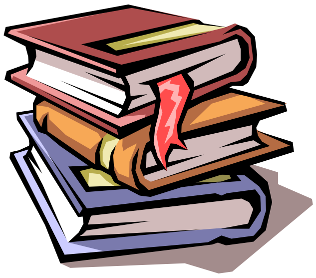
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



TOÀN CẢNH 15 BẤT ĐẲNG THỨC VÀO LỚP 10 CHUYÊN 2009-2024

Tài liệu sưu tầm, ngày 15 tháng 8 năm 2023

BẤT ĐẲNG THỨC LUYỆN THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN 2023-2024

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm 2023-2024)*

Với các số thực dương a,b,c thay đổi thoả mãn $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{\sqrt{(1+8a^3)(1+8b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+8b^3)(1+8c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+8c^3)(1+8a^3)}}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta được:

$$\sqrt{1+8a^3}=\sqrt{(1+2a)(1-2a+4a^2)}\le\frac{1+2a+1-2a+4a^2}{2}=2a^2+1.$$

Tương tự, ta có: $\sqrt{1+8b^3}\le 2b^2+1;\sqrt{1+8c^3}\le 2c^2+1.$

Do đó: $P\ge\dfrac{a^2}{(2a^2+1)(2b^2+1)}+\dfrac{b^2}{(2b^2+1)(2c^2+1)}+\dfrac{c^2}{(2c^2+1)(2a^2+1)}$

Tiếp theo ta chứng minh: $\dfrac{a^2}{(2a^2+1)(2b^2+1)}+\dfrac{b^2}{(2b^2+1)(2c^2+1)}+\dfrac{c^2}{(2c^2+1)(2a^2+1)}\ge\dfrac{1}{3}(*)$

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow 3\left(2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+a^2+b^2+c^2\right)\ge(2a^2+1)(2b^2+1)(2c^2+1)$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 9.$$

Điều này hiển nhiên đúng do $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}=3$ và $a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3.$

Vậy GTNN của $P=\dfrac{1}{3}$ đạt tại $a=b=c=1$

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2023-2024)*

Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện x + y + z = xyz. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$.

Lời giải

Từ giả thiết x + y + z = xyz, ta có $\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{yz}=\dfrac{1}{xz}=1.$

Dặt $a=\dfrac{1}{x};b=\dfrac{1}{y};c=\dfrac{1}{z}\Rightarrow a,b,c>0;$

Giả thiết trở thành ab + bc + ca = 1; $P=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}$

Để ý rằng:

$a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$

$b^2+1=b^2+ab+bc+ca=(b+a)(b+c)$

$c^2+1=c^2+ab+bc+ca=(c+a)(c+b)$

Lúc này ta có:

$$P=\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{a+b}}.\sqrt{\frac{a}{a+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+a}}.\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}.\sqrt{\frac{c}{c+b}}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si (AM-GM), ta có:

$$P\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+a}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}\right) \text{ hay } P\le\frac{3}{2}.$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hay $x = y = z = \sqrt{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của $P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{3}$.

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2023-2024)*

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{15}{ab+bc+ca}\ge 6-abc$$

Lời giải

Ta sẽ chứng minh $(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le abc$ (1).

Nếu $(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le 0$ thì (1) đúng

Ta có

$$\left.\begin{array}{l}(3-2a)(3-2b)\le\left(\dfrac{3-2a+3-2b}{2}\right)^2=c^2\\(3-2a)(3-2c)\le\left(\dfrac{3-2a+3-2c}{2}\right)^2=b^2\\(3-2c)(3-2b)\le\left(\dfrac{3-2c+3-2b}{2}\right)^2=a^2\end{array}\right\}\Rightarrow(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le abc\,.$$

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi a = b = c = 1.

Từ (1) ta có $27-9(2a+2b+2c)+3(4ab+4bc+4ca)-8abc\le abc$

$\Leftrightarrow 27-9.6+12(ab+bc+ac)-8abc\le abc$ $(do\ a+b+c=3)$

$\Leftrightarrow abc \ge \frac{4}{3}(ab+bc+ca)-3$

Lúc này

$$abc+\frac{15}{ab+bc+ca} \ge \frac{4}{3}(ab+bc+ca)+\frac{12}{ab+bc+ca}+\frac{3}{ab+bc+ca}-3$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{4}{3}(ab+bc+ca)\frac{12}{ab+bc+ca}}+\frac{9}{(a+b+c)^2}-3=8+1-3=6$$

$Suy\,ra\ \frac{15}{ab+bc+ca} \ge 6-abc\ \ (đpcm).$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Bến Tre năm 2023-2024)*

Cho số thực x thỏa mãn $0<x<\frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$A=\frac{2-x}{1-2x}+\frac{1+2x}{3x}$

Lời giải

Đặt $a=\frac{1}{x}, a>2$. Khi đó $A=\frac{2-\frac{1}{a}}{1-\frac{2}{a}}+\frac{1+\frac{2}{a}}{\frac{3}{a}}=\frac{2a-1}{a-2}+\frac{a+2}{3}=2+\frac{3}{a-2}+\frac{a-2}{3}+\frac{4}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho hai số dương $\frac{3}{a-2}$ và $\frac{a-2}{3}$, ta được

$A \ge 2+2\sqrt{\frac{3}{a-2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{a-2}{3}}+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=5 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$.

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2023-2024)*

Cho $a,\ b,\ c$ là các số dương. Chứng minh:

$$\frac{bc}{2a+b+c}+\frac{ca}{2b+c+a}+\frac{ab}{2c+a+b} \le \frac{a+b+c}{4}.$$

Lời giải

Chứng minh được bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$.

Ta có $\frac{1}{2a+b+c}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{(a+b)+(a+c)} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)$

$\Rightarrow \frac{bc}{2a+b+c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right)$ (1)

Tương tự, ta có

$$\frac{ac}{2b+a+c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{ac}{b+c}+\frac{ac}{b+a}\right) \qquad (2)$$

$$\frac{ab}{2c+a+b} \le \frac{1}{4}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}\right). \qquad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế ta được

$$VT \le \frac{1}{4}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ac}{b+c}+\frac{ac}{b+a}+\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{ca}{a+b}\right)+\left(\frac{bc}{a+c}+\frac{ab}{a+c}\right)+\left(\frac{ca}{b+c}+\frac{ab}{b+c}\right)\right]=\frac{a+b+c}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c.$

Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2023-2024)*

Cho a,b,c là các số thực không nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \le \frac{a+b+c}{4}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} \le \frac{\sqrt{ab-1}}{2\sqrt{bc}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}-\frac{1}{bc}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{c}\left(a-\frac{1}{b}\right)}$$

Lại theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{c}\left(a-\frac{1}{b}\right)} \le \frac{1}{2}.\frac{\frac{1}{c}+a-\frac{1}{b}}{2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+a-\frac{1}{b}\right)$$

Tương tự, ta có: $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{ab-1}}{\dfrac{\sqrt{bc-c}}{c+a}} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{c}+a-\dfrac{1}{b}\right) \\ \dfrac{\sqrt{ca-1}}{a}\left(\dfrac{1}{a}+b-\dfrac{1}{c}\right) \\ \dfrac{\sqrt{c+b}}{4}\left(\dfrac{1}{b}+c-\dfrac{1}{a}\right) \end{cases}$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \le \frac{a+b+c}{4} \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{2}$

Câu 7. *(Trường chuyên tỉnh Cao Bằng năm 2023-2024)*

Với a,b,c là ba số thực dương, chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \ge \frac{a+b+c}{5}.$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh BĐT sau: Với 4 số thực a,b,x,y và $x,y>0$. Ta có:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}\ \text{(2), dấu "=" xảy ra khi } \frac{a}{x}=\frac{b}{y}.$$

Thật vậy, ta viết BĐT (2) dưới dạng:

$a^2y(x+y)+b^2x(x+y)\ge(a+b)^2xy\Leftrightarrow(ay-bx)^2\ge0$ (luôn đúng). Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Áp dụng BĐT (2) hai lần ta được: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

Theo Bổ đề (1) ta có: $\sum_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc}\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}$.

Mặt khác, theo BĐT GM – AM:

$$\sum_{cyc}\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}=\sum_{cyc}\left(\sqrt{3a+2b}\cdot\sqrt{a+4b}\right)\le\sum_{cyc}\frac{(3a+2b)(a+4b)}{2}=5(a+b+c)$$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{5(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{5}$$

Hay $\sum_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}\ge\frac{a+b+c}{5}$ (đpcm).

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Câu 8. *(Trường chuyên T.P Đà Nẵng năm 2023-2024)*

Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn xyz = 1. Chứng minh rằng:

$$2008\left(x^2+y^2+z^2\right)+15\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge2023(x+y+z).$$

Lời giải

+ AB.GM ba số: $x+y+z\ge3\sqrt[3]{xyz}=3$

+ Ta có:

$$2008\left(x^2+y^2+z^2\right)+15\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge2008\frac{(x+y+z)^2}{3}+15.\frac{9}{x+y+z}$$

Đặt $t=x+y+z\ (t\ge3)$, ta phải chứng minh:

$$2008\frac{(x+y+z)^2}{3}+15.\frac{9}{x+y+z}\ge2023(x+y+z)$$

Tức là:

$$2008\frac{t^3}{3}+15.\frac{9}{t}\ge2023t$$

$\Rightarrow\ 2008t^3+405\ge6069t^2$

$\Rightarrow\ (t-3)\left(2008t^2-45t-135\right)\ge0\qquad(1)$

Trong đó

$2008t^2-45t-135$

$=1993t^2+15t^2-45t-135$

$=1993t^2+15t(t-3)-135$

$\geq 1993.3^2+15.3.0-135>0$

$\Rightarrow 2008t^2-45t-135>0$

Tức là (1) đúng

Vậy bài toán được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2023-2024)*

Cho các số thực x,y,z,t thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+t^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=xy+xz+xt+yz+yt+3zt$.

Lời giải

Với mọi số thực $\alpha>0$, ta có

$2\alpha A=2\alpha xy+2\alpha xz+2\alpha xt+2\alpha yz+2\alpha yt+2\alpha 3zt$

$\Leftrightarrow 2\alpha A=\alpha(2xy)+2x(\alpha z)+2x(\alpha t)+2y(\alpha z)+2y(\alpha t)+(2zt)(3\alpha)$

$\Leftrightarrow 2\alpha A\leq \alpha(x^2+y^2)+x^2+(\alpha z)^2+x^2+(\alpha t)^2+y^2+(\alpha z)^2+y^2+(\alpha t)^2+(z^2+t^2)(3\alpha)$

$\Leftrightarrow 2\alpha A\leq(\alpha+2)(x^2+y^2)+(2\alpha^2+3\alpha)(z^2+t^2)$

Do biểu thức trên đúng với mọi số thực $\alpha>0$ nên ta chọn $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Rightarrow \alpha+2=2\alpha^2+3\alpha=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Khi đó $2\alpha A\leq(\alpha+2)(x^2+y^2)+(2\alpha^2+3\alpha)(z^2+t^2)=(\alpha+2)(x^2+y^2+z^2+t^2)$

$\Leftrightarrow A\leq\dfrac{\alpha+2}{2\alpha}=\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$ đạt được khi

$$\begin{cases}x=y\\ z=t\\ x=\alpha z=\alpha t\\ \alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\\ x^2+y^2+z^2+t^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ z=t\\ x=\alpha z=\alpha t\\ \alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\\ x^2+y^2+z^2+t^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{20}}\\ z=t=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{20}}\end{cases}\\ \begin{cases}x=y=-\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{20}}\\ z=t=-\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{20}}\end{cases}\end{array}\right.$$

Câu 10. *(Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2023-2024)*

Cho hai số dương x và y thỏa mãn $x+y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Lời giải

Với hai số không âm a, b, ta chứng minh

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}. \qquad (1)$$

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2). \ (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Thật vậy

$(1) \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

$(2) \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$ (luôn đúng).

Áp dụng (2):

$(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \Rightarrow 4 \leq 2(x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2$.

Áp dụng (1):

$$\frac{x^2 + y^2}{4} + \frac{1}{x^2 + y^2} \geq 2\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4(x^2 + y^2)}} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{4} + \frac{1}{x^2 + y^2} \geq 1.$$

Ta có $\min B = \frac{5}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = 2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$.

Vậy $\min B = \frac{5}{2}$.

Câu 11. *(Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2023-2024)*

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}}.$$

Lời giải

Với $a, b, c > 0$, chứng minh được:

$$\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9\Rightarrow \frac{1}{a+b+c}\le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\left(x+y+z\right)^2\le 3(x^2+y^2+z^2)\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le \sqrt{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}$$

Với $a,b>0$, ta có :

$5a^2+2ab+2b^2=(4a^2+4ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)$

$=(2a+b)^2+(a-b)^2\ge (2a+b)^2$

$\Rightarrow \sqrt{5a^2+2ab+2b^2}\ge \sqrt{(2a+b)^2}=2a+b$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}\le \frac{1}{2a+b}\le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Tương tự: $\dfrac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}\le \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$; $\dfrac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}\le \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{c}+\dfrac{1}{a}\right)$

$$P\le \frac{1}{9}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}+\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Rightarrow P\le \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$

Vậy $\max P=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Câu 12. *(Trường chuyên Tin T.P Hà Nội năm 2023-2024)*

Với các số thực a,b và c thoả mãn $\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)=\left(a-1\right)\left(b-1\right)\left(c-1\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|a|+|b|+|c|$.

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $ab+bc+ac=-1$, có A=$|a|+|b|+|c|$, xét

$A^2=a^2+b^2+c^2+2|ab|+2|bc|+2|ac|$. Theo bất đẳng thức giá trị tuyêt đối , ta có :

$$A^2=\left(a+b+c\right)^2+2\left(|ab|+|bc|+|ac|\right)+2\ge 0+2|ab+bc+ac|+2=4$$

Từ đây kết hợp A ≥ 0 $\Rightarrow$ A $\ge$ 2.Dấu bằng xảy ra nhiều trường hợp, chẳng hạn $\left(a,b,c\right)=\left(0,1,-1\right)$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2.

Câu 13. *(Trường chuyên toán T.P Hà Nội năm 2023-2024)*

Với các số thực không âm a,b và c thỏa mãn $a+2b+3c=1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(a+6b+6c\right)\left(a+b+c\right)$.

Lời giải

Đặt $x=b+c$

$$\begin{cases} 2x=1-a-c\le 1-a \\ 3x=1+b-a\ge 1-a \end{cases}$$

- Tìm GTLN của P

$$P \le (a+3)(1-a)\left(a+\frac{1-a}{2}\right)=\frac{1}{4}(3-2a)(2+2a)\le \frac{1}{4}.\frac{(3-2a+2+2a)^2}{4}=\frac{25}{16}$$

Vậy GTLN của $P=\frac{25}{16}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $c=0, a=\frac{1}{4}, b=\frac{3}{8}$.

- Tìm GTNN của P

$$P \ge [a+2(-a)]\left[a+\frac{1-a}{3}\right]=\frac{1}{3}(2a^2+5a+2)\ge \frac{2}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=0, c=\frac{1}{3}$.

Câu 14. *(Trường chuyên Hà Tĩnh năm 2023-2024)*

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a>b>c; ab+bc+ca>0$ và $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-c}+\frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$.

Lời giải

Ta sử dụng các bất đẳng thức $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\ge \frac{4}{m+n}\ge \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}}$ với $m>0; n>0$

Dấu bằng xảy ra khi $m=n$

$$P=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-c}+\frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$$

$$P\ge \frac{4}{a-c}+\frac{1}{a-c}+\frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}=\frac{5}{a-c}+\frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Lại có: $\frac{5}{a-c}+\frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}\ge 5\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(a-c)^2+4(ab+bc+ca)}}=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)^2+4b(a+c)}}$

$$\Rightarrow P\ge \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(a+c+4b)}}=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}}\quad (do\ a+c=1-b)$$

$$\Rightarrow P\ge \frac{10\sqrt{6}}{\sqrt{(3-3b)(1+3b)}}\ge \frac{10\sqrt{6}}{\frac{3-3b+1+3b}{2}}=5\sqrt{6}$$

Giá trị nhỏ nhất của P bằng $5\sqrt{6}$ khi

$$\begin{cases} a>b>c \\ a+b+c=1 \\ a-b=b-c \\ a-c=2\sqrt{b(a+c)+ca} \\ 3-3b=1+3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>b>c \\ b=\frac{1}{3} \\ a+c=\frac{2}{3} \\ a-c=2\sqrt{\frac{2}{9}+ca} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{2+\sqrt{6}}{6} \\ b=\frac{1}{3} \\ c=\frac{2-\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

Câu 15. *(Trường chuyên Hải Dương năm 2023-2024)*

Cho a,b,c là các số không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\ge\frac{10}{(a+b+c)^2}$$

Lời giải

Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$. Khi đó :

$$c\le a\Rightarrow c^2\le ac\Rightarrow a^2+c^2\le a^2+ac\le\left(a+\frac{c}{2}\right)^2$$

$$c\le b\Rightarrow c^2\le bc\Rightarrow b^2+c^2\le b^2+bc\le\left(b+\frac{c}{2}\right)^2$$

$$a^2+b^2\le\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2$$

$$VT(*)\ge\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}$$

Đặt $x=a+\frac{c}{2};y=b+\frac{c}{2}$. Khi đó $x>0,y>0$ và $x+y=a+b+c$.

Ta có $VT(*)\ge\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}$

$$\ge\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2}{xy}=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}+\frac{3}{2xy}\ge\frac{4}{x^2+y^2+2xy}+\frac{3}{2xy}$$

$$=\frac{4}{(x+y)^2}+\frac{3}{2xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2}+3.\frac{2}{(x+y)^2}=\frac{10}{(x+y)^2}=\frac{10}{(a+b+c)^2}=VP(*)$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}c=0\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\a=b\end{cases}$. Do vai trò của a,b,c bình đẳng nên dấu "=" của $(*)$ xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a,b,c có một số bằng 0 và hai số còn lại bằng nhau.

Câu 16. *(Trường chuyên Hải Phòng năm 2023-2024)*

Cho các số thực $a,\ b,\ c$ thoả mãn $a+b+c=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2a-1}{a^2+2}+\frac{2b-1}{b^2+2}+\frac{2c-1}{c^2+2}.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $ab\ge0$. Khi đó

$$P+3\ge\frac{(a+b+2)^2}{(a+b)^2+4}+\frac{(c+1)^2}{c^2+2}=\frac{(c-2)^2}{c^2+4}+\frac{(c+1)^2}{c^2+2}.$$

Xét BĐT: $\frac{(c-2)^2}{c^2+4}+\frac{(c+1)^2}{c^2+2}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow c^2(c-2)^2\ge0$ (đúng).

Vậy $P\ge\frac{-3}{2}$; dấu đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $a=b=c=0$, $a=b=-1,c=2$. Do đó $P_{\min}=\frac{-3}{2}$

Câu 17. *(Trường chuyên Hòa Bình năm 2023-2024)*

Từ giả thiết $a(a-1)+b(b-1)=ab \Rightarrow a^2+b^2-(a+b)=ab$

$\Rightarrow a^2+b^2=ab+a+b$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: $a^2+b^2 \geq 2ab \Rightarrow ab+a+b \geq 2ab \Rightarrow a+b \geq ab$ (1)

Lại có: $ab+a+b+8=(a^2+4)+(b^2+4) \geq 4a+4b=4(a+b)$

$\Rightarrow ab+8 \geq 3(a+b) \geq 3ab$ (do (1))

$\Rightarrow ab \leq 4$.

Đặt $t=\sqrt{ab} \Rightarrow 0<t\leq 2 \Rightarrow \frac{2}{t} \geq 1 \Rightarrow \frac{4}{t^2} \geq 1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$F=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+2023\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{4}{ab} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b}.\frac{b^2}{a}}+2023.2\sqrt{\frac{1}{ab}}+\frac{4}{ab}=2t+4046.\frac{1}{t}+\frac{4}{t^2}$$

$$F \geq 2t+\frac{8}{t}+2019\cdot\frac{2}{t}+\frac{4}{t^2}.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có $2t+\frac{8}{t} \geq 2\sqrt{2t.\frac{8}{t}}=8$

$\Rightarrow F \geq 8+2019+1=2028$. Vậy $\min F=2028$, đạt khi $a=b=2$.

Câu 18. *(Trường chuyên Hưng Yên năm 2023-2024)*

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn ab+bc+ca = 3abc.

Tìm giá trị lớn nhất của biểuthức T = $\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}}{3\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}^2+\boldsymbol{abc}}}$ + $\sqrt{\frac{\boldsymbol{b}}{3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{c}^2+\boldsymbol{abc}}}$ + $\sqrt{\frac{\boldsymbol{c}}{3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{abc}}}$

Lời giải

Theo bài ra, ta có: a, b, c > 0 và ab + bc + ca = 3abc ⇔ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$

Đặt $\frac{1}{a}$ là x; $\frac{1}{b}$ là y; $\frac{1}{c}$ là z (x, y, z > 0; x + y + z = 3)

Suy ra: $\sqrt{\frac{a}{3b^2c^2+abc}}$ + $\sqrt{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{y^2z^2}+\frac{1}{xyz}}}$ + $\sqrt{\frac{y^2z^2}{x(x+y+z)+yz}}$ = $\sqrt{\frac{y^2z^2}{3x+xy}}$

Suy ra: T ≤ $\frac{1}{2}\left(\frac{yz+zx}{x+y}+\frac{yz+yx}{x+z}+\frac{xy+zx}{y+z}\right)$ = $\frac{1}{2}$ (x + y + z) = $\frac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra ⇔ a = b = c = 1

Câu 19. *(Trường chuyên Khánh Hòa năm 2023-2024)*

a) Chứng minh $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \ge \sqrt{2}(x+y-2)(z-1)$, với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$

$k\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right] \ge |(x+y-2)(z-1)|$.

Lời giải

a) ***Cách 1:***

*) Áp dụng bất đẳng thức B-C-S, ta có:

$$\left[(x-1)^2+(y-1)^2\right]\left[1^2+1^2\right] \ge \left[(x-1).1+(y-1).1\right]^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 \ge \frac{(x+y-2)^2}{2} \qquad (1)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1} \Leftrightarrow x=y$

*) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{(x+y-2)^2}{2}+(z-1)^2 \ge 2\sqrt{\frac{\left[(x+y-2)(z-1)\right]^2}{2}}=\sqrt{2}|(x+y-2)(z-1)| \qquad (2)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{(x+y-2)^2}{2}=(z-1)^2$

*) Mặt khác: $|(x+y-2)(z-1)| \ge (x+y-2)(z-1) \qquad (3)$

(Dấu "=" xảy ra khi $(x+y-2)(z-1)\ge 0$).

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \ge \sqrt{2}(x+y-2)(z-1) \qquad (4)$$

*) Đẳng thức (4) xảy ra khi: $\begin{cases} x=y \\ |x+y-2|=\sqrt{2}|z-1| \\ (x+y-2)(z-1)\ge 0 \end{cases}$

(Chẳng hạn tại $x=y=z=1$)

Cách 2:

Đặt $((x-1), (y-1), (z-1))=(a, b, c)$

Ta có: $VT=a^2+b^2+c^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}+c^2 \ge 2\sqrt{\frac{(a+b)^2.c^2}{2}}=\sqrt{2}|(a+b)c| \ge \sqrt{2}(a+b)c=VP$

Vậy $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \ge \sqrt{2}(x+y-2)(z-1)$ với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{z-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

(Chẳng hạn tại $x=y=z=1$)

b)

Giả sử k là số thực nhỏ nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$k\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]\ge\left|(x+y-2)(z-1)\right| \qquad (*)$

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức $(*)$ cũng đúng khi $x=y$, $|x+y-2|=\left|\sqrt{2}(z-1)\right|$

(Hay $x=y$, $|z-1|=\sqrt{2}|x-1|$)

Do đó: $k\left[2(x-1)^2+2(x-1)^2\right]\ge\left|2(x-1).\sqrt{2}(x-1)\right|$

$\Leftrightarrow 4k(x-1)^2\ge 2\sqrt{2}(x-1)^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

Cho $x=2$, ta được: $4k\ge 2\sqrt{2}\Leftrightarrow k\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

*) Ta chứng minh với mọi $k\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì bất đẳng thức $(*)$ đúng.

Thật vậy:

$$k\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]=\left(k-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]+\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]$$

$$\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]$$

$\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}\left|(x+y-2)(z-1)\right|=\left|(x+y-2)(z-1)\right|$ (theo chứng minh của câu a).

Khi $k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì theo chứng minh câu a ta cũng có bất đẳng thức $(*)$ đúng.

Vậy giá trị k nhỏ nhất cần tìm là $k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 20. *(Trường chuyên Lai Châu năm 2023-2024)*

Cho $a;b;c$ là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Ta có $a+b+c=3\Leftrightarrow 9=(a+b+c)^2\ge 3(ab+ac+bc)\Leftrightarrow ab+ac+bc\le 3$

$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}\le\frac{bc}{\left(a^2+ab+ac+bc\right)}=\frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right)$$

Tương tự ta có : $\dfrac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ac}{a+b}+\dfrac{ac}{b+c}\right)$; $\dfrac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ab}{b+c}+\dfrac{ab}{a+c}\right)$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ac}{a+b}+\frac{ac}{b+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{ab}{a+c}\right)\le\frac{1}{2}(a+b+c)$$

mà $a+b+c=3$ nên $\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\dfrac{ac}{\sqrt{b^2+3}}+\dfrac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\dfrac{3}{2}$

dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$

Vậy $\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{3}{2}$

Câu 21. *(Trường chuyên Lào Cai năm 2023-2024)*

a) Cho a ≥ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=a^2+\frac{2}{3a}$

b) Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c\le 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(3bc+1)^2}{c^2(3ac+1)}+\frac{b(3ca+1)^2}{a^2(3ab+1)}+\frac{c(3ab+1)^2}{b^2(3bc+1)}\ge 12.$$

Lời giải

a) Dự đoán Q đạt giá trị nhỏ nhất tại a=3.

Ta có $Q=a^2\frac{27}{a}+\frac{27}{a}-\frac{160}{3a}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số $a^2;\frac{27}{a};\frac{27}{a}$ ta được:

$$a^2+\frac{27}{a}+\frac{27}{a}\ge 3.\sqrt{a^2.\frac{27}{a}.\frac{27}{a}}=27$$

Mà $a\ge 3\Rightarrow 0<\frac{160}{3a}\le\frac{160}{9}\Rightarrow -\frac{160}{3a}\ge\frac{160}{9}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q= $\frac{83}{9}$ tại a=3.

b) Ta đặt $x=\frac{3ab+1}{b},y=\frac{3bc+1}{c},z=\frac{3ca+1}{a}\Rightarrow x,y,z>0$

Đặt $P=\frac{a(3bc+1)^2}{c^2(3ac+1)}+\frac{b(3ca+1)^2}{a^2(3ab+1)}+\frac{c(3ab+1)^2}{b^2(3bc+1)}\Rightarrow P=\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchuy-Schwarz ta có

$$P\ge\frac{(y+z+x)^2}{x+y+z}=x+y+z(1)$$

Ta có:

$$x+y+z=3a+\frac{1}{b}+3b+\frac{1}{c}+3c+\frac{1}{a}$$

$$=\left(9a+\frac{1}{a}\right)+\left(9b+\frac{1}{b}\right)+\left(9c+\frac{1}{c}\right)-6(a+b+c)\ge 2.\sqrt{9a+\frac{1}{a}}+2.\sqrt{9b+\frac{1}{b}}+2.\sqrt{9c+\frac{1}{c}}-6(a+b+c)$$

$$=6+6+6-6(a+b+c)\ge 18-6=12(2)\ (\text{ vì } a+b+c\le 1).$$

Từ (1) và (2) suy ra P≥ 12.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c = $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ đpcm.

Câu 22. *(Trường chuyên Long An năm 2023-2024)*

Cho $a\ge 0, b\ge 0$ thỏa mãn $2a+3b\le 6$ và $2a+b\le 4$. Chứng minh rằng:

$$-\frac{22}{9}\le a^2-2a-b\le 0.$$

Lời giải

$2a+3b\le 6\Rightarrow -b\ge \frac{2}{3}a-2$

$a^2-2a-b\ge a^2-2a+\frac{2}{3}a-2=\left(a-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{22}{9}\ge -\frac{22}{9}\ (1)$

$2a+b\le 4\Rightarrow 2a^2+ab\le 4a$

$\Rightarrow a^2-2a-b\le -\frac{ab}{2}-b\le 0\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Câu 23. *(Trường chuyên Nam Định năm 2023-2024)*

Cho các số thực $x;y;z$ thỏa mãn $0\le x,y,z\le 4$. Chứng minh rằng:

$x^2y+y^2x+z^2x+16\ge xy^2+yz^2+zx^2$

Lời giải

Ta có:

$x^2y+y^2z+z^2x+16\ge xy^2+yz^2+zx^2$

$\Leftrightarrow x^2y+y^2z+z^2x+16-xy^2-yz^2-zx^2\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x-z)(y-z)+16\ge 0$

Ta có bất đẳng thức: $ab\ge -\frac{1}{4}(a-b)^2, \forall a,b\in\mathbb{R}$

và $ab\le \frac{(a+b)^2}{4}, \forall a,b\in\mathbb{R}$

Trường hợp 1: Nếu $x\ge y$ ta có $(x-z)(y-z)\ge -\frac{1}{4}(x-y)^2$

nên $(x-y)(x-z)(y-z)+16\ge -\frac{1}{4}(x-y)^3+16\ge -\frac{1}{4}4^3+16\ge 0$

Trường hợp 2: Nếu $y>x$ ta xét

Trường hợp 2.1: Nếu $y\ge z$, ta có $(x-y)(x-z)\ge -\frac{1}{4}(y-z)^2$

nên $(x-y)(x-z)(y-z)+16\ge -\frac{1}{4}(y-z)^3+16\ge -\frac{1}{4}4^3+16\mp 0$

Trường hợp 2.2: Nếu $y<z$, ta có: $(x-y)(x-z)(y-z)+16=(y-z)(x-z)(x-y)=16$

Kết hợp với $(y-x)(z-y)\le -\frac{1}{4}(z-x)^2$ và $x<y<z$

Ta được: $(y-x)(x-z)(z-y)+16\ge \frac{1}{4}(z-x)^2(x-z)+16=-\frac{1}{4}(z-x)^3+16\ge 0$

Vậy với mọi trường hợp thì $(x-y)(x-z)(y-z)+16\ge 0$ hay

$$x^2y+y^2z+z^2x+16\ge xy^2+yz^2+zx^2$$

Câu 24. *(Trường chuyên tỉnh Nghệ An năm 2023-2024)*

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a,b,c\ge 1$ và $a^2+4b^2+c^2+2ab+12=3(a+5b+c)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{a^2}{a+(a+b)^2}+\frac{a^2}{a+c^2}$

Lời giải

Bằng các phép biến đổi giả thiết, ta có

$3(a+b+c)=a^2+4b^2+c^2+2ab+12-12b$

$=(a+b)^2+c^2+3(b-2)^2\ge (a+b)^2+c^2$

Bằng biến đổi bất đẳng thức kết hợp cộng mẫu, ta được

$3(a+b+c)\ge (a+b)^2+c^2\ge \frac{(a+b+c)^2}{2}$

Do đó $a+b+c\le 6$ suy ra $(a+b)^2+c^2\le 18$. Khi đó, bằng các phép biến đổi ta có

$T=\frac{a^3}{a+(a+b)^2}+\frac{a^2}{a+c^2}\ge \frac{a^2}{a+(a+b)^2}+\frac{a^2}{a+c^2}$

$\ge \frac{4a^2}{2a+(a+b)^2+c^2}$

$\ge \frac{4a^2}{2a+18}=\frac{2a^2}{a+9}\ge \frac{2a^2}{10a}=\frac{a}{5}\ge \frac{1}{5}$

Từ đây ta được $MinT=\frac{1}{5}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)=(1,2,3)$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $T=\frac{1}{5}$

Câu 25. *(Trường chuyên Đại Học Vinh năm 2023-2024)*

Xét các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}+\frac{1}{\sqrt{c+2}}$.

Lời giải

Ta có nhận xét sau

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}\right)^2=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)}}$$

$$=\frac{a+b+2}{ab+a+b+1}+\frac{2}{\sqrt{ab+a+b+1}}\le\frac{a+b+2}{a+b+1}+\frac{2}{\sqrt{a+b+1}}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{a+b+1}}\right)^2$$

Do đó ta được $\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}\le 1+\frac{1}{\sqrt{a+b+1}}$.

Mặt khác, ta có $(a+b+c)^2\ge a^2+b^2+c^2=1$ suy ra $a+b\ge 1-c$.

Từ đây kết hợp với $c\le 1$ (vì $c\ge 0$ và $c^2\le 1$), ta suy ra

$$P\le 1+\frac{1}{\sqrt{2-c}}+\frac{1}{\sqrt{c+2}}=1+\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2-c}}+\frac{1}{\sqrt{c+2}}\right)^2}=1+\sqrt{\frac{1}{2-c}+\frac{1}{2+c}+\frac{2}{\sqrt{4-c^2}}}$$

$$=1+\sqrt{\frac{4}{4-c^2}+\frac{2}{\sqrt{4-c^2}}}\le 1+\sqrt{\frac{4}{4-1}+\frac{2}{\sqrt{4-1}}}=2+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $a=b=0, c=1$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $2+\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 26. *(Trường chuyên tỉnh Ninh Bình năm 2022-2023)*

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a + b + c = 6. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{b}{\sqrt{c^3+1}}+\frac{c}{\sqrt{a^3+1}}\ge 2$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\sqrt{b^3+1}=\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)}\le\frac{b+1+b^2-b+1}{2}=\frac{b^2+2}{2}$$

T²: $\sqrt{c^3+1}\le\frac{c^2+2}{2}$; $\sqrt{a^3+1}\le\frac{a^2+2}{2}$

Do đó VT $\ge\frac{2a}{b^2+2}+\frac{2b}{c^2+2}+\frac{2c}{a^2+2}$

Ta cần CM: S = $\frac{2a}{b^2+2}+\frac{2b}{c^2+2}+\frac{2c}{a^2+2}\ge 2$

Ta có: $\frac{2a}{b^2+2}=\frac{a(b^2+2)-ab^2}{b^2+2}$ = a - $\frac{ab^2}{b^2+2}$

Lại có : $\frac{ab^2}{b^2+2}=\frac{2ab^2}{b^2+b^2+4}\le\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{b^4.4}}=\frac{a\sqrt[3]{2b^2}}{3}\le\frac{a.(2+b+b)}{9}=\frac{2a.(b+1)}{9}$

T² ta được S ≥ a + b + c - $\frac{2.(a+b+c)}{9}-\frac{2(ab+bc+ca)}{9}=\frac{7.(a+b+c)}{9}-\frac{2(ab+bc+ca)}{9}$

Ta có ab + bc + ca $\le \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$

Do đó S $\ge \dfrac{7.6}{9} - \dfrac{2}{9}.\dfrac{6^2}{9} = 2$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 2. Ta có đpcm.

