ge x+1$

$\Rightarrow a_{12}-a_2\ge 10,\ a_{13}-a_3\ge 10,...,a_{21}-a_{11}\ge 10$ (2)

Nên từ (1) suy ra $a_1>10 + 10 + ... +10 = 100$

mà a_1 nhỏ nhất và $101\in A\Rightarrow a_1=101$

Ta có $101>a_{12}-a_2+a_{13}-a_3+...+a_{21}-a_{11}\ge 100$

$\Rightarrow a_{12}-a_2+a_{13}-a_3+...+a_{21}-a_{11}=100$.

Kết hợp với (2)

$\Rightarrow a_{12}-a_2=a_{13}-a_3=...=a_{21}-a_{11}=10$ (3)
$\Rightarrow 10=a_{12}-a_2=(a_{12}-a_{11})+(a_{11}-a_{10})+...+(a_3-a_2)\ge 10$

$\Rightarrow a_{12}-a_{11}=a_{11}-a_{10}=...=a_3-a_2=1 \qquad (4)$

Ta có $a_1=101$ mà $102\in A \Rightarrow a_2=102$

Kết hợp với (3) và (4) suy ra $A=\{101;102;103;...;121\}$.

Bài 7.

Giả sử không có 2 điểm nào trong mặt phẳng được tô cùng màu mà khoảng cách giữa chúng là 1 đơn vị độ dài.

Xét một điểm O bất kỳ có màu vàng trên mặt phẳng.

Vẽ đường tròn $\left(O,\sqrt{3}\right)$. Lấy một điểm P bất kỳ trên (O).

Dựng hình thoi $OAPB$ có cạnh bằng 1 và có đường chéo là OP.

Dễ thấy $OA=OB=AB=AC=BC=1$.

Theo giả thiết, A, B phải tô khác màu vàng và khác màu nhau.

Do đó P phải tô vàng. Từ đây suy ra tất cả các điểm trên (O) phải tô vàng. Điều này trái với giả thiết vì dễ thấy tồn tại hai điểm trên (O) có khoảng cách 1 đơn vị độ dài.

P/s: Số 1 có thể được thay bởi bất kỳ số thực dương nào.

Bài 8.

Gọi x_i là số ô được tô đỏ ở dòng thứ i.

Ta có: $S=x_1+x_2+\ldots+x_{13}$; ở hàng thứ i số các cặp ô đỏ là $C^2_{x_i}=\dfrac{x_i(x_i-1)}{2}$ Vậy tổng số các cặp ô đỏ là $A=\dfrac{x_1(x_1-1)}{2}+\dfrac{x_2(x_2-1)}{2}+...+\dfrac{x_{13}(x_{13}-1)}{2}$

Chiếu các cặp ô đỏ xuống một hàng ngang nào đó, theo giả thiết thì không có cặp ô đỏ nào có hình chiếu trùng nhau.

Vậy $C^2_{13}=78\geq A=\dfrac{x_1(x_1-1)}{2}+\dfrac{x_2(x_2-1)}{2}+...+\dfrac{x_{13}(x_{13}-1)}{2}$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{13}x_i^2-\sum_{i=1}^{13}x_i \leq 156$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có:

$$(\sum_{i=1}^{13} x_i)^2 \le 13(\sum_{i=1}^{13} x_i^2) \Rightarrow \frac{s^2}{13} - s \le 156$$

$\Leftrightarrow$ s^2-13s-2028$\le 0 \Leftrightarrow$ S$\le$52

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_{13} = 4$ (mỗi dòng có 4 ô được tô đỏ).

(Học sinh lập luận chỉ ra S$\le$52 được 0,25đ)

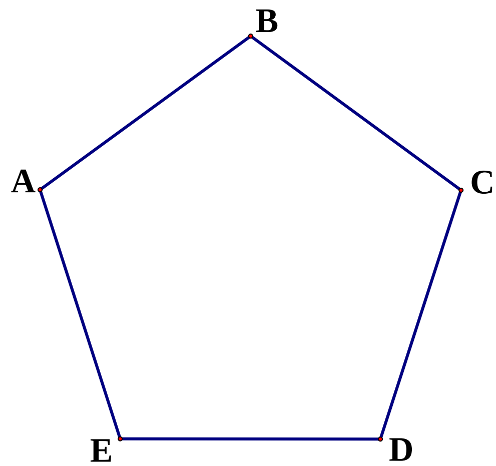
Vẽ hình minh họa:

x	x	x	x									
x				x	x	x						
	x			x			x	x				
		x		x					x	X		
			x	x							x	x
x							x		x		x	
	x				x				x			x
			x		x		x			X		
		x			x			x			x	
x								x		X		x
	x					x				X	x	
		x				x	x					x
			x			x		x	x			

Vậy giá trị lớn nhất của S = 52

Bài 9.

1,0 điểm



Xét ngũ giác đều *ABCDE*, ta nhận thấy ba đỉnh bất kì của ngũ giác luôn tạo thành một tam giác cân.

Do đó khi tô 5 đỉnh *A, B, C, D, E* bằng 3 màu xanh, đỏ và tím sẽ xảy ra hai khả năng sau:

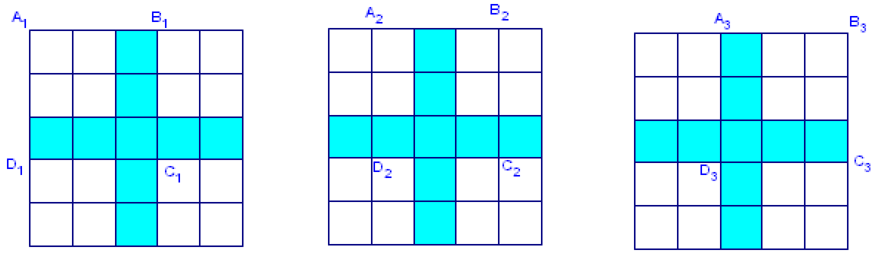
+) Nếu tô 5 đỉnh *A, B, C, D, E* bởi đủ ba loại màu đã cho thì tồn tại 3 đỉnh có màu khác nhau và tạo thành một tam giác cân.

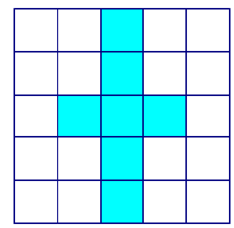
+) Nếu tô 5 đỉnh *A, B, C, D, E* bởi nhiều nhất 2 màu thì có ít nhất 3 đỉnh cùng màu và tạo thành một tam giác cân.

Vậy, trong mọi trường hợp luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân, có 3 đỉnh được tô bởi cùng một màu hoặc đôi một khác màu.

Bài 10.

+ Dọc theo chiều ngang sát sát cạnh trên của bảng 5×5 có 3 vùng 3×3 ở 3 vị trí $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2, A_3B_3C_3D_3$. Dịch chuyển xuống theo chiều dọc một ô, ta có thêm 3 vùng 3×3. Dịch chuyển xuống theo chiều dọc một ô nữa, ta có thêm 3 vùng 3×3. Do đó có 9 vùng con 3×3 của bảng 5×5, mỗi vùng con đều chứa 5 ô vuông con 1×1 thuộc hình chữ thập đã tô màu.



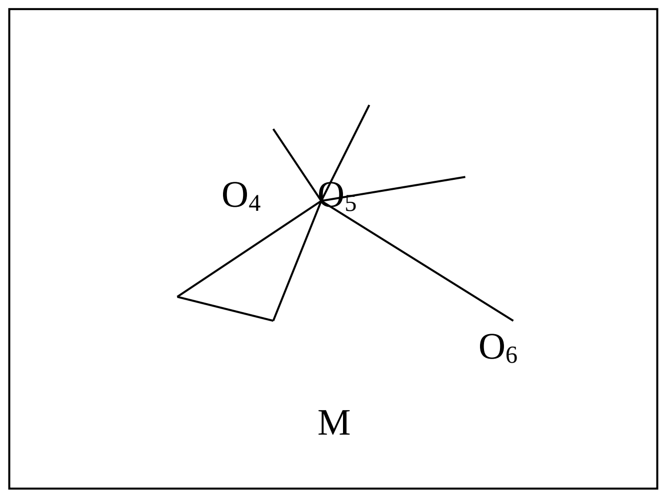


+ Nếu chỉ quét sơn như hình vẽ bên thì mỗi vùng con 3×3 đều chứa 4 hoặc 5 ô 1×1 được quét sơn.

Vậy: Để mỗi vùng con 3×3 của bảng 5×5 chứa ít nhất 4 ô 1×1 được quét sơn, thì chỉ cần quét số ô nhỏ nhất là 7 ô như hình vẽ bên.

Bài 11.

Giả sử có sáu đường tròn tâm O_i (i = 1->6) có bán kính r và M là điểm chung của các đường tròn này. Để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh ít nhất có hai tâm có khoảng cách không lớn hơn r.



Nối M với các tâm. Nếu hai trong những đoạn thẳng vừa nối nằm trên cùng một tia có điểm đầu là M thì bài toán được chứng minh.

Trong trường hợp ngược lại, xét góc nhỏ nhất trong các góc nhận đượcđỉnh M, giả sử đó là góc O_1MO_2. Do tổng các góc này là 360^0 nên góc $O_1MO_2 \le 60^0$. Khi đó trong tam giác O_1MO_2 có một góc không nhỏ hơn góc O_1MO_2(nếu ngược lại thì tổng các góc trong tam giác nhỏ hơn 180^0). Từ đó suy ra trong những cạnh MO_1 và MO_2 trong tam giác O_1MO_2 không nhỏ hơn O_1O_2 tức ta có $O_1O_2 \le r$ vì $MO_1 \le r$, $MO_2 \le r$

Bài 12.

Ký hiệu A, B, C, D, E lần lượt là tập hợp các số có chữ số tận cùng là $0;1;2;3;4$

Nếu mỗi tập trên đều khác rỗng thì ta chọn từ mỗi tập hợp một phần tử. Khi đó tổng của 5 số được chọn có tận cùng bằng 0 nên chia hết cho 5.

Nếu có một tập khác rỗng thì khi đó theo nguyên lý Dirichle trong 4 tập còn lại luôn có một tập có ít nhất 5 phần tử. Ta chọn 5 số từ tập này, khi đó tổng của 5 số được chọn cũng chia hết cho 5.

Vậy trong mọi trường hợp ta luôn chọn được 5 số có tổng chia hết cho 5.

Bài 13.

Xét tam giác ABC với A, B, C là 3 điểm trong 100 điểm đã cho

Lấy D là điểm thứ tư $\Rightarrow D \in$ AB, hoặc $D \in$ AC, hoặc $D \in$ BC

Không mất tính tổng quát ta giả sử $D \in$ BC

Lấy E là điểm thứ 5

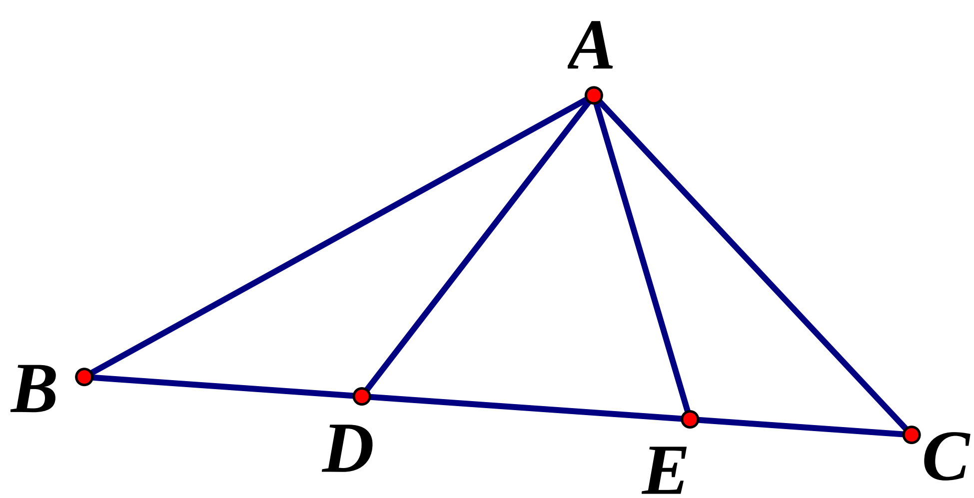
Nếu $E \in$ AB thì trong 4 điểm A, D, C, E không có 3 điểm nào thẳng hàng

Nếu $E \in$ AD thì trong 4 điểm A, B, C,E không có 3 điểm nào thẳng hàng

Nếu $E \in$ AC thì trong 4 điểm A, D, B, E không có 3 điểm nào thẳng hàng

Do đó $E \in$ BC

Tương tự ta chứng minh được 95 điểm còn lại đều thuộc BC. Cho nên nếu bỏ đi điểm A thì 99 điểm còn lại đều thuộc BC.



Bài 14.

a Gọi a’, b’,..., k’ lần lượt là các số trong các miền a, b, ..., k.

Mỗi hình tròn có tổng là 14 nên 5 hình tròn là 5.14 = 70.

Khi cộng như thế các số ở các miền b, d, f, h được cộng hai lần nên

b' + d' + f' + h' = 70 - (1 + 2 + … + 9) = 25.

b Theo giả thiết a' + b' = h' + k' = 14 nên ta chỉ có hai cặp thỏa (5;9) và (6;8)

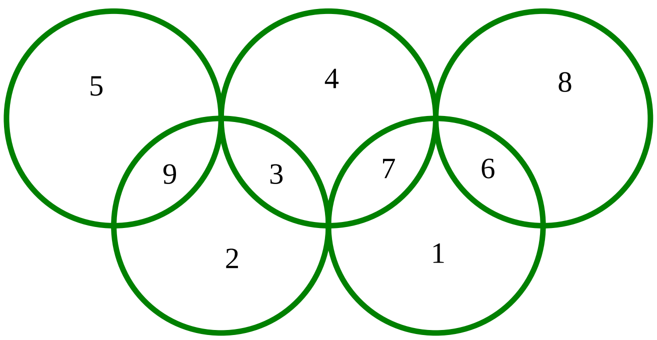
Do đó b' + h' chỉ có thể là 11, 13, 15, 17.

Dễ thấy ngay nếu b' + h' = 11 hoặc b' + h' = 13 (mà b' + d' + f' + h' =25) thì không thể thỏa mãn.

Nếu b' + h'=17 thì d' + f' = 8 khi đó (d';f') chỉ có thể là cặp (1;7) nhưng không thể có cặp (7;9) hoặc (7;8) trong cùng một hình tròn.

Suy ra b' + h' = 15

Không mất tính tổng quát, giả sử b' = 9, h' = 6 khi đó a' = 5, k' = 8, d' =3, f' = 7, c' = 2, e' = 4, g' = 1 (hoặc có thể đối xứng lại).