Câu 27. *(Trường chuyên Tin Phú Thọ năm 2023-2024)*

Xét ba số $x; y; z \ge 2$ thỏa mãn $4xyz = 9(x+y+z)+27$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x} + \dfrac{\sqrt{y^2-4}}{y} + \dfrac{\sqrt{z^2-4}}{z}$

Lời giải

Ta có $\sqrt{5}Q = \dfrac{\sqrt{5(x-2)(x_-+2}}{x} + \dfrac{\sqrt{5(y-2)(y+2)}}{y} + \dfrac{\sqrt{5(z-2)(z+2)}}{z}$

$\sqrt{5}Q \le \dfrac{5(x-2)+x+2}{2x} + \dfrac{5(y-2)+y+2}{2y} + \dfrac{5(z-2)+z+2}{2z}$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}Q \le \dfrac{6x-8}{2x} + \dfrac{6y-8}{2y} + \dfrac{6z-8}{2z} = 9-41\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$

Từ $4xyz = 9(x+y+z)+27 \Leftrightarrow 4 = 9\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}\right)+\dfrac{27}{xyz} \le 3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^3$

Đặt $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = t$

Ta có

$t^3+3t^2-4 \ge 0 \Leftrightarrow t^3-t^2+4t^2-4t+4t-4 \ge 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t-2)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow t \ge 1$

Suy ra $\sqrt{5}Q \le 9-4.1 = 5 \Leftrightarrow Q \le \sqrt{5}$

Vậy $MaxQ = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x,y,z \ge 2; 4xyz = 9(x+y+z)+27 \\ 5(x-2) = x+2; 5(y-2) = y+2; 5(z-2) = z+2 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y = z = 3$

Câu 28. *(Trường chuyên Toán Phú Thọ năm 2022-2023)*

Xét các số thực dương a,b,c; Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$F = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+9bc}} + \dfrac{b}{\sqrt{b^2+9ac}} + \dfrac{c}{\sqrt{c^2+9ab}}$.

Lời giải

Ta có $\left(a\sqrt{a^2+9bc}+b\sqrt{b^2+9ac}+c\sqrt{c^2+9ab}\right).F \ge (a+b+c)^2$

Đặt $Q = a\sqrt{a^2+9bc} + b\sqrt{b^2+9ac} + c\sqrt{c^2+9ab}$

$$Q^2 = \left[\sqrt{a}\sqrt{a^3+9ac} + \sqrt{b}\sqrt{b^3+9ac} + \sqrt{c}\sqrt{c^3+9ab}\right]^2 \le (a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3+27abc\right)$$

Ta lại có $a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a) \le (a+b+c)^3 - 24abc$

$\Rightarrow (a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3+27abc\right) \le (a+b+c)\left[(a+b+c)^3+3abc\right]$ mà $3abc \le \dfrac{(a+b+C)^3}{9}$

$$\Rightarrow (a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3+27abc\right) \le \frac{10(a+b+c)^4}{9}$$

$\Rightarrow Q \le \dfrac{\sqrt{10}(a+b+c)^2}{3}$ mà $\left(a\sqrt{a^2+9bc} + b\sqrt{b^2+9ac} + c\sqrt{c^2+9ab}\right).F \ge (a+b+c)^2$

Suy ra $F \ge \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. Vậy min $F = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Câu 29. *(Trường chuyên tỉnh Phú Yên năm 2023-2024)*

Cho $x \ge 1, 0 < y \le 1$. *Chứng minh rằng:* $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} \ge \dfrac{x}{x^2+y} + \dfrac{y}{y^2+x}$

Lời giải

Với giả thiết đã cho, ta sẽ chứng minh $\dfrac{1}{y+1} \ge \dfrac{x}{x^2+1}(1)$ *và* $\dfrac{1}{x+1} \ge \dfrac{y}{y^2+x}$ *(2)*

Ta có: (1)$\Leftrightarrow xy + x - x^2 - y \le 0 \Leftrightarrow y(x-1) + x(1-x) \le 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(y-x) \le 0(3)$

(3) đúng vì $x \ge 1, 0 < y \le 1$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1, 0 < y \le 1$

Ta cũng có: (2)$\Leftrightarrow xy + y - y^2 - x \le 0 \Leftrightarrow y(x-y) - (x-y) \le 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(y-1) \le 0$ *(4)*

(4) đúng vì $x \ge 1, 0 < y \le 1$

Dấu bất đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} \ge \dfrac{x}{x^2+y} + \dfrac{y}{y^2+x}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$

Câu 30. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Trị năm 2023-2024)*

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$.

1. Chứng minh $a + b + c \ge 9$.
2. Chứng minh $a + b + c \ge 4\left(\dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ca} + \dfrac{c}{ab}\right) + 5$.

Lời giải

Ta có $ab+bc+ca=abc \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Cách 1: Khi đó $a+b+c=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 3\sqrt[3]{abc}.3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=9$

Cách 2: $a+b+c=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 3+2+2+2=9$

Ta có $a+b+c=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(c+a)^2}{ca}-3$

$\geq \frac{4(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}-3=\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{abc}+5=4\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)+5$

Câu 31. *(Trường chuyên Sơn La năm 2023-2024)*

Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{z^2}}{z}\leq xyz.$$

Lời giải

Từ $x+y+z=zyz \Rightarrow .\ \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=1$

Lại có: $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}}$ (áp dụng $\sqrt{ab}\leq\frac{1}{2}(a+b)$)

$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\leq\frac{2}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}\Rightarrow \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\leq 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$

Chứng minh:

$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\leq xyz$

$\Leftrightarrow 3(xy+yz+zx)\leq(xyz)^2$

$\Leftrightarrow 3(xy+yz+zx)\leq(x+y+z)^2$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$ (đúng)

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\sqrt{3}$.

Câu 32. *(Trường chuyên Tây Ninh năm 2023-2024)*

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c\geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$M=\frac{1}{6}(19a+22b+25c)+2\left(\frac{5}{a}+\frac{6}{b}+\frac{7}{c}\right)$.

Lời giải

Ta có: $a+b+c\geq 6$.

$M=\frac{1}{6}(19a+22b+25c)+2\left(\frac{5}{a}+\frac{6}{b}+\frac{7}{c}\right)=\left(\frac{19}{6}a+\frac{10}{a}\right)+\left(\frac{22}{6}b+\frac{12}{b}\right)+\left(\frac{25}{6}c+\frac{14}{c}\right)$

Xét $k,m,n>0: ka+\frac{10}{a}\ge 2\sqrt{10k}; mb+\frac{12}{b}\ge 2\sqrt{12m}; nc+\frac{14}{c}\ge 2\sqrt{14n}$

$a=2\Rightarrow 2k+5\ge 2\sqrt{10k}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow ka=\frac{10}{a}\Rightarrow 2k=5\Leftrightarrow k=\frac{5}{2}$.

Tương tự ta tìm được: $m=3, n=\frac{7}{2}$.

Do đó: $M=\left(\frac{5}{2}a+\frac{10}{a}\right)+\left(3b+\frac{12}{b}\right)+\left(\frac{7}{2}c+\frac{14}{c}\right)+\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c$

$\Rightarrow M\ge 2\sqrt{25}+2\sqrt{36}+2\sqrt{49}+\frac{2}{3}\cdot 6=40$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=2$.

Vậy $M_{Min}=40$ khi $a=b=c=2$.

Câu 33. *(Trường chuyên Thái Bình năm 2023-2024)*

Cho 3 số thực dương x,y,z thoả mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}-x^2-28y^2-28z^2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM:

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}}=\frac{2x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}\le\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}$$

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+xy+yz+zx}}=\frac{y}{\sqrt{(y+x)(y+z)}}\le\frac{1}{4}.\frac{y}{y+z}+\frac{x}{y+x}$$

$$\frac{z}{\sqrt{z^2+xy+yz+zx}}=\frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}\le\frac{1}{4}.\frac{z}{z+y}+\frac{x}{z+x}$$

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\le 1+1+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}\quad(1)$$

Và ta có: $x^2+28y^2+28z^2=\frac{1}{2}(x-7x)^2+\frac{1}{2}(x-7z)^2+\frac{7}{2}(y-z)^2+7\ge 7\quad(2)$

Dấu "=" của các bất đẳng thức (1), (2) xảy ra khi $x=7y=7z$ và $xy+yz+zx=1$ khi và chỉ khi $y=z=\frac{\sqrt{15}}{15}; x=\frac{7\sqrt{15}}{15}$

Từ (1), (2) có $P<\frac{9}{4}-7=-\frac{19}{4}$ suy ra MaxP = 7 $\Leftrightarrow y=z=\frac{\sqrt{15}}{15}$; $x=\frac{7\sqrt{15}}{15}$

Vậy MaxP = $\frac{-19}{4}$

Câu 34. *(Trường chuyên Quốc Học Huế năm 2023-2024)*

Cho hai số thực dương a,b thỏa mãn $4a^2+b^2=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{4a}{2+b}+\frac{b}{1+a}+\frac{2024}{2a+b}.$$

Lời giải

Ta có $4a^2+b^2\ge 4ab \Leftrightarrow 2\left(4a^2+b^2\right)\ge\left(2a+b\right)^2$

$\Leftrightarrow 4\ge\left(2a+b\right)^2 \Leftrightarrow 2a+b\le 2 \Leftrightarrow a+\frac{b}{2}\le 1.$

Đặt $x=a; y=\frac{b}{2}$, ta có $x+y\le 1$.

Khi đó $\frac{1}{2}T=\frac{a}{1+\frac{b}{2}}+\frac{b}{2\left(1+a\right)}+\frac{506}{a+\frac{b}{2}}=\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}+\frac{506}{x+y}.$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

- $\frac{x}{1+y}+\frac{4}{9}x\left(1+y\right)\ge\frac{4}{3}x \Leftrightarrow \frac{x}{1+y}\ge\frac{8}{9}x-\frac{4}{9}xy$.
- $\frac{y}{1+x}+\frac{4}{9}y\left(1+x\right)\ge\frac{4}{3}y \Leftrightarrow \frac{y}{1+x}\ge\frac{8}{9}y-\frac{4}{9}xy$.

Suy ra $\frac{1}{2}T\ge\frac{8}{9}\left(x+y\right)-\frac{8}{9}xy+\frac{506}{x+y}\ge\frac{8}{9}\left(x+y\right)+\frac{8}{9(x+y)}+\frac{4546}{9(x+y)}-\frac{8}{9}xy\ .\ge\frac{8}{9}.2+\frac{4546}{9}-\frac{8}{9}.\frac{1}{4}=\frac{1520}{3}$. (để ý $xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}$)

Do đó $T\ge\frac{3040}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}$ hay $a=\frac{1}{2};b=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $\frac{3040}{3}$ đạt được khi $a=\frac{1}{2};b=1$.

Câu 35. *(Trường chuyên Tiền Giang năm 2023-2024)*

Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x>1, y>1$

a) Chứng minh rằng $\frac{x}{\sqrt{x-1}}\ge 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức T = $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}$

Lời giải

a) Chứng minh rằng $\frac{x}{\sqrt{x-1}}\ge 2$.

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho hai số thực dương $\left(x-1\right)$ và 1 ta được

$x=\left(x-1\right)+1\ge 2\sqrt{\left(x-1\right).1}=2\sqrt{x-1}.$

Vậy $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} \geq 2$ với mọi số thực $x > 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x-1=1 \Leftrightarrow x=2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức T = $\dfrac{x^2}{y-1}+\dfrac{y^2}{x-1}$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số thực dương $\dfrac{x^2}{y-1}$ và $\dfrac{y^2}{x-1}$ ta được

$$T=\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y-1}.\frac{y^2}{x-1}}=2.\frac{x}{\sqrt{x-1}}.\frac{y}{\sqrt{y-1}} \geq 2.2.2=8$$

Vậy $\min T=8$ khi $x=y=2$.

Câu 36. *(Trường chuyên T.P Hồ Chí Minh năm 2022-2023)*

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\sqrt{1+4xy+2x+2y}+2z=5$

a) Chứng minh $\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}}+\dfrac{1}{2z+1} \geq \dfrac{2}{3}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+1}{2x+1}+\dfrac{y+1}{2y+1}+\dfrac{2z+3}{4z+2}$.

Lời giải

a) Từ giả thiết ta có $\sqrt{(2x+1)(2y+1)}=5-2z$.

Từ đó kết hợp sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwwarz, ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}}+\frac{1}{2z+1}=\frac{1}{5-2z}+\frac{1}{2z+1} \geq \frac{4}{5-2z+2z-1}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi chẳng hạn $x=y=z=1$.

b) Ta thấy rằng

$$P=\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2x+1)}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2y+1)}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2z+1}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2y+1}\right)+\frac{1}{2z+1}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương và sử dụng kết quả ở ý (a) ta được

$$P \geq \frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}+}\frac{1}{2z+1} \geq \frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{13}{6}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Câu 37. *(Trường chuyên Vĩnh Long năm 2023-2024)*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{x^2+10}{\sqrt{x^2+9}}$

Lời giải:

Đặt P = $\dfrac{x^2+10}{\sqrt{x^2+9}}=\sqrt{x^2+9}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$

$$=\left(\frac{1}{9}.\sqrt{x^2+9}+\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\right)+\frac{8}{9}.\sqrt{x^2+9}$$

Suy ra $P\ge 2.\frac{1}{3}+\frac{8}{9}.3=\frac{10}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là $P=\frac{10}{3}$ khi $x=0$

Câu 38. *(Trường chuyên Vĩnh Phúc năm 2022-2023)*

1. Cho ba số thực dương $a,\ b,\ c$ thoả mãn $ab+bc+ca=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

P = $\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$

2. Cho ba số thực không âm a,b,c thoả mãn $ab+bc+ca+abc\le 4$. Chứng minh rằng $a+b+c\ge ab+bc+ca$.

Lời giải:

1. Ta có:

$$P=\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}}$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$

$$=\sqrt{\frac{2a}{a+b}.\frac{2a}{a+c}}+\sqrt{\frac{2b}{b+a}.\frac{b}{2(b+c)}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}.\frac{c}{2(c+b)}}$$

$AM-GM$

$$\le\frac{1}{2}\left[\frac{2a}{a+b}+\frac{2a}{a+c}+\frac{2b}{b+a}+\frac{b}{2(b+c)}+\frac{2c}{c+a}+\frac{c}{2(c+b)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2a}{a+b}+\frac{2b}{a+b}\right)+\left(\frac{2a}{a+c}+\frac{2a}{a+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+c}+\frac{c}{b+c}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(2+2+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a=\frac{7\sqrt{15}}{15};b=c=\frac{\sqrt{15}}{15}$

Vậy P đạt GTLN là $\frac{9}{4}$ khi $a=\frac{7\sqrt{15}}{15};b=c=\frac{\sqrt{15}}{15}$

2. Ta có $ab+bc+ca+abc\le 4$

$\Leftrightarrow abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+8\le (ab+2a+2b+4)+(bc+2b+2c+4)+(ca+2c+2a+4$

$\Leftrightarrow (a+2)(b+2)(c+2)\le (a+2)(b+2)+(b+2)(c+2)+(c+2)(a+2)$

$\Leftrightarrow 1\le \dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2}\Leftrightarrow \dfrac{2}{a+2}+\dfrac{2}{b+2}+\dfrac{2}{c+2}\ge 2$

$\Leftrightarrow \left(1-\dfrac{2}{a+2}\right)+\left(1-\dfrac{2}{b+2}\right)+\left(1-\dfrac{2}{c+2}\right)\le 1$

$\Leftrightarrow 1\ge \dfrac{a}{a+2}+\dfrac{b}{b+2}+\dfrac{c}{c+2}$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz

$1\ge \dfrac{a}{a+2}+\dfrac{b}{b+2}+\dfrac{c}{c+2}=\dfrac{a^2}{a^2+2a}+\dfrac{b^2}{b^2+2b}+\dfrac{c^2}{c^2+2c}$

$C-S\ge \dfrac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(a+b+c)}$

$\Rightarrow (a+b+c)^2\le (a^2+b^2+c^2)+2(a+b+c)$

$\Leftrightarrow a+b+c\ge ab+bc+ca$ (đpcm)

Câu 39. *(Trường chuyên KHTN năm 2023-2024)*

Với x,y,z là những số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=\frac{x^{14}-x^6+3}{x^2y^2+zx+zy}+\frac{y^{14}-y^6+3}{y^2z^2+xy+xz}+\frac{z^{14}-z^6+3}{z^2x^2+yz+yx}$$

Lời giải:

Ta có $3(x^{14}-x^6+3)=(3x^{14}+4)-3x^6+5\ge 7x^6-3x^6+5=4x^6+5$

theo bất đẳng thức AM-GM. Lại có cũng theo bất đẳng thức AM-GM, thì

$4x^6+5=(x^6+x^6+1)+(x^6+x^6+1)+3\ge 3(x^4+x^4+1)\ge 3(x^4+2x^2)$

Suy ra $M\ge \sum \dfrac{x^4}{x^2y^2+xz+yz}+2\sum \dfrac{x^2}{x^2y^2+xz+yz}$

và áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu cho vế trái, ta

$$M\ge \frac{(x^2+y^2+z^2)^2+2(x+y+z)^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(xy+yz+zx)}\ge \frac{3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+6(xy+yz+zx)}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(xy+yz+zx)}=3$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 1 Giá trị nhỏ nhất của M là 3.

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT 2022-2023

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm 2022-2023)*

Với các số thực dương x, y, z thỏa mãn $2\left(x^2+y^2+z^2\right)=3y(x+z)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{2(x+y+z)}-\left(x^2+z^2\right)$.

Lời giải

Ta có : $3y(x+z)=2y^2+2\left(x^2+z^2\right)\geq 2y^2+(x+z)^2$

$\Rightarrow 3y(x+z)\geq 2y^2+(x+z)^2$

$\Rightarrow (x+z)^2-3y(x+z)+2y^2\leq 0$

$\Rightarrow \left(\dfrac{x+z}{y}\right)^2-3\left(\dfrac{x+z}{y}\right)+2\leq 0$

$\Rightarrow 1\leq \dfrac{x+z}{y}\leq 2$.

Do đó :

$$P\leq \sqrt{4(x+z)}-x^2-z^2=2\sqrt{x+z}-x^2-z^2\leq x+z+1-x^2-z^2=\frac{3}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leq \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=z=\dfrac{1}{2}; y=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\dfrac{3}{2}$.

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2022-2023)*

Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$abc\left(a^2+b^2+c^2\right)\leq 3.$$

Lời giải

$3abc\left(a^2+b^2+c^2\right)=(a+b+c)abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$=(ca\cdot ab+ab\cdot bc+bc\cdot ca)\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$\leq \dfrac{(ab+bc+ca)^2}{3}\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)$

(Dựa vào BĐT phụ: $xy+yz+zx\leq \dfrac{(x+y+z)^2}{3}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$)

$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{3}\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{1}{3}(ab+bc+ca)(ab+bc+ca)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\leq \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)+\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3}\right]^3=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}\right]^3=9$$

(Dựa vào BĐT Cô-si: $x,y,z\ge 0\Rightarrow xyz\le\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$)

Từ đó suy ra $abc\left(a^2+b^2+c^2\right)\le 3$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Kạn năm 2022-2023)*

Cho $x>0, y>0, z>0$ thoả mãn $x+2y+3z\ge 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=x+y+z+\frac{3}{4x}+\frac{9}{8y}+\frac{1}{z}+10.$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cô – si cho 2 số dương $x,\frac{1}{x}$, ta có

$$x+\frac{1}{x}\ge 2\Leftrightarrow\frac{3}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)\ge\frac{3}{2}.\ (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

Áp dụng BĐT Cô – si cho 2 số dương $y,\frac{9}{4y}$, ta có

$$y+\frac{9}{4y}\ge 3\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(y+\frac{9}{4y}\right)\ge\frac{3}{2}.\ (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y=\frac{3}{2}$.

Áp dụng BĐT Cô – si cho 2 số dương $z,\frac{4}{z}$, ta có

$$z+\frac{4}{z}\ge 4\Leftrightarrow\frac{1}{4}\left(z+\frac{4}{z}\right)\ge 1.\ (3)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $z=2$.

Theo giả thiết ta có

$$x+2y+3z\ge 10\Leftrightarrow\frac{x+2y+3z}{4}\ge\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{3z}{4}\ge\frac{5}{2}.\ (4)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=1,\ y=\frac{3}{2},\ z=2$.

Cộng theo vế các bđt (1), (2), (3) và (4), ta được

$$x+y+z+\frac{3}{4x}+\frac{9}{8y}+\frac{1}{z}\ge\frac{13}{2}\Leftrightarrow P\ge\frac{33}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=1,\ y=\frac{3}{2},\ z=2$.

Vậy $\text{Min}\,P=\frac{33}{2}$ khi $x=1,\ y=\frac{3}{2},\ z=2$.

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Bạc Lưu năm 2022-2023)*

Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a^2b+b^2c+c^2a\ge \frac{9a^2b^2c^2}{1+2a^2b^2c^2}.$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(2+\frac{1}{a^2b^2c^2}\right)\ge 9$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+\frac{1}{ab^2}+\frac{1}{bc^2}+\frac{1}{ca^2}\ge 9.$$

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức Cô-si bộ ba số, ta có

$$a^2b+a^2b+\frac{1}{ab^2}\ge 3\sqrt[3]{a^2b\cdot a^2b\cdot\frac{1}{ab^2}}=3a$$

$$b^2c+b^2c+\frac{1}{bc^2}\ge 3\sqrt[3]{b^2c\cdot b^2c\cdot\frac{1}{bc^2}}=3b\,.$$

$$c^2a+c^2a+\frac{1}{ca^2}\ge 3\sqrt[3]{c^2a\cdot c^2a\cdot\frac{1}{ca^2}}=3c$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại vế theo vế, ta được

$$2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+\frac{1}{ab^2}+\frac{1}{bc^2}+\frac{1}{ca^2}\ge 3\left(a+b+c\right)=9.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2022-2023)*

Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^3}{3y+1}+\frac{y^3}{3z+1}+\frac{z^3}{3x+1}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $y^3+1+1\ge 3y$

Chứng minh tương tự rồi cộng vế với vế ta được

$$P\ge \frac{x^3}{y^3+3}+\frac{y^3}{z^3+3}+\frac{z^3}{x^3+3}.$$

Đặt $(x^3,y^3,z^3)=(a,b,c)$

Khi đó $a+b+c=3$ và $P\ge \frac{a}{b+3}+\frac{b}{c+3}+\frac{c}{a+3}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng Engel ta có

$$\frac{a}{b+3}+\frac{b}{c+3}+\frac{c}{a+3}\ge \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+3(a+b+c)}$$

Mặt khác ta có $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$$

$$P\ge \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+3(a+b+c)}\ge \frac{(a+b+c)^2}{\frac{(a+b+c)^2}{3}+3(a+b+c)}=\frac{3}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$ hay $x=y=z=1$

Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2022-2023)*

Cho 2 số $1 \le T \le 9.$ thỏa mãn: $(x;y)=(1;1)$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=1$

Lời giải

Ta có bất đẳng thức $(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4}$. Bởi vậy từ giả thiết,

$(x+y)^2 = 3+xy \le 3+\dfrac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow 0 \le (x+y)^2 \le 4.$

Lại để ý đẳng thức $3\left(x^2+y^2+xy\right)-\left(x^2+y^2-xy\right)=2(x+y)^2$ hay $0 \le 9-T = 2(x+y)^2 \le 8$, vậy $1 \le T \le 9.$

Khi $(x;y)=(1;1)$ (thoả mãn giả thiết) thì $T=1$.

Khi $(x;y)=(\sqrt{3};-\sqrt{3})$ (thoả mãn giả thiết) thì $T=9$.

Kết luận: Giá trị lớn nhất của T là 9 ; giá trị nhỏ nhất của T là 1 .

Câu 7. *(Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2022-2023)*

a) Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=2$.

Chứng minh: $\dfrac{a^2}{b+1}+\dfrac{b^2}{a+1} \ge 1$.

b) Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{ab+a+b+1}+c=6$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2a+1}{a+1}+\dfrac{2b+1}{b+1}+\dfrac{2c+2}{c+2}$.

Lời giải

a) * Xét BĐT $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y} \ge \dfrac{(a+b)^2}{x+y}$ với $x,y>0$.

Biến đổi tương đương $a^2y^2+b^2x^2 \ge 2abxy \Leftrightarrow (ay-bx)^2 \ge 0$ (đúng)

*Khi đó $\dfrac{a^2}{b+1}+\dfrac{b^2}{a+1} \ge \dfrac{(a+b)^2}{a+b+2}=1$(điều phải chứng minh).

b) Ta có $P=6-\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{b+1}-\dfrac{2}{c+2}$.

Theo BĐT Cauchy ta có $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1} \ge \dfrac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}=\dfrac{2}{6-c}$

Khi đó $P \le 6-\dfrac{2}{6-c}-\dfrac{2}{c+2}$.

Ta có $\dfrac{1}{6-c}+\dfrac{1}{c+2} \ge \dfrac{4}{6-c+c+2}=\dfrac{1}{2}$ (do $0<c<6$). Suy ra $P \le 5$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a+1=b+1 \\ 6-c=c+2 \\ \sqrt{(a+1)(b+1)}+c=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b=3 \\ c=2 \end{cases}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 5 đạt được khi $a=b=3, c=2$.

Câu 8. *(Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2022-2023)*

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c \le 3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

$$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2024}{ab+bc+ca}$$

Lời giải

Với mọi x, y, z dương ta có: $x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz}\,(1)$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge 9\,(3)$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$

Áp dụng (3) ta có :

$$\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right) \ge 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{ab+bc+ca} \ge \frac{9}{(a+b+c)^2} \ge 1 (\text{do } a+b+c \le 3)$$

Mặt khác : $ab+bc+ca \le \frac{(a+b+c)^2}{3} \le 3 \Rightarrow \frac{1}{ab+bc+ca} \ge \frac{1}{3}$

Vậy : $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2024}{ab+bc+ca}=\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{ab+bc+ca}\right)+\frac{2022}{ab+bc+ca} \ge 1+\frac{2024}{3}=\frac{2027}{3}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \\ a=b=c \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2022-2023)*

Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{3x+z}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{3z+x}{x+y} \ge 6$$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ x+z=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-z=a-b \\ x+z=c \end{cases} \Rightarrow x=\frac{a-b+c}{2}$.

Tương tự ta có: $y=\dfrac{a+b-c}{2}$ và $z=\dfrac{-a+b+c}{2}$.

Khi đó:

$$\frac{3x+z}{y+z}+\frac{4y}{x+z}+\frac{3z+x}{x+y}=\left(\frac{2x}{y+z}+\frac{x+z}{y+z}\right)+\left(\frac{2y}{x+z}+\frac{2y}{x+z}\right)+\left(\frac{2z}{x+y}+\frac{x+z}{x+y}\right)$$

$$=\frac{a-b+c}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a+b-c}{c}+\frac{a+b-c}{c}+\frac{-a+b+c}{a}+\frac{c}{a}$$

$$=\frac{a+c}{b}-1+\frac{c}{b}+\frac{a+b}{c}-1+\frac{a+b}{c}-1+\frac{b+c}{a}-1+\frac{c}{a}$$

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\frac{c}{b}+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\frac{c}{a}-4$$

Áp dụng bất đẳng thức AM- GM ta có:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-4\ \ge 10\sqrt[10]{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}}-4$$

$$=10\sqrt[10]{\frac{a^3\cdot b^3\cdot c^4}{a^3\cdot b^3\cdot c^4}}-4=10-4=6$$

Vậy $\dfrac{3x+z}{y+z}+\dfrac{4y}{z+x}+\dfrac{3z+x}{x+y}\ge 6$

Câu 10. *(Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2022-2023)*

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+2b+3c=24abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{2b}{a\sqrt{16b^2+1}}+\frac{3c}{2b\sqrt{36c^2+1}}+\frac{a}{3c\sqrt{4a^2+1}}\ge\frac{3}{2}$$

Lời giải

Có $a+2b+3c=24abc \Leftrightarrow \dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{6bc}+\dfrac{1}{3ca}=4$

Đặt $x=\dfrac{1}{a};y=\dfrac{1}{2b};z=\dfrac{1}{3c}$. Khi đó $xy+yz+zx=4$. Bất đẳng thức trở thành :

$P=\dfrac{x}{\sqrt{y^2+4}}+\dfrac{y}{\sqrt{z^2+4}}+\dfrac{z}{\sqrt{x^2+4}}\ge\dfrac{3}{2}$. Có :

$$y^2+4=y^2+xy+yz+zx=(x+y)(y+z)$$

$$z^2+4=z^2+xy+yz+zx=(y+z)(z+x)$$

$$x^2+4=x^2+xy+yz+zx=(z+x)(x+y)$$

$$\Rightarrow P=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(y+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(y+z)(z+x)}}+\frac{z}{\sqrt{(z+x)(x+y)}}$$

Áp dụng BĐT Cô si ta được :

$$P\ge\frac{2x}{x+2y+z}+\frac{2y}{x+y+2z}+\frac{2z}{2x+y+z}\Rightarrow P\ge\frac{2x^2}{x^2+2yz+zx}+\frac{2y^2}{xy+y^2+2zy}+\frac{2z^2}{2xz+yz+z^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức :

$P \ge \dfrac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2 + xy + yz + zx}$. Lại có :

$xy + yz + zx \le \dfrac{(x+y+z)^2}{3} \Rightarrow P \ge \dfrac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2 + \dfrac{(x+y+z)^2}{3}} = \dfrac{3}{2}$

Vậy $MinP = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{4}{9}$

Câu 11. *(Trường chuyên tỉnh Đắk Nông năm 2022-2023)*

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2}{\sqrt{15x^2 + 26xy + 8y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{15y^2 + 26yz + 8z^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{15z^2 + 26zx + 8x^2}}$$

Lời giải

Ta có:

$$\sqrt{15x^2 + 26xy + 8y^2} = \sqrt{(4x+3y)^2 - (x-y)^2} \le \sqrt{(4x+3y)^2} = 4x + 3y$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{15x^2 + 26xy + 8y^2}} \ge \frac{x^2}{4x+3y}$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$\frac{y^2}{\sqrt{15y^2 + 26yz + 8z^2}} \ge \frac{y^2}{4y+3z} \text{ và } \frac{z^2}{\sqrt{15z^2 + 26zx + 8x^2}} \ge \frac{z^2}{4z+3x}$$

Suy ra $P \ge \dfrac{x^2}{4x+3y} + \dfrac{y^2}{4y+3z} + \dfrac{z^2}{4z+3x}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $\dfrac{x^2}{4x+3y} + \dfrac{4x+3y}{49} \ge 2\sqrt{\dfrac{x^2}{4x+3y}.\dfrac{4x+3y}{49}} = \dfrac{2x}{7}$

Tương tự : $\dfrac{y^2}{4y+3z} + \dfrac{4y+3z}{49} \ge \dfrac{2y}{7}$ và $\dfrac{z^2}{4z+3x} + \dfrac{4z+3x}{49} \ge \dfrac{2z}{7}$

Suy ra

$$P + \frac{x+y+z}{7} \ge \frac{2(x+y+z)}{7} \Leftrightarrow P \ge \frac{x+y+z}{7}$$

Mà $x + y + z = 3$ suy ra $P \ge \dfrac{3}{7}$.

Vậy GTLN của P bằng $\dfrac{3}{7}$ khi $x = y = z = 1$.

Câu 12. *(Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2022-2023)*

Cho các số thực dương $x,\ y,\ z$ thoả mãn $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 3$. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \ge 1.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có: $x^2+y^2\ge 2xy;\quad y^2+z^2\ge 2yz;\quad z^2+x^2\ge 2zx$.

Suy ra $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$.

Ta có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3\Leftrightarrow xy+yz+zx=3xyz$.

Do đó, $x^2+y^2+z^2-2xyz\ge xyz\quad(1)$.

Dễ dàng chứng minh bất đẳng thức AM – GM cho ba số không âm a,b,c:

$$a+b+c\ge\sqrt[3]{abc}.$$

Áp dụng bất đẳng thức này, ta có $3=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}}\Leftrightarrow xyz\ge 1\quad(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $x^2+y^2+z^2-2xyz\ge 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Câu 13. *(Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2022-2023)*

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+ab-2bc-2ca=0$.

Chứng minh: $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{(a+b-c)^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\ge 3$.

Lời giải

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{(a+b-c)^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\ge 3\Leftrightarrow\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{(a+b-c)^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\ge 2$$

Đặt $x=\frac{a}{c},\ y=\frac{b}{c}$ *(x, y >0)*

$a^2+b^2+c^2+ab-2bc-2ca=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+1+xy-2x-2y=0\Leftrightarrow(x+y-1)^2=xy$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $xy\le\frac{(x+y)^2}{4}$

Do đó: $(x+y-1)^2\le\frac{(x+y)^2}{4}\Rightarrow\left[3(x+y)-2\right].\left[2-(x+y)\right]\ge 0\Leftrightarrow\frac{2}{3}\le x+y\le 2$

$$P=\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{(a+b-c)^2}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$$

$$=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{(x+y-1)^2}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$$

$$=\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\right)+\left(\frac{1}{2xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\right)\ge\frac{4}{(x+y)^2}+2\sqrt{\frac{1}{2(x+y)\sqrt{xy}}}$$

$$P\ge\frac{4}{2^2}+2\sqrt{\frac{1}{2.2}}=2$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1\Leftrightarrow a=b=c$

Câu 14. *(Trường chuyên Khoa Học Tự Nhiên năm 2022-2023)*

Với a,b,c là những số thực dương thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} c \le b < a \le 3; b^2 + 2a \le 10; b^2 + 2a + 2c \le 14 \\ \left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right) + 4ab \le 2a^3 + 2b^3 + 2a + 2b \end{cases}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 4a^4 + b^4 + 2b^2 + 4c^2$

Lời giải

Ta có :

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right) + 4ab - 2a\left(a^2+1\right) - 2b\left(b^2+1\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+1-2b\right)\left(b^2+1-2a\right) \le 0 \Leftrightarrow b^2+1 \le 2a$$

Ta có : $P = (2a)^2 + \left(b^2+1\right)^2 + (2c)^2 - 1$. Do đó :

$$P - 76 = (2a-6)(2a+6) + \left(b^2-4\right)\left(b^2+6\right) + (2c-4)(2c+4)$$

$$= \left(2a-b^2\right)(2a-6) + \left(b^2-2c+2\right)\left(2a+b^2-10\right) + (2c+4)\left(2a+2c+b^2-14\right) \le 0$$

Do đó $P \le 76$. Vậy $Max\,P = 76 \Leftrightarrow (a,b,c) = (3,2,2)$

Câu 15. *(Trường chuyên Hà Nội năm 2022-2023)*

Với a,b và c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a+b+c=3$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + 2bc + 3ca - 3abc$.