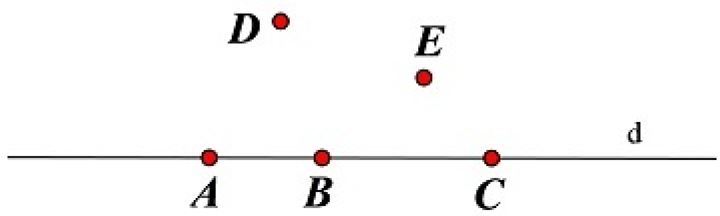
Bài 15.

b) (0,75 điểm).

Nếu tất cả 100 điểm cùng thuộc một đường thẳng thì bài toán hiển nhiên đúng.

Nếu không phải cả 100 điểm đều thẳng hàng. Ta chọn ra bốn điểm A, B, C, D mà không phải tất cả đều thẳng hàng. Theo giả thiết trong 4 điểm A, B, C, D phải có 3 điểm thẳng hàng, giả sử 3 điểm A, B, C thuộc đường thẳng d, còn điểm D nằm ngoài đường thẳng d. Ta sẽ chứng minh 96 điểm còn lại thuộc đường thẳng d bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử trong 96 điểm còn lại, tồn tại điểm E nằm ngoài đường thẳng d. Xét bốn điểm A, B, D, E phải có 3 điểm thẳng hàng. Do 3 điểm A, B, D không thẳng hàng, 3 điểm A, B, E không thẳng hàng nên 3 điểm A, D, E thẳng hàng hoặc 3 điểm B, D, E thẳng hàng.



Trường hợp 3 điểm A, D, E thẳng hàng thì 3 điểm B, D, E không thẳng hàng, 3 điểm C, D, E không thẳng hàng, do đó trong 4 điểm B, C, D, E không có 3 điểm nào thẳng hàng, trái với giả thiết.

Trong trường hợp B, D, E thẳng hàng thì tương tự, trong 4 điểm A, C, D, E không có 3 điểm nào thẳng hàng, trái với giả thiết.

Như vậy ngoài 3 điểm A, B, C thuộc đường thẳng d, phải có 96 điểm nữa cùng thuộc d. Bài toán được chứng minh.

Bài 16.

Đặt $k = ab + a + b = (a+1)(b+1) - 1.$

Nếu trong 2 số a, b tồn tại một số chia 3 dư 2 thì k chia 3 dư 2.

Ban đầu trên bảng gồm có số 2 và số 4 (một số chia 3 dư 1; một số chia 3 dư 2). Suy ra tại mọi thời điểm, trên bảng luôn chỉ có một số chia 3 dư 1 và các số còn lại chia 3 dư 2. Do đó với cách thực hiện như đề bài, trên bảng không thể xuất hiện số 2016 (Vì số 2016 chia hết cho 3).

Lưu ý: Học sinh có thể dùng bất biến theo modun 10 bằng cách nhận xét chữ số tận cùng của các số viết trên bảng; hoặc sử dụng cách liệt kê các số được viết trên bảng.

Bài 17.

Vì $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \Rightarrow S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

Ta có:

$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}\geq 1$

$\Leftrightarrow S_{n+1}\geq\left(\sqrt{S_n}+1\right)^2$

$\Leftrightarrow S_n+a_{n+1}\geq S_n+2\sqrt{S_n}+1$

$\Leftrightarrow a_{n+1}\geq 2\sqrt{S_n}+1$

Vì dãy số trên không có hai số nào liên tiếp nên

$a_{n+1}\geq a_n+2$

$a_n\geq a_{n-1}+2\Rightarrow a_{n+1}\geq a_{n-1}+2.2$

....

$a_2\geq a_1+2\Rightarrow a_{n+1}\geq a_1+n.2$

$\Rightarrow n.a_{n+1}\geq a_1+a_2+......+a_n+2\left(1+2+3+.....+n\right)$

$\Leftrightarrow na_{n+1}-n(n+1)\geq S_n$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{na_{n+1}-n(n+1)}+1\geq 2\sqrt{S_n}+1$

Ta sẽ chứng minh :

$a_{n+1}\geq 2\sqrt{na_{n+1}-n\left(n+1\right)+1}$

$\Leftrightarrow a_{n+1}^2-2a_{n+1}+1\geq 4na_{n-1}-4n\left(n+1\right)$

$\Leftrightarrow\left(a_{n+1}-2n-1\right)^2\geq 0(luondung)$

Do đó ta luôn có: $\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}\geq 1$ nên luôn tồn tại số k thỏa mãn $\sqrt{S_{n+1}}>k>\sqrt{S_n}$

Vậy $b=k^2$ là số chính phương cần tìm.

Bài 18. Ta phân chia 625 số tự nhiên đã cho thành 311 nhóm như sau:

+) nhóm thứ 1 gồm năm số chính phương $\{49;225;400;576;625\}$

+) và 310 nhóm còn lại mỗi nhóm gồm hai số có tổng bằng 625 (không chứa các số của nhóm 1).

Nếu trong 311 số được chọn không có số nào thuộc nhóm thứ 1, thì 311 số này thuộc các nhóm còn lại. Theo nguyên tắc Dirichle phải có ít nhất hai số thuộc cùng một nhóm. Hai số này có tổng bằng 625 (vô lí). Vậy chắc chắn trong 311 số được chọn phải có ít nhất một số thuộc nhóm thứ 1. Số này là số chính phương.

Bài 19.

-Nếu n là lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên bài toán chứng minh xong

-Nếu n không là lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên, ta luôn tìm được 1 số nguyên dương k sao cho $k^2 < n < (k+1)^2$. Vì n nguyên dương và $n > k^2 \Rightarrow n \geq k^2 + 1$, vậy ta có:

$$2n - (k+1)^2 \geq 2(k^2+1) - (k+1)^2 = ... = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 \geq 0$$

Vậy mọi k nguyên dương , nên ta có $k^2 < n < (k+1)^2 \leq 2n$

Vậy trong dãy luôn có ít nhất một lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên.

Bài 20.

Chia cạnh huyền BC thành 2015 đoạn thẳng bằng nhau. Từ các điểm chia đó vẽ các đường thẳng song song với hai cạnh AB và AC ta được 2015 tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng 1 và (2014 + 2013 + …+ 1) hình vuông có đường chéo bằng 1.

Do đó trong tam giác ABC có tất cả 2015 + (2014x2015)/2 = 2031120 hình (vừa hình vuông có đường chéo bằng 1 vừa tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng 1).

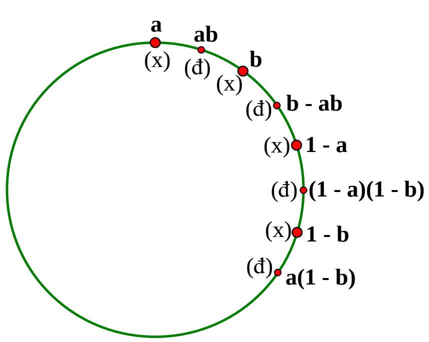
Như vây trong 2031121 điểm sẽ tồn tại ít nhất hai điểm nằm trong một hình nào đó.

Với hai điểm đó thì khoảng cách của nó không lớn hơn 1

Bài 21.

Vì có tất cả $2^{n+1} - 1 = 2(2^n - 1) + 1$ số nên có ít nhất $(2^n - 1) + 1 = 2^n$ số cùng chẵn hoặc cùng lẻ, suy ra 2n cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Bài 22.



Gọi a là giá trị của một điểm màu xanh $(a \neq 0)$, khi đó giá trị của điểm màu đỏ đứng cạnh nó theo chiều kim đồng hồ được viết dạng ab với $(b \neq 0)$

Theo quy luật điểm màu xanh và màu đỏ, ta suy ra giá trị của 6 điểm tiếp theo theo chiều kim đồng hồ thứ tự sẽ là:

$b, b - ab, 1 - a, (1-a)(1-b), (1-b), a(1-b)$

Khi đó tổng của 8 số trên là

$$a + ab + b + (b - ab) + (1-a) + (1-a)(1-b) + (1-b) + a(1-b) = 3.$$

Mặt khác theo quy luật đó, giá trị điểm thứ 9 theo chiều kim đồng hồ là a

Như vậy 1000 số trên được chia thành 125 nhóm, mỗi nhóm gồm 8 số theo quy luật trên.

Suy ra tổng giá trị 1000 điểm trên bằng $125.3 = 375$.

Bài 23.

Chia hình vuông đã cho thành 2025 hình vuông nhỏ có cạnh bằng nhau và bằng $\frac{1}{45}$.

Gọi $(C_1),(C_2),......,(C_{2025})$ là các hình tròn nội tiếp các hình vuông nhỏ ở trên, chúng có bán kính bằng nhau và bằng $\frac{1}{90}$.

Gọi $(C_1^{'}),(C_2{}'),......,(C_{2025}{}')$ lần lượt là các hình tròn đồng tâm với các hình tròn ở trên có bán kính là $\frac{1}{91}$. Khi đó, các hình tròn này nằm trong hình vuông và đôi một không có điểm chung (rời nhau)

Trong hình vuông đã cho có các hình tròn rời nhau $(C_1^{'}),(C_2{}'),......,(C_{2025}{}')$ và có 2019 điểm nên tồn tại một hình tròn trong các hình tròn này không chứa điểm nào trong 2019 điểm đã cho.

Bài 24.

Giả sử $A = \{1;2;3;...;93\}$ là tập hợp **cân đối** , khi đó mỗi tập A_i $\left(i = \overline{1,31}\right)$ có dạng $\{x_i; y_i; x_i + y_i\}$, như vậy tổng ba phần tử trong A_i là số chẵn. Do đó tổng các phần tử của tập A là số chẵn.

Mặt khác tổng các phần tử trong A bằng: $1+2+3+...+93 = \frac{93.94}{2} = 93.47$ (là số lẻ). Mâu thuẫn này chỉ ra A là tập không **cân đối**.

Nhận xét: Nếu tập $S_n = \{1;2;3;...;n\}$, với n chia hết cho 3 là tập hợp **cân đối** thì tập $S_{4n} = \{1;2;3;...;4n\}$ và $S_{4n+3} = \{1;2;3;...;4n+3\}$ cũng là tập hợp **cân đối**.

Chứng minh. Từ tập S_{4n} ta chọn ra các tập con ba phần tử sau:

$$\{1;2n+n;2n+n+1\};\{3;2n+n-1;2n+n+2\};\{5;2n+n-2;2n+n+3\};...;\{2n-1;2n+1;4n\}.$$

Rõ ràng các tập con này đều thỏa mãn có một phần tử bằng tổng hai phần tử còn lại.

Còn lại các số sau trong tập S_{4n} là $2,4,6,...,2n$. Tuy nhiên vì tập S_n **cân đối** nên tập $\{2;4;6;...;2n\}$ cũng **cân đối** . Vậy S_{4n} là tập **cân đối**.

Tương tự từ tập S_{4n+3} ta chọn ra các tập con ba phần tử sau:

$$\{1;2n+n+2;2n+n+3\};\ \{3;2n+n+1;2n+n+4\};\ldots;\ \{2n+1;2n+2;4n+3\}.$$

Và còn lại các số là $2,4,6,...,2n$, suy ra S_{4n+3} là tập **cân đối**.

Trở lại bài toán. Ta có

$$831 = 4.207 + 3$$
$$207 = 4.51 + 3$$
$$51 = 4.12 + 3$$
$$12 = 4.3$$

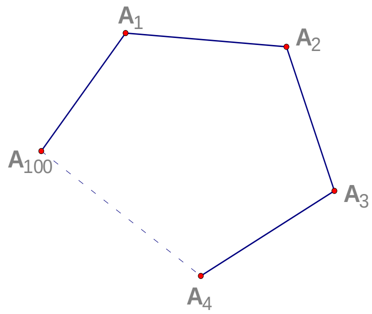
Chú ý là tập $\{1;2;3\}$ là **cân đối** nên theo nhận xét trên ta xây dựng được các tập hợp **cân đối** theo quy trình sau: $\{1;2;3\} \to \{1;2;...;12\} \to \{1;2;...;51\} \to \{1;2;...;207\} \to \{1;2;...;831\}$.

Do đó tập $A = \{1;2;3;...;831\}$ là tập hợp **cân đối** (đpcm).

Bài 25.

Để đảm bảo thắng cuộc, ở nước đi cuối cùng của mình người bốc sỏi đầu tiên phải để lại trong hộp 11 viên sỏi. Ở nước đi trước đó phải để lại trong hộp: $11+(20+11)=42$ viên sỏi.
Suy ra người bốc sỏi đầu tiên phải đảm bảo trong hộp lúc nào cũng còn $11+31k$ viên sỏi.
Ta có $(2010-11):31=65$ dư 15. Như vậy người bốc sỏi đầu tiên ở lần thứ nhất của mình phải bốc 15 viên.
Tiếp theo, khi đối phương bốc k viên sỏi ($k=1, 2, ..., 20$) thì người bốc sỏi đầu tiên phải bốc $31-k$ viên sỏi, cuối cùng sẽ để lại 11 viên sỏi cho đối phương.

Bài 26.



Xét đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_{100}$ như hình vẽ. Khi đó $|a_k - a_{k+1}| = 2$ hoặc $|a_k - a_{k+1}| = 3$ ($k = 1, 2, ..., 99$). Không mất tính tổng quát, coi a_1 là nhỏ nhất, a_n là lớn nhất (dễ thấy $n \ge 2$).

Đặt $d = \max\limits_{i \ne j} |a_i - a_j|$ khi đó $d = a_n - a_1$. Ta sẽ chứng minh $d = 149$.

Nằm giữa A_1, A_n, theo chiều kim đồng hồ có $n-2$ đỉnh và có $100-n$ đỉnh, theo chiều ngược kim đồng hồ. Hơn nữa giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số kề nhau không vượt quá 3. Do đó

$d = |a_1 - a_n| \le |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + ... + |a_{n-1} - a_n| \le 3(n-1)$ và tương tự ta có

$d \le 3(100 - n + 1)$. Suy ra $d \le \dfrac{(3(n-1)) + (3(100-n+1))}{2} = \dfrac{300}{2} = 150$

$d = 150$ khi và chỉ khi hiệu giữa hai số ghi trên hai đỉnh kề nhau đúng bằng 3 hay ta có

$$|a_i - a_{i+1}| = 3,\ \ i = 1, 2, ..., 99 \Rightarrow |a_i - a_{i+1}| = |a_{i+1} - a_{i+2}| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_i - a_{i+1} = a_{i+1} - a_{i+2} \\ a_i = a_{i+2} \end{array}\right. (i = 1, ..., 98)$$

$$\Rightarrow a_1 - a_{100} = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + ... + a_{99} - a_{100} = 99(a_1 - a_2) \Rightarrow |a_1 - a_{100}| = |99(a_1 - a_2)| \Rightarrow 3 = 99.3$$

Điều này không xảy ra suy ra $d = 150$ không thỏa mãn.