Lời giải

Do $a,b,\ c \ge 0$ nên

$$P = ab + 2bc + 3ca - 3abc \le ab + 2bc + 3ac$$

$$= (ab+ac) + (2bc+2ac) = a(b+c) + 2c(b+a)$$

$$P \le \frac{(a+b+c)^2}{4} + \frac{(a+b+c)^2}{2} = \frac{27}{4}.\ \text{Vậy } P_{max} = \frac{27}{4}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b+c \\ a+b = c \\ a+b+c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c = \dfrac{3}{2} \\ b = 0 \end{cases}.$

Câu 16. *(Trường chuyên Hà Tĩnh năm 2022-2023)*

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a+b+c = 3abc$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: P = $\dfrac{1}{1+a+2bc} + \dfrac{1}{1+b+2ca} + \dfrac{1}{1+c+2ab}$

Lời giải

Ta có: $a+b+c = 3abc \Rightarrow \dfrac{a+b+c}{abc} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} = 3$

Đặt: $\dfrac{1}{\sqrt[4]{bc}} = x; \dfrac{1}{\sqrt[4]{ca}} = y; \dfrac{1}{\sqrt[4]{ab}} = z\ \ (x>0, y>0, z>0)$

Từ bài ra suy ra: $x^4 + y^4 + z^4 = 3$

Mặt khác, Áp dụng BĐC Cô si ta có: $3abc = a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \ge \sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \ge 1$

Ta có: $1+a+2bc=1+a+bc+bc\ge 4\sqrt[4]{ab^2c^2}=4\sqrt[4]{abc.bc}\ge 4\sqrt[4]{bc}>0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+a+2bc}\le \dfrac{1}{4\sqrt[4]{bc}}=\dfrac{1}{4}x=\dfrac{1}{8}.2.x.1\le \dfrac{1}{8}.\left(x^2+1\right)$ (Ta sử dụng BĐT $2xy\le x^2+y^2$)

$=\dfrac{1}{16}.2.x^2.1+\dfrac{1}{8}\le \dfrac{1}{16}.\left(x^4+1\right)+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{16}\left(3+x^4\right)$

Tức $\dfrac{1}{1+a+2bc}\le \dfrac{1}{16}\left(3+x^4\right)$

Tương tự: $\dfrac{1}{1+b+2ca}\le \dfrac{1}{16}\left(3+y^4\right)$; $\dfrac{1}{1+c+2ab}\le \dfrac{1}{16}\left(3+z^4\right)$

Do đó $\dfrac{1}{1+a+2bc}+\dfrac{1}{1+b+2ca}+\dfrac{1}{1+c+2ab}\le \dfrac{1}{16}\left(9+x^4+y^4+z^4\right)=\dfrac{12}{16}=\dfrac{3}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z = 1 $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{3}{4}$ xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 17. *(Trường chuyên Hải Dương năm 2022-2023)*

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+4b^2+c=6ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a}{2b+c}+\dfrac{2b}{a+c}+\dfrac{a^3+8b^3}{16c}$.

Lời giải

Ta có: $P=\dfrac{a}{2b+c}+\dfrac{2b}{a+c}+\dfrac{a^3+8b^3}{16c}$

$\Leftrightarrow P=\dfrac{a}{2b+c}+1+\dfrac{2b}{a+c}+1+\dfrac{a^3+8b^3}{16c}-2$

$\Leftrightarrow P=\left(a+2b+c\right)\left(\dfrac{1}{2b+c}+\dfrac{1}{a+c}\right)+\dfrac{a^3+8b^3}{16c}-2$

Ta có: $(x-y)^2\ge 0$ nên $x^2+y^2\ge 2xy$

$\Rightarrow (x+y)^2\ge 4xy\Rightarrow \dfrac{x+y}{xy}\ge \dfrac{4}{x+y}$ với $x;y>0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge \dfrac{4}{x+y}$

Lại có: $x^2+y^2-xy\ge xy$ nên $(x+y)\left(x^2+y^2-xy\right)\ge xy(x+y)\Rightarrow x^3+y^3\ge xy(x+y)$

$\Rightarrow P\ge \left(a+2b+c\right)\dfrac{4}{2b+c+a+c}+\dfrac{a.2b(a+2b)}{16c}-2$

$\Leftrightarrow P\ge \dfrac{2(a+2b)}{a+2b+2c}+\dfrac{2ab(a+2b)}{16c}$

Mặc khác: $a^2+4b^2+c=6ab$ nên $(a-2b)^2+c=2ab$

$\Rightarrow c\le 2ab\Leftrightarrow 4a.2b=4c\Rightarrow c\le \dfrac{(a+2b)^2}{4}$

Đặt $t = a + 2b$, ta có:

$$P \geq \frac{2t}{\frac{t^2}{2} + t} + \frac{2t}{16} = \frac{4}{t+2} + \frac{t}{16} = \frac{4}{t+2} + \frac{t+2}{16} - \frac{2}{16}$$

$$\Rightarrow P \geq 2\sqrt{\frac{4}{t+2}.\frac{t}{16}} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$P_{\min} = \frac{7}{8} khi \frac{4}{t+2} = \frac{t+2}{16} \Leftrightarrow t = 6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 6 \\ a = 2b \\ c = 2ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{3}{2} \\ c = 9 \end{cases}$$

Vậy GTNN của $P = \frac{7}{8} khi\, a = 3, b = \frac{3}{2}, c = 9$.

Câu 18. *(Trường chuyên Hải Phòng năm 2022-2023)*

Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $3x^2 \leq 2\left(y^2 + 4yz + z^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{y^2}{\sqrt{3x^2 + 20xy + 12y^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{3x^2 + 20xz + 12z^2}} + \frac{4}{(y+z)^2}.$$

Lời giải

Dựa trên dấu bằng $\Leftrightarrow x = 2y = 2z$ nên ta đánh giá theo hướng sử dụng $(x - 2y)^2 \geq 0$, $(x - 2z)^2 \geq 0$ và $(y - z)^2 \geq 0$.

Ta có

$$3x^2 + 20xy + 12y^2 = \left(4x^2 + 16xy + 16y^2\right) - \left(x^2 - 4xy + 4y^2\right) = (2x + 4y)^2 - (x - 2y)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x^2 + 20xy + 12y^2} \leq 2x + 4y$$

Tương tự ta có $P \geq \frac{y^2}{2x + 4y} + \frac{z^2}{2x + 4z} + \frac{4}{(y+z)^2}$.

Theo bất đẳng thức Svác (Schwarz) ta có $P \geq \frac{(y+z)^2}{4x + 4\left(y + z\right)} + \frac{4}{(y+z)^2}$.

Lại có $3x^2 \leq 2\left(y^2 + 4yz + z^2\right) = 2(y+z)^2 + 4yz \leq 3(y+z)^2 \Rightarrow x \leq y + z$.

Do đó $P \geq \frac{y+z}{8} + \frac{4}{(y+z)^2} = \frac{y+z}{16} + \frac{y+z}{16} + \frac{4}{(y+z)^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{y+z}{16}.\frac{y+z}{16}.\frac{4}{(y+z)^2}} = \frac{3}{4}$.

Dấu bằng $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y = 2z \\ \frac{y+z}{16} = \frac{4}{(y+z)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = z = 2 \end{cases}$.

Câu 19. *(Trường chuyên Hòa Bình năm 2022-2023)*

Cho các số thực x, y tùy ý thỏa mãn: $x+y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\sqrt{10x^2+4xy+2y^2}+\sqrt{2x^2+4xy+10y^2}$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{10x^2+4xy+2y^2}=\sqrt{(3x+y)^2+(x-y)^2}\ge\sqrt{(3x+y)^2}=|3x+y|\ge 3x+y \quad (1)$

$\sqrt{2x^2+4xy+10y^2}=\sqrt{(x+3y)^2+(x-y)^2}\ge\sqrt{(x+3y)^2}=|x+3y|\ge x+3y \quad (2)$

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức (1) và (2) ta được:

$\Rightarrow M\ge(3x+y)+(x+3y)=4(x+y)=4.2=8$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1$

KL: Vậy $MinM=8\Leftrightarrow x=y=1$

Câu 20. *(Trường chuyên Tin Hòa Bình năm 2022-2023)*

Cho $0<a,b<1$, chứng minh rằng: $\sqrt{a-ab}+\sqrt{b-ab}\le 1$

Lời giải

Vì $0<a,b<1$ nên $\sqrt{a-ab}=\sqrt{a}.\sqrt{1-b}\le\dfrac{a+1-b}{2}$

Tương tự ta có $\sqrt{b-ab}=\sqrt{b}.\sqrt{1-a}\le\dfrac{b+1-a}{2}$

Do đó $\sqrt{a-ab}+\sqrt{b-ab}\le\dfrac{a+1-b}{2}+\dfrac{b+1-a}{2}=1$

Câu 21. *(Trường chuyên Toán Hòa Bình năm 2022-2023)*

1) Tìm tất cả các cặp số thực x, y dương thỏa mãn điều kiện:

$$\sqrt{22x^2+36xy+6y^2}+\sqrt{6x^2+36xy+22y^2}=x^2+y^2+32$$

2) Cho a, b là các số thực thỏa mãn: $a^2+b^2=a+b$.

Chứng minh rằng: $a^3+b^3+a^2b+ab^2\le 4$

Lời giải

1) Ta có: $22x^2+36xy+6y^2=(5x+3y)^2-3(x-y)^2\le(5x+3y)^2$

$\Rightarrow\sqrt{22x^2+36xy+6y^2}\le 5x+3y$ (do x, y dương)

Tương tự ta có :

$6x^2+36xy+22y^2=(3x+5y)^2-3(x-y)^2\le(3x+5y)^2\Rightarrow\sqrt{6x^2+36xy+22y^2}\le 3x+5y$ (do x, y dương)

Vậy $\sqrt{22x^2+36xy+6y^2}+\sqrt{22x^2+36xy+6y^2}\le 8(x+y)\,(1)$

Ta có $(x-4)^2+(y-4)^2\ge 0(\forall x,y)$

$\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2-8y+16\ge 0\Leftrightarrow x^2+y^2+32\ge 8(x+y)\,(2)$

Vậy $\sqrt{22x^2+36xy+6y^2}+\sqrt{22x^2+36xy+6y^2}=x^2+y^2+32$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = y = 4 \\ y - 4 = 0 \end{cases}$$

2) Nếu $a + b = 0$ suy ra $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$ khi đó bất đẳng thức cần chứng minh đúng.

Nếu $a + b \neq 0 \Rightarrow a + b = a^2 + b^2 > 0$

Ta có : $a^2 + b^2 \geq \dfrac{(a+b)^2}{2} \Rightarrow a + b \geq \dfrac{(a+b)^2}{2} \Leftrightarrow 2(a+b) \geq (a+b)^2$

Suy ra $a + b \leq 2$

Ta có : $a^3 + b^3 + a^2b + ab^2 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + \text{ab(a+b)} = (\text{a+b})^2$

Vì $0 < a + b \leq 2$ nên $(a+b)^2 \leq 4$ (đpcm)

Câu 22. *(Trường chuyên Hưng Yên năm 2022-2023)*

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $4xy + 2yz + 3xz = 24$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}} + \dfrac{y}{\sqrt{y^2+9}} + \dfrac{z}{\sqrt{z^2+16}}$.

Lời giải

Ta có: $4xy + 2yz + 3xz = 24 \Leftrightarrow \dfrac{xy}{6} = \dfrac{yz}{12} = \dfrac{xz}{8} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2}.\dfrac{y}{3} + \dfrac{y}{3}.\dfrac{z}{4} + \dfrac{x}{2}.\dfrac{z}{4} = 1$

Đặt $\dfrac{x}{2} = a > 0; \dfrac{y}{3} = b > 0; \dfrac{z}{4} = c > 0 \Rightarrow ab + bc + ac = 1$

$$P = \frac{4a}{\sqrt{4a^2+4}} + \frac{3b}{\sqrt{9b^2+9}} + \frac{4c}{\sqrt{16c^2+16}}$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}}$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+ab+bc+ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+ab+bc+ac}}$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2a}{a+b}.\frac{2a}{a+c}} + \sqrt{\frac{2b}{a+b}.\frac{b}{2(b+c)}} + \sqrt{\frac{c}{2(b+c)}.\frac{2c}{a+c}}$$

Ta có :

$$\frac{2a}{a+b} + \frac{2a}{a+c} \geq 2\sqrt{\frac{2a}{a+b}.\frac{2a}{a+c}}$$

$$\frac{2b}{a+b} + \frac{b}{2(b+c)} \geq 2\sqrt{\frac{2b}{a+b}.\frac{b}{2(b+c)}}$$

$$\frac{c}{2(b+c)} + \frac{2c}{a+c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{2(b+c)}.\frac{2c}{a+c}}$$

$$p \le \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{a+b} + \frac{2a}{a+c} + \frac{2b}{a+b} + \frac{b}{2(b+c)} + \frac{c}{2(b+c)} + \frac{2c}{a+c} \right)$$

$$\Leftrightarrow P \le \frac{1}{2}\left(\frac{2(a+b)}{a+b} + \frac{2(a+c)}{a+c} + \frac{b+c}{2(b+c)} \right)$$

$$\Leftrightarrow P \le \frac{1}{2}\left(2+2+\frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow P \le \frac{9}{4}$$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{2a}{a+b} = \dfrac{2a}{a+c} \\ \dfrac{2b}{a+b} = \dfrac{b}{2(b+c)} \\ \dfrac{c}{2(b+c)} = \dfrac{2c}{a+c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ a+b=8b \\ a+c=8c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ a=7b \\ a=7c \end{cases}$

$$ab+bc+ac=1 \Leftrightarrow 7b^2+b^2+7b^2=1 \Leftrightarrow b^2=\frac{1}{15} \Leftrightarrow b=\frac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow y=\dfrac{3}{\sqrt{15}} \\ c=\dfrac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow z=\dfrac{4}{\sqrt{15}} \\ a=\dfrac{7}{\sqrt{15}} \Rightarrow x=\dfrac{14}{\sqrt{15}} \end{cases}$$

Câu 23. *(Trường chuyên Khánh Hòa năm 2022-2023)*

a) Chứng minh $2x^3-3x^2+1\ge 0$ với mọi số thực $x\ge 0$.

b) Cho các số thực không âm x,y,z thỏa $\dfrac{1}{1+x^3}+\dfrac{1}{1+y^3}+\dfrac{1}{1+z^3}=\dfrac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1-y}{1-y+y^2}+\dfrac{1-z}{1-z+z^2}+2022$.

Lời giải

a) Chứng minh $2x^3-3x^2+1\ge 0$ với mọi số thực $x\ge 0$.

Ta có $M=2x^3-2x^2-x^2+1=2x^2(x-1)-\left(x^2-1\right)$

$=(x-1)\left[2x^2-(x-1)\right]=(x-1)(x-1)(2x+1)=(x-1)^2(2x+1)$

Mà $x\ge 0$ nên $2x+1>0$.

Do đó $(x-1)^2(2x+1)\ge 0, \forall x\ge 0$.

Hay $2x^3-3x^2+1\ge 0, \forall x\ge 0$

b) Cho các số thực không âm x, y, z thỏa $\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}=\frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1-y}{1-y+y^2}+\frac{1-z}{1-z+z^2}+2022$.

Cách 24.

Ta có:

$$\frac{1-x}{1-x+x^2}=\frac{1-x^2}{1+x^3};\ \frac{1-y}{1-y+y^2}=\frac{1-y^2}{1+y^3} \text{ và } \frac{1-z}{1-z+z^2}=\frac{1-z^2}{1+z^3}$$

$$Q=\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1-y}{1-y+y^2}+\frac{1-z}{1-z+z^2}+2022$$

$$Q=\frac{1-x^2}{1+x^3}+\frac{1-y^2}{1+y^3}+\frac{1-z^2}{1+z^3}+2022$$

Mặt khác $2x^3+1\ge 3x^2$ (câu a) nên $\frac{2x^3+1}{3}\ge x^2 \Leftrightarrow -x^2\le -\frac{2x^3+1}{3}$

Suy ra $Q\le \frac{1-\frac{\left(2x^3+1\right)}{3}}{1+x^3}+\frac{1-\frac{\left(2y^3+1\right)}{3}}{1+y^3}+\frac{1-\frac{\left(2z^3+1\right)}{3}}{1+z^3}+2022$

$$\Leftrightarrow Q\le \frac{2-2x^3}{3\left(1+x^3\right)}+\frac{2-2y^3}{3\left(1+y^3\right)}+\frac{2-2z^3}{3\left(1+z^3\right)}+2022$$

$$\Leftrightarrow Q\le \frac{4-\left(2+2x^3\right)}{3\left(1+x^3\right)}+\frac{4-\left(2+2y^3\right)}{3\left(1+y^3\right)}+\frac{4-\left(2+2z^3\right)}{3\left(1+z^3\right)}+2022$$

$$\Leftrightarrow Q\le \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}\right)-\frac{2}{3}(1+1+1)$$

$$\Leftrightarrow Q\le \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}\right)-\frac{2}{3}(1+1+1)$$

$$\Leftrightarrow Q\le \frac{4}{3}.\frac{3}{2}-\frac{2}{3}.3+2022$$

$$\Leftrightarrow Q\le 2022$$

Vậy $Q_{\min}=2022$ khi $x=y=z=1$

Cách 25.

+) Xét $Q=\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1-y}{1-y+y^2}+\frac{1-z}{1-z+z^2}=\frac{1-x^2}{1+x^3}+\frac{1-y^2}{1+y^3}+\frac{1-z^2}{1+z^3}$

$$Q=\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}-\left(\frac{x^2}{1+x^3}+\frac{y^2}{1+y^3}+\frac{z^2}{1+z^3}\right)$$

+) Áp dụng BĐT AM-GM ta có:

$$\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}=2-\frac{1}{1+z^3}-\frac{1}{2}=\frac{1+2z^3}{1+z^3}-\frac{1}{2}\ge\frac{3z^2}{1+z^3}-\frac{1}{2}$$

+ Tương tự: $\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}\geq\frac{3x^2}{1+x^3}-\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{1+z^3}+\frac{1}{1+x^3}\geq\frac{3y^2}{1+y^3}-\frac{1}{2}$

+) Cộng theo vế các bất đẳng thức với nhau ta được

$$2\left(\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}\right)\geq 3\left(\frac{x^2}{1+x^3}+\frac{y^2}{1+y^3}+\frac{z^2}{1+z^3}\right)-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1+x^3}+\frac{y^2}{1+y^3}+\frac{z^2}{1+z^3}\leq\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}\right)$$

$$\Rightarrow Q\geq\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}\right)$$

$$\Rightarrow Q\geq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}\right)-\frac{1}{2}=0$$

Do đó $P=Q+2022\geq 0+2022=2022$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$

Câu 26. *(Trường chuyên tỉnh Lai Châu năm 2022-2023)*

Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn: $xy+yz+xz=9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=10x^2+10y^2+z^2$

Lời giải

Ta có:

$$4x^2+4y^2\geq 8xy$$
$$16x^2+z^2\geq 8zx$$
$$16y^2+z^2\geq 8yz$$

Cộng vế theo vế của các bất đẳng thức cùng chiều ta có: $2S\geq 8(xy+yz+xz)\geq 36$

Vậy $S_{\min}=36 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ z=4 \end{cases}$

Câu 27. *(Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng năm 2022-2023)*

Cho a, b, c là các số dương và $a+b+c=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất biểu thức:

$$P=\frac{a^3}{a^2+4ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+4bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+4ca+a^2}.$$

Lời giải

Với $a,b>0$, ta chứng minh $\frac{a^3}{a^2+b^2}\geq a-\frac{b}{2}$.

- Áp dụng: $(a-b)^2\geq 0\Leftrightarrow a^2+b^2\geq 2ab\Leftrightarrow\frac{-1}{a^2+b^2}\geq\frac{-1}{2ab}$

Khi đó:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}=\frac{a(a^2+b^2)-ab^2}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\geq a-\frac{ab^2}{2ab}=a-\frac{b}{2}$$

$\Rightarrow \dfrac{b^3}{b^2+c^2} \ge b-\dfrac{c}{2}$; $\dfrac{c^3}{c^2+a^2} \ge c-\dfrac{a}{2}$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2} \ge \frac{a+b+c}{2}$$

- Áp dụng: $(a-b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2\right) \ge 4ab$

Ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+4ab+b^2} \ge \frac{a^3}{a^2+2(a^2+b^2)+b^2} = \frac{1}{3}.\frac{a^3}{a^2+b^2};\ \frac{b^3}{b^2+4bc+c^2} \ge \frac{b^3}{b^2+2(b^2+c^2)+c^2} = \frac{1}{3}.\frac{b^3}{b^2+c^2}$$

$$;\frac{c^3}{c^2+4ac+a^2} \ge \frac{c^3}{c^2+2(c^2+a^2)+a^2} = \frac{1}{3}.\frac{c^3}{c^2+a^2}$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+4ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+4bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+4ca+a^2}$$

$$\ge \frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\right) \ge \frac{a+b+c}{6} = 1$$

-Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1, dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 2.

Câu 28. *(Trường chuyên tỉnh Lào Cai năm 2022-2023)*

a) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ac}{a+c} \le \frac{3}{2}$$

b) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\sqrt{\frac{a}{a+bc}}+\sqrt{\frac{b}{b+ac}}+\sqrt{\frac{c}{c+ab}}$$

Lời giải

a)Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có : $a+b \ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow \dfrac{ab}{a+b} \le \dfrac{ab}{2\sqrt{ab}}$

$$\Rightarrow \frac{ab}{a+b} \le \frac{\sqrt{ab}}{2} \le \frac{a+b}{4}$$

Tương tự ta có : $\dfrac{bc}{b+c} \le \dfrac{b+c}{4}, \dfrac{ac}{a+c} \le \dfrac{a+c}{4}$

Suy ra : $\dfrac{ab}{a+b}+\dfrac{bc}{b+c}+\dfrac{ac}{a+c} \le \dfrac{a+b}{4}+\dfrac{b+c}{4}+\dfrac{a+c}{4} = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{3}{2}$

Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

b)Ta có : $ab+bc+ca=abc \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$

Đặt : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{a} \\ y = \dfrac{1}{b}(x > 0, y > 0, z > 0) \\ z = \dfrac{1}{c} \end{cases} \Rightarrow x + y + z = 1$

Ta có : $\sqrt{\dfrac{a}{a+bc}} = \sqrt{\dfrac{yz}{yz+x}} = \sqrt{\dfrac{yz}{yz+x(x+y+z)}} = \sqrt{\dfrac{yz}{(x+y)(x+z)}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x+y} + \dfrac{z}{x+z}\right)$

Tương tự ta có : $\sqrt{\dfrac{b}{b+ac}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{z}{y+z}\right); \sqrt{\dfrac{c}{c+ab}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+z} + \dfrac{y}{y+z}\right)$

$\Rightarrow P \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x+y} + \dfrac{z}{x+z} + \dfrac{x}{x+y} + \dfrac{z}{y+z} + \dfrac{x}{x+z} + \dfrac{y}{y+z}\right) = \dfrac{2}{3}$

Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{y}{x+y} = \dfrac{z}{x+z} \\ \dfrac{x}{x+y} = \dfrac{z}{y+z} \\ \dfrac{x}{x+z} = \dfrac{y}{y+z} \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow a = b = c = 3$

Vậy max $P = \dfrac{3}{2}$ khi $a = b = c = 3$

Câu 29. *(Trường chuyên tỉnh Nam Định năm 2022-2023)*

Xét hai số thực x, y thay đổi luôn thoả mãn điều kiện $x + y \ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\sqrt{2(x^2 + y^2)} + \dfrac{8}{x+y} + 1$.

Lời giải

1) Điều kiện $\begin{cases} x + 3 \ge 0 \\ x - 1 \ge 0 \\ x^2 + 2x - 3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1(*)$

Khi đó

$x + \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 3 - \sqrt{x^2 + 2x - 3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}\right) + \left(x + \sqrt{x^2 + 2x - 3}\right) - 3 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}$ $(t \ge 0)$

Suy ra $t^2 = 2x = 2 + 2\sqrt{x^2 + 2x - 3} \Rightarrow x + \sqrt{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{t^2 - 2}{2}$.

Do đó phương trình trở thành $t+\frac{t^2-2}{2}-3=0 \Leftrightarrow t^2+2t-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2(tm) \\ t=-4(ktm) \end{array}\right.$

Với $t=2 \Rightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow x=1(tm(*))$.

2) $P=4.\sqrt{2(x^2+y^2)}+\frac{8}{x+y}+1$

Ta chứng minh được bất đẳng thức $2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2, \forall x, y$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$. Suy ra $\sqrt{2(x^2+y^2)} \geq |x+y|=x+y(\text{do } x+y \geq 2)$

Khi đó ta có $P \geq 4.(x+y)+\frac{8}{x+y}+1$

Đặt $t=x+y \Rightarrow t \geq 4$ suy ra $P \geq 4t+\frac{8}{t}+1=\left(2t+\frac{8}{t}\right)+2t+1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho 2 số dương ta có $2t+\frac{8}{t} \geq 2.\sqrt{2t.\frac{8}{t}}=8$

Mặt khác $t \geq 2 \Rightarrow 2t \geq 4$

Do đó $P \geq 8+4+1=13$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t=2$ hay $x=y=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 13 đạt được khi $x=y=1$.

Câu 30. *(Trường chuyên tỉnh Nghệ An năm 2022-2023)*

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $1 \leq x, y, z \leq 3$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=7x+y+z+9y^2+2z^3-3xz-26xyz$

Lời giải

Theo giả thiết, ta có : $1 \leq z \leq 3 \Rightarrow (z-1)^2(z-3) \leq 0$

$\Leftrightarrow (z^2-2z+1)(z-3) \leq 0 \Leftrightarrow z^3 \leq 5z^2-7z+3(1)$

Cũng theo giả thiết ta có : $(z-1)(z-3) \leq 0 \Rightarrow z^2 \leq 4z-3$

Thế vào (1) ta được $2z^3 \leq 10(4z-3)-14z+6=26z-24$

Từ đây kết hợp với $27-3x-26xy \leq 27-3-26=-2<0$, ta có :

$2z^3-3zx-26xyz+z \leq 26z-24-3zx-26xyz+z=z(27-3x-26xy)-24$

$\leq 27-3x-26xy-24=3-3x-26xy$

Từ đây kết hợp với $4-26y<4-26=-22<0$ ta có :

$T \leq 7x+y+9y^2+3-3x-26xy=4x+y+9y^2+3-26xy$

$=x(4-26y)+y+9y^2+3 \leq 4-26y+y+9y^2+3=9y^2-25y+7$

Đến đây áp dụng $y^2 \leq 4y-3$(vì x, y, z bình đẳng) , nên ta được :

$T \leq 9(4y-3)-25y+7=11y-20 \leq 11.3-20=13$

Vậy giá trị lớn nhất của $T = 13$. Dấu bằng xảy ra khi $x = z = 1; y = 3$

Câu 31. *(Trường chuyên tỉnh Ninh Bình năm 2022-2023)*

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + 2y + 3z \le 6$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x^2+4y^2+9z^2}+\frac{1}{49xy}+\frac{3}{49yz}+\frac{3}{98zx}\ge\frac{9}{49}.$$

Lời giải

Đặt $P = \frac{1}{x^2+4y^2+9z^2}+\frac{1}{49xy}+\frac{3}{49yz}+\frac{3}{98zx}$

Đặt $a = x; b = 2y; c = 3z$. Khi đó $a + b + c \le 6$

Khi đó $\begin{cases} xy = \frac{ab}{2} \\ yz = \frac{bc}{6} \\ zx = \frac{ca}{3} \end{cases}$.

Khi đó biểu thức P trở thành $P = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{49ab}+\frac{18}{49bc}+\frac{9}{98ca}$.

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{(a_1)^2}{b_1}+\frac{(a_2)^2}{b_2}+\frac{(a_3)^2}{b_3}+\frac{(a_4)^2}{b_4}\ge\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4)^2}{b_1+b_2+b_3+b_4}$,

với $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ là các số thực và $b_1, b_2, b_3, b_4 > 0$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{b_4}$

Ta có

$$P = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{\frac{4}{49}}{2ab}+\frac{\frac{36}{49}}{2bc}+\frac{\frac{9}{49}}{2ca}\ge\frac{\left(1+\frac{2}{7}+\frac{6}{7}+\frac{3}{7}\right)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$$

$$=\frac{\left(\frac{18}{7}\right)^2}{(a+b+c)^2}\ge\frac{\left(\frac{18}{7}\right)^2}{36}=\frac{9}{49}$$

Câu 32. *(Trường chuyên tỉnh Phú Thọ năm 2022-2023)*

Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2b + ab^2 - 2(a + b + ab) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2(a^3b+ab^3)+(1+2ab)^2-3}{2ab}$.

Lời giải

Ta có

$a^2b + ab^2 - 2(a+b+ab) = 0 \Leftrightarrow ab(a+b) = 2(a+b) + 2ab$

$\Leftrightarrow a+b = \frac{2}{a}+\frac{2}{b}+2 \ge \frac{8}{a+b}+2 \Leftrightarrow (a+b)^2 - 2(a+b) - 8 \ge 0 \Rightarrow a+b \ge 4.$

Lại có $a^2b+ab^2-2(a+b+ab)=0\Leftrightarrow 1=\frac{2}{ab}+\frac{2}{a+b}\Leftrightarrow \frac{1}{ab}=\frac{1}{2}-\frac{1}{a+b}$.

$$P=\frac{2\left(a^3b+ab^3\right)+(1+2ab)^2-3}{2ab}=\frac{2ab\left(a^2+b^2\right)+(1+2ab)^2-3}{2ab}$$

$$=a^2+b^2+\frac{(1+2ab)^2-3}{2ab}=(a+b)^2+2-\frac{1}{ab}$$

$$=(a+b)^2+2-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a+b}\right)=(a+b)^2+\frac{1}{a+b}+\frac{3}{2}$$

$$=(a+b)^2+\frac{64}{a+b}+\frac{64}{a+b}-\frac{127}{a+b}+\frac{3}{2}\geq 3\sqrt[3]{(a+b)^2.\frac{64}{a+b}.\frac{64}{a+b}}-\frac{127}{4}+\frac{3}{2}=\frac{71}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{71}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=2$.

Câu 33. *(Trường chuyên Toán Phú Thọ năm 2022-2023)*

Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^4}{(x+y)^4}+\frac{y^4}{(y+z)^4}+\frac{z^4}{(z+x)^4}.$$

Lời giải

Ta có $P=\frac{1}{\left(\frac{y}{x}+1\right)^4}+\frac{1}{\left(\frac{z}{y}+1\right)^4}+\frac{1}{\left(\frac{x}{z}+1\right)^4}$.

Đặt $a=\frac{y}{x},b=\frac{z}{y},c=\frac{x}{z}\Rightarrow a,b,c>0$ và $abc=1$.

$$\Rightarrow P=\frac{1}{(a+1)^4}+\frac{1}{(b+1)^4}+\frac{1}{(c+1)^4}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{1}{(a+1)^4}+\frac{1}{16}\geq 2\sqrt{\frac{1}{16}.\frac{1}{(a+1)^4}}=\frac{1}{2}\frac{1}{(a+1)^2}$.

Tương tự có $\frac{1}{(b+1)^4}+\frac{1}{16}\geq\frac{1}{2}\frac{1}{(b+1)^2}$, $\frac{1}{(c+1)^4}+\frac{1}{16}\geq\frac{1}{2}\frac{1}{(c+1)^2}$.

$$\Rightarrow P+\frac{3}{16}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}\right).$$

Ta chứng minh $\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\geq\frac{1}{1+ab}$ với $a,\ b>0$.

Thật vậy: $\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\geq\frac{1}{1+ab}$

$$\Leftrightarrow\left[(a+1)^2+(b+1)^2\right](1+ab)\geq(a+1)^2.(b+1)^2$$

$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2+2a+2b+2\right)\left(1+ab\right) \ge \left(ab+a+b+1\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2+2a+2b+2\right)\left(1+ab\right) \ge \left(ab+a+b\right)^2+2\left(ab+a+b\right)+1$

$\Leftrightarrow 1+ab\left(a^2+b^2\right) \ge 2ab+a^2b^2$

$\Leftrightarrow ab\left(a-b\right)^2+\left(ab-1\right)^2 \ge 0$ (luôn đúng). Dấu "=" xảy ra khi $a=b=1$.

Tương tự có $\dfrac{1}{\left(c+1\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+1\right)^2} \ge \dfrac{1}{1+c}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{ab}}=\dfrac{ab}{ab+1}$.

Khi đó $P \ge \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\left(a+1\right)^2}+\dfrac{1}{\left(b+1\right)^2}+\dfrac{1}{\left(c+1\right)^2}\right)-\dfrac{3}{16} \ge \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+ab}+\dfrac{ab}{ab+1}-\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{3}{16}=\dfrac{3}{8}-\dfrac{3}{16}=\dfrac{3}{16}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{3}{16}$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=1 \Rightarrow x=y=z$.

Câu 34. *(Trường chuyên Quảng Bình năm 2022-2023)*

Cho $a,\ b,\ c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$\dfrac{a^2}{b+c-a}+\dfrac{b^2}{c+a-b}+\dfrac{c^2}{a+b-c} \ge a+b+c$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} x=a+b-c>0 \\ y=b+c-a>0 \\ z=c+a-b>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{x+z}{2} \\ b=\dfrac{x+y}{2} \\ c=\dfrac{y+z}{2} \end{cases}$

Ta cần chứng minh: $\dfrac{\left(x+y\right)^2}{4z}+\dfrac{\left(y+z\right)^2}{4x}+\dfrac{\left(z+x\right)^2}{4y} \ge x+y+z$

Ta có: $\dfrac{\left(x+y\right)^2}{4z}+\dfrac{\left(y+z\right)^2}{4x}+\dfrac{\left(z+x\right)^2}{4y} \ge \dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y} \quad (1)$

Mặt khác: $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x} \ge 2y;\ \dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y} \ge 2z;\ \dfrac{xy}{z}+\dfrac{zx}{y} \ge 2x$.