Ta xây dựng một trường hợp cho $d = 149$ như sau:

$$a_1 = 0, a_2 = 2, a_k = a_{k-1} + 3$$

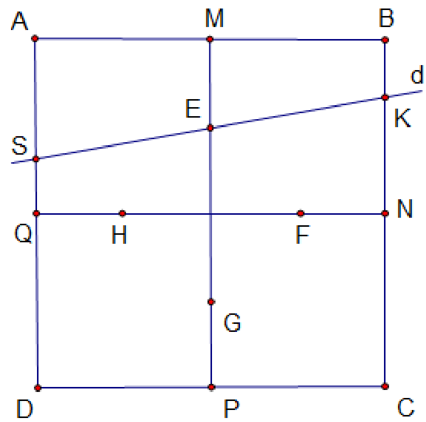
với $k = 2, 3, \ldots, 52; a_{53} = a_{52} - 2, a_k = a_{k-1} - 3, k = 54, 55, \ldots, 100$

Khi đó hiệu lớn nhất $a_{53} - a_1 = 149$.

Các số $a_2, a_3, \ldots, a_{53}$ có dạng $2 + 3t$, các số $a_{54}, a_{55}, \ldots, a_{100}$ có dạng $147 - 3k$. Rõ ràng không tồn tại k, t sao cho $2 + 3t = 147 - 3k \Leftrightarrow 3(k + l) = 145$ ($k, t \in \mathbb{Z}$).

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 27.



Giả sử hình vuông $ABCD$ có cạnh là a ($a>0$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi d là một đường thẳng bất kỳ trong 2018 đường thẳng đã cho thỏa mãn yêu cầu bài toán. Không mất tính tổng quát, giả sử d cắt các đoạn thẳng AD, MP, BC lần lượt tại S, E, K sao cho $S_{CDSK}=3S_{ABKS}$

Từ $S_{CDSK}=3S_{ABKS}$ ta suy ra được: $DS+CK=3\left(AS+BK\right)$

$\Leftrightarrow a-AS+a-BK=3\left(AS+BK\right)\Leftrightarrow AS+BK=\frac{1}{2}a$

$\Leftrightarrow EM=\frac{1}{4}a$ suy ra E cố định và d đi qua E.

Lấy F, H trên đoạn NQ và G trên đoạn MP sao cho $FN=GP=HQ=\frac{a}{4}$.

Lập luận tương tự như trên ta có các đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải đi qua một trong bốn điểm cố định E, F, G, H.

Theo nguyên lý Dirichlet từ 2018 đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải có ít nhất $\left[\frac{2018}{4}\right]+1=505$ đường thẳng đi qua một trong bốn điểm E, F, G, Hcố định, nghĩa là 505

đường thẳng đó đồng quy.

Bài 28.

Nếu 2014 số bằng nhau thì lấy 1007 số bất kỳ luôn có tổng là 2014.

Ta xét trường hợp trong 2014 số có ít nhất hai số khác nhau. Giả sử 2014 số là $n_1, n_2, ..., n_{2014}$ và $n_1 \neq n_2$. Xét dãy gồm 2014 số

$$n_1, n_2, n_1 + n_2, n_1 + n_2 + n_3, ..., n_1 + n_2 + .. + n_{2013}$$

Nếu có một số trong dãy chia hết cho 2014 thì số đó là 2014 (vì nó là số nguyên dương chia hết cho 2014 nhỏ hơn 4028).

Nếu không có một số nào trong dãy chia hết cho 2014 thì theo nguyên lý Dirichlet có hai số trong dãy có cùng số dư khi chia cho 2014.

Do đó, hiệu của chúng (số lớn trừ số bé) chia hết cho 2014, mà hiệu này là số nguyên dương chia hết cho 2014 nhỏ hơn 4028 nên nó bằng 2014.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 29.

Với mỗi điểm M thuộc đường tròn, ta dựng đường kính $MN,$ khi đó

$$MA + NA \geq MN = 2; MB + NB \geq MN = 2; MC + NC \geq MN = 2$$

$$\Rightarrow (MA + MB + MC) + (NA + NB + NC) \geq 6$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} MA + MB + MC \geq 3 \\ NA + NB + NC \geq 3 \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra đpcm

Bài 30.

Đội đứng thứ nhất có điểm cao nhất là $A = 2(n-1)$ điểm (Đội này đấu $n-1$trận với các đội còn lại và đều thắng)

Xét $n-1$đội còn lại ta có: Đội đứng nhất trong số $n-1$đội còn lại có số điểm nhỏ nhất được xác định như sau:

Gọi P là tổng điểm của $n-1$đội đấu với nhau, số trận của $n-1$đội còn lại: $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$

$\Rightarrow P=(n-1)(n-2)$(Vì mỗi đội thắng hay hòa thì sau mỗi trận đều có 2 điểm)

Gọi Qlà số điểm của đội nhất trong $n-1$đội còn lại

$\Rightarrow Q(n-1)\ge(n-1)(n-2)\Rightarrow Q\ge n-2$

$\Rightarrow A-Q<2(n-1)-(n-2)=n$

Vậy sự chênh lệch về điểm số lớn nhất có thể giữa các đội xếp hạng liên nhau là nđiểm.

Bài 31.

Kí hiệu $D_i, i=\overline{1,n}$ là đội bóng thứ i và d_i là điểm số của đội D_i sau giải đấu.

Không mất tính tổng quát, giả sử $d_1\ge d_2\ge\ldots\ge d_n$.

Xét các hiệu d_i-d_{i+1}, $i=\overline{1,n-1}$, ta có $d_i-d_{i+1}\ge 0,\forall i=\overline{1,n-1}$.

Giả sử đội xếp hạng s và đội xếp hạng $s+1$ có chênh lệch điểm lớn nhất, nghĩa là hiệu d_s-d_{s+1} lớn nhất trong số các hiệu trên.

Ta có nhận xét: Sau mỗi trận đấu, dù kết quả thế nào, tổng số điểm của hai đội tham gia thi đấu đều bằng 2.

Chia các đội bóng làm hai nhóm. Nhóm 1 gồm các đội $D_1,\ldots,D_s$ và nhóm 2 gồm các đội còn lại $D_{s+1},\ldots,D_n$.

Khi đó s đội trong nhóm 1 đấu với nhau $\dfrac{s(s-1)}{2}$ trận và nhận $s(s-1)$ điểm. Ngoài ra các đội thuộc nhóm 1 đấu với các đội thuộc nhóm 2 tất cả $(n-s)s$ trận và nhận không quá $2(n-s)s$ điểm (vì trong số $(n-s)s$ trận này có thể có các trận mà đội thuộc nhóm 1 thua). Do đó tổng điểm mà s đội nhóm 1 nhận được không quá $s(s-1)+2(n-s)s=(2n-s-1)s$.

Từ đó suy ra $d_s\le\dfrac{(2n-s-1)s}{s}=2n-s-1$ (1)

Lại có: Các đội thuộc nhóm 2 đấu với nhau $\dfrac{(n-s)(n-s-1)}{2}$ trận và nhận $(n-s)(n-s-1)$ điểm.

Do đó số điểm d_{s+1} của đội D_{s+1} sẽ lớn hơn hoặc bằng $\dfrac{(n-s)(n-s-1)}{n-s}=n-s-1$, hay

$d_{s+1}\ge n-s-1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $d_s - d_{s+1} \le (2n-s-1)-(n-s-1) = n$.

Dấu '=' xảy ra khi đội vô địch thắng tất cả các đội và được $2(n-1)$ điểm, tất cả các đội còn lại khác đều hòa nhau (và thua đội vô địch), mỗi đội nhận $n-2$ điểm. Vậy $\max(d_i - d_{i+1}) = n$.

Bài 32.

Với mỗi tập A là tập con của $S = \{1,2,3...2018\}$ thỏa mãn đề bài, gọi a và b lần lượt là phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của tập $A (a,b \in S, a<b)$.

Ta chứng minh $b \le 2a$.

Thật vậy, giả sử $b > 2a$, theo giả thiết $c = \dfrac{a^2}{b-a} \in A$.

Mà $b > 2a \Rightarrow b-a > a > 0 \Rightarrow c = \dfrac{a^2}{b-a} < \dfrac{a^2}{a} = a$, mâu thuẫn với a là phần tử nhỏ nhất của A. Vậy $b \le 2a$.

Gọi d là phần tử lớn nhất của tập $B = A \setminus \{b\}$.

Ta chứng minh $b \ge 2d$.

Thật vậy, giả sử $b < 2d$, theo giả thiết thì $d < b \Rightarrow e = \dfrac{d^2}{b-d} \in A$.

Mà $b < 2d \Rightarrow 0 < b-d < d \Rightarrow e > \dfrac{d^2}{d} = d$.

Suy ra $e \in A$ nhưng $e \notin B$

Do đó

$$e = b \Rightarrow \frac{d^2}{b-d} = b \Rightarrow d^2 = b^2 - bd \Rightarrow 5d^2 = 4b^2 - 4bd + d^2 = (2b-d)^2$$

(mâu thuẫn vì VP là số chính phương, VT không là số chính phương)

Vậy $b \ge 2d \Rightarrow 2d \le b \le 2a \Rightarrow d \le a$. Mà $a \le d$ (a và d lần lượt là phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của B) nên $a = d \Rightarrow b = 2a$.

Do đó $A = \{a; 2a\}$. Kiểm tra lại ta thấy A thỏa mãn đề bài.

Vì $a \in S$ và $2a \in S$ nên $2 \le 2a \le 2018 \Rightarrow 1 \le a \le 1009$

Vậy số tập con A thỏa mãn đề bài là 1009 tập.

Bài 33.

Theo quá trình đổi dấu ghi trên ô vuông ở dòng i cột j được đổi dấu $i+3j+1$ lần. Mà $i+3j+1$ và $i+j$ hai số không cùng tính chẵn lẻ (vì $(i+3j+1)-(i+j)=2j+1$ là số lẻ)

Do đó những ô vuông ở dòng i cột j mà $i+j$ là số lẻ sẽ đổi dấu một số chẵn lần và dấu ở ô vuông đó vẫn là dấu $+$, còn những ô vuông ở dòng i cột j mà $i+j$ là số chẵn sẽ đổi dấu một số lẻ lần và dấu ở ô vuông đó là dấu $-$

Mà từ 1 đến 2019 có 1009 số chẵn và 1010 số lẻ nên số cặp $(i;j)$ mà $i+j$ bằng :

$1009.1010+1010.1009=2038180$

Vậy số các ô vuông còn lại mang dấu $+$ bằng 2038180

Bài 34.

Cho tập hợp *A* gồm 41 phần tử là các số nghuên khác nhau thỏa mãn tổng của 21 phần tử bất kỳ lớn hơn tổng của 20 phần tử còn lại. Biết các số 401 và 402 thuộc tập *A*. Tìm tất cả các phần tử của tập hợp *A*.

Giả sử $A=\{a_1;a_2;a_3;...;a_{41}\}$ với $a_1;a_2;a_3;...;a_{41}\in\mathbb{Z}$ và $a_1<a_2<a_3<...<a_{41}$

Theo giả thiết ta có $a_1+a_2+a_3+...+a_{21}>a_{22}+a_{23}+...+a_{41}$

$\Leftrightarrow a_1>a_{22}-a_2+a_{23}-a_3+...+a_{41}-a_{21}$ (1)

Mặt khác với $x;y\in\mathbb{Z}$ và nếu $y>x$ thì $y\geq x+1$

$\Rightarrow a_{22}-a_2\geq 20, a_{23}-a_3\geq 20,..., a_{41}-a_{21}\geq 20$ (2)

Nên từ (1) suy ra $a_1>20+20+20+...+20=400$

Mà a_1 nhỏ nhất và 401 $\in A\Rightarrow a_1=401$

Ta có $401>a_{22}-a_2+a_{23}-a_3+...+a_{41}-a_{21}\geq 400$

$\Rightarrow a_{22}-a_2+a_{23}-a_3+...+a_{41}-a_{21}=400$

Kết hợp với (2)

$\Rightarrow a_{22}-a_2=a_{23}-a_3=...=a_{41}-a_{21}=20$ (3)

$\Rightarrow 20 = a_{22} - a_2 = (a_{22} - a_{21}) + (a_{21} - a_{20}) + ... + (a_3 - a_2) \geq 20$

$\Rightarrow a_{22} - a_{21} = a_{21} - a_{20} = ... = a_3 - a_2 = 1 \ (4)$

Ta có $a_1 = 401$ mà $402 \in A \Rightarrow a_2 = 402$

Kết hợp (3) và (4) suy ra $A = \{401; 402; 403; ...; 441\}$

Bài 35.

Đặt $M_n = \{x / x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 2n-1\}$.Ta chứng minh mệnh đề tổng quát :"*Trong* $2n+1$ *số phân biệt từ tập hợp* M_n*, luôn tồn tại ba số phân biệt có tổng bằng 0.* Ta chứng mnh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử tồn tại số nguyên dương n sao cho có thể chọn ra $2n+1$ số phân biệt từ tập hợp M_n mà trong đó không có 3 số phân biệt nào có tổng bằng 0. Gọi n là số nhỏ nhất có tính chất như vậy. Khi đó $n > 1$(vì với $n = 1$ thì mệnh đề đúng). Vì n là số nhỏ nhất làm cho mệnh để không đúng nên mệnh đề đúng với $n-1$. Nếu trong các số được chọn có ít nhất $2n-1$ số thuộc M_{n-1} thì do mệnh đề đúng với $n-1$, sẽ tồn tại ba số phân biệt trong các số được chọn có tổng bằng 0. Mâu thuẫn. Vậy có tối đa $2n-2$ số được chọn thuộc M_{n-1}.Suy ra trong 4 số $-2n+2; -2n+1; -2n-2; 2n-1$ có ít nhất 3 số được chọn. Suy ra 0 không được chọn

- Nếu cả hai số của cặp $(-2n+1; 2n-1)$ được chọn. Chia tập $M_n \setminus \{-2n+1, 2n-1, 0\}$ thành $2n-2$ cặp $(1; 2n-2), (2; 2n-3); .....; (-1; -2n+2), ..., (-n+1; -n)$ ta thấy từ mỗi cặp ta chỉ chọn được tối đa 1 số . suy ra chỉ lấy được tối đa $2 + 2n - 2 = 2n$ số. Mâu thuẫn
- Nếu chỉ có một số của cặp $(-2n+1, 2n-1)$ được chọn thì theo lý luận ở trên, cặp $(-2n+2; 2n-2)$ được chọn. Không mất tính tổng quát ta giả sử $2n-1$ được chọn còn $1-2n$ không được chọn. Lúc này chia các phần tử còn lại thành $2n-5$ cặp $(1; 2n-3), (2; 2n-4), ...(n-2; n), (-2; -2n+3); .....(-n+3; -n-1)$, một bộ ba số $(-n+2; -n+1; -n)$ và một phần tử lẻ cặp $n-1$. Từ mỗi cặp ta lấy được tối đa một số, tự bộ ba số ta cũng lấy được tối đa 1 số. Từ đó ta lấy được tối đa $3 + 2n - 5 + 1 + 1 = 2n$ số, mâu thuẫn

Vậy trong mọi trường hợp đều dẫn đến mâu thuẫn, tức là điều giả sử sai. Mệnh đề được chứng minh. Áp dụng mệnh đề cho $n = 1010$ ta có điều phải chứng minh

Bài 36.