Khi đó $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y} \ge x+y+z \quad (2)$

Từ (1), (2) ta có $\dfrac{\left(x+y\right)^2}{4z}+\dfrac{\left(y+z\right)^2}{4x}+\dfrac{\left(z+x\right)^2}{4y} \ge x+y+z$

Vậy $\dfrac{a^2}{b+c-a}+\dfrac{b^2}{c+a-b}+\dfrac{c^2}{a+b-c} \ge a+b+c$

Dấu bằng xãy ra khi $a=b=c$

Câu 35. *(Trường chuyên Quảng Nam năm 2022-2023)*

Chứng minh rằng $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}+4\ge 3\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)$ với mọi số thực x; y khác 0.

Lời giải

Cách 1:

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+4\ge 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\Leftrightarrow \frac{x^4+y^4+4x^2y^2}{x^2y^2}\ge\frac{3\left(x^2+y^2\right)}{xy}$$

$$\Leftrightarrow x^4+y^4+4x^2y^2\ge 3xy\left(x^2+y^2\right)\quad (do\ x^2y^2>0)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2+y^2\right)xy+2x^2y^2-2xy\left(x^2+y^2\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2-xy\right)-2xy\left(x^2+y^2-xy\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^2+y^2-2xy\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right](x-y)^2\ge 0\quad (*)$$

Bất đẳng thức (*) luôn đúng với mọi số thực x; y khác 0. Vậy bất đẳng thức đã cho luôn đúng với mọi số thực x; y khác 0.

Cách 2:

Đặt $t=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$. Ta có $t^2=\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2=\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}+2$

Theo Cô-si $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\ge 2\Rightarrow t^2\ge 4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\ge 2\\ t\le -2\end{array}\right.$

Bất đẳng thức đã cho trở thành $t^2-3t+2\ge 0\Leftrightarrow (t-1)(t+2)\ge 0$ (*)

Với $t\ge 2$, (*) luôn đúng nên bất đẳng thức đã cho luôn đúng

Với $t\le -2$, (*) luôn đúng nên bất đẳng thức đã cho luôn đúng.

Câu 36. *(Trường chuyên Quảng Nam năm 2022-2023)*

Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $xyz=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\mathrm{P}=\frac{1}{4+x^2+y^2}+\frac{1}{4+y^2+z^2}+\frac{1}{4+z^2+x^2}.$$

Lời giải

$$4P=\frac{4}{4+x^2+y^2}+\frac{4}{4+y^2+z^2}+\frac{4}{4+z^2+x^2}=1-\frac{x^2+y^2}{4+x^2+y^2}+1-\frac{y^2+z^2}{4+y^2+z^2}+1-\frac{z^2+x^2}{4+z^2+x^2}$$

$$=3-\left(\frac{x^2+y^2}{4+x^2+y^2}+\frac{y^2+z^2}{4+y^2+z^2}+\frac{z^2+x^2}{4+z^2+x^2}\right)$$

$$=3-\frac{1}{2}\left[\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{4+x^2+y^2}+\frac{(y+z)^2+(y-z)^2}{4+y^2+z^2}+\frac{(z+x)^2+(z-x)^2}{4+z^2+x^2}\right]$$

$$=3-\frac{1}{2}\left[\frac{(x+y)^2}{4+x^2+y^2}+\frac{(y+z)^2}{4+y^2+z^2}+\frac{(z+x)^2}{4+z^2+x^2}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-y)^2}{4+x^2+y^2}+\frac{(y-z)^2}{4+y^2+z^2}+\frac{(z-x)^2}{4+z^2+x^2}\right]$$

$$\le 3-\frac{1}{2}\left[\frac{(x+y)^2}{4+x^2+y^2}+\frac{(y+z)^2}{4+y^2+z^2}+\frac{(z+x)^2}{4+z^2+x^2}\right]\ (*)$$

Ta có: $\frac{(x+y)^2}{4+x^2+y^2}+\frac{(y+z)^2}{4+y^2+z^2}+\frac{(z+x)^2}{4+z^2+x^2}\ge\frac{4(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+12}=\frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+6}$

Ta đi chứng minh: $\frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+6}\ge 2$ (**).

Thật vậy $\frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+6}\ge 2\Leftrightarrow (x+y+z)^2\ge x^2+y^2+z^2+6\Leftrightarrow xy+yz+zx\ge 3$

$xy+yz+zx\ge 3$ là bất đẳng thức đúng vì $xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{(xyz)^2}=3$ (bđt Cô si)

Từ (*) và (**) suy ra $4P\le 3-\frac{1}{2}.2=2\Rightarrow P\le\frac{1}{2}$ (Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$).

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là bằng $\frac{1}{2}$.

Cách khác: $P\le\frac{1}{4+2xy}+\frac{1}{4+2yz}+\frac{1}{4+2zx}=\frac{z}{4z+2}+\frac{x}{4x+2}+\frac{y}{4y+2}$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2y+1}+\frac{1}{2z+1}\right)$$

Đặt $x=a^3, y=b^3, z=c^3$. Khi đó $a,b,c>0$ và $abc=1$

$$\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2y+1}+\frac{1}{2z+1}=\frac{abc}{2a^3+abc}+\frac{abc}{2b^3+abc}+\frac{abc}{2c^3+abc}$$

$$=\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}=\frac{(bc)^2}{2ab.ca+(bc)^2}+\frac{(ca)^2}{2ab.bc+(ca)^2}+\frac{(ab)^2}{2bc.ca+(ab)^2}$$

$$\ge\frac{(bc+ca+ab)^2}{2ab.ca+(bc)^2+2ab.bc+(ca)^2+2bc.ca+(ab)^2}=\frac{(bc+ca+ab)^2}{(bc+ca+ab)^2}=1$$

Suy ra $P\le\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ (Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$).

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là bằng $\frac{1}{2}$.

Câu 37. *(Trường chuyên Quảng Ninh năm 2022-2023)*

Cho các số thực dương thỏa mãn $x+y\le z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\left(2x^2+2y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{2z^2}\right).$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si, ta có x, y, z

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge 2\frac{1}{x}.\frac{1}{y}=\frac{2}{xy}$$

$(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$

$(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow 2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$

Khi đó ta có $P=(2x^2+2y^2+z^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{2z^2}\right)$

$\Rightarrow P \geq \left[(x+y)^2+z^2\right]\left(\frac{2}{xy}+\frac{1}{2z^2}\right)$

$\Rightarrow P \geq \left[(x+y)^2+z^2\right]\left(\frac{8}{(x+y)^2}+\frac{1}{2z^2}\right)$

$\Rightarrow P \geq \left[\left(\frac{x+y}{z}\right)^2+1\right]\left[8.\left(\frac{z}{x+y}\right)^2+\frac{1}{2}\right]$

Đặt $t=\left(\frac{x+y}{z}\right)^2$

Do $x+y \leq z$ nên $0<t \leq 1$

Ta có $P \geq (t+1)\left(\frac{8}{t}+\frac{1}{2}\right)$ với $0<t \leq 1$

$\Rightarrow P=\frac{t}{2}+\frac{8}{t}+\frac{17}{2}=\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2t}\right)+\frac{15}{2t}+\frac{17}{2} \geq 2\sqrt{\frac{t}{2}.\frac{1}{2t}}+\frac{15}{2}+\frac{17}{2}$

$\Rightarrow P \geq 1+\frac{15}{2}+\frac{17}{2}=17$

$\Rightarrow P \geq 17$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}z$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 17 khi $x=y=\frac{1}{2}z$

Câu 38. *(Trường chuyên Quảng Trị năm 2022-2023)*

Chứng minh rằng với mọi số thực $x,\ y,\ z$ ta có:

$$3(x^2-x+1)(y^2-y+1)(z^2-z+1) \geq 1+xyz+x^2y^2z^2.$$

Lời giải

Đặt $p=(x^2-x+1)(y^2-y+1);\ q=xy.$ Dễ thấy $p>0,\ \forall x,y \in \mathbb{R}$

BĐT trở thành $(3p-q^2)z^2-(3p+q)z+3p-1 \geq 0$

Xét $g(z)=(3p-q^2)z^2-(3p+q)z+3p-1$

Ta có: $\Delta=(3p+q)^2-4(3p-q^2)(3p-1)=-3(p-q)^2-12p(2p-q^2-1)$

Vì $2p-q^2-1=[xy-(x+y)+1]^2+(x-y)^2=(1-x)^2(1-y)^2+(x-y)^2 \geq 0,\ \forall x,y \in \mathbb{R}$

Suy ra: $3p-q^2 = p+2p-q^2 > 0$ và $\Delta \le 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Vậy $g(z) \ge 0, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ (*theo câu 4.1*). Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$

Câu 39. *(Trường chuyên Sơn La năm 2022-2023)*

Cho $x,\ y$ là các số thực dương thỏa mãn: $4x^2+4y^2+17xy+5x+5y \ge 1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 17x^2+17y^2+16xy$.

Lời giải:

Ta có: $4x^2+4y^2+17xy+5x+5y \ge 1 \Leftrightarrow 4(x+y)^2+9xy+5(x+y) \ge 1$

Đặt $t = x+y$, $t > 0$, theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4} = \dfrac{t^2}{4}$. Do đó: $4t^2+\dfrac{9}{4}t^2+5t \ge 1 \Rightarrow t \ge \dfrac{2\sqrt{2}-2}{5}$ hay $x+y \ge \dfrac{2\sqrt{2}-2}{5}$.

Ta có: $P = 17x^2+17y^2+16xy = 17(x+y)^2-18xy$

$$\ge 17(x+y)^2-18\frac{(x+y)^2}{4} = \frac{25}{4}(x+y)^2 \ge \frac{25}{4}\left(\frac{2\sqrt{2}-2}{5}\right)^2 = 6-4\sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = \dfrac{\sqrt{2}-1}{5}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $6-4\sqrt{2}$

Câu 40. *(Trường chuyên Tây Ninh năm 2022-2023)*

Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực thỏa mãn $0 \le x,\ y,\ z \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2\left(x^3+y^3+z^3\right)-\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)$

Lời giải:

Do $0 \le x, y, z \le 1$ nên ta có: $(1-x^2)(1-y)+(1-y^2)(1-z)+(1-z^2)(1-x) \ge 0$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)-(x^2y+y^2z+z^2x) \le 3 \qquad (1)$

Do $0 \le x, y, z \le 1$ nên: $x^3 \le x^2 \le x;\ y^3 \le y^2 \le y;\ z^3 \le z^2 \le z. \qquad (2)$

Từ đó $T = 2(x^3+y^3+z^3)-(x^2y+y^2z+z^2x)$

$\le (x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)-(x^2y+y^2z+z^2x) \overset{do\ (1)}{\le} 3. \qquad (3)$

Vậy giá trị lớn nhất của T là 3.

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời dấu bằng trong (1), (2)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=z=1 \\ x=y=1;\ z=0 \\ y=z=1;\ x=0 \\ z=x=1;\ y=0 \end{array}\right.$$

(Học sinh chỉ cần nêu được 1 trường hợp xảy ra dấu bằng là được)

Câu 41. *(Trường chuyên Thanh Hóa năm 2022-2023)*

Xét ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \le 14$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2x + y + 48\left(\frac{1}{\sqrt{x+z}} + \frac{1}{\sqrt{y+2}}\right)$$

Lời giải:

Phá căn bằng AM-GM và áp dụng dồn biến bằng cộng mẫu, ta có :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{x+z}} = \dfrac{4}{2\sqrt{4(x+z)}} \ge \dfrac{4}{x+z+4} \\ \dfrac{1}{\sqrt{y+2}} = \dfrac{4}{2\sqrt{4(y+2)}} \ge \dfrac{4}{y+2+4} = \dfrac{4}{y+6} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+z}} + \frac{1}{\sqrt{y+2}} \ge \frac{16}{x+y+z+10}$$

Đưa $x^2 + y^2 + z^2 \le 14$ từ bậc 2 về bậc 1 bằng BĐT Bunhia copxki cho 3 số, ta được :

$$(x+2y+3z)^2 \le (1^2+2^2+3^2)(x^2+y^2+z^2) \le 14$$

Biến đổi bểu thức P về mô hình 1 biến nghịch đảo :

$$P \ge 2x + y + \frac{768}{x+y+z+10} = 3(x+y+z+10) + \frac{48.16}{x+y+z+10} = (x+2y+3z) - 30$$

$$P \ge 2\sqrt{3.48.16} - 14 - 30 = 52$$

$$\Rightarrow Min\,P = 52 \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y+z+10) = \dfrac{48.16}{x+y+z+10} \\ x+2y+3z = 14; x+z = 4; y+2 = 6 \Rightarrow x = 1; y = 2; z = 3 \\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3} \end{cases}$$

Câu 42. *(Trường chuyên Thừa Thiên Huế năm 2022-2023)*

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 3.$ Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x^2+15} + \frac{y}{y^2+15} + \frac{z}{z^2+15} \le \frac{3+x+y+z}{32}.$$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{x}{x^2+15} = \frac{x}{x^2+3+12} = \frac{x}{x^2+xy+yz+zx+12} = \frac{x}{(x+y)(x+z)+12} \le \frac{x}{4\sqrt{(x+y)(x+z)}+8}$$

$$\le x\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4\sqrt{(x+y)(y+z)}} + \frac{1}{8}\right)\right] \quad \text{(Theo bất đẳng thức } \frac{1}{a+b} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\text{)}$$

$$\le \frac{x}{16}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2}\right] \quad \text{(Theo bất đẳng thức } \frac{1}{\sqrt{ab}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\text{)}$$

$$\le \frac{x}{32(x+y)} + \frac{x}{32(y+z)} + \frac{x}{32}.$$

Tương tự $\dfrac{y}{y^2+15}\le\dfrac{y}{32(y+z)}+\dfrac{y}{32(z+x)}+\dfrac{y}{32}$

$$\dfrac{z}{z^2+15}\le\dfrac{z}{32(z+x)}+\dfrac{x}{32(x+y)}+\dfrac{z}{32}$$

Suy ra

$$\dfrac{x}{x^2+15}+\dfrac{y}{y^2+15}+\dfrac{z}{z^2+15}$$

$$\le\dfrac{x}{32(x+y)}+\dfrac{x}{32(y+z)}+\dfrac{x}{32}+\dfrac{y}{32(y+z)}+\dfrac{y}{32(z+x)}+\dfrac{y}{32}+\dfrac{z}{32(z+x)}+\dfrac{x}{32(x+y)}+\dfrac{z}{32}.$$

$$\le\dfrac{3+x+y+z}{32}.$$

Vậy: $\dfrac{x}{x^2+15}+\dfrac{y}{y^2+15}+\dfrac{z}{z^2+15}\le\dfrac{3+x+y+z}{32}$.

Dấu $"="$ xảy ra khi $x=y=z=1$.

Câu 43. *(Trường chuyên Thừa Thiên Huế năm 2022-2023)*

Cho hai số x,y liên hệ với nhau bởi đẳng thức $x^2+2y^2-2xy+10(x-y)+21=0$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x-y+2$.

Lời giải:

Viết lại biểu thức đã cho thành $(x-y+2)^2+6(x-y+2)+5=-y^2$.

Như vậy với mọi x và mọi y ta luôn có $S^2+6S+5\le 0$ (với $S=x-y+2$)

Suy ra: $(S+5)(S+1)\le 0\Leftrightarrow -5\le S\le -1$. Do đó:

Giá trị nhỏ nhất của S bằng -5 khi $\begin{cases}x=-7\\y=0\end{cases}$

Giá trị lớn nhất của S bằng -1 khi $\begin{cases}x=-3\\y=0\end{cases}$.

Câu 44. *(Trường chuyên Thừa Thiên Huế năm 2022-2023)*

Cho là các số thực dương thảo mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=12.a,b,c$

Chứng minh rằng: $P=\dfrac{1}{2a+b+c}+\dfrac{1}{2b+c+a}+\dfrac{1}{2c+a+b}\le 3.$

Lời giải:

Cách 1:

Áp dụng bất đẳng thức

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}\Rightarrow\dfrac{1}{x+y}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$ Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y>0$.

Ta có: $\dfrac{1}{2a+b+c}=\dfrac{1}{a+b+a+c}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}\right)$

$$\le \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\right]=\frac{1}{16}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Suy ra: $\frac{1}{2a+b+c}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$. (1) Tương tự ta có:

$$\frac{1}{2b+a+c}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right). \quad (2)$$

$$\frac{1}{2c+a+b}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}\right). \quad (3)$$

Cộng (1); (2); (3) theo vế ta được

$P\le\frac{1}{16}\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{4}.12=3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{4}$.

Cách 2:

Áp dụng BĐT Cauchy dạng cộng mẫu ta đc:

$$\frac{16}{2a+b+c}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$
$$\frac{16}{2b+c+a}\le\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}$$
$$\frac{16}{2c+a+b}\le\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$$

Cộng từng vế 3 BĐT trên ta được:

$16P=\frac{16}{2a+b+c}+\frac{16}{2b+c+a}+\frac{16}{2c+a+b}\le 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=4.12=48$ (do $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=12$).

Do đó $P=\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{2b+c+a}+\frac{1}{2c+a+b}\le 3.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=b=c>0 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=12 \end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{4}.$

Câu 45. *(Trường chuyên Vĩnh Long năm 2022-2023)*

Cho hai số thực không âm a, b.

a) Chứng minh $a+b\le\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$.

b) Biết $a^2+b^2=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{2ab}{a+b+2}$.

Lời giải:

a) Ta có: $2ab\le a^2+b^2 \Leftrightarrow (a+b)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow a+b\le\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$.

b) $P=\frac{2ab}{a+b+2}=\frac{(a+b)^2-\left(a^2+b^2\right)}{a+b+2}=\frac{(a+b)^2-4-2}{a+b+2}=a+b-2-\frac{2}{a+b+2}$

$a+b\le 2\sqrt{3}\Rightarrow a+b+2\le 2+2\sqrt{3}\Rightarrow \dfrac{2}{a+b+2}\ge \dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$

Vậy $P\le 2\sqrt{3}-2-\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{-3+3\sqrt{3}}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a^2+b^2=6 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\sqrt{3}$.

Vậy $Max\,P=\dfrac{-3+3\sqrt{3}}{2}$ khi $a=b=\sqrt{3}$.

Câu 46. *(Trường chuyên Vĩnh Phúc năm 2022-2023)*

Cho các số thực dương a,b,c thảo mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\le 3$.

a) Chứng minh rằng: $a+b+c\le \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

b) Chứng minh rằng: $\dfrac{2ab+3}{(a+b)^2}+\dfrac{2bc+3}{(b+c)^2}+\dfrac{2ca+3}{(c+a)^2}\ge 6$.

Lời giải:

a) Ta có: $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\le 3 \Leftrightarrow (a+b+c)^2\le 3+ab+bc+ca.$

Mà $ab+bc+ca\le \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$ nên: $(a+b+c)^2\le 3+\dfrac{(a+b+c)^2}{3}\Leftrightarrow a+b+c\le \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có: $\dfrac{2ab+3}{(a+b)^2}\ge \dfrac{2ab+a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{(a+b)^2}$

$=\dfrac{(a+b)^2+c^2+ab+bc+ca}{(a+b)^2}=\dfrac{(a+b)^2+(b+c)(c+a)}{(a+b)^2}=1+\dfrac{(b+c)(c+a)}{(a+b)^2}$.

Viết hai bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại ta được:

$\dfrac{2ab+3}{(a+b)^2}+\dfrac{2bc+3}{(b+c)^2}+\dfrac{2ca+3}{(c+a)^2}\ge 3+\dfrac{(b+c)(c+a)}{(a+b)^2}+\dfrac{(a+b)(c+a)}{(b+c)^2}+\dfrac{(a+b)(b+c)}{(c+a)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức AG-MG, ta được:

$$\dfrac{(b+c)(c+a)}{(a+b)^2}+\dfrac{(a+b)(c+a)}{(b+c)^2}+\dfrac{(a+b)(b+c)}{(c+a)^2}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{(b+c)(c+a)}{(a+b)^2}.\dfrac{(a+b)(c+a)}{(b+c)^2}.\dfrac{(a+b)(b+c)}{(c+a)^2}}=3$$

Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 47. *(Trường chuyên Vĩnh Phúc năm 2022-2023)*

Cho các số dương *a, b, c* thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$. Chứng minh rằng:

$$\dfrac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\dfrac{\sqrt{c^2+2b^2}}{bc}+\dfrac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ca}\ge \sqrt{3}$$

Lời giải:

Để chứng minh bài toán ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$3(x^2+y^2+z^2)\ge(x+y+z)^2$ **(1)** là đúng

(1) $\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3z^2\ge x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\ge 0$

$\Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2xz+z^2)+(y^2-2yz+z^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\ge 0$ luôn đúng

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z$

$$\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{bc}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ca}\ge\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}}+\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}}+\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{2}{a^2}}\ge\sqrt{3}$$

Ta có:
$$\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\right)^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\right)(1)$$

Tương tự:

$$\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\right)(2)$$

$$\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{2}{a^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)(3)$$

Từ (1), (2) và (3)

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}}+\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}}+\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{2}{a^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{3}{c}\right)=\sqrt{3}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1\end{cases}$

$\Rightarrow a=b=c=3$

BẤT ĐẲNG THỨC VÀO 10 CHUYÊN NĂM 2021-2022

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm 2021-2022)*

Xét các số thực a,b,c không âm, thỏa măn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}$.

Lời giải

Ta có :

$(1+bc)^2=1+2bc+b^2c^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2b^2c^2$

$=a^2+(b+c)^2+b^2c^2\geq a^2+(b+c)^2\geq\frac{1}{2}(a+b+c)^2$

$\Rightarrow 1+bc\geq\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b+c)\Rightarrow\frac{a}{1+bc}\leq\sqrt{2}\frac{c}{a+b+c}...tuongtu$

$\Rightarrow S\leq\sqrt{2}\left(\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}\right)=\sqrt{2}$

Khi a = b = $\frac{\sqrt{2}}{2}, c=0$ thì S = $\sqrt{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của S là $\sqrt{2}$.

Theo BĐT AM-GM:

$a(1+bc)\leq\frac{a^2+1}{2}\left(1+\frac{b^2+c^2}{2}\right)=\frac{(a^2+1)(2+b^2+c^2)}{4}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{a^2+1+2+b^2+c^2}{2}\right)^2$

Từ đó :

$\frac{a}{1+bc}\geq a^2$. Tuong tu $\frac{b}{1+ac}\geq b^2;\frac{c}{1+ab}\geq c^2\Rightarrow S\geq a^2+b^2+c^2=1$ Khi $a=1;b=c=0$ thì $S=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 1.

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Bến Tre năm 2021-2022)*

Cho ba số thực dương x, y z thỏa $3\sqrt{xy}+\sqrt{xz}=2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{4yz}{x}+\frac{5xz}{y}+\frac{7xy}{z}\geq 8.$$

Lời giải

Ta đặt $M=\frac{4yz}{x}+\frac{5xz}{y}+\frac{7xy}{z}$, ta có

$$M=\frac{4yz}{x}+\frac{5xz}{y}+\frac{7xy}{z}$$
$$=\frac{yz}{x}+3\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+4\frac{xz}{y}+3\frac{xy}{z}+4\frac{xy}{z}$$
$$=\left(\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}\right)+3\left(\frac{yz}{x}+\frac{xy}{z}\right)+4\left(\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$\begin{aligned} M &\ge 2\sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{xz}{y}}+3.2\sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{xy}{z}}+4.2\sqrt{\frac{xz}{y}.\frac{xy}{z}} \\ &\ge 2z+6y+8x \\ &\ge (2z+2x)+(6y+6x) \end{aligned}$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$\begin{aligned} M &\ge 2.2\sqrt{xz}+6.2\sqrt{xy} \\ &\ge 4\left(\sqrt{xz}+3\sqrt{xy}\right)=4.2=8 \end{aligned}$$

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=y=z \\ \sqrt{xz}+3\sqrt{xy}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{2}$.

Vậy khi $x=y=z=\dfrac{1}{2}$ thì $M\ge 8$ (đpcm).

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2021-2022)*

Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a+2b\ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{3a^2+a^2b+\frac{9}{2}ab^2+(8+a)b^3}{ab}.$$

Lời giải

Ta có: $P=\dfrac{3a^2+a^2b+\frac{9}{2}ab^2+(8+a)b^3}{ab}=\dfrac{3a}{b}+a+\dfrac{9b}{2}+\dfrac{8b^2}{a}+b^2$

Theo đề $a+2b\ge 3 \Rightarrow 2b\ge 3-a \Rightarrow \dfrac{8b^2}{a}=\dfrac{4b.2b}{a}=\dfrac{4b(3-a)}{a}=\dfrac{12b}{a}-4b$.

Do đó: $P=\dfrac{3a}{b}+a+\dfrac{9b}{2}+\dfrac{8b^2}{a}+b^2\ge \dfrac{3a}{b}+3-2b+\dfrac{9b}{2}+\dfrac{12b}{a}-4b+b^2=\dfrac{3a}{b}+\dfrac{12b}{a}+b^2-\dfrac{3b}{2}+3$

$$\ge 2.\sqrt{\frac{3a}{b}.\frac{12b}{a}}+\left(b-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{39}{16}\ge 12+\frac{39}{16}=\frac{231}{16}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a,\ b>0 \\ \dfrac{3a}{b}=\dfrac{12b}{a} \\ a+2b=3 \end{cases} \Leftrightarrow a=2b=\dfrac{3}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{231}{16}$ khi $(a;b)=\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{4}\right)$.

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2021-2022)*

Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{a^3}{a^2+b^2}\ge a-\dfrac{b}{2}$.

b) $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+ca+a^2}\ge\dfrac{a+b+c}{3}.$

Lời giải

a) $\dfrac{a^3}{a^2+b^2}\ge a-\dfrac{b}{2}.$

Ta có $\dfrac{a^3}{a^2+b^2}=\dfrac{a\left(a^2+b^2\right)-ab^2}{a^2+b^2}=a-\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}.$

Theo BĐT Cauchy ta có $a-\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}\ge a-\dfrac{ab^2}{2ab}=a-\dfrac{b}{2}.$

b) $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+ca+a^2}\ge\dfrac{a+b+c}{3}.$

Tương tự theo câu a) ta có : $\dfrac{b^3}{b^2+c^2}\ge b-\dfrac{c}{2},\ \dfrac{c^3}{c^2+a^2}\ge c-\dfrac{a}{2}.$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$\dfrac{a^3}{a^2+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+a^2}\ge\dfrac{a+b+c}{2}.$

Ta có: $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}\ge\dfrac{a^3}{a^2+\dfrac{a^2+b^2}{2}+b^2}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a^3}{a^2+b^2}.$

Tương tự ta có $\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2}\ge\dfrac{2}{3}.\dfrac{b^3}{b^2+c^2},\ \dfrac{c^3}{c^2+ca+a^2}\ge\dfrac{2}{3}.\dfrac{c^3}{c^2+a^2}.$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+ca+a^2}$$
$$\ge\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a^3}{a^2+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+a^2}\right)\ge\dfrac{a+b+c}{3}.$$

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Cà Mau năm 2021-2022)*

Cho a, b là hai số thực dương sao cho $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$

Chứng minh rằng $\sqrt{3a+b}+\sqrt{a+3b}\le 2\sqrt{(3a+b)(a+3b)}$

Lời giải

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=1\Rightarrow a+b+2\sqrt{ab}=1\Rightarrow a+b=1-2\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{3a+b}+\sqrt{a+3b}\le 2\sqrt{(3a+b)(a+3b)}$$

$$\Leftrightarrow 4(a+b)+2\sqrt{(3a+b)(a+3b)}\le 4(3a+b)(a+3b)$$

Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2021-2022)*

Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(x+2)^2}{y+z}+\frac{(y+2)^2}{z+x}+\frac{(z+2)^2}{x+y}\ge 12$$

Lời giải

Áp dụng Bất dẳng thức phụ $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\ge\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, a, b, c > 0

Chứng minh BĐT phụ:

Áp dụng BĐT B.C.S cho hai bộ số $\left(\frac{x}{\sqrt{a}};\frac{y}{\sqrt{b}};\frac{c}{\sqrt{c}}\right)$ và $\left(\sqrt{a};\sqrt{b};\sqrt{c}\right)$ ta có:

$$\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\right)(a+b+c)\ge(x+y+z)^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\ge\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

Khi đó ta có:

$$\frac{(x+2)^2}{y+z}+\frac{(y+2)^2}{z+x}+\frac{(z+2)^2}{x+y}\ge\frac{(x+y+z+6)^2}{2(x+y+z)}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)^2}{y+z}+\frac{(y+2)^2}{z+x}+\frac{(z+2)^2}{x+y}\ge\frac{(x+y+z)^2+12(x+y+z)+36}{2(x+y+z)}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)^2}{y+z}+\frac{(y+2)^2}{z+x}+\frac{(z+2)^2}{x+y}\ge\frac{x+y+z}{2}+\frac{18}{x+y+z}+6$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)^2}{y+z}+\frac{(y+2)^2}{z+x}+\frac{(z+2)^2}{x+y}\ge 2\sqrt{\frac{x+y+z}{2}.\frac{18}{x+y+z}}+6 \quad \text{(BĐT Cauchy)}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)^2}{y+z}+\frac{(y+2)^2}{z+x}+\frac{(z+2)^2}{x+y}\ge 2\sqrt{9}+6=12$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{x+2}{y+z}=\frac{y+2}{z+x}=\frac{z+2}{x+y}\\ \frac{x+y+z}{2}=\frac{18}{x+y+z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y=z\\ (x+y+z)^2=36\end{cases} \Leftrightarrow$ x = y = z = 2

Câu 7. *(Trường chuyên tỉnh Đăk Lăk năm 2021-2022)*

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c\le 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{b(a^2+1)^2}{a^2(b^2+1)}+\frac{c(b^2+1)^2}{b^2(c^2+1)}+\frac{a(c^2+1)^2}{c^2(a^2+1)}.$$

Lời giải

Ta có $2=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow abc\le\left(\frac{2}{3}\right)^3$

$$P\ge 3\sqrt[3]{\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}{abc}}$$

$$a+\frac{1}{a}=4.\frac{a}{4}+9.\frac{1}{9a}\geq 13\sqrt[13]{\frac{1}{4^4.9^9a^5}}$$

$$b+\frac{1}{b}=4.\frac{b}{4}+9.\frac{1}{9b}\geq 13\sqrt[13]{\frac{1}{4^4.9^9b^5}}$$

$$c+\frac{1}{c}=4.\frac{c}{4}+9.\frac{1}{9c}\geq 13\sqrt[13]{\frac{1}{4^4.9^9c^5}}$$

$$P\geq 3\sqrt[3]{13^3.\sqrt[13]{\frac{1}{4^{12}.9^{27}.a^5.b^5.c^5}}}\geq 39\sqrt[3]{\sqrt[13]{\frac{1}{2^{24}.3^{54}.\left(\frac{2}{3}\right)^{15}}}}=\frac{13}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

Câu 8. *(Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2021-2022)*

Cho ba số thực dương a,b,c. Chứng minh: $\frac{a+b}{\sqrt{c}}+\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}\geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$

Lời giải

Đặt x = $\sqrt{a}$; y = $\sqrt{b}$; z = $\sqrt{c}$ suy ra $x^2 = a$; $y^2 = b$; $z^2 = c$ (x; y; z > 0)

Khi đó ta cần chứng minh $\frac{x^2+y^2}{z}+\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{z^2+x^2}{y}\geq 2(x+y+z)$

Ta có: $\frac{x^2+y^2}{z}+\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{z^2+x^2}{y}=\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{x}+\frac{z^2}{y}+\frac{x^2}{y}$

$$=\left(\frac{x^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right)+\left(\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{y}\right)+\left(\frac{y^2}{x}+\frac{x^2}{y}\right)=\frac{x^3+z^3}{xz}+\frac{y^3+z^3}{yz}+\frac{y^3+x^3}{xz}$$

Ta chứng minh $x^3+z^3\geq xz(x+z)$ (1)

Thật vậy ta có:

$$(x-z)^2(x+z)\geq 0\Leftrightarrow(x^2-z^2)(x-z)\geq 0\Leftrightarrow x^3+z^3-x^2z-xz^2\geq 0\Leftrightarrow x^3+z^3\geq xz(x+z)$$

Áp dụng (1) ta có:

$$\frac{x^3+z^3}{xz}+\frac{y^3+z^3}{yz}+\frac{y^3+x^3}{xz}\geq\frac{xz(x+z)}{xz}+\frac{yz(y+z)}{yz}+\frac{xy(x+y)}{xy}=2(x+y+z)$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z

Vậy $\frac{a+b}{\sqrt{c}}+\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}\geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$ khi a = b = c

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2021-2022)*

Cho ba số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $x+y+z\leq 1$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\geq 512.$$

Lời giải

Ta có

$$\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)\geq 512x^2y^2z^2$$

$$\Leftrightarrow (1-x)(1+x)(1-y)(1+y)(1-z)(1+z)\geq 512x^2y^2z^2$$

Do $x+y+z\leq 1$ nên ta có

$$(1-x)(1-y)(1-z)(1+x)(1+y)(1+z)$$

$$\geq (y+z)(z+x)(x+y)(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z) \quad (1)$$

Chứng minh được: $(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz$ $\quad (2)$.

Và:

$$(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)$$

$$\geq 2\sqrt{x+y}\sqrt{x+z}\ 2\sqrt{y+x}\sqrt{y+z}\ 2\sqrt{z+x}\sqrt{z+y}$$

$$=8(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\geq 8.8xyz \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Câu 10. *(Trường chuyên PTNK Hồ Chí Minh năm 2021-2022)*

Cho dãy n số thực $x_1;x_2;\ldots;x_n (n\geq 5)$ thỏa: $x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n$ và $x_1+x_2+\ldots x_n=1$

a) Chứng minh nếu $x_n\geq\dfrac{1}{3}$ thì $x_1+x_2\leq x_n$

b) Chứng minh nếu $x_n\leq\dfrac{2}{3}$ thì tìm được số nguyên dương $k<n$ sao cho

$\dfrac{1}{3}\leq x_1+x_2+\ldots+x_k\leq\dfrac{2}{3}$

Lời giải

a) (0.75 điểm) Giả sử rằng $x_1+x_2>x_n\geq\dfrac{1}{3}>0$, khi đó $x_i>0$ với mọi $2\leq i\leq n$.