Xét điểm $I\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$. Ta chứng minh khoảng cách từ I đến hai điểm nguyên khác nhau là khác nhau.

Xét hai điểm nguyên $M\left(a;b\right);M'\left(a';b'\right)$

$IM = IM' \Leftrightarrow IM^2 = IM'^2$

$\Leftrightarrow \left(a-\sqrt{2}\right)^2+\left(b-\sqrt{3}\right)^2=\left(a'-\sqrt{2}\right)^2+\left(b'-\sqrt{3}\right)^2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-a'^2-b'^2+2\left(a-a'\right)\sqrt{2}+2\left(b-b'\right)\sqrt{3}=0$

Nhận xét nếu các số nguyên m,n,p thỏa mãn:

$m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0$ thì $m=n=p=0$

$$\begin{cases}\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{6}\notin\mathbb{Q};m,n,p\in\mathbb{Q}\\ 2mn\sqrt{2}=3p^2-m^2-2n^2\\ 2mp\sqrt{3}=2n^2-m^2-3p^2\\ 2pn\sqrt{6}=m^2-2n^2-3p^2\\ m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}mn=np=pm=0\\ m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0\end{cases}\Rightarrow m=n=p=0$$

Ta có: $IM = IM' \Leftrightarrow IM^2 = IM'^2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2-a'^2-b'^2=0\\ 2\left(a'-a\right)=0\\ 2\left(b'-b\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=b'\\ a=a'\end{cases}\Leftrightarrow M\equiv M'$$

Xét tất cả các khoảng cách từ các điểm nguyên đến I, các khoảng cách này đôi một phân biệt. Gọi S là tập hợp các số thực bằng các khoảng cách từ tất cả các điểm nguyên đến I. Ta có thể chọn được 2020 số dương nhỏ nhất thuộc S và được sắp xếp theo thứ tự tăng dần, nghĩa là tồn tại các số dương $s_1,s_2,.....,s_{2020}$ thuộc tập S thỏa mãn $s_p<s_q$ nếu $p<q$, các số thuộc

$S\setminus\left\{s_1,s_2,......,s_{2020}\right\}$ đều lớn hơn $s_1,s_2,....,s_{2020}$. Đặt $R_k=\dfrac{s_k+s_{k+1}}{2},k=1;2;3;....;2019$. Ta có điều phải chứng minh

Bài 37.

Quy ước, ta xem sự hợp tác của công ty A với công ty B là một liên kết mọt chiều từ A vào B. Và hiển nhiên, cũng sẽ có liên kết một chiều ngược từ B vào A.

Vì mỗi công ty của huyện KS hợp tác ít nhất 97 công ty huyện KV. Khi đó, số liên kết tối thiểu từ KS vào KV là : $33.97 = 3201$(liên kết)

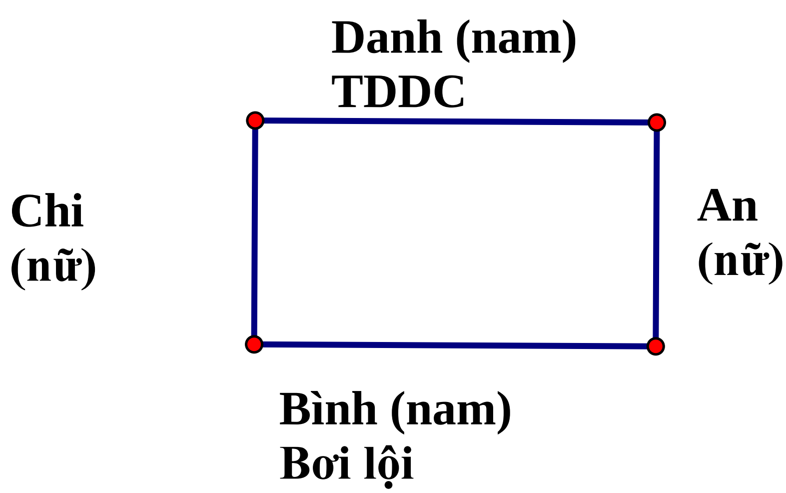
Giả sử: tất cả mỗi công ty huyện KV đều có tối đa 32 liên kết với các công ty huyện KS. Khi đó, số liên kết tối đa từ KV vào KS là: $100.32 = 3200 < 3201$(liên kết) (mâu thuẫn)

Vậy tồn tai ít nhất một công ty huyện KV có 33 liên kết với các công ty huyện KS

Bài 38.

Vì Chi và Danh ngồi cạnh nhau nên ta giả sử Chi và Danh ngồi tên hai cạnh liên tiếp của hình vuông $ABCD$

Khi đó ta có 4 trường hợp:

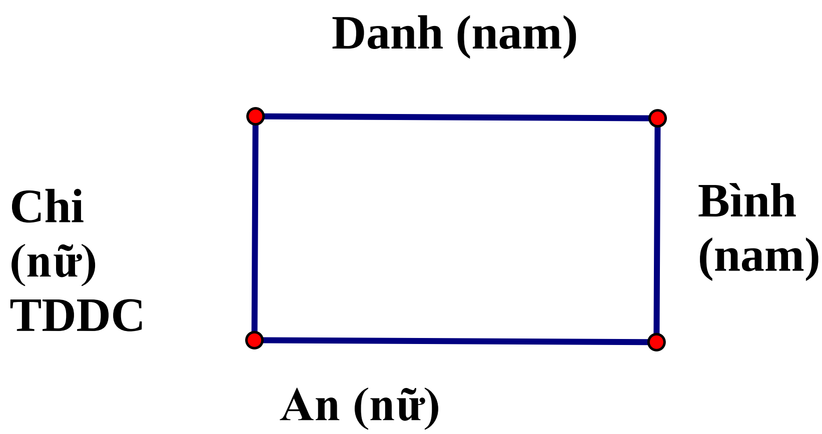


Trường hợp 1: hình 1

+Vì vận động viên thể dục dụng cụ ngồi đối diện Bình nên Danh là vận động viên thể dục dụng cụ (TDDC)

+Vận động viên bơi lội ngồi bên trái An nên Bình là vận động viên bơi lội

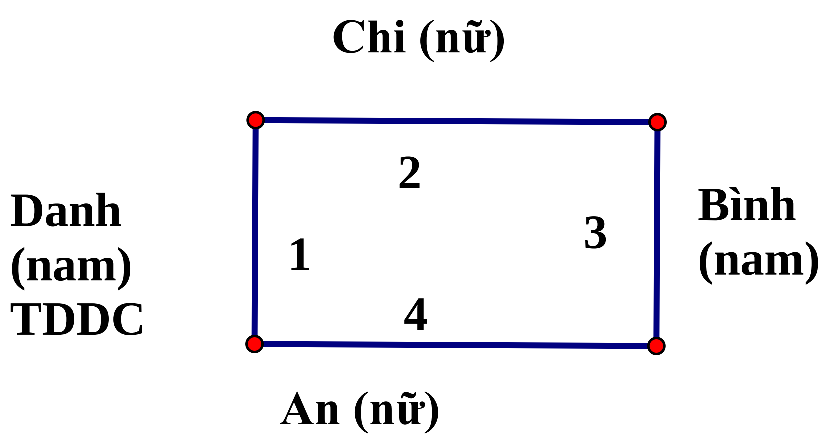
Khi đó Chi và An là hai vận động viên bạn nữ trược băng hoặc cầu lông, điều nầy trái với mệnh đề "Một phụ nữ ngồi bên trái vận động viên trượt băng"



Trường hợp 2, hình 2

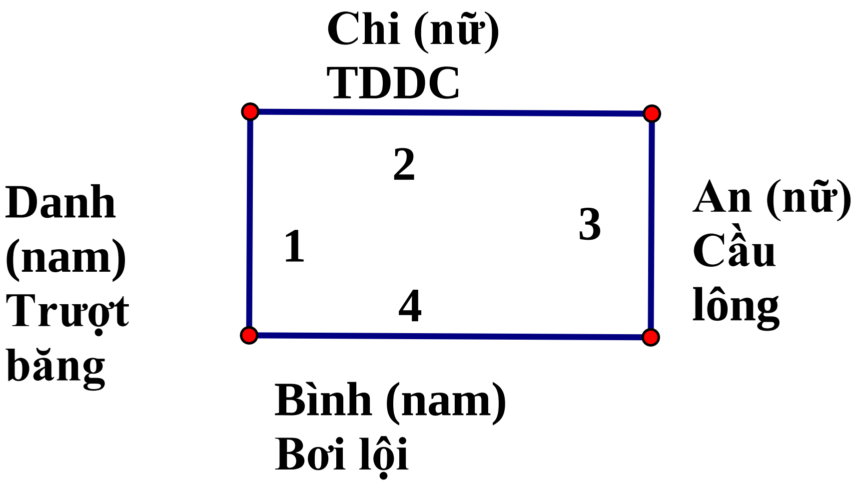
+Vì vận động viên thể dục dụng cụ ngồi đối diện Bình nên Chi là vận động viên thể dục dụng cụ (TDDC) và Chi cũng là vận động viên ngồi bên trái An nên không thỏa mãn "Vận động viên bơi lội ngồi bên trái An"

Trường hợp 3, hình 3



Vì vận động viên thể dục dụng cụ ngồi đối diện Bình nên Chi là vận động viên thể dục dụng cụ (TDDC) nên Danh là vận động viên TDDC và vận động viên bên trái An nên Danh cũng không thỏa mãn với "vận động viên bơi lội ngồi bên trái An"

Trường hợp 4. Hình 4



+Vì vận động viên thể dục dụng cụ ngồi đối diện Bình nên Chi là vận động viên thể dục dụng cụ (TDDC)

+Vận động viên bơi lội ngồi bên trái An nên Bình là vận động viên bơi lội

+Một phụ nữ ngồi bên trái vận động viên trượt băng nên trong trường hợp này Danh là vận động viên trượt băng. Do đó An là vận động viên cầu lông

Vậy

+An là vận động viên cầu lông

+Bình là vận động viên bơi lội

+Chi là vận động viên TDDC

+Danh là vận động viên trượt băng.

Bài 39.

Đặt $z=\dfrac{xy}{x+y+1}\Rightarrow\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{xy}\Rightarrow\dfrac{1}{z}+1=\left(\dfrac{1}{x}+1\right)\left(\dfrac{1}{y}+1\right)$(1)

Với mỗi tập các số dương $\{x_1;x_2;......;x_n\}$ tùy ý, xét biểu thức :

$$P(x_1;x_2;....;x_n)=\left(\frac{1}{x_1}+1\right)\left(\frac{1}{x_2}+1\right).......\left(\frac{1}{x_n}+1\right).$$

Từ (1) suy ra mỗi lần xóa đi 2 số bất kỳ x,y rồi viết lên bảng số $\dfrac{xy}{x+y+1}$ các số còn lại trên bảng giữ nguyên thì giá trị của biểu thức P của các số trên bảng không đổi.

Gọi số cuối cùng là $a \Rightarrow P(a) = P\left(\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};......;\frac{1}{2018};\frac{1}{2019}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+1 = \left(\frac{1}{1}+1\right).\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}+1\right).\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}+1\right).......\left(\frac{1}{\frac{1}{2018}}+1\right).\left(\frac{1}{\frac{1}{2019}}+1\right) = 2020! \Rightarrow a = \frac{1}{2020!-1}$$

Bài 40.

Giả sử ngoài bạn An còn có n bạn và An quen m bạn, điều kiện $m \le n; m,n \in \mathbb{N}^*$

Số cái bắt tay là $\frac{n(n-1)}{2}+m$

Theo bài ra ta có phương trình:

$\frac{n(n-1)}{2}+m = 420 \Leftrightarrow n(n-1)+2m = 840$ (1)

Mặt khác $2m \le 2n,$ kết hợp với (1) ta suy ra $n(n-1)+2n \ge 840 \Leftrightarrow n^2+n \ge 840 \Rightarrow n \ge 29$

Và $2m \ge 2$, kết hợp với (1) ta suy ra $n^2-n-838 \le 0 \Rightarrow n \le 29$, từ đó suy ra $n = 29$

Thay $n = 29$ vào (1) ta có $2m + 29.28 = 840 \Leftrightarrow m = 14$

Vậy An quen 14 người

Bài 41. Ta có 1994 số nguyên chứa toàn bộ số 1 là

1

11

111

......

$\underbrace{111....11}_{1994\,so\,1}$

Khi chia cho 1993 thì có 1993 số dư. Suy ra theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 2 số có cùng số dư . Giả sử đó là :

$a_i = 1993q + r$ $\qquad$ $a_j = 1993k + r$

$0 \le r < 1993,\ a_i - a_j = 1993(q-k)$

$$\underbrace{111....11}_{i-j1994\ so1}\underbrace{00.......0}_{i\,so\,0}=1993(q-k)$$

$$\underbrace{111.....11}_{i-j\ 1994\,so1}.10^{j}=1993(q-k)$$

$$Ma`\left(10^{j},1993\right)=1\Rightarrow\underbrace{111....11}_{1994\ so1}\vdots1993(dfcm)$$

Bài 42.

Xét dãy số gồm 17 số nguyên bất kỳ là $a_1, a_2, ..., a_{17}$

Chia các số cho 5 ta được 17 số dư nên phải có 5 số dư thuộc tập hợp $\{0;1;2;3;4\}$

Nếu trong 17 số trên có 5 số khi chia cho 5 có cùng số dư thì tổng của chúng sẽ chia hết cho 5.

Nếu trong 17 số trên không có số nào có cùng số dư khi chia cho 5 thì tồn tại 5 số có số dư khác nhau nên tổng các số dư này là $0+1+2+3+4=10\vdots5$

Vậy tổng của 5 số này chia hết cho 5.

Bài 43.

Xét dãy số $a_1=1993, a_2=19931993;\ldots;$

$$a_{1994}=\underbrace{1993......1993}_{1994\ so\ 1993}$$

Đem chia cho 1994 thì sẽ có 1994 số dư thuộc tập hợp $\{1;2;....;1993\}$ theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 2 số hạng có cùng số dư

Giả sử : $a_i=1993....1993(i\,so1993)$ $\qquad a_j=1993.....1993\ (j\,so1993)$

$$\Rightarrow a_i-a_j\vdots1994\quad 1\le i\le j\le1994$$

$$\Rightarrow\underbrace{1993.....1993}_{j-i\ so\ 1993}.10^{ni}\vdots1993$$

Bài 44.

Gọi độ dài các cạnh của tứ giác là a, b, c, d (a, b, c, d $\in\mathbb{N}^*$). Giả sử không có 2 cạnh nào của tứ giác bằng nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử a > b > c > d. (*)

Do tứ giác lồi nên a < b + c +d

$\Rightarrow$ a < b + c + d < 3a

$\Rightarrow$ 2a < a + b + c + d < 4a

Từ giả thiết của bài toán suy ra a + b + c + d chia hết cho các số a, b, c, d nên ta có : a + b + c + d = 3a (1)

Đặt $a + b + c + d = mb$ với $m \in \mathbb{N}^*$ (2)

$a + b + c + d = nc$ với $n \in \mathbb{N}^*$ (3)

Do $a > b > c \Rightarrow n > m > 3 \Rightarrow n \geq 5, m \geq 4$

Cộng (1), (2), (3) được

$3(a + b + c + d) = 3a + mb + nc \geq 3a + 4b + 5c$

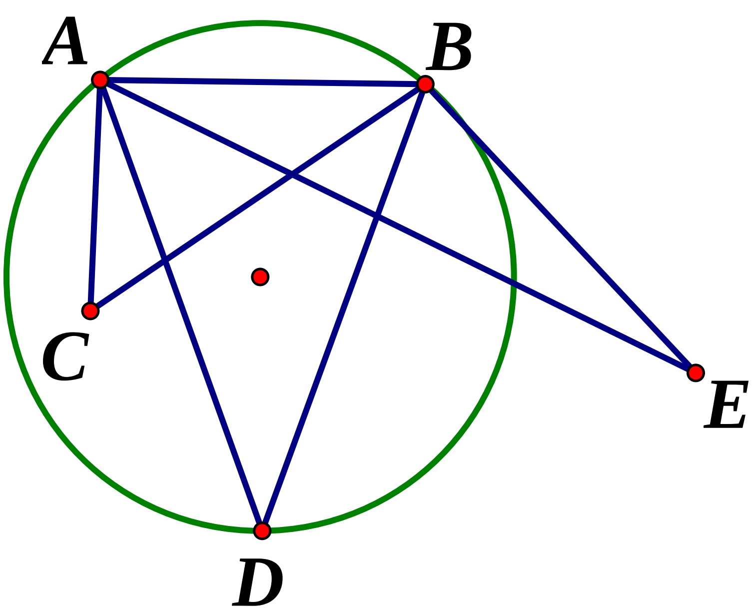
$\Rightarrow (b - d) + 2(c - d) \leq 0$, mâu thuẫn (*)

$\Rightarrow$ Tứ giác có ít nhất 2 cạnh bằng nhau.

Bài 45.

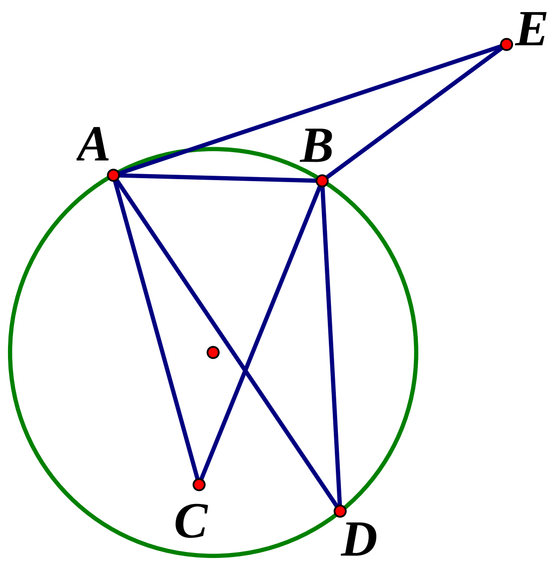
Từ 5 điểm có 4+3+2+1=10 đoạn thẳng tạo thành. Do đó có ít nhất một đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất. Giả sử 5 điểm A, B, C, D, E và hai điểm A, B có độ dài AB nhỏ nhất. Khi đó 3 điểm C, D, E còn lại có hai khả năng sau:

TH1: cả ba điểm này nằm cùng phía trong nửa mặt phẳng bờ AB



Vì không có 4 điểm nào cùng thuộc một đường tròn nên C, D, E nhìn AB với các góc nhọn khác nhau. Giả sử $\widehat{ACB} > \widehat{ADB} > \widehat{AEB}$ khi đó đường tròn đi qua 3 điểm A, B, D chứa điểm C bên trong và điểm E bên ngoài

TH2: có một điểm khác phía hai điểm kac sở hai nửa mặt phẳng bờ AB. Giả sử E khác phía hai điểm C, D



Vì không có 4 điểm nào cùng thuộc một đường tròn nên C, D nhìn AB với các góc nhọn khác nhau. Giả sử $\widehat{ACB} > \widehat{ADB}$, khi đó đường tròn đi qua ba điểm A, B, D chứa điểm C bên trong và điểm E bên ngoài

Vậy luôn có một đường tròn thỏa mãn điều kiện

Bài 46.

Gọi A là địa điểm có nhiều tuyến đường nhất (gồm ca đường xuất phát từ A và đi đến A). Các địa điểm còn lại ta chia thành 3 loại:

Loại 1: Các đường xuất phát từ A có $n(1) = m$ tuyến đường

Loại 2: Các tuyến đi đến A có $n(2) = n$ tuyến

Loại 3: Không có tuyến đi và đến A có $n(3) = p$ tuyến

Do $m + n + p = 17$ và:

Số tuyến liên quan đến A có $m + n$ tuyến

Số tuyến không liên quan đến A không vượt quá $m + n$

Gọi S là số cách thiết lập đi hết 18 địa danh thì:

$S = m + n + p(m+n) + mn = mn + (p+1)m + n(p+1) \le \dfrac{(m+n+p+1)^2}{3} = 108$ (Áp dụng bất đẳng thức Cosi)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = p = 6, n = 5$

Vậy có tối đa 108 cách thiết lập đi hết 18 địa danh trên

Bài 47.

Giả sử ta có thể thắp được toàn thành phố bằng 1 loại bóng đèn A, và hai loại còn lại là bóng loại B và C.

Khi đó số bóng B và C bằng 0, tức là hiệu số bóng đèn giữa B và C là 0.

Nếu ở các lần thay trước ta thay 2 bóng A, B thành 2 bóng C thì hiệc số bóng đèn giữa B và C là tặng hoặc giảm 3 bóng. Tương tự nếu thay 2 bóng A, C thành hai bóng đèn B thì hiệu số bóng đèn giữa B và C là tăng hoặc giảm 3 bóng. Nếu thay hai bóng đèn B, C thành hai bóng đèn loại A thì hiệu số vẫn giữ nguyên không đổi.

Vậy hiệu số bóng giữa bóng B và C là $3k\left(k\in\mathbb{N}\right)$

Điều này trái giả thiết vì đèn ánh sáng trắng có 671 bóng, đèn ánh sáng vàng nhạt có 673 bóng, đèn ánh sáng đỏ có 675 bóng tức là hiệu số bóng đèn giữa 2 bóng bất kỳ là 2 hoặc 4.

Suy ra điều giả sử là sai nên ta không thể thắp sáng toàn thành phố bằng các bóng đèn cùng màu.

Bài 48.

Giả sử $2018+n^2$ là số chính phương thì $2018+n^2=m^2$ $\left(m\in\mathbb{N}^*\right)$

Suy ra $2018=m^2-n^2 \Leftrightarrow 2018=\left(m-n\right)\left(m+n\right)$

Như vậy trong hai số $m-n$ và $m+n$ phải có ít nhất một số chẵn (1)

Mà $\left(m-n\right)+\left(m+n\right)=2m$ nên suy ra hai số $m-n$ và $m+n$ cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai số $m-n$ và $m+n$ là hai số chẵn

$\Rightarrow\left(m-n\right)\left(m+n\right)$ chia hết cho 4

Mà 2018 không chia hết cho 4 nên điều giả sử là sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2018+n^2$ là số chính phương.

Có 10 đội bóng, mỗi đội thi đấu đúng 9 trận với 9 đội còn lại. Do đó số trận thua của mỗi đội từ đội thứ nhất đến đội thứ 10 lần lượt là :

$y_1=9-x_1, y_2=9-x_2, ..., y_{10}=9-x_{10}$.

Có tất cả số trận đấu là : $\frac{10.9}{2}=45$ trận

Vì không có trận hòa nên tổng số các trận thắng của 10 đội là:

$x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 9 + 8 + ... + 2 + 1 = 45$

Ta có :

$y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{10}^2 = (9 - x_1)^2 + (9 - x_2)^2 + ... + (9 - x_{10})^2$

$\Leftrightarrow y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{10}^2 = 10.9^2 - 18(x_1 + x_2 + ... + x_{10}) + (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2)$

$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{10}^2$ (đpcm)

Bài 49.

Ta xếp các đoạn thẳng có độ dài tăng dần $a_1 \le a_2 \le .... \le a_7$. Nếu tồn tại 3 đoạn thẳng $a_k; a_{k+1}; a_{k+2}$ thỏa mãn $a_k + a_{k+1} > a_{k+2}$ thì 3 đoạn thẳng này có thể lập thành một tam giác.

Giả sử ngược lại :

$a_1 + a_2 \le a_3; a_2 + a_3 \le a_4; a_3 + a_4 \le a_5; a_4 + a_5 \le a_6; a_5 + a_6 \le a_7$

Khi đó theo giả thiết :

$a_1 > 10; a_2 > 10 \Rightarrow a_3 > 20 \Rightarrow a_4 > 30 \Rightarrow a_5 > 50 \Rightarrow a_6 > 80 \Rightarrow a_7 > 130$

$\Rightarrow$ Mâu thuẫn với giả thiết cho độ dài mỗi đoạn thẳng nhỏ hơn 100.

Vậy tồn tại 3 đoạn thẳng $a_k; a_{k+1}; a_{k+2}$ mà $a_k + a_{k+1} > a_{k+2}$. Do đó tồn tại 3 đoạn thẳng để có thể ghép thành tam giác

Bài 50.

Với $n = 1 \Rightarrow T_1 = \dfrac{1.2.3.4}{4}$

Với $n = 2$ ta có : $T_2 = t_1 + t_2 = 1.2.3 + 2.3.4 = 30 = \dfrac{2.3.4.5}{4}$

Giả sử đúng đến $n = k$, ta có : $T_k = \dfrac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$

Ta chứng minh đúng đến $n = k + 1$

$T_n = T_{k+1} = T_k + T_{k+1} = \dfrac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3)$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

$$\Rightarrow 4T_n+1=(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)+1=\left(n^2+3n+1\right)^2$$

Là số chính phương.

ĐỀ BÀI TỪ BÀI 51 ĐẾN BÀI 69

Bài 51. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có diện tích $2022cm^2$ và 7 điểm nằm trong lục giác đều $ABCDEF$. Chứng minh rằng tồn tại tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm trong 7 điểm đã cho có diện tích không lớn hơn $337cm^2$

Bài 52.

a) Cho hình thoi $ABCD$ có $AB=a$.Gọi R_1,R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABC và ABD.Chứng minh rằng $R_1+R_2\geq a\sqrt{2}$

b) Cho đa giác đều có 2021 đỉnh, sao cho mỗi đỉnh của đa giác đó chỉ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của đa giác đã cho là các đỉnh của một tam giác cân mà các đỉnh đó được tô cùng một màu.

Bài 53. Cho dãy gồm 1000 số: 7;77;777;7777;……;777….7. Chứng minh trong dãy trên tồn tại ít nhất một số chia hết cho 2013

Bài 54. Trong mặt phẳng cho 2020 điểm mà diện tích của mọi tam giác với các đỉnh là các điểm đã cho không lớn hơn 1. Chứng minh rằng trong số các điểm đã cho có thể tìm được ít nhất 253 điểm nằm trong hoặc nằm trên cạnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn $\frac{1}{2}$

Bài 55. Trên bảng có ghi 2020 số: $\frac{1}{2020};\frac{2}{2020};\frac{3}{2020};.....;\frac{2020}{2020}$. Mỗi lần thực hiện, cho phép xóa đi hai số a,b bất kỳ trên bảng và thay bằng số $a+b-2ab$. Hỏi sau 2019 lần thực hiện phép xóa, số còn lại trên bảng là số nào ?

Bài 56. Tất cả các điểm trên mặt phẳng đều được to màu, mỗi điểm được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, tím. Chứng minh khi đó luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân có 3 đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó có cùng một màu hoặc đôi một khác màu

Bài 57. Trên bảng, người ta viết các số tự nhiên liên tiếp từ 1đến 100 sau đó thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lần xóa 2 số a,b bất kỳ trên bảng và viết một số mới bằng $a+b-2$ lên bảng. Việc làm này thực hiện liên tục, hỏi sau 99 bước số cuối cùng còn lại trên bảng là bao nhiêu ? Tại sao ?

Bài 58. Bảy người câu được 100 con cá. Biết rằng không có hai người nào câu được số cá như nhau. Chứng minh rằng có ba người câu được tổng cộng không ít hơn 50 con cá

Bài 59. Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.

Bài 60. Cho S là tập hợp gồm 3 số tự nhiên có tính chất :Tổng của hai phần tử tùy ý của S là một số chính phương. (Ví dụ $S=\{5;20;44\}$ hoặc $S=\{10;5;90\}$ là các tập hợp thỏa mãn điều kiện trên). Chứng minh rằng tập hợp S có không quá một phần tử là số lẻ.

Bài 61. Chứng minh rằng : Nếu tất cả các cạnh của một tam giác nhỏ hơn 1 thì diện tích tam giác nhỏ hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Bài 62.

1. Cho 69 số nguyên dương phân biệt không vượt quá 100. Chứng minh rằng có thể chọn ra từ 69 số đó 4 số sao cho trong chúng có 1 số bằng tổng của 3 số còn lại

Bài 63. Tìm tất cả các số tự nhiên mà khi gạch bỏ một chữ số của nó thì số đó giảm đi 31 lần

Bài 64. Cho 19 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng nằm trong một hình lục giác đều có cạnh bằng 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tam giác có ít nhất một góc không lớn hơn 45^0 và nằm trong đường tròn có bán kính nhỏ hơn $\frac{3}{5}$

Bài 65. Cho 5 số nguyên dương đôi một phân biệt sao cho mỗi số trong chúng không có ước nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng mnh rằng trong năm số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương.