Do $n\geq 5$ nên $x_1+\cdots x_{n-1}\geq x_1+x_2+x_3+x_4\leq 2\left(x_1+x_2\right)>\dfrac{2}{3}\Rightarrow x_n<\dfrac{1}{3}$ (Vô lý)

b) (0,75 điểm)

- Nếu $x_n\geq\dfrac{1}{3}$, khi đó $\dfrac{2}{3}\geq x_n\geq\dfrac{1}{3}$ Từ $x_1+x_2+....+x_n=1\Rightarrow\dfrac{1}{3}\leq x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}=1-x_n\geq\dfrac{2}{3}$
- Nếu $x_n<\dfrac{1}{3}$. Suy ra $x_i<\dfrac{1}{3}$ với mọi i.

Giả sử không tồn tại k thỏa đề bài, tức là không có k để

$\dfrac{1}{3}\leq x_1+x_2+\ldots+x_k\leq\dfrac{2}{3}(*)$

Ta chứng minh tồn tại $l \le n-2$ sao cho $x_1 + \cdots x_l < \frac{1}{3}$ và $x_1 + \cdots x_{l+1} > \frac{2}{3}$ (**)

Thật vậy nếu không tồn tại l thì $x_1 < \frac{1}{3}$, suy ra $x_1 + x_2 < \frac{1}{3}$, vì ngược lại thì

do (**) nên $\frac{1}{3} \le x_1 + x_2 \le \frac{2}{3}$·(mâu thuẫn do (*)

Lý luận tương tự thì $x_1 + x_2 + \cdots x_{n-1} < \frac{1}{3}$(Mâu thuẫn)

Do đó nếu tồn tại l thỏa (**) thì suy ra $x_{l+1} > \frac{1}{3} > x_n$ (vô lý).

Vậy điều giả sử sai. Do đó tồn tại k thỏa đề bài.

Bình luận. Đây là bài bất đẳng thức khá lạ và hay, tư tưởng chủ đạo là phản chứng và phản chứng liên tục. Việc sắp thứ tự các biến là một giả thiết vô cùng quan trọng, giúp giải bài toán. Câu a không quá khó, nhưng câu b là ở một mức khác hẳn. Việc chứng minh bất đẳng thức đã khó, ở đây còn thêm n biến, thì bài toán trở nên quá phức tạp cho học sinh cấp 2. Bạn nào giải được câu 3b, là rất giỏi.

Câu 11. *(Trường chuyên Hà Tĩnh năm 2021-2022)*

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y + xy = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2} + \frac{x+y}{4}$$

Lời giải

Đặt $a = x + y > 0 \Rightarrow xy = 3 - a \Rightarrow a^2 = (x+y)^2 \ge 4xy \Rightarrow 4(x+y) + 4xy = 12$

$$\Rightarrow 4a + a^2 \geqslant 12 \Leftrightarrow (a-2)(a+6) \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant 2$$

Theo bất đẳng thức AM-GM

$$\sqrt{9-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2}\sqrt{9-x^2} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{8+\left(9-x^2\right)}{2}$$

$$\sqrt{9-x^2} \le \frac{17}{4\sqrt{2}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$$

Tương tự $\sqrt{9-y^2} \le \frac{17}{4\sqrt{2}} - \frac{y^2}{4\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow p \leqslant \frac{17}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[(x+y)^2 - 2xy\right] + \frac{x+y}{4}$$

$$\to p \le -\frac{1}{4\sqrt{2}}a^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}(3-a) + \frac{a}{4} + \frac{17}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow p \le -\frac{1}{4\sqrt{2}}a^2 - \frac{(\sqrt{2}-1)}{4}a + 5\sqrt{2} \qquad \Rightarrow P \le -\frac{1}{4\sqrt{2}}2^2 - \frac{\sqrt{2}-1}{4} \cdot 2 + 5\sqrt{2}$$

$\Rightarrow P \leqslant 4\sqrt{2} + \frac{1}{2}$· Dấu "=" xảy ra khi a = 2 hay x = y =1

Câu 12. *(Trường chuyên Hải Phòng năm 2021-2022)*

Cho các số thực dương $x,\ y,\ z$. Chứng minh rằng

$$\frac{x\sqrt{xy}}{\sqrt{2x+y}}+\frac{y\sqrt{yz}}{\sqrt{2y+z}}+\frac{z\sqrt{zx}}{\sqrt{2z+x}}\ge\sqrt{3xyz}.$$

Lời giải

BĐT $\Leftrightarrow P=\dfrac{x}{\sqrt{z(2x+y)}}+\dfrac{y}{\sqrt{x(2y+z)}}+\dfrac{z}{\sqrt{y(2z+x)}}\ge\sqrt{3}$

$P\ge 2\sqrt{3}\left(\dfrac{x}{3z+2x+y}+\dfrac{y}{3x+2y+z}+\dfrac{z}{3y+2z+x}\right)$ (BĐT Côsi)

$=2\sqrt{3}\left(\dfrac{x^2}{x(3z+2x+y)}+\dfrac{y^2}{y(3x+2y+z)}+\dfrac{z^2}{z(3y+2z+x)}\right)$

$\ge\dfrac{2\sqrt{3}(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+4(xy+yz+xz)}=\sqrt{3}$ (BĐT Bunhiacopxki) (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Câu 13. *(Trường chuyên Kiên Giang năm 2021-2022)*

Cho x,y,z là các số thực lớn hơn 2021, thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{2021}$. Chứng minh rằng, ta có bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{x+y+z}\ge\sqrt{x-2021}+\sqrt{y-2021}+\sqrt{z-2021}.$$

.Lời giải

Từ giả thuyết đề bài suy ra $\dfrac{2021}{x}+\dfrac{2021}{y}+\dfrac{2021}{z}=2$

Do đó $\dfrac{x-2021}{x}+\dfrac{y-2021}{y}+\dfrac{z-2021}{z}=3-2=1$

Suy ra $x+y+z=(x+y+z)\left(\dfrac{x-2021}{x}+\dfrac{y-2021}{y}+\dfrac{z-2021}{z}\right)$ (*)

Do $x,y,z>2021$ nên $x-2021,y-2021,z-2021>0$. Vì thế, bằng cách áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki cho hai bộ ba số thực dương $\left(\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{z}\right)$ và $\left(\dfrac{\sqrt{x-2021}}{\sqrt{x}},\dfrac{\sqrt{y-2021}}{\sqrt{y}},\dfrac{\sqrt{z-2021}}{\sqrt{z}}\right)$, từ (*) ta được:

$$x+y+z\ge(\sqrt{x-2021}+\sqrt{y-2021}+\sqrt{z-2021})^2$$

Do đó, $\sqrt{x+y+z}\ge\sqrt{x-2021}+\sqrt{y-2021}+\sqrt{z-2021}$.

(Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{6063}{2}$)

Câu 14. *(Trường chuyên Lâm Đồng năm 2021-2022)*

Cho $a,\ b,\ c$ là các số dương và $a+b+c=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất biểu thức:

$$P=\frac{a^3}{a^2+4ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+4bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+4ca+a^2}.$$

.Lời giải

Với $a, b > 0$, ta chứng minh $\dfrac{a^3}{a^2+b^2} \ge a - \dfrac{b}{2}$.

- Áp dụng: $(a-b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \ge 2ab \Leftrightarrow \dfrac{-1}{a^2+b^2} \ge \dfrac{-1}{2ab}$

Khi đó: $\dfrac{a^3}{a^2+b^2} = \dfrac{a(a^2+b^2)-ab^2}{a^2+b^2} = a - \dfrac{ab^2}{a^2+b^2} \ge a - \dfrac{ab^2}{2ab} = a - \dfrac{b}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{b^3}{b^2+c^2} \ge b - \dfrac{c}{2}$; $\dfrac{c^3}{c^2+a^2} \ge c - \dfrac{a}{2}$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \ge \frac{a+b+c}{2}$$

- Áp dụng: $(a-b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2\right) \ge 4ab$

Ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+4ab+b^2} \ge \frac{a^3}{a^2+2(a^2+b^2)+b^2} = \frac{1}{3}.\frac{a^3}{a^2+b^2};$$

$$\frac{b^3}{b^2+4bc+c^2} \ge \frac{b^3}{b^2+2(b^2+c^2)+c^2} = \frac{1}{3}.\frac{b^3}{b^2+c^2};$$

$$\frac{c^3}{c^2+4ac+a^2} \ge \frac{c^3}{c^2+2(c^2+a^2)+a^2} = \frac{1}{3}.\frac{c^3}{c^2+a^2}$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+4ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+4bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+4ca+a^2}$$

$$\ge \frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2}\right) \ge \frac{a+b+c}{6} = 1$$

-Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1, dấu "=" xảy ra khi

$$a = b = c = 2.$$

Câu 14. *(Trường chuyên Lào Cai năm 2021-2022)*

a) Cho hai số thực dương $x; y$ thỏa mãn: $x + y \le \dfrac{2}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 53x + 53y + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$.

b) Cho ba số thực dương $x; y, z$ thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 \ge 3$. Chứng minh rằng:

$$\left(x^4+y^4+z^4\right) + \left(x^3+y^3+z^3\right) \ge 3 + x + y + z.$$

.Lời giải

a) Dự đoán điểm rơi: $x = y = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} + ax + ax \overset{Co-Si}{\ge} 3.\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}\cdot ax \cdot ax} = 3.\sqrt[3]{a^2} \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} = ax \Rightarrow a = 27$

Ta có: $A=53x+53y+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\left(27x+27x+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(27y+27y+\dfrac{1}{y^2}\right)-(x+y)$

$\Rightarrow A\overset{Co-Si}{\geq}3.\sqrt[3]{27x\cdot 27x\cdot\dfrac{1}{x^2}}+3.\sqrt[3]{27y\cdot 27y\cdot\dfrac{1}{y^2}}-(x+y)=27+27-(x+y)\geq 54-\dfrac{2}{3}=\dfrac{160}{3}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\dfrac{1}{3}$

Vậy $\Rightarrow Min\,A=\dfrac{160}{3}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{3}$

b) Ta có: $x^4+1\geq 2.\sqrt{x^4.1}=2x^2$; $y^4+1\geq 2.\sqrt{y^4.1}=2y^2$; $z^4+1\geq 2.\sqrt{z^4.1}=2z^2$

$\Rightarrow x^4+y^4+z^4\geq 2\left(x^2+y^2+z^2\right)-3\Rightarrow VT\geq 2\left(x^2+y^2+z^2\right)-3+x^3+y^3+z^3$

Tương tự: $x^3+x\geq 2.\sqrt{x^3.x}=2x^2$; $y^3+y\geq 2.\sqrt{y^3.y}=2y^2$; $z^3+z\geq 2.\sqrt{z^3.z}=2z^2$

$\Rightarrow x^3+y^3+z^3\geq 2\left(x^2+y^2+z^2\right)-(x+y+z)\Rightarrow VT\geq 2\left(x^2+y^2+z^2\right)-(x+y+z)+2\left(x^2+y^2+z^2\right)-3$

$\Rightarrow VT\geq\left(x^2+y^2+z^2\right)-(x+y+z)+3\left(x^2+y^2+z^2\right)-3\geq\left(x^2+y^2+z^2\right)-(x+y+z)+3.3-3$

$\Rightarrow VT\geq\left(x^2+y^2+z^2\right)-(x+y+z)+6$

Mà: $x^2+1\geq 2.\sqrt{x^2.1}=2x$; $y^2+1\geq 2.\sqrt{y^2.1}=2y$; $z^2+1\geq 2.\sqrt{z^2.1}=2z$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq 2(x+y+z)-3\Rightarrow VT\geq 2(x+y+z)-3-(x+y+z)+6=(x+y+z)+3$ (đpcm)

Câu 15. *(Trường chuyên Nghệ An năm 2021-2022)*

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca\leq 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}-\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}}\right)$$

.Lời giải

Vì $ab+bc+ca\leq 3abc\Rightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leq 3$.

Ta có $\sqrt{a+b}=\sqrt{\dfrac{(a+b)^2}{a+b}}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a+b}+\dfrac{2ab}{a+b}}$

$$\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{2ab}{a+b}}\right).$$

Do đó $P\geq\sqrt{\dfrac{ab}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{bc}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{ac}{a+c}}$

$$=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}+\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}+\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}}=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{y+z}}+\frac{1}{\sqrt{x+z}}$$

Với $x=\dfrac{1}{a},y=\dfrac{1}{b},z=\dfrac{1}{c}$ và $x+y+z\leq 3$.

Vì $\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{y+z}}+\frac{1}{\sqrt{x+z}}\ge\frac{9}{\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{x+z}}\ge\frac{9}{\sqrt{3(2x+2y+2z)}}\ge\frac{9}{\sqrt{3.6}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $P\ge\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$ hay $a=b=c=1$.

Câu 16. *(Trường chuyên Ninh Thuận năm 2021-2022)*

Cho các số thực dương $x,y,z>0$ thỏa mãn $xyz=\frac{1}{8}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{xy+yz+zx}-\frac{1}{x+y+z}\le\frac{2}{3}.$$

.Lời giải

Đặt: $P=\frac{1}{xy+yz+zx}-\frac{1}{x+y+z}$.

Ta có: $x+y+z=8xyz(x+y+z)=8(xy.zx+xy.yz+yz.zx)\le\frac{8(xy+yz+zx)^2}{3}$.

$\Rightarrow\frac{1}{x+y+z}\ge\frac{3}{8(xy+yz+zx)^2}$.

$\Rightarrow P\le\frac{1}{xy+yz+zx}-\frac{3}{8(xy+yz+zx)^2}$. Đặt $t=\frac{1}{xy+yz+zx}$. Ta được:

$$P\le-\frac{3}{8}t^2+t=-\frac{3}{8}\left(t^2-\frac{8}{3}t+\frac{16}{9}\right)+\frac{2}{3}=-\frac{3}{8}\left(t-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\le\frac{2}{3}.$$

Dấu “ = ” xảy ra khi $\begin{cases}xy+yz+zx=\frac{4}{3}\\xy=yz=zx\\xyz=\frac{1}{8}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{2}$.

Câu 17. *(Trường chuyên Quảng Bình năm 2021-2022)*

Cho ba số thực $x,\ y,\ z\in[5;7]$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{xy+1}+\sqrt{yz+1}+\sqrt{zx+1}>x+y+z.$$

.Lời giải

Do $x,\ y\in[5;7]\Rightarrow|x-y|\le2\Leftrightarrow(x-y)^2\le4$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\le4\Leftrightarrow(x+y)^2\le4(xy+1)\Leftrightarrow x+y\le2\sqrt{xy+1}$

Chứng minh tương tự ta có:

$$y+z\le2\sqrt{yz+1};\ z+x\le2\sqrt{zx+1}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta có

$$2(x+y+z)\le 2\left(\sqrt{xy+1}+\sqrt{yz+1}+\sqrt{zx}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy+1}+\sqrt{yz+1}+\sqrt{zx+1}\ge x+y+z$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}|x-y|=2\\|y-z|=2\\|z-x|=2\end{cases}\quad(1)$

Vì $x\ne y\ne z$ nên giả sử $x>y>z.$

Ta có $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=2\\y-z=2\\x-z=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=2\\x-z=4\\x-z=2\end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy $\sqrt{xy+1}+\sqrt{yz+1}+\sqrt{zx+1}>x+y+z.$

Câu 18. *(Trường chuyên Quảng Nam năm 2021-2022)*

Cho ba số thực $x;y;z$ thỏa mãn $x\ge 0;y\ge 0;z\ge 2$ và $x+y+z=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức H = xyz.

Lời giải

Vì $x\ge 0;y\ge 0;z\ge 2$ nên $x+y+\frac{z}{2}\ge 3\sqrt[3]{x.y.\frac{z}{2}}$ (dấu bằng xảy ra khi $x=y=\frac{z}{2}$)

Suy ra $\left(x+y+\frac{z}{2}\right)+\frac{z}{2}\ge 3\sqrt[3]{x.y.\frac{z}{2}}+\frac{z}{2}$

Mà $\left(x+y+\frac{z}{2}\right)+\frac{z}{2}=x+y+z=4$ và $z\ge 2\Rightarrow\frac{z}{2}\ge 1$

Vậy $4\ge 3\sqrt[3]{x.y.\frac{z}{2}}+1\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x.y.\frac{z}{2}}\le 3\Leftrightarrow x.y.\frac{z}{2}\le 1\Leftrightarrow xyz\le 2$

Do đó $H\le 2$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}x=y=\frac{z}{2}\\x+y+z=4\\z=2\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1;z=2$

Giá trị lớn nhất của H bằng 2.

Câu 19. *(Trường chuyên Quảng Nam năm 2021-2022)*

Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $xy+yz+zx=xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$H=\frac{x^2}{9z+zx^2}+\frac{y^2}{9x+xy^2}+\frac{z^2}{9y+yz^2}.$$

Lời giải

Theo đề ta có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

Đặt $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$, $\frac{1}{z}=c\ (a,b,c>0)\Rightarrow a+b+c=1$

Khi đó $H=\frac{c}{9a^2+1}+\frac{a}{9b^2+1}+\frac{b}{9c^2+1}$

Ta có: $\frac{c}{9a^2+1}\le\frac{c\left(9a^2+1\right)-9a^2c}{9a^2+1}=c-\frac{9a^2c}{9a^2+1}$

Vì $9a^2+1\ge 6a\Rightarrow c-\frac{9a^2c}{9a^2+1}\ge c-\frac{9a^2c}{6a}=c-\frac{3}{2}ac$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{a}{9b^2+1}\ge a-\frac{3}{2}ba$; $\frac{b}{9c^2+1}\ge b-\frac{3}{2}cb$

$\Rightarrow H\ge a+b+c-\frac{3}{2}(ab+bc+ca)$

Mà $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}$

$\Rightarrow H\ge 1-\frac{3}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

Vậy $H_{\min}=\frac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=3$

Câu 20. *(Trường chuyên Quảng Ngãi năm 2021-2022)*

Cho các số thực a,b,c đôi một khác nhau và thỏa mãn $(c+a)(c+b)=4$. Chứng minh rằng:

$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(c+b)^2}\ge 1.$

Lời giải

Đặt $x=c+a,\ y=c+b$. Khi đó $xy=4$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge 1$

Ta có:

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{x^2+y^2}{x^2.y^2}$$

$$=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{(x-y)^2+2xy}{x^2y^2}=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{(x-y)^2+8}{16}=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{(x-y)^2}{16}+\frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{(x-y)^2}{16}\ge 2\sqrt{\frac{1}{(x-y)^2}.\frac{(x-y)^2}{16}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge 1\ \text{(đpcm)}$$

Câu 20. *(Trường chuyên Quảng Trị năm 2021-2022)*

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $0 \le x, y, x \le 1$. Chứng minh rằng: $x + y + z - 2(xy + yz + zx) + 4xyz \le 1$.

Lời giải

Vì $0 \le x, y, z \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} xy(z-1) \le 0 \\ yz(x-1) \le 0 \\ xz(y-1) \le 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 3xyz \le xy + yz + zx \Leftrightarrow 3xyz - (xy + yz + zx) \le 0$ (1)

Lại có $(x-1)(y-1)(z-1) \le 0 \Leftrightarrow xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1 \le 0$ (2)

Cộng vế theo vế của (1) và (2) ta được:

$4xyz - 2(xy + yz + zx) + x + y + z - 1 \le 0$

$\Leftrightarrow x + y + z - 2(xy + yz + zx) + 4xyz \le 1$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi $(x;y;z) = (1;1;1)$ hoặc $(x;y;z) = (0;1;1)$ và các hoán vị của nó.

Câu 20. *(Trường chuyên Tây Ninh năm 2021-2022)*

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $0 \le x, y, z \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2\left(x^3 + y^3 + z^3\right) - \left(x^2y + y^2z + z^2x\right)$

Lời giải

Do $0 \le x, y, z \le 1$ nên ta có: $(1-x^2)(1-y) + (1-y^2)(1-z) + (1-z^2)(1-x) \ge 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2) + (x + y + z) - (x^2y + y^2z + z^2x) \le 3$ (1)

Do $0 \le x, y, z \le 1$ nên: $x^3 \le x^2 \le x;\ y^3 \le y^2 \le y;\ z^3 \le z^2 \le z.$ (2)

Từ đó $T = 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x)$

$\le (x^2 + y^2 + z^2) + (x + y + z) - (x^2y + y^2z + z^2x) \overset{do\ (1)}{\le} 3.$ (3)

Vậy giá trị lớn nhất của T là 3.

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời dấu bằng trong (1), (2)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = z = 1 \\ x = y = 1;\ z = 0 \\ y = z = 1;\ x = 0 \\ z = x = 1;\ y = 0 \end{array}\right.$$

(Học sinh chỉ cần nêu được 1 trường hợp xảy ra dấu bằng là được)

Câu 21. *(Trường chuyên Thái Bình năm 2021-2022)*

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{a}{3a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{b}{3b^2 + 2c^2 + a^2} + \frac{c}{3c^2 + 2a^2 + b^2}$$

Lời giải

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc \Leftrightarrow \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} = 3$

Áp dung bất đẳng thức $AM - GM$ ta có:

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\geq 2\sqrt{\frac{a}{bc}\cdot\frac{b}{ca}}=\frac{2}{c}$$

$$\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\geq 2\sqrt{\frac{b}{ca}\cdot\frac{c}{ab}}=\frac{2}{a}$$

$$\frac{a}{bc}+\frac{c}{ab}\geq 2\sqrt{\frac{a}{bc}\cdot\frac{c}{ab}}=\frac{2}{b}$$

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên, ta có:

$$\Rightarrow 2\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq 3$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức AM- GM ta có:

$$3a^2+2b^2+c^2=2\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+c^2\right)\geq 4ab+2ac$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3a^2+2b^2+c^2}\leq\frac{a}{4ab+2ac}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2b+c}$$

Áp dụng Cauchy – Schwarz ta có: $\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{b+b+c}\Rightarrow\frac{1}{2}.\frac{1}{2b+c}\leq\frac{1}{18}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Hoàn toàn tương tự, ta có: $\frac{b}{3b^2+2c^2+a^2}\leq\frac{1}{18}\left(\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right)$; $\frac{c}{3c^2+2a^2+b^2}\leq\frac{1}{18}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Suy ra $T\leq\frac{1}{6}.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leq\frac{1}{6}.3\Rightarrow T\leq\frac{1}{2}$.

Vậy GTLN của T là $\frac{1}{2}$, dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Câu 22. *(Trường chuyên Quốc Học Huế năm 2021-2022)*

Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh :

$$\frac{1}{\sqrt{x(2y+3z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(2z+3x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(2x+3y)}}\geq\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Lời giải

Đặt $P=\frac{1}{\sqrt{x(2y+3z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(2z+3x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(2x+3y)}}$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt{5x(2y+3z)}\leq\frac{5x+2y+3z}{2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x(2y+3z)}}\geq\frac{2\sqrt{5}}{5x+2y+3z}.$$

Tương tự ta có: $\frac{1}{\sqrt{y(2z+3x)}}\geq\frac{2\sqrt{5}}{5y+2z+3x}$, $\frac{1}{\sqrt{z(2x+3y)}}\geq\frac{2\sqrt{5}}{5z+2x+3y}$.

Do đó $P\geq 2\sqrt{5}.\left(\frac{1}{5x+2y+3z}+\frac{1}{5y+2z+3x}+\frac{1}{5z+2x+3y}\right)$.

Ta chứng minh bất đẳng thức $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9\,\forall a,b,c>0.$

Thật vậy: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$

$\geq 3+2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}}+2\sqrt{\frac{a}{c}.\frac{c}{a}}+2\sqrt{\frac{b}{c}.\frac{c}{b}}=9$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

Suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$.

Do đó: $\frac{1}{5x+2y+3z}+\frac{1}{5y+2z+3x}+\frac{1}{5z+2x+3y}\geq\frac{9}{10(x+y+z)}=\frac{3}{10}$.

Vậy $P\geq\frac{2\sqrt{5}.3}{10}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$.

Câu 23. *(Trường chuyên Tiền Giang năm 2021-2022)*

Cho *a*, *b*, *c* là các số thực dương thay đổi thỏa mãn *abc* = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}$.

Lời giải

Ta có: $a^2+b^2\geq 2ab, b^2+1\geq 2b\Rightarrow\frac{1}{a^2+2b^2+3}=\frac{1}{(a^2+b^2)+(b^2+1)+2}\leq\frac{1}{2}.\frac{1}{ab+b+1}$.

Tương tự: $\frac{1}{b^2+2c^2+3}\leq\frac{1}{2}.\frac{1}{bc+c+1}$; $\frac{1}{c^2+2a^2+3}\leq\frac{1}{2}.\frac{1}{ac+a+1}$.

Suy ra: $M\leq\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ac+a+1}\right)$.

Thay $c=\frac{1}{ab}$ ta được: $M\leq\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{ab}{ab+b+1}+\frac{b}{ab+b+1}\right)=\frac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. Vậy $MaxM=\frac{1}{2}$.

Câu 24. *(Trường chuyên Trà Vinh năm 2021-2022)*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=x^2+2y^2+2xy-2x+2021$.

Lời giải

$2P=2x^2+4y^2+4xy-4x+4042$

$=(x+2y)^2+(x-2)^2+4038\geq 4038$

$P\geq 2019$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x+2y=0\\x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\x=2\end{cases}$

Câu 25. *(Trường chuyên Vĩnh Long năm 2021-2022)*

Cho số thực x thỏa mãn $1 \le x \le 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = \dfrac{3+x}{x} + \dfrac{6-x}{3-x}$

Lời giải

Ta có: $T = \dfrac{3+x}{x} + \dfrac{6-x}{3-x} = \dfrac{(3+x)(3-x)+(6-x)x}{x(3-x)} = \dfrac{9-x^2+6x-x^2}{3x-x^2} = \dfrac{2x^2-6x-9}{x^2-3x}$

$\Rightarrow T\left(x^2-3x\right) = 2x^2-6x-9 \Leftrightarrow Tx^2-3Tx-2x^2+6x+9=0 \Leftrightarrow (T-2)x^2+(6-3T)x+9=0\ (*)$

Có: $\Delta = (6-3T)^2 - 4(T-2).9 = 36-36T+9T^2-36T+72 = 9\left(T^2-8T+12\right)$

Để phương trình (*) có nghiệm thì $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow 9\left(T^2-8T+12\right) \ge 0 \Leftrightarrow T^2-8T+12 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} T \le 2 \\ T \ge 6 \end{array}\right.$

Với $T = 2 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-6x-9}{x^2-3x} = 2 \Leftrightarrow 2x^2-6x-9 = 2x^2-6x \Leftrightarrow -9 = 0$ (vô lý)

Với $T = 6 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-6x-9}{x^2-3x} = 6 \Leftrightarrow 2x^2-6x-9 = 6x^2-18x \Leftrightarrow 4x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}\ (TM)$

$\Rightarrow T_{Min} = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Vì: $1 \le x \le 2$. Thay x = 2 vào T ta được: $T = \dfrac{2x^2-6x-9}{x^2-3x} = \dfrac{13}{2} = 6{,}5 \Leftrightarrow 2\left(2x^2-6x-9\right) = 13\left(x^2-3x\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2-12x-18 = 13x^2-39x \Leftrightarrow 9x^2-27x+18=0 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. (TM)$

$\Rightarrow T_{Max} = 6{,}5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Câu 26. *(Trường chuyên Vĩnh Phúc năm 2021-2022)*

Cho các số dương $a;b;c$ thỏa mãn $\sqrt{a+b+ab+1}+c=6$. Chứng minh rằng:

a) $a+b+2c \ge 10$

b) $\dfrac{2a+1}{a+1} + \dfrac{2b+1}{b+1} + \dfrac{2c+2}{c+2} \le 5$

Lời giải

a)

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM:

$(a+1)+(b+1) \ge 2\sqrt{(a+1)(b+1)} \Rightarrow \sqrt{ab+a+b+1} \le \dfrac{a+b+2}{2}$

$\Rightarrow 6 = \sqrt{ab+a+b+1}+c \le \dfrac{a+b+2}{2}+c$

$\Rightarrow a+b+2+2c \ge 12$

Suy ra $a+b+2c \ge 10$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{a+1}=\sqrt{b+1} \Leftrightarrow a=b$

Vậy $a+b+2c \geq 10$

b) Ta có:

$$\frac{2a+1}{a+1}+\frac{2b+1}{b+1}+\frac{2c+2}{c+2} \leq 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a+1}{a+1}-2+\frac{2b+1}{b+1}-2+\frac{2c+2}{c+2}-2 \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{a+1}+\frac{-1}{b+1}+\frac{-2}{c+2} \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{2}{c+2} \leq 1$$

Ta có: $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{2}{c+2} \geq \frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}+\frac{2}{c+2} \geq \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}+c+2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{2}{c+2} \geq \frac{8}{\frac{a+b+2}{2}+c+2}=\frac{16}{a+b+2c+6} \geq \frac{16}{10+6}=1 \text{ (đpcm)}$$

Vậy $\frac{2a+1}{a+1}+\frac{2b+1}{b+1}+\frac{2c+2}{c+2} \leq 5$

Câu 27. *(Trường chuyên Quảng Ninh năm 2021-2022)*

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0<x<y \leq 8$ và $xy \leq 4x+3y$. Chứng minh $x^2+y^2 \leq 100$.

Lời giải

Với $0<x \leq 6$, và $0<y \leq 8 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 100$ (1)

Với $6<x<y \leq 8 \Rightarrow 0<y-x<2 \Rightarrow (y-x)^2<2(y-x)$

$\Rightarrow x^2+y^2<2xy+2(y-x) \leq 8x+6y-2x+2y=6x+8y$

Có $(6x+8y)^2 \leq \left(6^2+8^2\right)\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow 6x+8y \leq 10\sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow x^2+y^2<10\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2<100$ (2).

(1), (2) suy ra điều phải chứng minh.

Câu 28. *(Trường chuyên Hòa Bình năm 2021-2022)*

Cho các số a, b, c đều lớn hơn $\frac{25}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q=\frac{a}{2\sqrt{b}-5}+\frac{b}{2\sqrt{c}-5}+\frac{c}{2\sqrt{a}-5}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM ta có : $\frac{a}{2\sqrt{b}-5}+2\sqrt{b}-5\ge 2\sqrt{a}$; $\frac{b}{2\sqrt{c}-5}+2\sqrt{c}-5\ge 2\sqrt{b}$; $\frac{c}{2\sqrt{a}-5}+2\sqrt{a}-5\ge 2\sqrt{c}$

$\Rightarrow \frac{a}{2\sqrt{b}-5}+\frac{b}{2\sqrt{c}-5}+\frac{c}{2\sqrt{a}-5}+2\sqrt{b}-5+2\sqrt{c}-5+2\sqrt{a}-5\ge 2\sqrt{b}+2\sqrt{c}+2\sqrt{a}\Rightarrow Q\ge 15$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=25$

$Q_{\min}=15$ khi và chỉ khi $a=b=c=25$

Câu 29. *(Trường chuyên Nam Định năm 2021-2022)*

Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $\frac{a+bc}{b+c}+\frac{b+ca}{c+a}+\frac{c+ab}{a+b}\ge 2$.

Lời giải

+ Ta có $\frac{a+bc}{b+c}=\frac{a(a+b+c)+bc}{b+c}=\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}$.

Tương tự thì BĐT cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}\ge 2.$$

+ Theo BĐT Cauchy có

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}\ge 2\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}.\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}}=2(a+b)\quad (1)$$

Tương tự có $\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}\ge 2(b+c)\quad (2)$

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}\ge 2(c+a)\quad (3).$$

Cộng vế các BĐT (1), (2), (3) suy ra ĐPCM.

Câu 30. *(Trường chuyên Nam Định năm 2021-2022)*

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le 2021$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{7x^2-2xy+4y^2}}+\frac{1}{\sqrt{7y^2-2yz+4z^2}}+\frac{1}{\sqrt{7z^2-2zx+4x^2}}\le\frac{2021}{3}$$

Lời giải

Với ∀ a, b, c > 0 ta có $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc};\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$

$\Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9\Rightarrow \frac{1}{a+b+c}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c

Với x, y, z là các số dương ta có $7x^2-2xy+4y^2=(2x+y)^2+3(x-y)^2\ge(2x+y)^2$

$$\Rightarrow \sqrt{7x^2-2xy+4y^2}\ge 2x+y \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{7x^2-2xy+4y^2}}\le \frac{1}{2x+y}=\frac{1}{x+x+y}\le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

Dấu bằng xảy ra khi x = y

Tương tự ta có

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{7y^2-2yz+4z^2}}\le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$ dấu bằng xảy ra khi y = z

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{7z^2-2zx+4x^2}}\le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)$$ dấu bằng xảy ra khi x = z

Cộng các bất đẳng thức trên ta được :

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{7x^2-2xy+4y^2}}+\frac{1}{\sqrt{7y^2-2yz+4z^2}}+\frac{1}{\sqrt{7z^2-2zx+4x^2}}\le \frac{1}{9}\left(\frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}\right)\le \frac{2021}{3}$$

dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{3}{2021}$

Câu 31. *(Trường chuyên Nam Định năm 2021-2022)*

Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy}\ge 2\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right).$$

Lời giải

Với x,y,z là các số dương và $xyz=1$ ta có:

$$\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy}\ge 2\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3\ge 2\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)$$

Ta có $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ và $x^2-xy+y^2\ge xy$

Suy ra $x^3+y^3\ge (x+y).xy \Rightarrow x^3+y^3\ge \frac{x+y}{z}$

Tương tự ta có $y^3+z^3\ge \frac{y+z}{x}$ và $z^3+x^3\ge \frac{z+x}{y}$

Từ các BĐT trên ta có: $2(x^3+y^3+z^3)\ge x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

Mặt khác áp dụng BĐT Côsi cho các số dương ta có

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 2\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{y}}=\frac{2}{\sqrt{xy}}$ mà $\sqrt{xy}\le \frac{x+y}{2}$ suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge \frac{4}{x+y}\Rightarrow z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge \frac{4z}{x+y}$

Tương tự ta cũng có: $y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\ge \frac{4y}{z+x}$.

$$x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\frac{4x}{y+z}\ .$$

Suy ra $2\left(x^3+y^3+z^3\right)\geq\frac{4x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{4z}{x+y}\Rightarrow x^3+y^3+z^3\geq2\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$

Ta được điều cần chứng minh.

Bất đẳng thức xảy ra dấu bằng khi: $x=y=z=1$.

BẤT ĐẲNG THỨC, CỰC TRỊ NĂM 2020-2021

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2020-2021)*

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}\le\frac{1}{3}$$

Lời giải

Chứng minh với ba số dương x, y, z ta có $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9\ (1)$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Chứng minh được bất đẳng thức $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}+\frac{z^2}{p}\ge\frac{(x+y+z)^2}{m+n+p}\ \forall m,n,p>0\ (2)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$.