Bài 66. Trong mặt phẳng cho 2020 điểm mà diện tích của mọi tam giác với các đỉnh là các điểm đã cho không lớn hơn 1. Chứng minh rằng trong số các điểm đã cho có thể tìm được ít nhất 253 điểm nằm trong hoặc nằm trên cạnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn $\frac{1}{2}$

Bài 67. Cho một hình chữ nhật có diện tích bằng 1. Năm điểm phân biệt được đặt tùy ý vào hình chữ nhật sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng (mỗi điểm trong năm điểm đó có thể được đặt trên cạnh hoặc đặt trong hình chữ nhật)

a) Chứng minh mọi tam giác tạo bởi ba điểm trong năm điểm đã cho đều có diện tích không vượt quá $\frac{1}{2}$

b) Với mỗi cách đặt năm điểm vào hình chữ nhật như trên, gọi N là số tam giác có ba đỉnh là ba điểm trong năm điểm đó và có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của N

Bài 68.

a) Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = a$. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABC, ABD. Chứng minh rằng $\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = \frac{4}{a^2}$

b) Cho đa giác đều có 2021 đỉnh, sao cho mỗi đỉnh của đa giác đó chỉ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của đa giác đã cho là các đỉnh của một tam giác cân mà các đỉnh đó được tô cùng một màu

Bài 69. Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 2021. Xét điểm M thay đổi trên đường chéo AC, gọi E, F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M lên các cạnh AB, BC của hình vuông $ABCD$. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác DEF

ĐÁP ÁN TỪ BÀI 51 ĐẾN BÀI 69

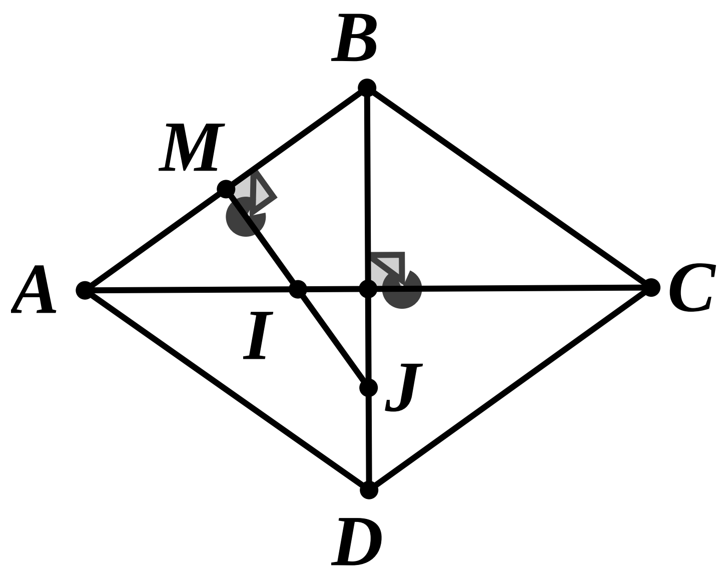
Bài 51.

Bổ đề: Lấy 3 điểm trong một hình bình hành, khi đó tam giác tạo bởi 3 điểm đó có diện tích bé hơn hoặc bằng nửa diện tích hình bình hành

Áp dụng: Gọi O là tâm của lục giác đều, khi đó lục giác chia thành 3 hình bình hành là $ABCO, CDEO, EFAO$. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một hình bình hành chứa ít nhất 3 điểm và theo bổ đề 3 điểm này tạo thành tam giác có diện tích nhỏ hơn nửa diện tích hình bình hành, hay diện tích không lớn hơn $337cm^2$

Bài 52.

a) Chứng minh rằng $R_1 + R_2 \ge a\sqrt{2}$



Gọi M là trung điểm của cạnh AB.Đường trung trực của đoạn AB cắt các đường AC và BD lần lượt tại I và J.Khi đó I, J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABD, ABC

Dễ thấy $\Delta MAI \quad \Delta MJB (g.g) \Rightarrow \dfrac{MA}{AI} = \dfrac{MJ}{JB} \Rightarrow \dfrac{MA}{R_2} = \dfrac{MJ}{R_1}$

$$\Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} = \frac{MJ^2}{R_1^2} \Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} = \frac{JB^2 - MB^2}{R_1^2}$$

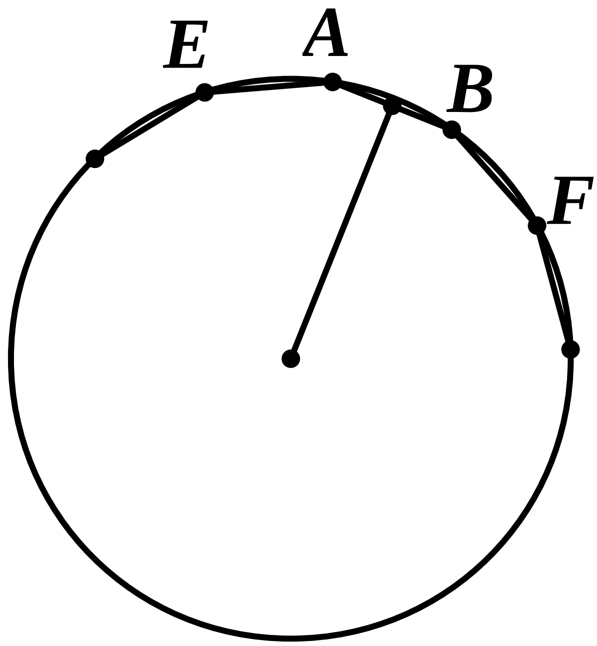
$$\Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} = \frac{R_1^2 - MB^2}{R_1^2} \Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} + \frac{MB^2}{R_1^2} = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{4R_1^2} + \frac{a^2}{4R_2^2} = 1$$

Khi đó $1 = \dfrac{a^2}{4R_1^2} + \dfrac{a^2}{4R_2^2} \ge 2\sqrt{\dfrac{a^2}{4R_1^2} \cdot \dfrac{a^2}{4R_2^2}} = \dfrac{a^2}{2R_1R_2} \Rightarrow R_1R_2 \ge \dfrac{a^2}{2}$

Do đó $R_1 + R_2 \ge 2\sqrt{R_1R_2} \ge 2\sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = a\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow R_1 = R_2$ hay tứ giác $ABCD$ là hình vuông

b)



Đa giác đã cho là đa giác đều nên đa giác đó nội tiếp đường tròn tâm O. Do 2021 là số lẻ nên tồn tại 2 đỉnh kề nhau tô cùng màu. Giả sử hai đỉnh đó là A, B và cùng tô màu đỏ

Cũng do đa giác đã cho đều và có số đỉnh lẻ nên tồn tại đỉnh M của đa giác nằm trên đường trung trực đoạn $AB \Rightarrow \Delta MAB$ cân. Ta xét 2 khả năng xảy ra :

+) Khả năng 1: Nếu M tô màu đỏ $\Rightarrow dfcm$

+)Khả năng 2: nếu M tô màu xanh

Gọi E, F là các đỉnh kề của A và B, có :

$EA = AB = BF \Rightarrow EF // AB \Rightarrow \Delta MEF$ cân tại M.Khi đó,

- Nếu E, F màu xanh $\Rightarrow \Delta MEF$ cân và thỏa mãn bài toán
- Nếu một trong hai đỉnh E, F màu đỏ, giả sử E màu đỏ $\Rightarrow \Delta EAB$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy luôn tồn tại 3 đỉnh của đa giác đều đã cho lập nên một tam giác cân có các đỉnh cùng màu.

Bài 53.

Tách $2013 = 3.11.61$ trong đó $3, 11, 61$ đôi một nguyên tố cùng nhau

Sử dụng điều kiện chia hết cho đồng thời 3 và 11, đó là những số có số chữ số là bội của 6

Đó là những số 777777 (6 chữ số), 777777777777 (12 chữ số ,….,777…77 (996 chữ số)

Số số hạng của dãy trên là : $(996-6):6+1=166$

Khi chia 166 số trên cho 61 thì có 166 số dư, mà số dư của các phép chia này chỉ nhận 61 giá trị từ 0 đến 60, nên theo nguyên lý Dirichlet sẽ tồn tại 2 số trong dãy trên có cùng số dư khi chia cho 61 $\Rightarrow$ hiệu của hai số đó chia hết cho 61.

Hiệu của hai số có dạng $77...7.10^n$ (có k số 7, $6 \le k \le 990$)

Mà $(10^n, 61)=1$ suy ra $77...7$ chia hết cho 61

Vậy trong 1000 số đã cho tồn tai ít nhất một số chia hết cho 2013.

Bài 54.

Gọi A_i, A_j là hai điểm xa nhau nhất trong các điểm thuộc tập hợp 2020 điểm đã cho.

Giả sử A_k là điểm cách xa đoạn thẳng A_iA_j nhất. Khi đó tam giác $A_iA_jA_k$ là tam giác có diện tích lớn nhất không lớn hơn 1.

Vẽ các đường thẳng đi qua các điểm A_i, A_j, A_k lần lượt song song với các cạnh của $\Delta A_iA_jA_k$.

Ta được 4 tam giác nhỏ bằng nhau và một tam giác lớn chứa cả 4 tam giác nhỏ. Tam giác lớn có diện tích không quá 4 đơn vị. Do đó, tam giác lớn chứa tất cả 2020 điểm đã cho.

Ta có 2020 chia cho 4 được 505 như vậy có ít nhất 1 trong 4 tam giác có 1 tam giác có diện tích nhỏ hơn 1 chứa ít nhất 505 điểm trong 2020 điểm đã cho .

Chia tam giác đó thành 2 tam giác có diện tích bằng nhau. Ta có 505 chia cho 2 được 252 dư 1 nên theo nguyên tắc Dirichlet suy ra có 1 tam giác có diện tích nhỏ hơn $\frac{1}{2}$ chứa 253 điểm trong 2020 điểm đã cho .

1) ***Bài 55.*** Giả sử các số trên bảng đang là $a_1, a_2, ..., a_k$. Ta cho tương ứng bảng này với tích $(2a_1-1)(2a_2-1).....(2a_k-1)$

Sau mỗi lần biến đổi, tích trên bị mất đi hai thừa số $(2a-1)(2b-1)$ nhưng lại được thêm vào thừa số $2(a+b-2ab)-1=-(2a-1)(2b-1)$

Do đó, tích trên có giá trị tuyệt đối không thay đổi, chỉ đổi dấu

Vì tích ban đầu bằng 0 (do có chứa thừa số $\left(2.\frac{1010}{2020}-1\right)$ nên số cuối cùng s cũng phải có tích bằng 0 nghĩa là tích cuối cùng bằng $2s-1=0 \Leftrightarrow s=\frac{1}{2}$

Bài 56.

Xét ngũ giác đều $ABCDE,$ ta nhận thấy ba đỉnh bất kỳ của ngũ giác luôn tạo thành một tam giác cân.

Do đó khi tô 5 đỉnh bởi đủ 3 loại màu đã cho thì tồn tại 2 khả năng :

- Nếu tô 5 đỉnh bởi đủ 3 loại màu đã cho thì tồn tại 3 đỉnh có màu khác nhau và tạo thành một tam giác cân.
- Nếu tô 5 đỉnh bởi nhiều nhất 2 màu thì có ít nhất 3 đỉnh cùng màu và tạo thành một tam giác cân

Vậy, luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân có 3 đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó có cùng một màu hoặc đôi một khác nhau.

Bài 57. Tổng tất cả các số ban đầu trên bảng $S=1+2+3+....+99+100=5050$

Qua mỗi bước ta thấy tổng giảm đi 2

Lúc đầu tổng $S=5050$, sau 99 bước số còn lại sẽ là $5050-2.99=4852$

Bài 58. Gọi $a_i \in \mathbb{N}^*, i=1,......7$ là số con cá mỗi người câu được

Giả sử $a_1<a_2<a_3<.....<a_7$

*Trường hợp 1: $a_4 \le 14$

Khi đó $a_1+a_2+a_3+a_4 \le 14+13+12+11=50 \Rightarrow a_5+a_6+a_7 \ge 50$

* Trường hợp 2: $a_4>14$, khi đó $a_5+a_6+a_7 \ge 16+17+18=51$

Vậy $a_5+a_6+a_7 \ge 50$

Bài 59.

Ta xếp các đoạn thẳng có độ dài tăng dần $a_1 \le a_2 \le .... \le a_7$. Nếu tồn tại 3 đoạn thẳng $a_k; a_{k+1}; a_{k+2}$ thỏa mãn $a_k+a_{k+1}>a_{k+2}$ thì 3 đoạn thẳng này có thể lập thành một tam giác.

Giả sử ngược lại :

$a_1+a_2 \le a_3; a_2+a_3 \le a_4; a_3+a_4 \le a_5; a_4+a_5 \le a_6; a_5+a_6 \le a_7$

Khi đó theo giả thiết :

$a_1 > 10; a_2 > 10 \Rightarrow a_3 > 20 \Rightarrow a_4 > 30 \Rightarrow a_5 > 50 \Rightarrow a_6 > 80 \Rightarrow a_7 > 130$

$\Rightarrow$ Mâu thuẫn với giả thiết cho độ dài mỗi đoạn thẳng nhỏ hơn 100.

Vậy tồn tại 3 đoạn thẳng $a_k; a_{k+1}; a_{k+2}$ mà $a_k + a_{k+1} > a_{k+2}$. Do đó tồn tại 3 đoạn thẳng để có thể ghép thành tam giác

Bài 60.

Ta đã biết số chính phương hoặc chia hết cho 4, hoặc chia hết cho 4 dư 1

Xét tập $S = \{a;b;c\}$ thỏa yêu cầu

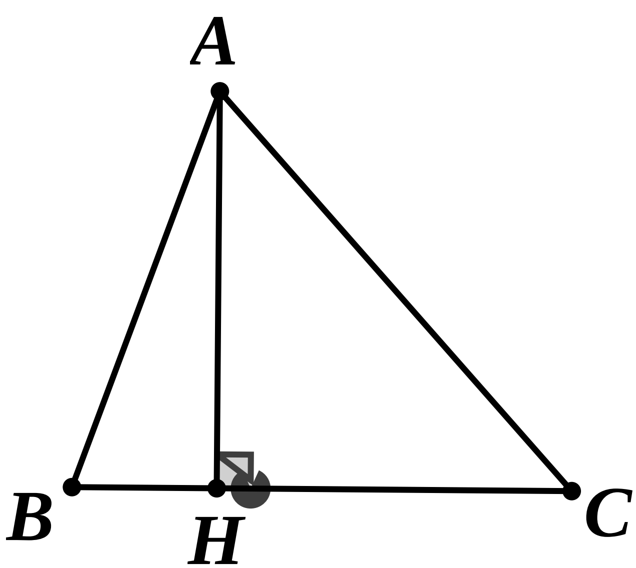
*) Nếu a,b,c là các số lẻ thì $(a+b)\vdots 4, (b+c)\vdots 4$ và $(a+c)\vdots 4$

Khi đó $a+b+b-c-(a+c) = 2b\vdots 4$, suy ra b là số chẵn (mâu thuẫn với b lẻ)

- Nếu a,b là các số lẻ và c chẵn thì $(a+b)\vdots 4, (b+c)-(a+c)\vdots 4$

Khi đó $a+b+(b+c)-(a+c) = 2b\vdots 4 \Rightarrow b$ là số chẵn (mâu thuẫn với b lẻ)

Bài 61.



Kẻ $AH \perp BC$. Ta có $AB < 1, AC < 1, BC < 1 \Rightarrow \begin{cases} AH < 1 \\ BH \le \dfrac{BC}{2} \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ABH. Ta có:

$AH^2 + BH^2 = AB^2$

Mà $AB^2 < 1 \Rightarrow AH^2 + BH^2 < 1 \Rightarrow AH^2 < 1 - BH^2$

$\Rightarrow AH^2 < 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow AH < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC < \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy tất cả các cạnh của một tam giác nhỏ hơn 1 thì diện tích tam giác nhỏ hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Bài 62.

1) Giả sử bộ 69 số đó là $1 \le a_1 < a_2 < a_3 < ...... < a_{69} \le 100$. Suy ra $a_1 \le 32; a_3 \ge 3$ và $a_2 \ge 2$. Khi đó suy ra

•$4 \le a_1 + a_3 < a_1 + a_4 < ...... < a_1 + a_{69} \le 132(1)$; dãy này có 67 số hạng

•$1 \le a_3 - a_2 < a_4 - a_2 < ..... < a_{69} - a_2 \le 98(2)$: dãy này có 67 số hạng

Do đó dãy (1) và dãy (2) có 134 số hạng nhận các giá trị từ 1 đến 132 (có 132 giá trị). Theo nguyên tắc Dirichlet suy ra có ít nhất 2 số hạng bằng giá trị nhau.

Giả sử $a_1 + a_m = a_n - a_2$ (với $3 \le m, n \le 69$ và $m, n \in \mathbb{N}^*$), $suy\, ra\, a_1 + a_2 + a_m = a_n$

Vậy từ 69 số nguyên dương phân biệt không vượt quá 100 luôn chọn được 4 số sao cho trong chúng có 1 số bằng tổng của 3 số còn lại.

Bài 63.

- Giả sử số gạch đi là chữ số hàng đơn vị, ta có $\overline{xc} = 31x\,(x \in \mathbb{N})$

  $\Leftrightarrow 10x + c = 31x \Leftrightarrow 21x = c$

Do $0 \le c \le 9$. VT$\ge 21, VP \le 9$. Vô lý

- Giả sử số gạch đi là chữ số hàng chục, ta có :

  $\overline{xbc} = 31\overline{xc}$ với $x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 210x + 3\overline{bc} = 10a$

Lập luận tương tự để chỉ ra $x = 0, 10a = 3\overline{bc} \Rightarrow \overline{bc} \,\vdots\, 10, a \,\vdots\, 3 \Rightarrow a \in \{3;6;9\}$

Ta có các số $310; 620; 930$

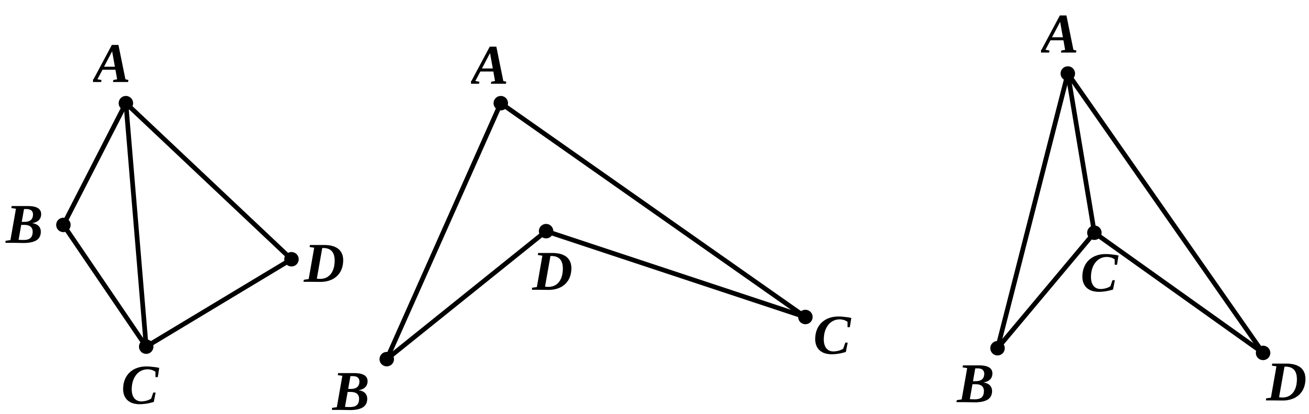
- Tiếp tục quá trình trên, ta tìm được các số dạng :

$31.10^k; 62.10^k; 93.10^k \left(k = 0;1;2;3;.....\right)$

Bài 64.

1) Chia lục giác đều cạnh bằng 1 thành 6 tam giác đều có cạnh bằng 1, có 19 điểm nằm trong lục giác đều nên theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất một tam giác chứa 4 điểm trong 19 điểm đã cho. Dễ thấy 4 điểm này đều nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh 1 có bán kính $R = \dfrac{\sqrt{3}}{3} < \dfrac{3}{5}$

Trường hợp 1: Giả sử 4 điểm đó là A, B, C, D tạo thành một tứ giác lồi (hình 3.1), suy ra có ít nhất một góc nhỏ hơn hoặc bằng $90°$; giả sử đó là $\angle BAD \le 90°$ $\Rightarrow \angle BAC + \angle CAD \le 90° \Rightarrow$ trong hai góc $\angle BAC, \angle CAD$ có ít nhất một góc nhỏ hơn hoặc băng $45°$. Giả sử $\angle BAC \le 45°$ suy ra tam giác ABC thỏa mãn một góc không lớn hơn $45°$



Hình 3.1 *Hình 3.2* *Hình 3.3*

Trường hợp 2: Giả sử 4 điểm đó tạo thành các hình 3.2 và 3.3

+)Nếu $\angle BDC \ge 90° \Rightarrow \angle CBD + \angle BCD \le 90°$ thì một trong hai góc $\angle CBD, \angle BCD$ có số đo không lớn hơn $45°$. Giả sử $\angle CBD \le 45°$ suy ra tam giác BCD thỏa mãn có một góc không lớn hơn $45°$

+) Nếu $\angle BCD < 90° \Rightarrow \angle BAD < 90°$ thì trong hai góc $\angle BAC, \angle CAD$ có một góc không lớn hơn $45°$. Giả sử $\angle BAC \le 45°$ suy ra tam giác ABC thỏa mãn có một góc không lớn hơn $45°$

Như vậy từ các trường hợp trên, ta suy ra $dfcm$

Bài 65.

Gọi các số đã cho là a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, vì các số này không có ước số nguyên tố nào khác 2 và 3 nên các số này đều có dạng $a_i = 2^{x_i}.3^{y_i}$ với x_i, y_i là các số tự nhiên

Xét 5 cặp số $(x_i; y_i);(x_2; y_2);(x_3; y_3);(x_4; y_4);(x_5; y_5)$, mỗi cặp số này nhận giá trị một trong bốn trường hợp sau: (số chẵn; số chẵn), (số chẵn; số lẻ), (số lẻ; số chẵn), (số lẻ; số lẻ)

Nên theo nguyên lý Dirichlet thì có ít nhất hai cặp số trên cùng một dạng giá trị.

Không mất tính tổng quát khi giả sử $(x_1; y_1);(x_2; y_2)$ cùng nhận giá trị dạng (số chẵn; số lẻ)

Khi đó $x_1 + x_2; y_1 + y_2$ đều là số chẵn nên $a_1a_2 = 2^{x_1}.3^{y_1}.2^{x_2}.3^{y_2} = 2^{x_1+x_2}.3^{y_1+y_2}$ là số chính phương. Do đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 66.

Gọi A_i, A_j là hai điểm xa nhau nhất trong các điểm thuộc tập hợp 2020 điểm đã cho.

Giả sử A_k là điểm cách xa đoạn thẳng A_iA_j nhất. Khi đó tam giác $A_iA_jA_k$ là tam giác có diện tích lớn nhất không lớn hơn 1.

Vẽ các đường thẳng đi qua các điểm A_i, A_j, A_k lần lượt song song với các cạnh của $\Delta A_iA_jA_k$.

Ta được 4 tam giác nhỏ bằng nhau và một tam giác lớn chứa cả 4 tam giác nhỏ. Tam giác lớn có diện tích không quá 4 đơn vị. Do đó, tam giác lớn chứa tất cả 2020 điểm đã cho.

Ta có 2020 chia cho 4 được 505 như vậy có ít nhất 1 trong 4 tam giác có 1 tam giác có diện tích nhỏ hơn 1 chứa ít nhất 505 điểm trong 2020 điểm đã cho .

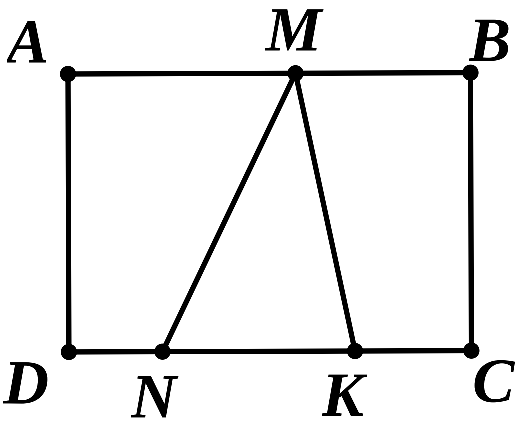
Chia tam giác đó thành 2 tam giác có diện tích bằng nhau. Ta có 505 chia cho 2 được 252 dư 1 nên theo nguyên tắc Dirichlet suy ra có 1 tam giác có diện tích nhỏ hơn $\frac{1}{2}$ chứa 253 điểm trong 2020 điểm đã cho .

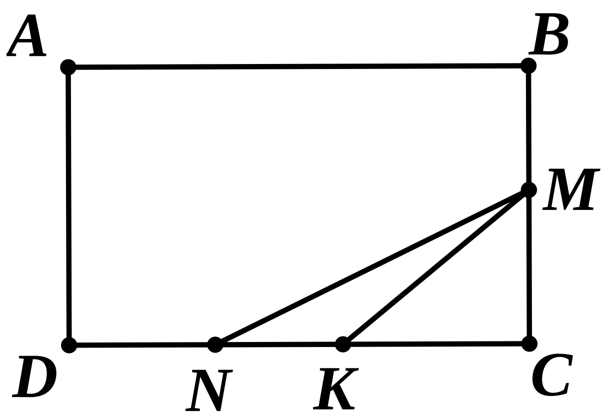
Bài 67.

(a) Xét tam giác MNK nằm trong hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 1. Qua các đỉnh M, N, K kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình chữ nhật $ABCD$ ta sẽ tạo ra một hình chữ nhật $A'B'C'D'$ chứa tam giác MNK mà $S_{A'B'C'D'} \le S_{ABCD}$. Điều này có nghĩa là ta chỉ cần xét tình huống ba đỉnh M, N, K nằm trên các cạnh của hình chữ nhật $ABCD$. Có hai khả năng sau :

Trường hợp 1. Hai trong ba điểm M, N, K cùng thuộc một cạnh, giả sử là N, K thuộc CD. Khi đó M nằm trên một trong ba cạnh còn lại. Ta thấy :

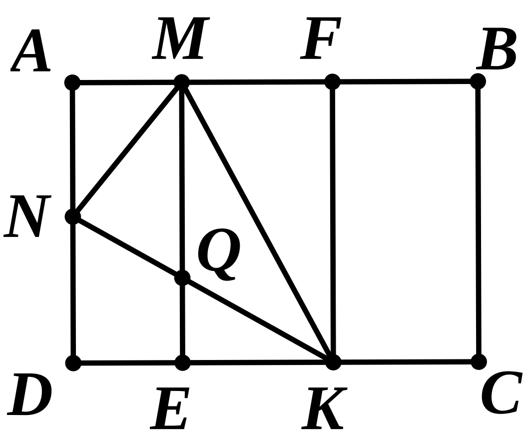
$$S_{MNK}=\frac{1}{2}d\left(M,CD\right).NK\le\frac{1}{2}BC.CD=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{2}$$

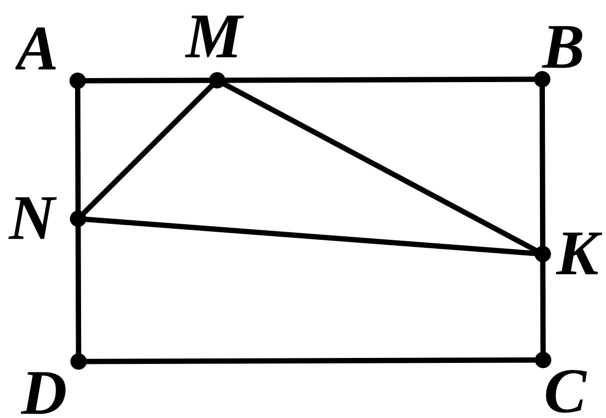




Trường hợp 2. Ba điểm M,N,K thuộc ba cạnh khác nhau của $ABCD$. Giả sử M,N,K thuộc các cạnh tương ứng AB,AD,CD. Không mất tổng quát, giả sử K gần cạnh BC nhất. Qua K kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại E và qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt CD,NK tương ứng tại E,Q. Khi đó

$$S_{MNK}=S_{MNQ}+S_{MKQ}\le\frac{1}{2}S_{AMED}+\frac{1}{2}S_{MEKF}=\frac{1}{2}S_{ADKF}\le\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{2}$$





Tóm lại thì trong mọi tình huống ta đều có $S_{MNK}\le\frac{1}{2}$

(b) Gọi I,J tương ứng là trung điểm của AB,CD. Theo nguyên lý chuồng thỏ thì tồn tại một trong hai hình $AIJD$ hoặc $BIJC$ chứa ít nhất 3 trong 5 điểm đã cho. Không mất tổng quát giả sử $BIJC$ chứa ít nhất 3 trong 5 điểm đã cho.