Đặt $P=\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức (1), ta có

$$\left[\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(2a^2+bc\right)+\left(2a^2+bc\right)\right].\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2a^2+bc}\right)\ge 9$$

$$\frac{9a^2}{5a^2+(b+c)^2}=\frac{9a^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(2a^2+bc\right)+\left(2a^2+bc\right)}\le a^2\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{2a^2+bc}\right)$$

Chứng minh tương tự, ta được

$$\frac{9b^2}{5b^2+(c+a)^2}\le b^2\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{2b^2+ac}\right)$$

$$\frac{9b^2}{5c^2+(a+b)^2}\le c^2\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{2c^2+ab}\right)$$

Khi đó, ta có

$$\frac{9a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{9b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{9c^2}{5c^2+(a+b)^2}\le 1+\left(\frac{2a^2}{2a^2+bc}+\frac{2b^2}{2b^2+ca}+\frac{2c^2}{2c^2+ab}\right)$$

Suy ra $9P\le 4-\left(\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}\right)$

Ta có: $\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}=\frac{b^2c^2}{2a^2bc+b^2c^2}+\frac{c^2a^2}{2ab^2c+c^2a^2}+\frac{a^2b^2}{2abc^2+a^2b^2}$

Áp dụng bất đẳng thức (2), ta được $\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{(ab+bc+ca)^2}=1$

Vậy $9P \le 3 \Rightarrow P \le \frac{1}{3}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh vòng 2 năm 2020-2021)*

Cho a,b,c là các số dương thảo mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=(1+2a)(1+2bc)$.

Lời giải

Ta có: $A=(1+2a)(1+2bc)\le(1+2a)(1+b^2+c^2)=(1+2a)(2-a^2)$.

Mà $(1+2a)(2-a^2)=\frac{1}{2}(2+4a)(6-3a^2)\le\frac{1}{24}.(2+4a+6-3a^2)^2=\frac{1}{6}.(8+4a-3a^2)^2$.

Đánh giá: $0<8+4a-3a^2=8+\frac{4}{3}-3\left(a-\frac{2}{3}\right)^2\le\frac{28}{3}$.

$\Rightarrow A\le\frac{1}{24}.\left(\frac{28}{3}\right)^2=\frac{98}{27}$.

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng $\frac{98}{27}$. Dấu "= " xảy ra khi và chỉ khi

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Bình Dương năm 2020-2021)*

Với các số thực x,y thay đổi thỏa mãn $1\le x\le y\le 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2(x^2+y^2)+4(x-y-xy)+7$.

Lời giải

Ta có

$P=2(x^2+y^2)+4(x-y-xy)+7=2(x^2+y^2+2x-2y-2xy)+7$

$=2(x^2+y^2+1+2x-2y-2xy)+5=2(x-y+1)^2+5\ge5,\forall x,y$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}x-y+1=0\\1\le x\le y\le 5\end{cases}$. Ví dụ $x=3, y=4$.

Vậy $P_{\min}=5 \Leftrightarrow \begin{cases}x-y+1=0\\1\le x\le y\le 5\end{cases}$.

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Đăk Nông chuyên toán năm 2020-2021)*

Cho hai số dương x,y thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}$.

Lời giải

Ta có, với $a,b>0$: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}\Leftrightarrow(a+b)^2\ge4ab$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.

$A=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy}\ge\frac{4}{x^2+y^2+2xy}+\frac{1}{2xy}=\frac{4}{(x+y)^2}+\frac{1}{2xy}$.

Mà $4xy \le (x+y)^2 \Rightarrow \frac{1}{2xy} \ge \frac{2}{(x+y)^2}$.

$\Rightarrow A \ge \frac{4}{(x+y)^2} + \frac{2}{(x+y)^2} = \frac{6}{(x+y)^2} = 6$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x = y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 6 đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Hà Giang vòng 2 năm 2020-2021)*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{25}{4+x} - \frac{1}{x-2}$ với $-4 < x < 2$.

Lời giải

Ta có: $P = \frac{25}{4+x} - \frac{1}{x-2}$ với $-4 < x < 2$

$= \frac{25}{x+4} + \frac{1}{2-x}$

$= \frac{1}{6} . \frac{25(x+4+2-x)}{x+4} + \frac{1}{6} . \frac{2-x+x+4}{2-x}$

$= \frac{1}{6} . \left[26 + 25 . \frac{2-x}{x+4} + \frac{x+4}{x-2} \right]$

$\Rightarrow 6P = 26 + \frac{25(2-x)}{4+x} + \frac{(4+x)}{2-x}$

$6P - 26 = \frac{25(2-x)}{4+x} + \frac{(4+x)}{2-x} \ge 2\sqrt{25} = 10 \Rightarrow P \ge 6$

$\Rightarrow P_{\min} = 6 \Leftrightarrow \frac{25(2-x)}{4+x} = \frac{(4+x)}{2-x} > 0 \Leftrightarrow x = 1$

Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh năm 2020-2021)*

Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2z^2 + y^2z^2 + 1 \le 3z$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{8}{(y+3)^2} + \frac{4z^2}{(1+2z)^2}$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh: $\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} \ge \frac{8}{(A+B)^2}$, $A, B \in \mathbb{R}; A, B > 0$

$\Leftrightarrow \frac{A^2+B^2}{A^2B^2} \ge \frac{8}{(A+B)^2} \Leftrightarrow (A^2+B^2)(A+B)^2 \ge 8A^2B^2$ (luôn đúng)

Từ giả thiết $z > 0$, đặt $x = a, y = b, z = \frac{1}{2c}$

Từ $x^2z^2+y^2z^2+1\le 3z \Rightarrow a^2\cdot\dfrac{1}{4c^2}+b^2\dfrac{1}{4c^2}+1\le 3\cdot\dfrac{1}{2c}\Rightarrow a^2+b^2\le 6c-4c^2$

$a^2+b^2+c^2\le 6c-3c^2=3\left[1-(c-1)^2\right]\le 3$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta có:

$(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)\le 9\Rightarrow a+b+c\le 3\Rightarrow 0<a+b+c+5\le 8$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(a+b+c+5)^2}\ge\dfrac{1}{64}$

Ta có: $P=\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{8}{(y+3)^2}+\dfrac{4z^2}{(1+2z)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{2z}\right)^2}+\dfrac{8}{(y+3)^2}$

$$P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{8}{(b+3)^2}=\left[\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}\right]+\frac{8}{(b+3)^2}$$

$$\ge\frac{8}{(a+c+2)^2}+\frac{8}{(b+3)^2}=8\left[\frac{1}{(a+c+2)^2}+\frac{1}{(b+3)^2}\right]$$

$$\ge\frac{64}{(a+c+2+b+3)^2}\ge 1$$

Dấu "$=$" xảy ra khi $a=b=c=1$ tức là $\begin{cases}x=y=1\\ z=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Vậy $\min P=1$.

Câu 7. *(Trường chuyên tỉnh Long An năm 2020-2021)*

Cho a,b,c là các số thực thảo mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+1}{c^2a^2}+\frac{b^2+1}{a^2b^2}+\frac{c^2+1}{b^2c^2}\ge a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)\ .$$

Lời giải

Ta có: $abc=1$ nên $abc\ne 0\ \Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{bc}\\ b=\dfrac{1}{ac}\\ c=\dfrac{1}{ab}\end{cases}$

$$\frac{a^2+1}{c^2a^2}+\frac{b^2+1}{a^2b^2}+\frac{c^2+1}{b^2c^2}\ge a(b+1)+b(c+1)+c(c+1)$$

$$\Leftrightarrow b^2(a^2+1)+c^2(b^2+1)+a^2(c^2+1)\ge(ab+c)+(bc+a)+(ca+b)$$

$$\Leftrightarrow (a^2b^2+c^2)+(b^2c^2+a^2)+(c^2a^2+b^2)\ge\left(\frac{1}{c}+c\right)+\left(\frac{1}{a}+a\right)+\left(\frac{1}{b}+b\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{c^2}+c^2\right)+\left(\frac{1}{a^2}+a^2\right)+\left(\frac{1}{b^2}+b^2\right)\ge\left(\frac{1}{c}+c\right)+\left(\frac{1}{a}+a\right)+\left(\frac{1}{b}+b\right)$$

Ta chứng minh $\frac{1}{a^2}+a^2\ge\left(\frac{1}{a}+a\right)$

Ta có: $\frac{1}{a^2}+a^2=\left(\frac{1}{|a|}+|a|\right)^2-2$

Xét hiệu $\frac{1}{a^2}+a^2-\left(\frac{1}{|a|}+|a|\right)=\left(\frac{1}{|a|}+|a|\right)^2-\left(\frac{1}{|a|}+|a|\right)-2=\left[\left(\frac{1}{|a|}+|a|\right)-2\right]\left[\left(\frac{1}{|a|}+|a|\right)+1\right]$

Sử dụng bất đẳng thức Cô – si: $\frac{1}{|a|}+|a|\ge 2$

$$\Rightarrow\left[\left(\frac{1}{|a|}+|a|\right)-2\right]\left[\left(\frac{1}{|a|}+|a|\right)+1\right]\ge 0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^2}+a^2-\left(\frac{1}{|a|}+|a|\right)\ge 0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^2}+a^2\ge\frac{1}{|a|}+|a|\ge\frac{1}{a}+a$$

Chứng minh tương tự ta được: $\frac{1}{b^2}+b^2\ge\frac{1}{b}+b,\frac{1}{c^2}+c^2\ge\frac{1}{c}+c$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a^2=1\\b^2=1\\c^2=1\end{cases}$ mà $abc=1$ nên ta có các bộ số $(a;b;c)$ có dạng $(1;1;1);(-1;-1;1);(1;-1;-1);(-1;1;-1)$ thỏa mãn để dấu "=" xảy ra.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu 8. *(Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng năm 2020-2021)*

Chứng minh rằng với mọi số thực a,b,c,d,e ta luôn có

$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$

Lời giải

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$$

$$\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+4c^2+4d^2+4e^2\ge 4a(b+c+d+e)$$

$$\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+4c^2+4d^2+4e^2-4a(b+c+d+e)\ge 0$$

$\Leftrightarrow (a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+(a-2e)^2 \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi $a=2b=2c=2d=2e$.

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Lạng Sơn năm 2020-2021)*

1) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{36x}+\frac{1}{9y}+\frac{1}{z}$.

2) Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}+\frac{b^3}{(b+1)(c+1)}+\frac{c^3}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Lời giải

1) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$P=\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{z}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1}{6\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{1}{3\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2\right] \geq \left(\sqrt{x}\frac{1}{6\sqrt{x}}+\sqrt{y}\frac{1}{3\sqrt{y}}+\sqrt{z}\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2$$

$$\Rightarrow P \geq \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+1\right)^2=\frac{9}{4}$$

Dấy "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 6x=3y=z \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2x+6x=1 \\ 6x=3y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{9} \\ 6x=3y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{9} \\ y=\frac{2}{9} \\ z=\frac{2}{3} \end{cases}$

Vậy GTNN của P là $\frac{9}{4}$ tại $x=\frac{1}{9}, y=\frac{2}{9}, z=\frac{2}{3}$

2) Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}+\frac{a+1}{8}+\frac{b+1}{8} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}\cdot\frac{a+1}{8}\cdot\frac{b+1}{8}}=\frac{3}{4}a$$

$$\frac{b^3}{(c+1)(b+1)}+\frac{c+1}{8}+\frac{b+1}{8} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{b^3}{(c+1)(b+1)}\cdot\frac{c+1}{8}\cdot\frac{b+1}{8}}=\frac{3}{4}b$$

$$\frac{c^3}{(a+1)(c+1)}+\frac{a+1}{8}+\frac{c+1}{8} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{c^3}{(a+1)(c+1)}\cdot\frac{a+1}{8}\cdot\frac{c+1}{8}}=\frac{3}{4}c$$

Suy ra $\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}+\frac{b^3}{(b+1)(c+1)}+\frac{c^3}{(c+1)(a+1)}+\frac{3}{2} \geq \frac{3}{4}(a+b+c)=\frac{9}{4}$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{(a+1)(b+1)}+\frac{b^3}{(b+1)(c+1)}+\frac{c^3}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Câu 10. *(Trường chuyên tỉnh Nam Định năm 2020-2021)*

Cho các số thực không âm a,b,c thoả mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh:

$$a^3+b^3+c^3\le\frac{1}{8}+a^4+b^4+c^4$$

Lời giải

Xét hiệu $\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)=\left(a^3-a^4\right)+\left(b^3-b^4\right)+\left(c^3-c^4\right)$

$=a^3(1-a)+b^3(1-b)+c^3(1-c)=a^3(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b)$

$=a^2(ab+ac)+b^2(ab+bc)+c^2(ac+bc)$

Do a,b,c không âm nên ab,ac,bc không âm, suy ra $a^2(ab+ac)+b^2(ab+bc)+c^2(ac+bc)$

$\le a^2(ab+ac)+a^2bc+b^2(ab+bc)+b^2ac+c^2(ac+bc)+c^2ab$

$=a^2(ab+ac+bc)+b^2(ab+bc+ac)+c^2(ac+bc+ab)=\left(a^2+b^2+c^2\right)(ab+ac+bc)$

$=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)(2ab+2ac+2bc)$

$\le\frac{1}{2}\frac{\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\right)^2}{4}=\frac{1}{2}\frac{\left[(a+b+c)^2\right]^2}{4}=\frac{1}{8}$.

Hay $\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)\le\frac{1}{8}\Leftrightarrow\left(a^3+b^3+c^3\right)=\frac{1}{8}+a^4+b^4+c^4$ (đpcm).

Câu 11. *(Trường chuyên Nghệ An chuyên năm 2020-2021)*

Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số dương $\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}},\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}},\sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}$ ta được :

$$P=\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}\ge3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}.\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}.\sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}}=3\sqrt[6]{\frac{a+b}{c+ab}.\frac{b+c}{a+bc}.\frac{c+a}{b+ca}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số dương $(c+ab);(a+bc)$ ta được :

$$(c+ab).(a+bc)\le\frac{(c+ab+a+bc)^2}{4}=\frac{\left[b(a+c)+(a+c)\right]^2}{4}=\frac{(a+c)^2(b+1)^2}{4}\quad(1)$$

Tương tự : $(a+bc).(b+ca)\le\frac{(a+b)^2(c+1)^2}{4}$ (2)

$(b+ca).(c+ab)\le\frac{(b+c)^2(a+1)^2}{4}$ (3)

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra :

$$(b+ca)(a+bc)(c+ab)\le\frac{(a+b)(b+c)(c+a)(a+1)(b+1)(c+1)}{8}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho ba số dương $(a+1);(b+1);(c+1)$ ta được :

$$(a+1)(b+1)(c+1)\le\frac{(a+1+b+1+c+1)^3}{27}=\frac{(a+b+c+3)^3}{27}=\frac{6^3}{27}=8$$

Từ đó suy ra $(b+ca)(a+bc)(c+ab)\le(a+b)(b+c)(c+a)$

Do đó $\frac{a+b}{c+ab}.\frac{b+c}{a+bc}.\frac{c+a}{b+ca}\ge1\Rightarrow\sqrt[6]{\frac{a+b}{c+ab}.\frac{b+c}{a+bc}.\frac{c+a}{b+ca}}\ge1\Rightarrow P\ge3$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3, đạt được khi $a=b=c=1$.

Câu 12. *(Trường chuyên tỉnh Phú Thọ Chuyên Tin năm 2020-2021)*

Cho 3 số thực dương x,y,z thỏa mãn $xy+yz+zx=3xyz$. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{x}{3y^2z^2+xyz}}+\sqrt{\frac{y}{3x^2z^2+xyz}}+\sqrt{\frac{z}{3x^2y^2+xyz}}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Từ giả thiết $xy+yz+zx=3xyz$, ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$.

Đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}$. Ta có $a,b,c>0;a+b+c=3$.

Ta phải chứng minh $\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{3b+ca}}+\frac{ab}{\sqrt{3a+bc}}\le\frac{3}{2}$

Thật vậy: Thay $a+b+c=3,\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}}=\frac{bc}{\sqrt{(a+b+c)a+bc}}=\frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số $\frac{1}{a+b},\frac{1}{a+c}$ ta được

$$\frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\frac{bc}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)$$

Tương tự $\frac{ca}{\sqrt{3b+ca}}\le\frac{ca}{2}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{b+c}\right)$ và $\frac{ab}{\sqrt{3c+ab}}\le\frac{ab}{2}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+b}\right)$

Cộng vế với vế và biến đổi $\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{3b+ca}}+\frac{ab}{\sqrt{3c+ab}}\le\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$ hay $x=y=z=1$.

Câu 13. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Nam năm 2020-2021)*

Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H=3xy+yz^2+zx^2-x^2y$.

Lời giải

$H=3xy+yz^2+zx^2-x^2y$

$H=(x+y+z)xy+yz^2+zx^2-x^2y$

$H = x^2y + xy^2 + xyz + yz^2 + zx^2 - x^2y$

$H = xy^2 + xyz + yz^2 + zx^2$

Không mất tính tổng quát giả sử y lớn hơn x và y nhỏ hơn z ,ta có:

$(y-x)(y-z) \le 0$

$\Leftrightarrow x\left(y^2 - yz - xy + xz\right) \le 0$

$\Leftrightarrow xy^2 - xyz - x^2y + x^2z \le 0$

$\Leftrightarrow xy^2 + x^2z \le xyz + x^2y$

$\Leftrightarrow xy^2 + x^2z + xyz + yz^2 \le xyz + x^2y + xyz + yz^2$

$H \le xyz + x^2y + xyz + yz^2 = y(x+z)^2$

$H \le 4.y.\dfrac{(x+z)}{2}\cdot\dfrac{(x+z)}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-Si :

$4.y.\dfrac{(x+z)}{2}\cdot\dfrac{(x+z)}{2} \le 4.\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3 = 4$

Suy ra $H \le 4$

$H_{max} = 4 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Câu 14. *(Trường chuyên toán Phú Thọ năm 2020-2021)*

Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{\sqrt{xy}}{1+\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}} + \sqrt{\frac{2\sqrt{yz}}{1+\sqrt{xy}}} \ge 2.$$

Lời giải

$$\frac{\sqrt{xy}}{1+\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}} + \sqrt{\frac{2\sqrt{yz}}{1+\sqrt{xy}}} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)} + \sqrt{\frac{2\sqrt{z}}{\frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{x}}} \ge 2 \quad (*)$$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x} = a \\ \dfrac{1}{\sqrt{y}} = b \\ \sqrt{z} = c \end{cases}$ với $a, b, c > 0$ BĐT (*) trở thành : $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \sqrt{\dfrac{2c}{a+b}} \ge 2 \quad (**)$

Áp dụng bđt $\dfrac{1}{A} + \dfrac{1}{B} \ge \dfrac{4}{A+B}$, $(A; B > 0)$ ta có: $\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} \ge \dfrac{4}{b+c+c+a} = \dfrac{4}{2c+a+b}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{b+c} + 1 + \dfrac{b}{c+a} + 1 = (a+b+c)\left(\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a}\right) \ge \dfrac{4(a+b+c)}{2c+a+b} \quad (1)$

Lại có : $\sqrt{\dfrac{2c}{a+b}} = \dfrac{2c}{\sqrt{2c(a+b)}} \ge \dfrac{4c}{2c+a+b} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\sqrt{\frac{2c}{a+b}}\ge\frac{4\left(a+b+c\right)}{2c+a+b}-2+\frac{4c}{2c+a+b}=4-2=2$

BĐT (**) đúng vậy BĐT cần chứng minh là đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}=z$

Câu 15. *(Trường chuyên tỉnh TP Hồ Chí Minh năm 2020-2021)*

a) Cho 2 số thực a,b. Chứng minh rằng $\frac{a^2+b^2}{2}\ge ab+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}$.

b) Cho hai số dương a,b thỏa mãn điều kiện $a+b\le 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=b-a+\frac{20}{a}+\frac{7}{b}$.

Lời giải

a) Ta có

$\frac{a^2+b^2}{2}\ge ab+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{2}\ge\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+2}\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2\left(a^2+b^2\right)}{2\left(a^2+b^2+2\right)}\ge 0$ (luôn đúng với mọi a,b là số thực).

b) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$Q=b-a+\frac{20}{a}+\frac{7}{b}=-6\left(a+b\right)+5a+\frac{20}{a}+7b+\frac{7}{b}\ge -6\cdot 3+20+14=16$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=2,b=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 16.

Câu 16. *(Trường chuyên tỉnh Ninh Bình năm 2020-2021)*

Cho ba số dương a,b,c thoả mãn: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=\sqrt{2021}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2021}{2}}$.

Lời giải

Đặt $x=\sqrt{b^2+c^2}$, $y=\sqrt{c^2+a^2}$, $z=\sqrt{a^2+b^2}$ với $(x,y,z>0;x+y+z=\sqrt{2021})$;

$\to a^2=\frac{y^2+z^2-x^2}{2}, b^2=\frac{x^2+z^2-y^2}{2}, c^2=\frac{x^2+y^2-z^2}{2}$

và áp dụng các BĐT:

$b+c\le\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}=\sqrt{2}x, c+a\le\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}=\sqrt{2}y, a+b\le\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}=\sqrt{2}z$

suy ra $VT\ge\frac{y^2+z^2-x^2}{2\sqrt{2}x}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2\sqrt{2}y}+\frac{x^2+y^2-z^2}{2\sqrt{2}z}$

$\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x}-x\right)+\left(\frac{(z+x)^2}{2y}-y\right)+\left(\frac{(x+y)^2}{2z}-z\right)\right]$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x}+2x-3x\right)+\left(\frac{(z+x)^2}{2y}+2y-3y\right)+\left(\frac{(x+y)^2}{2z}+2z-3z\right)\right]$$

$$\geq\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(2(y+z)-3x\right)+\left(2(z+x)-3y\right)+\left(2(x+y-3z)\right)\right]$$

Suy ra $VT\geq\frac{1}{2\sqrt{2}}(x+y+z)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2021}{2}}$ (đpcm).

Câu 17. *(Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm 2020-2021)*

Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{8\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}+\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\geq 16$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{8\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}+\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\geq 2\sqrt{\frac{8\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}.\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{8\frac{(a+b+c)^2}{3}}{ab+bc+ca}.\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}}=12\sqrt{\frac{2(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)(a+b+c)}}$$

Ta sẽ chứng minh

$$12\sqrt{\frac{2(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)(a+b+c)}}\geq 16\Leftrightarrow 9(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8(ab+bc+ca)(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 9\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc\right]\geq 8\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc\right]$$

$$\Leftrightarrow ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geq 6abc$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{c}\right)+\left(\frac{b+c}{a}\right)+\left(\frac{c+a}{b}\right)\geq 6\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-2\right)\geq 0$$

$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}\geq 0$ (luôn đúng). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Do đó bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 18. *(Trường chuyên tỉnh Bình Phước 2020-2021)*

a) Cho a,b là hai số dương. Chứng minh rằng:

i. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ ***ii.*** $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\geq\frac{1}{4}(a+5b+2)$.

b) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}.$$

Lời giải

a) Cho a,b là hai số dương. Chứng minh rằng:

i. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge \frac{4}{a+b}$ **ii.** $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge \frac{1}{4}(a+5b+2)$

i. Ta chứng minh bằng phép biến đổi tương đương:

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}\ge 0\Leftrightarrow \frac{b(a+b)+a(a+b)-4ab}{ab(a+b)}\ge 0$

Hơn nữa: $b(a+b)+a(a+b)-4ab=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\ge 0$

Do đó bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

ii. Ta cần chứng minh

$16(a^2-ab+3b^2+1)\ge (a+5b+2)^2 \Leftrightarrow 15a^2+23b^2-26ab-4a-20b+12\ge 0$.

Mặt khác, $15a^2+13b^2-26ab-4a-20b+12=13(a-b)^2+10(b-1)^2+2(a-1)^2\ge 0$ nên bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

b) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge \frac{1}{4}(a+5b+2)$ ta được:

$$P\le \frac{4}{a+5b+2}+\frac{4}{b+5c+2}+\frac{4}{c+5a+2}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge \frac{4}{a+b},\forall a,b>0$ ta được:

$$\frac{4}{a+5b+2}\le \frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{4b} \quad (1)$$

$$\frac{4}{b+5c+2}\le \frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{4c} \quad (2)$$

$$\frac{4}{c+5a+2}\le \frac{1}{c+a+2}+\frac{1}{4a} \quad (3)$$

Từ $(1),(2),(3)$ ta có:

$$P\le \left(\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{c+a+2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \quad (*).$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge \frac{4}{a+b},\forall a,b>0$ ta có:

$$\frac{1}{a+b+2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{2}\right] \quad (4)$$

$$\frac{1}{b+c+2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\right] \quad (5)$$

$$\frac{1}{c+a+2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\right] \quad (6)$$

Từ $(*),(4),(5),(6)$ ta được: $P \le \frac{3}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{3}{8} \le \frac{3}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{2}$ đạt được khi $a=b=c=1$

Câu 19. *(Trường chuyên tỉnh Hải Dương năm 2020-2021)*

a) Chứng minh rằng: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \le -2$ biết $\begin{cases} x^3+y^3+3(x^2+y^2)+4(x+y)+4=0 \\ xy>0 \end{cases}$

b) Cho ba số thực x, y, z dương thỏa mãn $xy+yz+zx+2xyz=1$. Chứng minh: $\frac{x^2y}{x+1}+\frac{y^2z}{y+1}+\frac{z^2x}{z+1} \ge 2xyz$

Lời giải

a) Ta có: $x^3 + y^3 + 3(x^2+y^2) + 4(x+ y) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) + 2(x^2 - xy + y^2) + (x^2 + 2xy + y^2) + 4(x+y) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - xy + y^2)(x + y + 2) + (x + y + 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + y + 2)(x^2 - xy + y^2 + x + y + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x + y + 2). \left[(x-y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2+2\right] = 0$

(vì $\left[(x-y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2+2\right] > 0$)

$\Leftrightarrow x + y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x + y = -2$, mà $x.y > 0$ nên $x < 0, y < 0$

Áp dụng BĐT CauChy ta có $\sqrt{(-x)(-y)} \le \frac{(-x)+(-y)}{2} = \frac{-(x+y)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Do đó $xy \le 1 \Leftrightarrow 1 \le \frac{1}{xy} \Leftrightarrow \frac{-2}{xy} \le -2$

Mà $M = \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{-2}{xy}$

Vậy $M = \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \le -2$ dấu bằng xảy ra khi $x=y=-1$

b) Xét $VT = \frac{x^2y^2}{xy+y}+\frac{y^2z^2}{yz+z}+\frac{z^2x^2}{xz+x} \ge \frac{(xy+yz+zx)^2}{xy+yz+zx+x+y+z} \quad (1)$

Ta có $xy+yz+zx \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$.

Đặt $t = xy + yz + zx$, từ giả thiết có: $(1-t)^2 = 4x^2y^2z^2 \le \frac{4t^3}{27} \Leftrightarrow t \ge \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow xy + yz + zx \ge \frac{3}{4}$

Thay vào giả thiết được: $2xyz = 1-(xy+yz+zx) \le \frac{1}{4}$ hay $xyz \le \frac{1}{8}$

Do đó $xy + yz + zx \ge 6xyz$

$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2 \ge 6xyz(xy+yz+zx) \quad (2)$

Mặt khác: $(xy+yz+zx)^2 \ge 3(xy.yz+yz.zx+zx.xy) \Leftrightarrow 2(xy+yz+zx)^2 \ge 6xyz(x+y+z) \quad (3)$

Cộng vế (2) và (3) có: $3(xy+yz+zx)^2 \ge 6xyz(xy+yz+zx+x+y+z) \quad (4)$

Kết hợp (1) và (4) ta có điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{2}$

Câu 20. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Ngãi toán năm 2020-2021)*

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\mathrm{P} = \frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+1}$.

Lời giải

Ta có biểu thức xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Do đó

$\mathrm{P} = \frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+1} \Leftrightarrow \mathrm{P.x}^2 - 2\mathrm{x} + \mathrm{P} = 0 \qquad (*)$

(+) Nếu $\mathrm{P} = 0$ thì $\mathrm{x} = 0$.

(+) Xét $\mathrm{P} \ne 0$, ta có pt $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - \mathrm{P}^2 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le \mathrm{P} \le 1$.

Vậy $\min \mathrm{P} = -1$ và $\max \mathrm{P} = 1$.

Câu 21. *(Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2020-2021)*

Với các số thực dương a và b thay đổi, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = (a+b)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2-ab+2a^2}}\right).$$

Lời giải

$$S^2 \le 2(a+b)^2\left(\frac{1}{a^2-ab+2b^2} + \frac{1}{b^2-ab+2a^2}\right) = \frac{2(a+b)^2(3a^2+3b^2-2ab)}{2a^4-3a^3b+6a^2b^2-3ab^3+2b^4}$$

$= \frac{2(a^2+2ab+b^2)(3a^2+3b^2-2ab)}{2(a^2+b^2)^2-3ab(a^2+b^2)+2a^2b^2}$. Do đó $S^2 \le \frac{2\left(\frac{a^2+b^2}{ab}+2\right)\left(\frac{3(a^2+b^2)}{ab}-2\right)}{2\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^2 - 3\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)+2}$.

Đặt $t = \frac{a^2+b^2}{ab} \ge 2$, ta được $S^2 \le \frac{2(t+2)(3t-2)}{2t^2-3t+2}$

Ta chứng minh được $\dfrac{2(t+2)(3t-2)}{2t^2-3t+2}\le 8\ (1)$. Thật vậy

$(1)\Leftrightarrow 3t^2+4t-4\le 8t^2-12t+8\Leftrightarrow (t-2)(5t-6)\ge 0$ đúng $\forall t\ge 2$

Do đó $S\le 2\sqrt{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b$. Vậy $\max S=2\sqrt{2}$.

Câu 22. *(Trường chuyên tỉnh Yên Bái năm 2020-2021)*

Cho các số thực a,b,c dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau

$$P=\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$P=\sqrt{\left(\frac{2a}{a+b}\right)\left(\frac{2a}{a+c}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\frac{b}{2}}{b+c}\right)\left(\frac{2b}{b+a}\right)}+\sqrt{\left(\frac{2c}{c+a}\right)\left(\frac{\frac{c}{2}}{c+b}\right)}$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{a+b}+\frac{2a}{a+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{b}{2}}{b+c}+\frac{2b}{b+a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2c}{c+a}+\frac{\frac{c}{2}}{c+b}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2a}{a+b}+\frac{2b}{b+a}\right)+\left(\frac{2a}{a+c}+\frac{2c}{c+a}\right)+\left(\frac{\frac{b}{2}}{b+c}+\frac{\frac{c}{2}}{c+b}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(2+2+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{2a}{a+b}=\dfrac{2a}{a+c}\\ \dfrac{\frac{b}{2}}{b+c}=\dfrac{2b}{b+a}\\ \dfrac{\frac{c}{2}}{c+b}=\dfrac{2c}{c+a}\end{cases}\Leftrightarrow a=7b=7c$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $\dfrac{9}{4}$ khi $a=7b=7c$.

Câu 23. *(Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2020-2021)*

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=8$. Chứng minh :

$$\frac{a}{ca+4}+\frac{b}{ab+4}+\frac{c}{bc+4}\le\frac{1}{16}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Lời giải

Vì a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=8$ nên tồn tại các số thực dương x,y,z sao cho $a=\frac{2x}{y};b=\frac{2y}{z};c=\frac{2z}{x}$.

Bất đẳng thức trở thành $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\ge\frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{z+x}+\frac{2z}{x+y}$

$$3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)\ge\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2\ge3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\quad(2)$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\ge\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$$

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\ge\frac{x}{y}.\frac{y}{z}+\frac{y}{z}.\frac{z}{x}+\frac{z}{x}.\frac{x}{y}=\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\quad(3)$$

Từ (2) và (3) có

$$2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)\ge\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}$$

Lại có

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}=x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

$$\ge\frac{4x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{4z}{x+y}$$

Ta có bất đẳng thức (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

Câu 24. *(Trường chuyên Điện Biên năm 2020-2021)*

Cho hai số $a,\ b$ thỏa mãn $a>b>0$ và $a.b=1$. Chứng minh: $\frac{a^2+b^2}{a-b}\ge2\sqrt{2}$.

Lời giải

Vì $a.b=1\Rightarrow\frac{a^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2+2}{a-b}=(a-b)+\frac{2}{(a-b)}$

Do $a>b>0\Rightarrow(a-b)+\frac{2}{(a-b)}\ge2\sqrt{(a-b).\frac{2}{(a-b)}}=2\sqrt{2}$ (BĐT AM-GM)

Dấu bằng xảy ra khi: $(a-b)=\frac{2}{(a-b)}\Leftrightarrow(a-b)^2=2\Leftrightarrow a-b=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow a-\frac{1}{a}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}a=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} & (t/m)\\ a=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} & (Loai)\end{array}\right.\Rightarrow b=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $\frac{a^2+b^2}{a-b}\ge2\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2};b=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

Câu 25. *(Trường chuyên toán Vĩnh Long năm 2020-2021)*

Cho x, y là các số thực dương và $x+y\le 1$.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{x^3+y^3}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(1+y+\dfrac{1}{y}\right)^3$.

Lời giải

a) Ta có

$\dfrac{x^3+y^3}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3\Leftrightarrow 4\left(x^3+y^3\right)\ge\left(x+y\right)^3\Leftrightarrow\left(x+y\right)\left(x-y\right)^2\ge 0$ (luôn đúng).

b) Ta có $P=\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(1+y+\dfrac{1}{y}\right)^3\ge 2.\left(\dfrac{1+x+\dfrac{1}{x}+1+y+\dfrac{1}{y}}{2}\right)^3\ge 2.\dfrac{\left(2+x+y+\dfrac{4}{x+y}\right)^3}{8}$

Đặt $a=x+y$, điều kiện $0<a\le 1$, ta được

$P\ge\dfrac{1}{4}.\left(2+a+\dfrac{4}{a}\right)^3=\dfrac{1}{4}.\left(2+a+\dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{a}\right)^3\ge\dfrac{1}{4}.\left(4+\dfrac{3}{a}\right)^3\ge\dfrac{1}{4}.\left(4+\dfrac{3}{1}\right)^3=\dfrac{343}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{343}{4}$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Câu 26. *(Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2020-2021)*

Cho các số dương x, y, z thoả mãn $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}\ge 2020$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy}+\dfrac{\sqrt{z^2+2y^2}}{yz}+\dfrac{\sqrt{x^2+2z^2}}{zx}$.

Lời giải

Với hai số dương x, y ta có $2(x-y)^2\ge 0$, đẳng thức xảy ra khi $x=y$.