Theo câu a) thì diện tích của tam giác Δ_1 tạo bởi ba điểm này không vượt quá diện tích của hình chữ nhật $BIJC$, mà $S_{BIJC}=\frac{1}{2}$ nên diện tích tam giác Δ_1 không vượt quá $\frac{1}{4}$

Tương tự như vậy, gọi K,L lần lượt là trung điểm của AD,DC. Cũng theo nguyên lý chuồng thỏ thì tồn tại một trong hai hình $AKLB$ hoặc $DKLC$ chứa ít nhất 3 trong 5 điểm đã cho.

Không mất tính tổng quát, giả sử hình $DKLC$ chứa ít nhất 3 trong 5 điểm đã cho. Lập luận tương tự như trên thì diện tích tam giác Δ_2 tạo bởi ba điểm này cũng không vượt quá $\frac{1}{4}$.

Đến đây có hai khả năng xảy ra như sau :

Trường hợp 1: Hai tam giác Δ_1 và Δ_2 khác nhau. Khi đó thì ta được $N\ge 2$

Trường hợp 2: Hai tam giác Δ_1,Δ_2 trùng nhau, giả sử đó là tam giác XYZ. Khi đó tam giác XYZ phải nằm trong hình chữ nhật CJOL (với O là giao điểm của IJ và KL). Gọi U, V là hai điểm còn lại. Nếu một trong hai điểm U,V nằm trong hình chữ nhật $CJOL$, giả sử là điểm U, thì khi dó hai tam giác XYZ và UYZ có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4}$. Nếu một trong hai điểm U,V nằm trong hình chữ nhật $KOJD$, giả sử là điểm U, thì khi đó ta có $S_{UXY}\le\frac{1}{2}S_{KLCD}=\frac{1}{4}$.

Như vậy hai tam giác UXY và XYZ có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4}$. Ta cũng chứng minh tương tự cho trường hợp một trong hai điểm U,V nằm trong hình chữ nhật $BIOL$. Cả ba khả năng trên đều có $N\ge 2$

Ta xét trường hợp cả hai điểm U,V đều nằm trong hình chữ nhật $AIOK$. Xét bao lồi của 5 điểm X,Y,Z,U,V. Do cả 5 điểm đã cho nằm trong hình lục giác $AILCJK$ nên diện tích của hình bao lồi này không vượt quá $S_{AILCJK}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$. Ta xét các khả năng sau :

Khả năng 1. Bao lồi của 5 điểm X,Y,Z,U,V là một ngũ giác. Giả sử đó là ngũ giác $XYZUV$ (xem hình vẽ). Khi đó

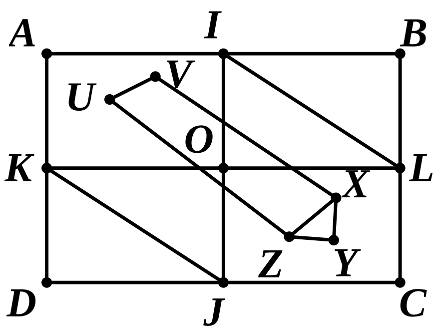
$$S_{UYZ}+S_{UXY}+S_{XUV}=S_{XYZUV}\le\frac{3}{4}$$

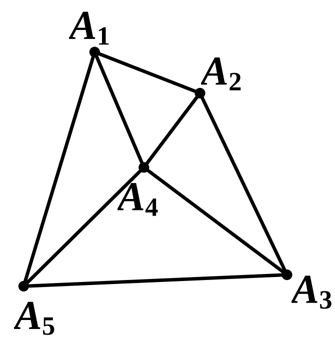
Do vậy, ít nhất một trong ba tam giác UYZ,UXY,XUV có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4}$. Tính thêm cả tam giác XYZ thì ta có $N\ge 2$

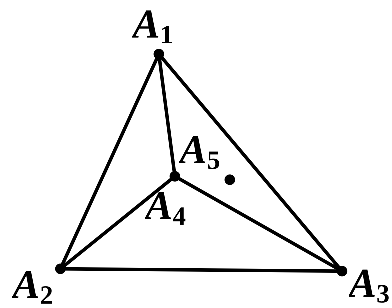
Khả năng 2: Bao lồi của 5 điểm X,Y,Z,U,V là một tứ giác. Giả sử đó là tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ với điểm A_5 nằm trong tứ giác $A_1A_2A_3A_4$, trong đó $A\in\{X,Y,Z,U,V\}, i=1,.....,5.$ Khi đó ta có :

$$S_{A_5A_1A_2}+S_{A_5A_2A_3}+S_{A_5A_3A_4}+S_{A_5A_1A_4}=S_{A_1A_2A_3A_4}\le\frac{3}{4}$$

Do vậy, ít nhất hai trong bốn tam giác $S_{A_5A_1A_2},S_{A_5A_2A_3},S_{A_5A_3A_4},S_{A_5A_1A_4}$ có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4}$. Như vậy, $N\ge 2$





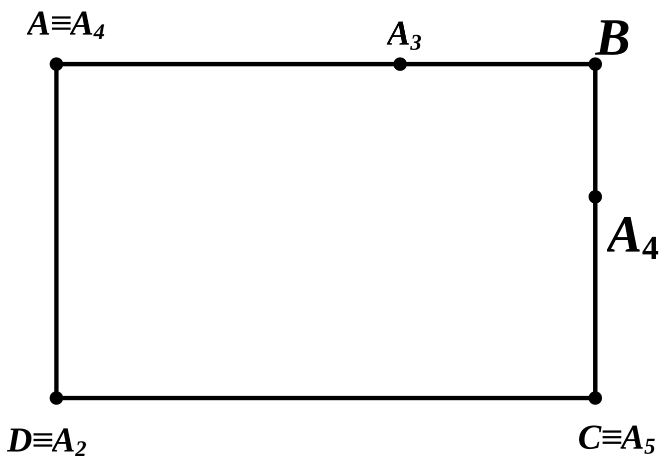


Khả năng 3. Bao lồi của 5 điểm X,Y,Z,U,V là một tam giác. Giả sử đó là tam giác $A_1A_2A_3$ với hai điểm A_4,A_5 nằm trong $\Delta A_1A_2A_5$, trong đó $A\in\{X,Y,Z,U,V\}, i=1,....,5$. Khi đó ta có :

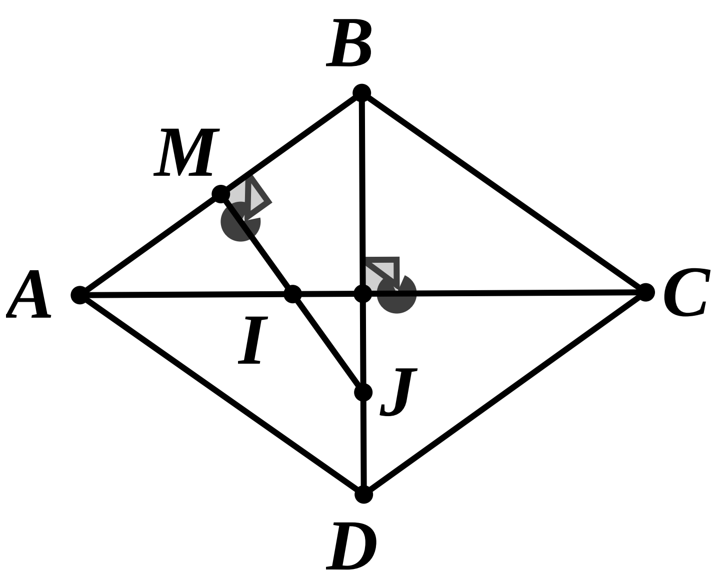
$$S_{A_1A_2A_3}+S_{A_1A_2A_4}+S_{A_1A_2A_5}=S_{A_3A_4A_5}\le\frac{3}{4}$$

Do vậy, ít nhất một trong ba tam giác $S_{A_1A_2A_3},S_{A_1A_2A_4},S_{A_1A_2A_5},S_{A_3A_4A_5}$ có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4}$. Tương tự ít nhất một trong ba tam giác $A_5A_1A_2, A_5A_2A_3, A_5A_3A_1$ có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4}$. Như vậy, ta sẽ có ít nhất hai tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4}$

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có $N\ge 2$. Một ví dụ để dấu bằng xảy ra là đặt 5 điểm đã cho như hình vẽ dưới đây, trong đó $AA_3=\frac{3}{5}AB, BA_4=\frac{2}{5}BC$



Bài 68.



a) Gọi M là trung điểm của AB. Đường trung trực của AB cắt các đường AC, BD lần lượt tại I, J. Khi đó I, J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABD và ABC

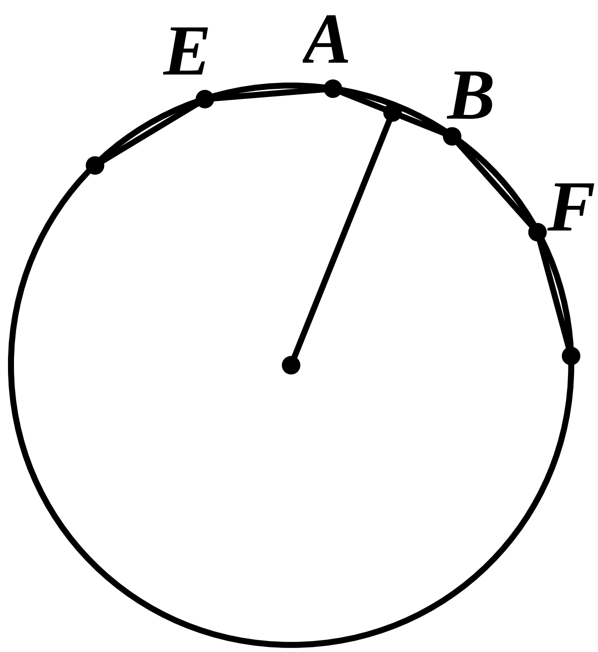
Dễ thấy $\Delta MAI \quad \Delta MJB(g.g) \Rightarrow \dfrac{MA}{AI} = \dfrac{MJ}{JB}$

$$\Rightarrow \frac{MA}{R_2} = \frac{MJ}{R_1} \Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} = \frac{MJ^2}{R_1^2} \Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} = \frac{JB^2 - MB^2}{R_1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} = \frac{R_1^2 - MB^2}{R_1^2} \Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} + \frac{MB^2}{R_1^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4R_1^2} + \frac{a^2}{4R_2^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = \frac{4}{a^2}$$

b)



Đa giác đã cho là đa giác đều nên đa giác đó nội tiếp đường tròn tâm O. Do 2021 là số lẻ nên tồn tại 2 đỉnh kề nhau tô cùng màu. Giả sử hai đỉnh đó là A, B và cùng tô màu đỏ

Cũng do đa giác đã cho đều và có số đỉnh lẻ nên tồn tại đỉnh M của đa giác nằm trên đường trung trực đoạn $AB \Rightarrow \Delta MAB$ cân. Ta xét 2 khả năng xảy ra :

+) Khả năng 1: Nếu M tô màu đỏ $\Rightarrow dfcm$

+)Khả năng 2: nếu M tô màu xanh

Gọi E, F là các đỉnh kề của A và B, có :

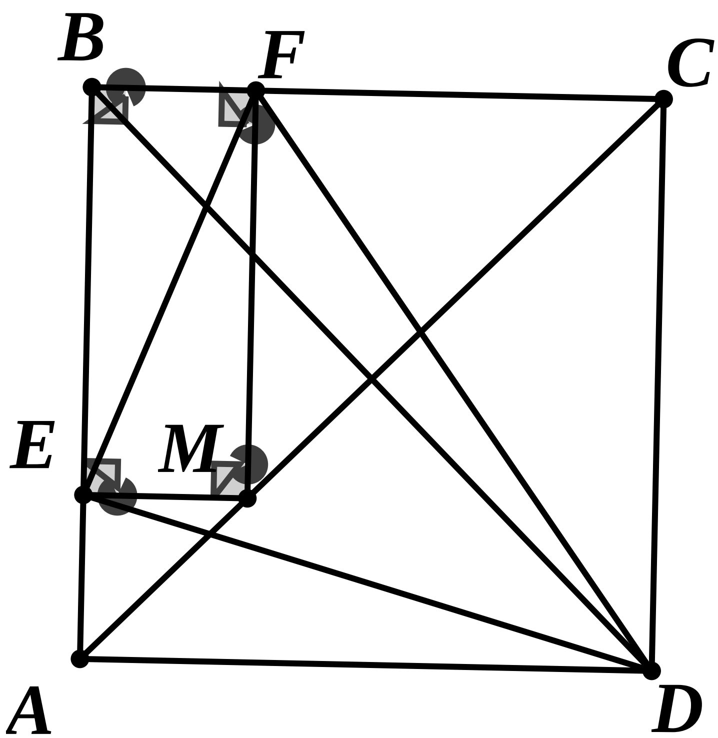
$EA = AB = BF \Rightarrow EF // AB \Rightarrow \Delta MEF$ cân tại M.Khi đó,

- Nếu E, F màu xanh $\Rightarrow \Delta MEF$ cân và thỏa mãn bài toán
- Nếu một trong hai đỉnh E, F màu đỏ, giả sử E màu đỏ $\Rightarrow \Delta EAB$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy luôn tồn tại 3 đỉnh của đa giác đều đã cho lập nên một tam giác cân có các đỉnh cùng màu.

Bài 69.

a)



$$S_{DEF} = S_{DEM} + S_{DMF} + S_{MEF}$$

$$S_{DEM} = S_{AEM}\left(=\frac{1}{2}AE.EM\right), S_{DMF} = S_{MFC}\left(=\frac{1}{2}FC.FM\right)$$

$$\Rightarrow S_{DEF} = S_{AEFC} = S_{ABC} - S_{BEF} = \frac{1}{2}S_{ABCD} - \frac{1}{2}BE.BF$$

Do $BE.BF \le \left(\dfrac{BE+BF}{2}\right)^2$, đẳng thức xảy ra khi $BE = BF$

$$BE.BF \le \left(\frac{BE+BF}{2}\right)^2 = \left(\frac{BE+EA}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4} = \frac{1}{4}S_{ABCD}\,(BF = EM = EA)$$

$$\Rightarrow S_{DEF} \ge \frac{1}{2}S_{ABCD} - \frac{1}{8}S_{ABCD} = \frac{3}{8}S_{ABCD} = \frac{6063}{8}$$

$S_{DEF} = \frac{6063}{8} \Leftrightarrow M$ là trung điểm AC

Vậy $Min\, S_{DEF} = \frac{6063}{8} \Leftrightarrow M$ là trung điểm AC