Ta có $2(y-x)^2\ge 0\Leftrightarrow 3y^2+6x^2\ge y^2+4xy+4x^2\Leftrightarrow 3\left(y^2+2x^2\right)\ge\left(y+2x\right)^2$

và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}$.

Do đó $\sqrt{y^2+2x^2}\ge\dfrac{y+2x}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy}\ge\dfrac{y+2x}{\sqrt{3}xy}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}\right)$ (1)

Tương tự $\dfrac{\sqrt{z^2+2y^2}}{yz}\ge\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}\right)$ (2), $\dfrac{\sqrt{x^2+2z^2}}{zx}\ge\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{x}\right)$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) theo vế ta được

$$\dfrac{\sqrt{y^2+2x^2}}{xy}+\dfrac{\sqrt{z^2+2y^2}}{yz}+\dfrac{\sqrt{x^2+2z^2}}{zx}\ge\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$$

Với $x,y,z>0$ ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y};\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{4}{y+z};\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\ge\frac{4}{z+x}$

Nên $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)\ge4.2020$ hay $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge4040$

Suy ra $P\ge4040\sqrt{3}$, đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{3}{4040}$.

Vậy GTNN của P cần tìm là $4040\sqrt{3}$, khi $x=y=z=\frac{3}{4040}$.

Câu 27. *(Trường chuyên tỉnh Hải Phòng năm 2020-2021)*

Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn $xy+yz+zx=5$. Chứng minh

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+5}}+\frac{3z}{\sqrt{6\left(z^2+5\right)}}\le\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Lời giải

$$P=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{3z}{\sqrt{6(z+x)(z+y)}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{2}{x+y}\cdot\frac{3}{x+z}}+\frac{y}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{3}{y+z}\cdot\frac{2}{y+x}}+\frac{3z}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{1}{z+x}\cdot\frac{1}{z+y}}$$

$$\le\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\frac{2x}{x+y}+\frac{3x}{x+z}+\frac{3y}{y+z}+\frac{2y}{y+x}+\frac{3z}{z+x}+\frac{3z}{z+y}\right)=\frac{1}{2\sqrt{6}}(2+3+3)=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\frac{2}{x+y}=\frac{3}{y+z}=\frac{3}{z+x}\\xy+yz+zx=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=2x=2y\\5x^2=5\end{cases}\Leftrightarrow z=2x=2y=2$

Câu 28. *(Trường chuyên tỉnh Nghệ An năm 2020-2021)*

Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}$.

Lời giải

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$P\ge3.\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}\cdot\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}\cdot\sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}}=3\sqrt[6]{\frac{a+b}{c+ab}\cdot\frac{b+c}{a+bc}\cdot\frac{c+a}{b+ca}}$$

Mặt khác: Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$(c+ab)(a+bc)\le\left[\frac{(c+ab)+(a+bc)}{2}\right]^2=\frac{(c+a)^2(b+1)^2}{4}$$

Chứng minh tương tự, ta có $(a+bc)(b+ca)\le\frac{(a+b)^2(c+1)^2}{4}$;

$(b+ca)(c+ab)\le\frac{(b+c)^2(a+1)^2}{4}$

Nhân từng vế ba bất đẳng thức trên và thu gọn ta được

$(c+ab)(a+bc)(b+ca)\le\frac{(a+b)(b+c)(c+a)(a+1)(b+1)(c+1)}{8}$

$\Leftrightarrow\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(c+ab)(a+bc)(b+ca)}\ge\frac{8}{(a+1)(b+1)(c+1)}$

Mà $\frac{8}{(a+1)(b+1)(c+1)}\ge\frac{8}{\left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^3}=1$

(Vì $(a+1)(b+1)(c+1)\le\left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^3$)

Do đó $P\ge3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Vậy $P_{min}=3$ khi $a=b=c=1$

Câu 29. *(Đề dự bị trường chuyên tỉnh Nghệ An năm 2020-2021)*

Cho x,y,z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz\ge1$. Chứng minh rằng $\frac{x}{\sqrt{x+\sqrt{yz}}}+\frac{y}{\sqrt{y+\sqrt{zx}}}+\frac{z}{\sqrt{z+\sqrt{xy}}}\ge\frac{3}{\sqrt2}$.

Lời giải

$\frac{x}{\sqrt{x+\sqrt{yz}}}+\frac{y}{\sqrt{y+\sqrt{zx}}}+\frac{z}{\sqrt{z+\sqrt{xy}}}\ge\frac{3}{\sqrt2}$ (1)

Đặt $\sqrt{x}=a,\sqrt{y}=b,\sqrt{z}=c$ suy ra a,b,c dương và $abc\ge1$

Ta có $(1)\Leftrightarrow\frac{a^2}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{b^2}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{c^2}{\sqrt{c^2+ab}}\ge\frac{3}{\sqrt2}$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{b^2}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{c^2}{\sqrt{c^2+ab}}\right)^2\ge\frac{(a+b+c)^4}{\left(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}\right)^2}$

Mặt khác: Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$\left(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}\right)^2\le3\left(a^2+bc+b^2+ca+c^2+ab\right)$

$=3\left[(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)\right]\le 3(a+b+c)^2-9$

(vì $ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}\ge 3$)

Do đó phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chứng minh được

$$\frac{(a+b+c)^4}{3(a+b+c)^2-9}\ge\frac{9}{2}\Leftrightarrow 2t^2-27t+81\ge 0$$

$\Leftrightarrow(2t-9)(t-9)\ge 0$ (luôn đúng). (vì $t=(a+b+c)^2\ge\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^2\ge 9$)

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

Câu 30. *(Trường chuyên tỉnh Long An năm 2020-2021)*

Cho các số thực $a,\ b,\ c$ sao cho: $a\ge 0;\ b\ge\frac{3}{2};\ c\ge 5$ và $a^2+\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{9}\le 12$.

Tìm giá trị lớn nhất của $M=\sqrt{2ab-3a}+\sqrt{ca+8c}+2\sqrt{c-5}$.

Lời giải

$\sqrt{2ab-3a}=\sqrt{a(2b-3)}\le\frac{a+2b-3}{2}$; $\sqrt{c(a+8)}\le\frac{c+a+8}{2}$

$2\sqrt{c-5}=\sqrt{4(c-5)}\le\frac{4+c-5}{2}$

Suy ra: $M\le a+b+c+2$

Ta có: $a\le\frac{a^2+1}{2}$; $b\le\frac{b^2+4}{4}$; $c\le\frac{c^2+81}{18}$

Suy ra: $a+b+c\le\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{18}+6\le 12$

Suy ra : $M\le 14$

Giá trị lớn nhất của M là 14 (Khi $a=1,b=2,c=9$)

Câu 31. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Bình năm 2020-2021)*

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $3a^2+3b^2+8c^2=32$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+bc+ca$.

Lời giải

Với a,b là các số thực dương ta chứng minh được: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ (1)

Thật vậy: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}\Leftrightarrow\frac{a+b}{ab}\ge\frac{4}{a+b}$

$\Leftrightarrow(a+b)^2\ge 4ab\Leftrightarrow(a-b)^2\ge 0$ luôn đúng

Dấu bằng xảy ra khi $a=b$

Ta có: $xy \le \frac{(x+y)^2}{4} \le \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2xy} \ge 2$ (2) Dấu bằng xảy ra khi $x = y$.

$$Q = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{2xy} + \frac{5}{2xy}$$

Áp dụng (1) và (2) vào Q ta được: $Q \ge \frac{4}{(x+y)^2} + 2.5 \ge 4 + 10 = 14$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 2xy \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}. \\ x + y = 1 \end{cases}$

Vậy GTNN của Q là 14 khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Câu 32. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Bình toán chuyên năm 2020-2021)*

Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = (a-1)^3 + (b-1)^3 + (c-1)^3$.

Lời giải

Ta có : $(a-1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = a\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a - 1 \ge \frac{3}{4}a - 1$ (1)

(do $a \ge 0$)

Tương tự: $(b-1)^3 \ge \frac{3}{4}b - 1$ (2); $(c-1)^3 \ge \frac{3}{4}c - 1$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $T \ge \frac{3}{4}(a+b+c) - 3 = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 0,\ b = c = \frac{3}{2}$ hoặc $b = 0,\ a = c = \frac{3}{2}$

hoặc $c = 0,\ a = b = \frac{3}{2}$.

Vậy GTNN của T bằng $-\frac{3}{4}$ khi $a = 0,\ b = c = \frac{3}{2}$ hoặc $b = 0,\ a = c = \frac{3}{2}$ hoặc

$c = 0,\ a = b = \frac{3}{2}$.

Câu 33. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh năm 2020-2021)*

Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x^2+5y^2+4xy+3x+4y=27$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $M=x+2y$.

Lời giải

$x^2+5y^2+4xy+3x+4y=27 \Leftrightarrow (x+2y)^2+3(x+2y)+(y-1)^2=28$

$\Leftrightarrow \left(x+2y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{121}{4}-(y-1)^2$

Vậy $\left(x+2y+\dfrac{3}{2}\right)^2 \le \dfrac{121}{4} \Leftrightarrow \left|x+2y+\dfrac{3}{2}\right| \le \dfrac{11}{2} \Leftrightarrow -7 \le x+2y \le 4$

Vậy M lớn nhất là 4 khi $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$, M nhỏ nhất là -7 khi $\begin{cases} x=-9 \\ y=1 \end{cases}$

Câu 34. *(Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên năm 2020-2021)*

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+3b+5c=2020$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{3ab}{a+3b}+\dfrac{15bc}{3b+5c}+\dfrac{5ca}{5c+a}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương a và $3b$ ta có:

$$\frac{3ab}{a+3b} \le \frac{\left(\dfrac{a+3b}{2}\right)^2}{a+3b}=\frac{a+3b}{4}$$

CMTT ta có:

$$\frac{15bc}{3b+5c} \le \frac{3b+5c}{4};\ \frac{5ca}{5c+a} \le \frac{5c+a}{4}$$

Từ đó suy ra: $P \le \dfrac{2(a+3b+5c)}{4}=1010$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1010 khi và chỉ khi $a=3b=5c=\dfrac{2020}{3} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2020}{3} \\ b=\dfrac{2020}{9} \\ c=\dfrac{404}{3} \end{cases}$.

Câu 35. *(Trường chuyên tỉnh Sơn La năm 2020-2021)*

a) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bc}$.

b) Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}}>5.$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$.

Ta có $\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge\frac{4}{c\left(a+b\right)}$.

Mặt khác $\frac{4}{c(a+b)}\ge\frac{4}{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2}=1$

(vì $4c\left(a+b\right)\le\left(a+b+c\right)^2\Leftrightarrow c(a+b)\le\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2$*)*

Vậy $\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\ge 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $c=2,\ a=b=1$.

b) Đặt $S_1=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}}$

Xét biểu thức $S_2=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$.

Ta có $S_1+S_2=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}}+\frac{1}{\sqrt{120}+\sqrt{121}}$

$S_1+S_2=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+...+\sqrt{121}-\sqrt{120}=\sqrt{121}-1=10$

Mặt khác dễ dàng chứng minh được:

$\frac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k-1}}>\frac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k+1}},\ \forall k\ge 1,\ k\in N$

$\Rightarrow S_1>S_2$.

Vậy $S_1>5$,

hay $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{120}}>5$. *(đpcm).*

Câu 35. *(Trường chuyên tỉnh Hậu Giang năm 2020-2021)*

Cho ba số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=1+\frac{3}{xy+yz+xz}$.

Lời giải

Dễ thấy với mọi số thực dương a và b, ta có $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (*)

Áp dụng (*), với $a=1$ và $b=\dfrac{3}{xy+yz+xz}$, ta có $P\ge 2\sqrt{\dfrac{3}{xy+yz+xz}}$ (**)

Với các số thực $x,\ y,\ z,$ ta luôn có: $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+xz.$

Suy ra $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+xz)$ hay $\dfrac{3}{xy+yz+xz}\ge\dfrac{3^2}{(x+y+z)^2}$ (***)

Từ (**) và (***), ta suy ra $P\ge 2\sqrt{\dfrac{3^2}{(x+y+z)^2}}=\dfrac{6}{x+y+z}=\dfrac{6}{3}=2.$

$P=2\Leftrightarrow x=y=z=1.$

Vậy $P_{\min}=2$ là giá trị nhỏ nhất.

Câu 35. *(Trường chuyên tỉnh Hòa Bình năm 2020-2021)*

a) Cho các số thực *x, a, b, c* thay đổi, thỏa mãn: $\begin{cases}x+a+b+c=7\\ x^2+a^2+b^2+c^2=13\end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của *x*.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{3x^2-4x+8}{x^2+2}$

Lời giải

$x+a+b+c=7\ \Rightarrow$ a + b + c = 7 – x.

$x^2+a^2+b^2+c^2=13\ \Rightarrow a^2+b^2+c^2=13-x^2.$

Ta có: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow 3a^2+3b^2+3c^2-a^2-b^2-c^2-2ab-2ac-2bc\ge 0$

$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2)\ge (a+b+c)^2.$

Suy ra $3(13-x^2)\ge (7-x)^2$

$\Leftrightarrow 3(13-x^2)\ge 49-14x+x^2$

$\Leftrightarrow 4x^2-14x+10\le 0$

$\Leftrightarrow 1\le x\le\dfrac{5}{2}.$

$x=\dfrac{5}{2}$ khi $a=b=c=\dfrac{3}{2}$, $x=1$ khi $a=b=c=2$.

Vậy Max $x=\dfrac{5}{2}$ khi $a=b=c=\dfrac{3}{2}$

b) + Ta có: $P=\dfrac{3x^2-4x+8}{x^2+2}=\dfrac{2(x^2+2)+(x-2)^2}{x^2+2}=2+\dfrac{(x-2)^2}{x^2+2}\ge 2,\forall x$

$\Rightarrow P_{\min}=2$ khi và chỉ khi $x=2$

+ Ta có: $P=\dfrac{3x^2-4x+8}{x^2+2}=\dfrac{5(x^2+2)-2(x+1)^2}{x^2+2}=5-\dfrac{2(x+1)^2}{x^2+2}\le 5,\ \forall x$

$\Rightarrow P_{max} = 5$ khi và chỉ khi $x = -1$

ĐÁP ÁN CÁC BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC, CỰC TRỊ TRONG ĐỀ CHUYÊN MÔN TOÁN GIAI ĐOẠN 2009-2019

NĂM HỌC 2019-2020

Câu 1: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2019-2020]

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $4x^2+4y^2+17xy+5x+5y\ge 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=17x^2+17y^2+16xy$

Lời giải

Ta có: $4x^2+4y^2+17xy+5x+5y\ge 1 \Leftrightarrow 4\left(x+y\right)^2+9xy+5\left(x+y\right)\ge 1$

Đặt $t=x+y,\ t>0$, theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$xy\le \dfrac{\left(x+y\right)^2}{4}=\dfrac{t^2}{4}$. Do đó: $4t^2+\dfrac{9}{4}t^2+5t\ge 1\Rightarrow t\ge \dfrac{2\sqrt{2}-2}{5}$ hay $x+y\ge \dfrac{2\sqrt{2}-2}{5}$.

Ta có: $P=17x^2+17y^2+16xy=17\left(x+y\right)^2-18xy$

$$\ge 17\left(x+y\right)^2-18\frac{\left(x+y\right)^2}{4}=\frac{25}{4}\left(x+y\right)^2\ge \frac{25}{4}\left(\frac{2\sqrt{2}-2}{5}\right)^2=6-4\sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{5}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $6-4\sqrt{2}$

Câu 2: [TS10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội, 2019-2020]

Cho các số thực x, y thay đổi, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=xy\left(x-2\right)\left(y+6\right)+13x^2+4y^2-26x+24y+46$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}P&=xy\left(x-2\right)\left(y+6\right)+13x^2+4y^2-26x+24y+46\\&=\left(x^2-2x\right)\left(y^2+6y\right)+13\left(x^2-2x\right)+4\left(y^2+6y\right)+46\\&=\left[\left(x-1\right)^2-1\right]\left[\left(y+3\right)^2-9\right]+13\left[\left(x-1\right)^2-1\right]+4\left[\left(y+3\right)^2-9\right]+46\end{aligned}$$

Đặt $a=x-1,\ b=y+3$, khi đó:

$$\begin{aligned}P&=\left(a^2-1\right)\left(b^2-9\right)+13\left(a^2-1\right)+4\left(b^2-9\right)+46\\&=a^2b^2-9a^2-b^2+9+13a^2-13+4b^2-36+46\\&=4a^2+3b^2+a^2b^2+6\\&\ge 6\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1, y=-3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 6.

Câu 3: [TS10 Chuyên Tin Hà Nội, 2019-2020]

Cho a, b, c dương thỏa mãn: $ab+bc+ca+abc=4$

1) Chứng minh rằng: $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1$

2) Tìm giá trị lớn nhất: $P=\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+4}+\frac{1}{\sqrt{2(b^2+c^2)}+4}+\frac{1}{\sqrt{2(c^2+a^2)}+4}$.

Lời giải

1) Ta có:

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1$$
$$\Leftrightarrow (b+2)(c+2)+(a+2)(c+2)+(b+2)(a+2)=(a+2)(b+2)(c+2)$$
$$\Leftrightarrow ab+bc+ca+4(a+b+c)+12=abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+8$$
$$\Leftrightarrow 4=abc+ab+bc+ca.$$

Đẳng thức cuối cùng đúng theo giả thiết, các phép biến đổi là tương đương, do đó đẳng thức đã cho được chứng minh.

2) Với x, y dương ta có bất đẳng thức:

$$2(x^2+y^2)\ge (x+y)^2 \ (*)$$

$$\frac{1}{x+y}\le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \ (**)$$

Thật vậy:

$(*)\Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0$ (luôn đúng)

$(**)\Leftrightarrow \frac{x+y}{4xy}\ge \frac{1}{x+y}\Leftrightarrow (x+y)^2\ge 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0$ (luôn đúng)

Các bất đẳng thức (*), (**) xảy ra dấu "=" khi x = y.

Lần lượt áp dụng (*) và (**) ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+4}\le \frac{1}{a+b+4}=\frac{1}{(a+2)+(b+2)}\le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}\right)$$

Tương tự:

$$\frac{1}{\sqrt{2(b^2+c^2)}+4}\le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right); \quad \frac{1}{\sqrt{2(c^2+a^2)}+4}\le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c+2}+\frac{1}{a+2}\right);$$

Cộng theo vế ta được:

$$P\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right)=\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}.$$

Dâu "=" xảy ra khi a = b = c

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$

Câu 4: [TS10 Chuyên Toán Hà Nội, 2019-2020]

Cho $K = ab + 4ac - 4bc$ với $a, b, c \geq 0$ và a + b + 2c = 1.

1) Chứng minh rằng: $K \geq \frac{1}{2}$

2) Tìm giá trị lớn nhất của K.

Lời giải

1) Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$4bc \leq 2\left(\frac{b+2c}{2}\right)^2 \leq 2\left(\frac{a+b+2c}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow -4bc \geq -\frac{1}{2}$$

Mặt khác: $a, b, c \geq 0 \Rightarrow K = ab + 4ac - 4bc \geq -4bc \geq -\frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 0, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}$.

Cách khác:

Ta có:

$$K = ab + 4c(a-b) = ab + 2(1-a-b)(a-b)$$
$$= ab + 2(a-b) - 2(a^2 - b^2)$$
$$= 2b^2 + (a-2)b + 2a - 2a^2$$

Do đó: $2b^2 + (a-2)b + 2a - 2a^2 - K = 0 \; (*)$

Để tồn tại K thì phương trình (*) Phải có 2 nghiệm:

$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow (a-2)^2 - 4.2.(2a - 2a^2 - K) \geq 0$

$\Leftrightarrow 8K \geq 20a - 17a^2 - 4.$

Vì $a, b, c \geq 0$ và $a + b + 2c = 1 \Rightarrow 0 \leq a \leq 1$. Do đó:

$2a - 17a^2 = a(20 - 17a) \geq a(20 - 17.1) = 3a \geq 0$

Do đó $8K \geq -4 \Rightarrow K \geq -\frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 0, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}$.

2) Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a(b+2c) \leq \left(\frac{a+b+2c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Mặt khác:

$$a, b, c \geq 0 \Rightarrow K = ab + 4ac - 4bc \geq ab + 4ac \leq 2ab + 4ac = 2a(b+2c) \leq \frac{(a+b+2c)^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$a = b + 2c, a + b + 2c = 1, bc = 0, ab = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 0, c = \frac{1}{4}$$

Vậy giá trị lớn nhất của K là $\frac{1}{2}$

Câu 5: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2019-2020]

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} 0 < a, b, c < \frac{1}{2} \\ 2a + 3b + 4c = 3 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{a(3b+4c-2)} + \frac{9}{b(4a+8c-3)} + \frac{8}{c(2a+3b-1)}$$

Lời giải

Ta có:

$$P = \frac{2}{a(3b+4c-2)} + \frac{9}{b(4a+8c-3)} + \frac{8}{c(2a+3b-1)}$$

$$= \frac{2}{a(3-2a-2)} + \frac{9}{b(6-6b-3)} + \frac{8}{c(3-4c-1)}$$

$$= \frac{2}{a(1-2a)} + \frac{3}{b(1-2b)} + \frac{4}{c(1-2c)}$$

$$= \frac{2a}{a^2(1-2a)} + \frac{3b^2}{b^2(1-2b)} + \frac{4c}{c^2(1-2c)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a^2(1-2a) \le \left(\frac{a+a+1-2a}{3}\right)^2 = \frac{1}{27}$$

Tương tự: $b^2(1-2b) \le \frac{1}{27}$; $c^2(1-2c) \le \frac{1}{27}$

Suy ra: $P \ge 27(2a+3b+4c) = 81$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 81.

Câu 6: [TS10 Chuyên Hòa Bình, 2019-2020]

Cho hai số dương a, b thỏa mãn: a + b = 4ab. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{4b^2+1} + \frac{b}{4a^2+1} \ge \frac{1}{2}$$

Lời giải

Ta có:

$$a + b = 4ab \le (a+b)^2 \Leftrightarrow (a+b)[a+b-1] \ge 0 \Leftrightarrow a+b \ge 1 (a+b>0)$$

Lại có:

$$\frac{a}{4b^2+1} = a - \frac{4ab^2}{4b^2+1} \ge a - \frac{4ab^2}{4b} = a - ab$$

$$\frac{b}{4a^2+1} = b - \frac{4a^2b}{4a^2+1} \ge b - \frac{4a^2b}{4a} = a - ab$$

Do đó: $\dfrac{a}{4b^2+1}+\dfrac{b}{4a^2+1}\ge (a+b)-2ab=(a+b)-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{1}{2}(a+b)\ge \dfrac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=\dfrac{1}{2}$

Câu 7: [TS10 Chuyên Hưng Yên, 2019-2020]

Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2\le 3y$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{(y+2)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\ge \frac{8}{(a+b)^2}\quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta được:

$$P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{\left(\frac{y}{2}+1\right)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}\ge \frac{8}{\left(x+\frac{y}{2}+2\right)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}\ge \frac{64}{\left(x+\frac{y}{2}+z+5\right)^2}.$$

Mặt khác:

$$x+z\le \sqrt{2(x^2+z^2)}\le \sqrt{2(3y-y^2)}\le \frac{2+3y-y^2}{2}.$$

$$P\ge \frac{64}{\left(6+2y-\frac{1}{2}y^2\right)^2}=\frac{64}{\left[8-\frac{1}{2}(y-2)^2\right]^2}\ge 1$$

Dấu "=" xảy ra khi $(x,y,z)=(1,2,1)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1.

Câu 8: [TS10 Chuyên Hà Nam, 2019-2020]

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+ca+a^2}$

Lời giải

Ta dễ dàng chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge \frac{9}{x+y+z}\ (\text{với } x,y,z>0)\quad (*)$$

Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9$

Áp dụng AM – GM ta được:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 3\sqrt[3]{abc}.\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}=9$$

Vậy bất đẳng thức (*) được chứng minh, dấu "=" xảy ra khi x = y = z.

Sử dụng bất đẳng thức (*) ta được:

$$1 \geq \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} \geq \frac{9}{a+b+c+3} \Leftrightarrow a+b+c+3 \geq 9 \Leftrightarrow a+b+c \geq 6$$

Đặt $Q=\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^3}{c^2+ca+a^2}$

Ta có:

$$\begin{aligned}P-Q&=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3-c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3-a^3}{c^2+ca+a^2}\\&=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}+\frac{(b-c)(b^2+bc+c^2)}{b^2+bc+c^2}+\frac{(c-a)(c^2+ca+a^2)}{c^2+ca+a^2}\\&=(a-b)+(b-c)+(c-a)\\&=0\end{aligned}$$

Do đó: P = Q

Mặt khác: $x^2-xy+y^2 \geq \frac{1}{3}(x^2+xy+y^2)\ (**)$

Thật vậy:

$$x^2-xy+y^2 \geq \frac{1}{3}(x^2+xy+y^2) \Leftrightarrow 3x^2-3xy+3y^2 \geq x^2+xy+y^2 \Leftrightarrow 2(x-y)^2 \geq 0$$

Sử dụng (**) ta được:

$$\begin{aligned}P+Q&=\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\\&=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}+\frac{(b+c)(b^2-bc+c^2)}{b^2+bc+c^2}+\frac{(c+a)(c^2-ca+a^2)}{c^2+ca+a^2}\end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{3}(a+b)+\frac{1}{3}(b+c)+\frac{1}{3}(c+a)$$

$$=\frac{2}{3}(a+b+c) \geq \frac{2}{3}.6=4$$

Mà $P=Q \Rightarrow P \geq 2$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 2

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2.

Câu 9: [TS10 Chuyên Phan Bội Châu, 2019-2020]

Cho các số dương a, b, c dương thỏa mãn $abc=a+b+c+2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}$

Lời giải.

Từ $abc=a+b+c+2$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+1)(c+1)=(a+1)(b+1)+(b+1)(c+1)+(c+1)(a+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1$$

Đặt $\frac{1}{a+1}=x, \frac{1}{b+1}=y, \frac{1}{c+1}=z \Rightarrow \begin{cases} x,y,z>0 \\ x+y+z=1. \end{cases}$

Khi đó: $a=\frac{1-x}{x}=\frac{y+z}{x}; b=\frac{z+x}{y}; c=\frac{x+y}{z}$

Nên $P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{x}{y+z}.\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}.\frac{z}{x+y}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}.\frac{x}{y+z}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{y}{y+z}.\frac{x}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}.\frac{y}{x+y}}+\sqrt{\frac{x}{x+y}.\frac{z}{y+z}}\right)$$

$$\le \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{y}{y+z}+\frac{x}{z+x}\right)+\left(\frac{z}{z+x}+\frac{y}{x+y}\right)+\left(\frac{x}{x+y}+\frac{z}{y+z}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}\right)+\left(\frac{y}{y+z}+\frac{z}{y+z}\right)+\left(\frac{z}{z+x}+\frac{x}{z+x}\right)\right]=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x=y=z$ hay $a=b=c$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ khi a = b = c = 2.

Câu 10: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2019-2020]

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $5\left(x^2+y^2+z^2\right)-9x\left(y+z\right)-18yz=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q=\frac{2x-y-z}{y+z}$.

Lời giải

Ta có:

$$5\left(x^2+y^2+z^2\right)-9x\left(y+z\right)-18yz\le 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-9x\left(y+z\right)+5\left(y+z\right)^2-28yz\le 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-9x\left(y+z\right)+5\left(y+z\right)^2\le 7.4yz\le 7\left(y+z\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-9x\left(y+z\right)-2\left(y+z\right)^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{x}{y+z}\right)^2-9.\frac{x}{y+z}-2\le 0$$

Đặt: $t=\frac{x}{y+z}\ \left(t>0\right)$ khi đó:

$$5t^2-9t-2\le 0 \Leftrightarrow \left(5t+1\right)\left(t-2\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow t\le 2 \quad \left(\text{do } 5t+1>0\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y+z}\le 2$$

Ta có: $Q=\dfrac{2x-y-z}{y+z}=2.\dfrac{x}{y+z}-1\le 2.2-1=3$

Dấu "=" xảy ra khi $y=z=\dfrac{x}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của Q là 3.

Câu 11: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2019-2020]

Cho x, y, z không âm thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm GTLN. GTNN của biểu thức

$M=\sqrt{x^2-6x+25}+\sqrt{y^2-6y+25}+\sqrt{z^2-6z+25}$

Lời giải

Ta có:

$$M=\sqrt{x^2-6x+25}+\sqrt{y^2-6y+25}+\sqrt{z^2-6z+25}$$
$$=\sqrt{(3-x)^2+16}+\sqrt{(3-y)^2+16}+\sqrt{(3-z)^2+16}$$

Đặt $a=3-x,b=3-y,c=3-z,$ Khi đó: $\begin{cases}a+b+c=6\\0\le a,b,c\le 3\end{cases}$

$$M=\sqrt{a^2+16}+\sqrt{b^2+16}+\sqrt{c^2+16}$$

Tìm GTNN:

Theo bất đẳng thức Minkowski ta có:

$$M=\sqrt{a^2+16}+\sqrt{b^2+16}+\sqrt{c^2+16}\ge\sqrt{(a+b+c)^2+(4+4+4)^2}=6\sqrt{5}$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 2

Tìm GTLN

Sử dụng phương pháp UCT với điều kiện $0\le a\le 3$ ta được $\sqrt{a^2+16}\le\dfrac{a+12}{3}\ (*)$

Thật vậy:

$(*)\Leftrightarrow 9(a^2+16)\le(a+12)^2\Leftrightarrow 8a^2-24a\le 0\Leftrightarrow a(a-3)\le 0$ (đúng)

Hoàn toàn tương tự và suy ra: $M\le 14$

Đẳng thức xảy ra khi $(a,b,c)=(0,3,3)$ và các hóa vị.

Câu 12: [TS10 Chuyên KHTN, 2019-2020]

Cho x, y,z là các số dương thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\ge\frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^3\qquad(1)$$

Lời giải

Ta có: $1+x^2=xy+yz+zx+x^2=(x+y)(x+z)$

Tương tự: $1+y^2=(x+y)(y+z);1+z^2=(x+z)(y+z)$

Do đó:

$$VT_{(1)}=\frac{1}{(x+y)(x+z)}+\frac{1}{(x+y)(y+z)}+\frac{1}{(x+z)(z+y)}=\frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 \le (x+y+z)\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\right)$$

$$=(x+y+z)\left[\frac{x}{(x+y)(y+z)}+\frac{y}{(x+y)(y+z)}+\frac{z}{(x+z)(z+y)}\right]$$

$$=\frac{2(x+y+z)(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$=\frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Suy ra:

$$VP_{(1)} \le \frac{4(x+y+z)}{3(x+y)(y+z)(z+x)}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right).$$

Như thế để chứng minh bất đẳng thức đã cho ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{3}{2} \qquad (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}\right)$$

Tương tự: $\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y}+\frac{y}{y+z}\right)$; $\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+x}+\frac{z}{y+z}\right)$

Cộng theo vế 3 bất đẳnng thức trên ta được bất đẳng thức (2). Bài toán được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 13: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2019-2020]

Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn $[0;2]$ thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=3$.

a) Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2<6$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=x^3+y^3+z^3-3xyz$

Lời giải

a) Ta có:

$$(2-x)(2-y)(2-z)\ge 0 \Rightarrow 8-4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)-xyz\ge 0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 \le x^2+y^2+z^2+8-4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)-xyz$$

$$=(x+y+z)^2-4(x+y+z)+8-xyz$$

$$=9-4.3+8-xyz=5-xyz\le 5<6$$

b) Ta có:

$$P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$
$$= 3\left[\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + yz + zx)\right]$$
$$= \frac{3}{2}\left[3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2\right]$$
$$\le \frac{3}{2}[3.5 - 9]$$
$$= 9$$

Dấu "=" xảy ra khi $(x, y, z) = (2, 1, 0)$ và các hoán vị.

Câu 14: [TS10 Chuyên Hòa Bình, 2019-2020]

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $xy + yz + 4zx = 32$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + 16y^2 + 16z^2$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{x^2}{2} + 8y^2 \ge 4xy$$
$$\frac{x^2}{2} + 8z^2 \ge 4xz$$
$$8y^2 + 8z^2 \ge 16yz$$

Cộng theo vế ta được: $P = x^2 + 16y^2 + 16z^2 \ge 4(xy + xz + 4yz) = 128$

Dấu "=" xảy ra khi x = 4y = 4z , thay và điều kiện ta được: $x = \frac{8\sqrt{6}}{3}; y = z = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

Câu 15: [TS10 Chuyên Quốc Học Huế, 2019-2020]

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn xyz = 2. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{2x^2 + y^2 + 5} + \frac{2y}{6y^2 + z^2 + 6} + \frac{4z}{3z^2 + 4x^2 + 16} \le \frac{1}{2}$$

Lời giải

Ta có:

+) $2x^2 + y^2 + 5 = x^2 + y^2 + x^2 + 1 + 4 \ge 2xy + 2x + 4$

$$\Rightarrow \frac{x}{2x^2 + y^2 + 5} \le \frac{x}{2xy + 2x + 4} = \frac{x}{2(xy + x + 2)}$$

+) $6y^2 + z^2 + 6 = 4y^2 + z^2 + 2y^2 + 2 + 4 \ge 4yz + 4y + 4$

$$\Rightarrow \frac{2y}{6y^2 + z^2 + 6} \le \frac{2y}{4yz + 4y + 4} = \frac{y}{2(yz + y + 1)}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}VT &\le \frac{x}{2(xy+x+2)}+\frac{y}{2(yz+y+1)}+\frac{z}{zx+2z+2}\\ &=\frac{x}{2(xy+x+xyz)}+\frac{y}{2(yz+y+1)}+\frac{yz}{xyz+2yz+2y}\\ &=\frac{1}{2(yz+y+1)}+\frac{y}{2(yz+y+1)}+\frac{yz}{2(yz+y+1)}\\ &=\frac{yz+y+1}{2(yz+y+1)}\\ &=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra x = y = 1, z = 2.

Câu 16: [TS10 Chuyên Tin Hòa Bình, 2019-2020]

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn: $x+y\le 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2}$

Lời giải

Theo AM-GM ta có:

$$1\ge x+y\ge 2\sqrt{xy}\Rightarrow \sqrt{xy}\le \frac{1}{2}\Rightarrow xy\le \frac{1}{4}\Rightarrow \frac{1}{xy}\ge 4$$

Do đó:

$$P=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2}\ge \frac{2}{\sqrt{xy}}\sqrt{1+x^2y^2}=2\sqrt{\frac{1}{xy}+xy}$$

Suy ra:

$$P\ge 2\sqrt{\frac{1}{xy}+xy}=2\sqrt{\frac{1}{16xy}+xy+\frac{15}{16xy}}\ge 2\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{16xy}.xy}+\frac{15}{16xy}}$$

$$\Rightarrow P\ge 2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{15}{16}.4}=\sqrt{17}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{17}$

Câu 17: [TS10 Chuyên Tiền Giang, 2019-2020]

Cho hai số dương x, y thỏa mãn $2(x^3+y^3)+6xy(x+y-2)=(x+y)^2(xy+4)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)$

Lời giải

Ta có:

$$2(x^3+y^3)+6xy(x+y-2)=(x+y)^2(xy+4)$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y)^3-12xy=(x+y)^2(xy+4)$$

Đặt $a=x+y, b=xy\left(a,b>0\right)$ khi đó:

$2a^3-12b=a^2\left(b+4\right)\Leftrightarrow b\left(a^2+12\right)=2a^3-4a^2$

Do VT > 0 nên $2a^3-4a^2>0\Leftrightarrow 2a^2\left(a-2\right)>0\Leftrightarrow a>2$

Ta có:

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2+xy}{xy}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-1\right)=\frac{a^2}{2b}-\frac{1}{2}=\frac{a^4+12a^2}{4a^3-8a^2}-\frac{1}{2}$$

Ta sẽ chứng minh: $T\geq\frac{5}{2}$

Thật vậy: $T\geq\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{a^4+12a^2}{4a^3-8a^2}\geq 3\Leftrightarrow\frac{\left(a-6\right)^2a^2}{4a^2\left(a-2\right)}\geq 0$ (luôn đúng $\forall a>2$)

Dấu "=" xảy ra khi a = 6, b = 6

hay $x=3+\sqrt{3}, y=3-\sqrt{3}$ hoặc $x=3-\sqrt{3}, y=3+\sqrt{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{5}{2}$

Câu 18: [TS10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, 2019-2020]

Cho các số thực dương x, y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$$

Lời giải

Ta có:

$$P=\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}=\sqrt{\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2y^2}}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)^2}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}=\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$$

$$\Rightarrow P=\left(\frac{x^2+y^2}{xy}+2\right)+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}-2=\frac{\left(x+y\right)^2}{xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}-2$$

Đặt $t=\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$.Theo AM – GM thì: $x+y\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow t\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{t}\geq 2$

Khi đó:

$$P=\frac{1}{t^2}+t-2=\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}+\frac{1}{16t^2}\right)+\frac{15}{16t^2}-2$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{t}{2}.\frac{t}{2}.\frac{1}{16t^2}}+\frac{15}{16}.2^2-2$$

$$=3.\frac{1}{4}+\frac{15}{4}-2$$

$$=\frac{5}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{5}{2}$

Câu 19: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2019-2020]

Với x, y là các số thực thỏa mãn $1 \le y \le 2$ và $xy + 2 \ge 2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{x^2+4}{y^2+1}$

Lời giải.

Theo giải thiết ta có: $4xy + 8 \ge 8y.$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $4x^2 + y^2 \ge 4xy.$

Suy ra: $4x^2 + y^2 + 8 \ge 4xy + 8 \ge 8y.$

Do đó: $4\left(x^2+4\right) \ge 8 + 8y - y^2 = 4\left(y^2+1\right) + \left(5y+2\right)\left(2-y\right) \ge 4\left(y^2+1\right).$

Suy ra: $x^2 + 4 \ge y^2 + 1 \Rightarrow M = \frac{x^2+4}{y^2+1} \ge 1$

Dấu "=" xảy ra khi x = 2, y = 1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 1.

Câu 20: [TS10 Chuyên Hưng Yên, 2019-2020]

Với x, y là cá số thực thỏa mãn $\left(2+x\right)\left(y-1\right) = \frac{9}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$A = \sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2} + \sqrt{y^4 - 8y^3 + 24y^2 - 32y + 17}.$

Lời giải

Ta có:

$$A = \sqrt{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2} + \sqrt{y^4 - 8y^3 + 24y^2 - 32y + 17}$$

$$= \sqrt{1 + \left(x+1\right)^4} + \sqrt{1 + \left(y-2\right)^4}$$

Đặt $a = x + 1, b = y - 2$, ta được $A = \sqrt{1+a^4} + \sqrt{1+b^4}$

Từ giả thiết ta được: $\left(a+1\right)\left(b+1\right) = \frac{9}{4} \Leftrightarrow a + b + ab = \frac{5}{4}$

Theo AM – GM ta có:

$$\begin{cases} 4a^2 + 1 \ge 4a \\ 4b^2 + 1 \ge 4b \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 \ge a + b - \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$a^2 + b^2 \ge 2ab \Rightarrow \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right) \ge ab \qquad (2)$$

Cộng theo vế (1) và (2) ta được: $\frac{3}{2}\left(a^2+b^2\right) \ge a + b + ab - \frac{1}{2} = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow a^2 + b^2 \ge \frac{1}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Minicopski ta được:

$$A=\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}\ge\sqrt{(1+1)^2+\left(a^2+b^2\right)^2}=\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2+4}$$

$$\ge\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+4}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2},y=\frac{5}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{\sqrt{17}}{2}$

Câu 21: [TS10 Chuyên Bình Thuận, 2019-2020]

Cho các số dương x, y, z thỏa $xyz=\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{yz}{x^2(y+z)}+\frac{zx}{y^2(z+x)}+\frac{xy}{z^2(x+y)}\ge xy+yz+zx.$$

Dấu "=" xảy ra khi nào:

Lời giải

Ta có:

$$\frac{yz}{x^2(y+z)}+\frac{zx}{y^2(z+x)}+\frac{xy}{z^2(x+y)}\ge xy+yz+zx$$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}+\frac{\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}+\frac{\frac{1}{z^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}\Rightarrow abc=2$

Khi đó ta cần chứng minh:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$VT=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2}=VP\ \text{(đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z.

Câu 22: [TS10 Chuyên Hải Phòng, 2019-2020]

Cho $x;y;z$ là ba số thực dương thỏa mãn $x(x-z)+y(y-z)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^3}{x^2+z^2}+\frac{y^3}{y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+4}{x+y}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi $\frac{x^3}{x^2+z^2}=x-\frac{xz^2}{x^2+z^2}\ge x-\frac{xz^2}{2xz}=x-\frac{z}{2}$.

Tương tự $\dfrac{y^3}{y^2+z^2} \ge y - \dfrac{z}{2}$. Suy ra $P \ge x+y-z+\dfrac{x^2+y^2+4}{x+y}$.

Theo gt $z=\dfrac{x^2+y^2}{x+y} \Rightarrow P \ge x+y+\dfrac{4}{x+y} \ge 4$.

Vậy $P_{min}=4 \Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 23: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2019-2020]

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn abc = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{(1+a)^2+b^2+5}{ab+a+4}+\frac{(1+b)^2+c^2+5}{bc+b+4}+\frac{(1+c)^2+a^2+5}{ca+c+4}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{(1+a)^2+b^2+5}{ab+a+4}=\frac{a^2+b^2+2a+6}{ab+a+4}\ge\frac{2ab+2a+6}{ab+a+4}=\frac{2(ab+a+4)-2}{ab+a+4}=2-\frac{2}{ab+a+4}$$

Tương tự: $\dfrac{(1+b)^2+c^2+5}{bc+b+4}\ge 2-\dfrac{2}{bc+b+4}$; $\dfrac{(1+c)^2+a^2+5}{ca+c+4}\ge 2-\dfrac{2}{ca+c+4}$

Do đó: $P\ge 6-2\left(\dfrac{1}{ab+a+4}+\dfrac{1}{bc+b+4}+\dfrac{1}{ca+c+4}\right)=6-2Q$

Với x, y dương ta có:

$$(x-y)^2\ge 0\Leftrightarrow (x+y)^2\ge 4xy\Leftrightarrow \frac{1}{x+y}\le\frac{x+y}{4xy}\Leftrightarrow\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ (*)$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y.

Áp dụng (*) ta được: $\dfrac{1}{ab+a+4}=\dfrac{1}{(ab+a+1)+3}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{ab+a+1}+\dfrac{1}{3}\right)$.

Tương tự: $\dfrac{1}{bc+b+4}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{bc+b+1}+\dfrac{1}{3}\right)$; $\dfrac{1}{ca+c+4}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{ca+c+1}+\dfrac{1}{3}\right)$

Do đó:

$$Q\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)\Rightarrow 2Q=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$\Rightarrow P\ge 6-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$=6-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{abc+ac+c}+\frac{ac}{bc.ac+abc+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$=6-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{ca+c+1}+\frac{ac}{ca+c+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$=6-\frac{1}{2}.2$$

$$=5$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 5.

Câu 24: [TS10 Chuyên Lai Châu, 2019-2020]

Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{1}{4}\left(a+b+c\right)$$

Lời giải

Với x, y dương ta có:

$$\left(x-y\right)^2\ge 0\Leftrightarrow\left(x+y\right)^2\ge 4xy\Leftrightarrow\frac{1}{x+y}\le\frac{x+y}{4xy}\Leftrightarrow\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ (*)$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y.

Sử dụng (*) ta được: $\frac{ab}{a+b+2c}\le\frac{ab}{\left(a+c\right)+\left(b+c\right)}\le\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)$

Tương tự: $\frac{bc}{b+c+2a}\le\frac{bc}{4}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{a+c}\right);\ \frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{ca}{4}\left(\frac{1}{c+b}+\frac{1}{b+a}\right)$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}$$
$$\le\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)+\frac{bc}{4}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{a+c}\right)+\frac{ca}{4}\left(\frac{1}{c+b}+\frac{1}{b+a}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{ab+bc}{c+a}+\frac{ab+ca}{b+c}+\frac{bc+ca}{a+b}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{b\left(a+c\right)}{a+c}+\frac{a\left(b+c\right)}{b+c}+\frac{c\left(a+b\right)}{a+b}\right]$$
$$=\frac{1}{4}\left(a+b+c\right)\quad\left(\text{dpcm}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c

Câu 25: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2019-2020]

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $abc\ge 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}+\frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}}+\frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Lời giải

Ta có:

$$b+\sqrt{ac}\le b+\frac{a+c}{2}=\frac{a+2b+c}{2}\Rightarrow\sqrt{b+\sqrt{ac}}\le\sqrt{\frac{a+2b+c}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}\ge\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a+2b+c}}\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}\ge\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a+2b+c}}=\frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{4\left(a+2b+c\right)}}\ge\frac{4\sqrt{2}a}{a+2b+c+4}$$

Mặt khác:

$$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\ge 3\Rightarrow\frac{4}{3}\left(a+b+c\right)\ge 4\Rightarrow\frac{4\sqrt{2}a}{a+2b+c+4}\ge\frac{12\sqrt{2}a}{7a+10b+7c}$$

Do đó:

$$VT \ge 12\sqrt{2}\left(\frac{a}{7a+10b+7c}+\frac{b}{7b+10c+7a}+\frac{c}{10a+7b+7c}\right)$$

$$\ge 12\sqrt{2}\frac{(a+b+c)^2}{7(a^2+b^2+c^2)+17(ab+bc+ca)}$$

Mặt khác:

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca \Rightarrow 7(a^2+b^2+c^2)+17(ab+bc+ca) \le 8(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{12\sqrt{2}(a+b+c)^2}{7(a^2+b^2+c^2)+17(ab+bc+ca)} \ge \frac{12\sqrt{2}(a+b+c)^2}{8(a+b+c)^2}=\frac{3}{\sqrt{2}}\ (dpcm)$$

Dấu “=” xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 26: [TS10 Chuyên Tuyên Quang, 2019-2020]

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=4$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}+\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b}+3\sqrt{c}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c}+3\sqrt{a}}.$$

Lời giải

Ta có:

$$P=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}+\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b}+3\sqrt{c}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c}+3\sqrt{a}}$$

$$=\frac{a^2}{a+3\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{b+3\sqrt{bc}}+\frac{c^2}{c+3\sqrt{ac}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$P=\frac{a^2}{a+3\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{b+3\sqrt{bc}}+\frac{c^2}{c+3\sqrt{ac}}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})}$$

Mặt khác theo AM-GM: $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \le \frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}=a+b+c$

Do đó: $P \ge \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{4}=1$

Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c=\frac{4}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1.

Câu 27: [TS10 Chuyên Hà Nam, 2019-2020]

Cho các số dương a, b, c. Chứng minh: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a+b+c}{\sqrt{3}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \ge 4$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$VT=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{ca}+\frac{a+b+c}{\sqrt{3}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}+\frac{\sqrt{ab+bc+ca}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+2+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\right)+\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}+2$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số ta được:

$$VT\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}.\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}.\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}}+\frac{1}{2}+2$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+2=4\ (dpcm)$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

Câu 28: [TS10 Chuyên Phú Yên, 2019-2020]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{a^2+1}\ge 2$$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Minicopski ta được:

$$a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{a^2+1}=\sqrt{(ab)^2+a^2}+\sqrt{(bc)^2+b^2}+\sqrt{(ca)^2+c^2}$$

$$\ge\sqrt{(ab+bc+ca)^2+(a+b+c)^2}\ge\sqrt{(ab+bc+ca)^2+3(ab+bc+ca)}$$

$$=\sqrt{1+3}=2\,(dpcm)$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 29: [TS10 Chuyên Cao Bằng, 2019-2020]

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện a+ b + c = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $R=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

Tương tự: $\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2}$; $\frac{c}{1+a^2}=c-\frac{ca}{2}$

Cộng theo vế 3 bất đẳng trên ta được:

$$R=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge(a+b+c)-\frac{ab+bc+ca}{2}$$

$$\ge(a+b+c)-\frac{(a+b+c)^2}{6}=3-\frac{3^2}{6}=\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của R là $\frac{3}{2}$

Câu 30: [TS10 Chuyên Nam Định, 2019-2020]

Cho x, y, z là số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x+y+z=\frac{3}{2}$. Chứng minh rằng: $x+2xy+4xyz\le 2$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$x+2xy+4xyz=x+x.4y\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

$$\le x+x.\left(y+z+\frac{1}{2}\right)^2=x+x\left(\frac{3}{2}-x+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=x+x(2-x)^2=x-2+x(2-x)^2+2$$

$$=(x-2)(1+x^2-2x)+2$$

$$=(x-2)(x-1)^2+2$$

Do $x+y+z=\frac{3}{2}\Rightarrow 0<x<2\Rightarrow x-2<0$. Vì thế:

$x+2xy+4xyz\le(x-2)(x-1)^2+2\le 2$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi $x=1, y=\frac{1}{2}, z=0$

Câu 31: [TS10 Chuyên Bình Định, 2019-2020]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}$

Lời giải.

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức phụ sau:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Thật vậy: $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

Lại theo BĐT AM-GM ta có:

$$abc=\sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ca}\le\frac{(a+b)}{2}.\frac{(b+c)}{2}.\frac{(c+a)}{2}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}$$

Suy ra: $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$$\ge (a+b+c)(ab+bc+ca)-\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}$$

Suy ra đpcm: $(a+b)(b+c)(c+a)\ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$$\Rightarrow ab+bc+ca\le \frac{9}{a+b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM dạng cộng mẫu số ta có:

$$\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\ge \frac{9}{3(a+b+c)}=\frac{3}{a+b+c}\ge \frac{ab+bc+ca}{3}$$

Lại có: $(ab+bc+ca)^2\ge 3(ab^2c+a^2bc+abc^2)=3abc(a+b+c)$

$$\Rightarrow \frac{9^2}{(a+b+c)^2}\ge 3abc(a+b+c)\Leftrightarrow \frac{1}{abc}\ge \frac{(a+b+c)^2}{27}\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\ge \frac{a+b+c}{3}$$

Suy ra: $P=\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\ge \frac{a+b+c}{3}+\frac{3}{a+b+c}\ge 2$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}(a+b)(b+c)(c+a)=8\\ a=b=c\\ \frac{3}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{3}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2 khi a = b = c = 1.

Câu 32: [TS10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, 2019-2020]

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}$$

Lời giải

Ta có:

$$a^2-ab+3b^2+1=(a^2-2ab+b^2)+ab+(b^2+1)+b^2$$

$$=(a-b)^2+ab+(b^2+1)+b^2\ge b^2+ab+2b=b(a+b+2)$$

$$\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge \sqrt{b(a+b+1)}\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}\le \frac{1}{\sqrt{b(a+b+1)}}$$

Tương tự: $\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}\le \frac{1}{\sqrt{c(b+c+2)}}$; $\frac{1}{\sqrt{c^2-ac+3a^2+1}}\le \frac{1}{\sqrt{a(c+a+2)}}$

Với x, y dương ta có:

$$\left(x-y\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left(x+y\right)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \le \frac{x+y}{4xy} \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \ (*)$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y.

Cộng theo vế và sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$P \le \frac{1}{\sqrt{b(a+b+2)}} + \frac{1}{\sqrt{c(b+c+2)}} + \frac{1}{\sqrt{a(c+a+2)}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4b(a+b+2)}} + \frac{2}{\sqrt{4c(b+c+2)}} + \frac{2}{\sqrt{4a(c+a+2)}}$$

$$\overset{AM-GM}{\le} \left(\frac{1}{4b}+\frac{1}{a+b+2}\right) + \left(\frac{1}{4c}+\frac{1}{b+c+2}\right) + \left(\frac{1}{4a}+\frac{1}{c+a+2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{c+a+2}\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức (*) ta được:

$$P \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\le \frac{3}{4} + \left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{4} + \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]$$

$$\le \frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8} = \frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Vậy giá trị nhỏ là P là $\frac{3}{2}$.

Câu 33: [TS10 Chuyên Tây Ninh, 2019-2020]

Chứng minh $\left(a+b+c\right)^3 + 9abc \ge 4\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)$ với x, y, z là các số thực không âm. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Theo bất đẳng thức Schur với a, b, c là số thực không âm thì:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \ge 0$$

Biến đổi ta được hệ quả:

$$a^3+b^3+c^3+3abc \ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$$

Mặt khác ta có đẳng thức: $\left(a+b+c\right)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

Khi đó ta có: $\left(a+b+c\right)^3 + 9abc = a^3+b^3+c^3+9abc+3(a+b)(b+c)(c+a)$

Do đó: $VT \ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+9abc+3(a+b)(b+c)(c+a)$

Ta là có 2 đẳng thức:

+) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+9abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

+) $abc+(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Do đó:

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+9abc+3(a+b)(b+c)(c+a)\ge 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

Câu 34: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2019-2020]

Cho 3 số dương x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{xy}{(2x+z)(2y+z)}}+\sqrt{\frac{yz}{(2y+x)(2z+x)}}+\sqrt{\frac{zx}{(2z+y)(2x+y)}}$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovski ta được:

$$(2x+z)(2y+z)=(x+x+z)(y+z+y)\ge\left(\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}\right)^2$$

Do đó:

$$\sqrt{\frac{xy}{(2x+z)(2y+z)}}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{(2x+z)(2y+z)}}\le\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)^2}}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}$$

Tương tự: $\sqrt{\dfrac{yz}{(2y+x)(2z+x)}}\le\dfrac{\sqrt{yz}}{\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}};\sqrt{\dfrac{zx}{(2z+y)(2x+y)}}\le\dfrac{\sqrt{zx}}{\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}}$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta được: $P\le\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}}{\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}}=1$

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1.

Câu 35: [TS10 Chuyên Bình Phước, 2019-2020]

1) Cho x, y là các số dương thỏa mãn $xy\le 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\le\frac{2}{1+\sqrt{xy}}$$

2) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $(x+y)^3+4xy\le 12$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}+2018xy$

Lời giải

1) Ta có:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\le\frac{2}{1+\sqrt{xy}}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+\sqrt{xy}}\right)+\left(\frac{1}{1+y}-\frac{1}{1+\sqrt{xy}}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\sqrt{xy}-1-x}{(1+x)\left(1+\sqrt{xy}\right)}+\frac{1+\sqrt{xy}-1-y}{(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{xy}-x\right)(1+y)+\left(\sqrt{xy}-y\right)(1+x)}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)(1+y)+\sqrt{y}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)(1+x)}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left[\sqrt{x}+y\sqrt{x}-\sqrt{y}-x\sqrt{y}\right]}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left[\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+\sqrt{xy}\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\right]}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left[\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}-1\right)\right]}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{xy}-1\right)}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0\ \text{(đúng } \forall xy\le 1\text{)}\qquad(1)$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = 1.

Bất đẳng thưc (1) đúng các phép biến đổi là tương đương nên bài toán được chứng minh.

2) Sử dụng AM-GM ta có:

$$12\ge(x+y)^3+4xy\ge\left(2\sqrt{xy}\right)^3+4xy=8xy\sqrt{xy}+4xy$$

Đặt $\sqrt{xy}=t\ (t>0)$, khi đó:

$$8t^3+4t^2-12\le 0\Leftrightarrow 2t^3+t^2-3\le 0\Leftrightarrow 2t^3-2t^2+3t^2-3\le 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2(t-1)+3(t-1)(t+1)\le 0\Leftrightarrow(t-1)\left(2t^2+3t+3\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow t\le 1$$

Áp dụng bất đẳng thức ở ý 1 ta có:

$$P=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+2018xy\le\frac{2}{1+\sqrt{xy}}+2018xy=\frac{2}{1+t}+2018t^2$$

Ta sẽ chứng minh: $\frac{2}{1+t}+2018t^2\le 2019\ (*)$

Thật vậy:

$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{1+t}-1\right)+2018\left(t^2-1\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-t}{1+t}+2018(t-1)(t+1)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (1-t)\left(\frac{1}{1+t}+2018(t+1)\right)\le 0 \text{(đúng do } 0<t\le 1\text{)}$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = 1.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 2019.

Câu 36: [TS10 Chuyên Đắc Lắc, 2019-2020]

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3.$ Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3}{a+2b}+\frac{b^3+c^3}{b+2c}+\frac{c^3+a^3}{c+2a}\ge 2$$

Lời giải.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

+) $$\frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}=\frac{a^4}{a^2+2ab}+\frac{b^4}{b^2+2bc}+\frac{c^4}{c^2+2ca}$$

$$\ge \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}\ge \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=\frac{3}{2}$$

+) $$\frac{b^3}{a+2b}+\frac{c^3}{b+2c}+\frac{a^3}{c+2a}=\frac{b^4}{ab+2b^2}+\frac{c^4}{bc+2c^2}+\frac{a^4}{ca+2a^2}$$

$$\ge \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{ab+bc+ca+2\left(a^2+b^2+c^2\right)}\ge \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=\frac{3}{2}$$

Cộng theo vế ta được: $\frac{a^3+b^3}{a+2b}+\frac{b^3+c^3}{b+2c}+\frac{c^3+a^3}{c+2a}\ge 2$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{\frac{2}{3}}$

Câu 37: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2019-2020]

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x\ge 3; y\ge 3.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=21\left(x+\frac{1}{y}\right)+3\left(y+\frac{1}{x}\right).$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$T=21\left(x+\frac{1}{y}\right)+3\left(y+\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{7y}{3}+\frac{21}{y}\right)+\frac{62}{3}x+\frac{2}{3}y$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{x}{3}.\frac{3}{x}}+2\sqrt{\frac{7y}{3}.\frac{21}{y}}+\frac{62}{3}.3+\frac{2}{3}.3$$

$$=2+2.7+62+2$$

$$=80$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = 3.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 80.

NĂM HỌC 2018-2019

Câu 38: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2018-2019]

Cho a, b, c là ba số thức dương thỏa mãn điều kiện : $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{\left(5a^2+2ab+2b^2\right)}+\frac{1}{27}\geq\frac{2}{\sqrt{27.\left(5a^2+2ab+2b^2\right)}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}\leq\frac{\sqrt{27}}{2}.\left(\frac{1}{5a^2+2ab+2b^2}+\frac{1}{27}\right)$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}\leq\frac{\sqrt{27}}{2}\left(\frac{1}{5b^2+2bc+2c^2}+\frac{1}{27}\right)\quad;\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}\leq\frac{\sqrt{27}}{2}\left(\frac{1}{5c^2+2ca+2c^2}+\frac{1}{27}\right)$$

$$\Rightarrow P\leq\frac{\sqrt{27}}{2}.\left(\frac{1}{\left(5a^2+2ab+2b^2\right)}+\frac{1}{\left(5b^2+2bc+2c^2\right)}+\frac{1}{\left(5c^2+2ca+2a^2\right)}+\frac{1}{9}\right)$$

Sử dụng BĐT $\frac{1}{x+y+z}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ ta có:

$$\frac{1}{\left(5a^2+2ab+2b^2\right)}=\frac{1}{3a^2+\left(2ab+a^2\right)+\left(a^2+2b^2\right)}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{2ab+a^2}+\frac{1}{a^2+2b^2}\right)$$

$$\leq\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{9}.\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{1}{9}.\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{5}{9a^2}+\frac{2}{9ab}+\frac{2}{9b^2}\right)$$

Ta lại có : $\frac{2}{9ab} \overset{AM-GM}{\le} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{5a^2+2ab+2b^2} \le \frac{1}{9}.\left(\frac{5}{9a^2}+\frac{1}{9a^2}+\frac{1}{9a^2}+\frac{2}{9b^2}\right)=\frac{1}{9}.\left(\frac{2}{3a^2}+\frac{1}{3b^2}\right)$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{1}{5b^2+2bc+2c^2} \le \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3b^2}+\frac{1}{3c^2}\right); \ \frac{1}{5c^2+2ca+2a^2} \le \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3c^2}+\frac{1}{3a^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5a^2+2ab+b^2}+\frac{1}{5b^2+2bc+2c^2}+\frac{1}{5c^2+2ca+2a^2}$$

$$\le \frac{1}{9}.\left(\frac{2}{3a^2}+\frac{1}{3b^2}\right)+\frac{1}{9}.\left(\frac{2}{3b^2}+\frac{1}{3c^2}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3c^2}+\frac{1}{3a^2}\right)=\frac{1}{9}.\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow P \le \frac{\sqrt{27}}{2}.\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$

Vậy $P_{max}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 39: [TS10 Chuyên Trà Vinh, 2018-2019]

Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=2$.

Chứng minh: $\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{2}{y^2+z^2}+\frac{2}{z^2+x^2} \le \frac{x^3+y^3+z^3}{2xyz}+3$.

Lời giải

Vì $x, y, z>0$; $x^2+y^2+z^2=2$ nên:

$$\frac{2}{x^2+y^2}+\frac{2}{y^2+z^2}+\frac{2}{z^2+x^2} \le \frac{x^3+y^3+z^3}{2xyz}+3 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2+x^2} \le \frac{x^2}{2yz}+\frac{y^2}{2zx}+\frac{z^2}{2xy}+3$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{z^2}{x^2+y^2}+1+\frac{x^2}{y^2+z^2}+1+\frac{y^2}{z^2+x^2} \le \frac{x^2}{2yz}+\frac{y^2}{2zx}+\frac{z^2}{2xy}+3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2+z^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2} \le \frac{x^2}{2yz}+\frac{y^2}{2zx}+\frac{z^2}{2xy} \qquad (2)$$

Lại có: $(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \ge 2xy \Leftrightarrow \frac{z^2}{x^2+y^2} \le \frac{z^2}{2xy}$

Tương tự, ta có: $\dfrac{y^2}{z^2+x^2}\le\dfrac{y^2}{2zx};\ \dfrac{z^2}{x^2+y^2}\le\dfrac{z^2}{2xy}$

$\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng (đpcm)

Câu 40: [TS10 Chuyên Bình Phước, 2018-2019]

a) Cho $x;y$ là hai số thực dương. CMR: $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}\ge x+y$

b) Xét các số thực $a;b;c$ với $b\ne a+c$ sao cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ có 2 nghiệm thực $m;n$ thỏa mãn $0\le m,n\le 1$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức

$$M=\frac{(a-b)(2a-c)}{a(a-b+c)}$$

Lời giải

a) Với $x,y>0$ ta có:

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\ge x+y\Leftrightarrow x^3+y^3\ge xy(x+y)\Leftrightarrow(x+y)(x^2+xy+y^2)\Leftrightarrow xy(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x^2-xy+y^2\ge xy\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\ge 0\Leftrightarrow(x-y)^2\ge 0\quad\forall x,y$$

Vậy BĐT được chứng minh, dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x,y>0\end{cases}$

b) Theo đề bài ta có phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm m,n $(0\le m,n\le 1)\Rightarrow a\ne 0$

Áp dụng định lý Vi-et ta có: $\begin{cases}m+n=-\dfrac{b}{a}\\ mn=\dfrac{c}{a}\end{cases}$

$$\Rightarrow M=\frac{(a-b)(2a-c)}{a}=\frac{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(2-\frac{c}{a}\right)}{1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}=\frac{(1+m+n)(2-mn)}{1+m+n+mn}$$

Vì $2-mn\le 2;\quad mn\ge 0\Rightarrow M\le\dfrac{(1+m+n).2}{1+m+n}=2$

Vậy $\mathrm{Max}M=2\Leftrightarrow mn=0\Leftrightarrow c=0$

Ta lại có: $0\le m,n\le 1\Rightarrow m(n-1)+n(m-1)+mn-1\le 0\Leftrightarrow mn\le\dfrac{1}{3}(m+n+1)$

$$\Rightarrow M\ge\frac{m+n+1}{1+m+n+\frac{1}{3}(1+m+n)}=\frac{3}{4}$$

Vậy $\mathrm{Min}M=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow m=n=1\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=0\\a=c\end{cases}$

Câu 41: [TS10 Chuyên Hà Nam, 2018-2019]

Cho các số thực dương x, y, z sao cho phương trình $xy + yz + zx \ge x + y + z$.

Chứng minh rằng $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} + \dfrac{y^2}{\sqrt{y^3+8}} + \dfrac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \ge 1$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x^3+8} = \sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)} \le \dfrac{x+2+x^2-2x+4}{2} = \dfrac{x^2-x+6}{2}$

Tương tự: $\sqrt{y^3+8} \le \dfrac{y^2-y+6}{2}$; $\sqrt{z^3+8} \le \dfrac{z^2-z+6}{2}$.

Suy ra:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \ge 2.\left(\frac{x^2}{x^2-x+6} + \frac{y^2}{y^2-y+6} + \frac{z^2}{z^2-z+6}\right). \ (*)$$

Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{u} + \dfrac{b^2}{v} + \dfrac{c^2}{w} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{u+v+w} \quad \forall a,b,c,u,v,w > 0 \ (1)$

Áp dụng (1) và (*) ta thu được:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \ge \frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18} \quad (2)$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4(xy+yz+zx) \ge 18-(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2+(x+y+z)+2(xy+yz+zx)-18 \ge 0 \ . \quad (3)$$

Lại do: $xy+yz+zx \ge x+y+z$ nên ta đi kiểm tra

$$(x+y+z)^2+3(x+y+z)-18 \ge 0$$

$\Leftrightarrow (x+y+z-3)(x+y+z+6) \ge 0$. (4)

Thật vậy ta có quan hệ: $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx) \ge 3(x+y+z)$ nên $x+y+z \ge 3$,

từ đó (4) đúng.

Từ (2), (3), (4) suy ra điều phải chứng minh.

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Câu 42: [TS10 Chuyên Lào Cai, 2018-2019]

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

Chứng minh rằng $3(a+b+c) \ge \sqrt{8a^2+1} + \sqrt{8b^2+1} + \sqrt{8c^2+1}$

Lời giải

Ta có:

$$18(a+b+c)=8(a+b+c)+(a+b+c)+9(a+b+c)$$

$$=\left(8a+\frac{1}{a}+9a\right)+\left(8b+\frac{1}{b}+9b\right)+\left(8c+\frac{1}{c}+9c\right)$$

$$=\frac{8a^2+1}{a}+9a+\frac{8b^2+1}{b}+9b+\frac{8c^2+1}{c}+9c$$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có:

$$\frac{8a^2+1}{a}+9a+\frac{8b^2+1}{b}+9b+\frac{8c^2+1}{c}+9c\geq 6\sqrt{8a^2+1}+6\sqrt{8b^2+1}+6\sqrt{8c^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 18(a+b+c)\geq 6\sqrt{8a^2+1}+6\sqrt{8b^2+1}+6\sqrt{8c^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 3(a+b+c)\geq \sqrt{8a^2+1}+\sqrt{8b^2+1}+\sqrt{8c^2+1}\text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 43: [TS10 Chuyên Bến Tre, 2018-2019]

Cho hai số thực dương a,b thỏa $a+b=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$.

Lời giải

Khi đó $T=\frac{4}{a}+\frac{1}{1-a}=\frac{4(1-a)}{a}+\frac{a}{1-a}+5$

Áp dụng BĐT AM-GM cho hai số dương $\frac{4(1-a)}{a}$; $\frac{a}{1-a}$ ta được:

$$T\geq 2\sqrt{\frac{4(1-a)}{a}.\frac{a}{1-a}}+5=9$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{4(1-a)}{a}=\frac{a}{1-a}\Leftrightarrow 4(1-a)^2=a^2\Leftrightarrow 3a^2-8a+4=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\ (\text{loai})\\ a=\frac{2}{3}\ (\text{nhan})\end{array}\right.$$

Vậy $\min T=9\Leftrightarrow a=\frac{2}{3}$ và $b=\frac{1}{3}$

Câu 44: [TS10 Chuyên Nam Định, 2018-2019]

Cho các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$

Chứng minh rằng: $3(a+b)^2-(a+b)+4ab\geq\frac{1}{2}\sqrt{(a+3b)(b+3a)}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{2}\sqrt{(a+3b)(b+3a)}\overset{AM-GM}{\leq}\frac{a+3b+b+3a}{4}=a+b$

Từ giả thiết ta có: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1 \Leftrightarrow a+b+2\sqrt{ab}=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{ab}=1-a-b \Leftrightarrow 4ab=(1-a-b)^2$

$3(a+b)^2-(a+b)+4ab \geq \frac{1}{2}\sqrt{(a+3b)(b+3a)} \Leftrightarrow 3(a+b)^2-(a+b)+(1-a-b)^2 \geq a+b$

$\Leftrightarrow 3a^2+6ab+3b^2-2a-2b+a^2+b^2+1-2a-2b+2ab \geq 0$

$\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+1+8ab-4a-4b \geq 0$

$\Leftrightarrow (1-2a-2b)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Vậy đẳng thức được chứng minh.

Câu 45: [TS10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, 2018-2019]

Cho các $a,b,c<3$ dương thỏa mãn $abc(a+b+c)=3$

a) Chứng minh rằng: $ab+ac+bc \geq 3$:

b) Tìm GTNN của biểu thức: $P=\frac{a}{\sqrt{9-b^2}}+\frac{b}{\sqrt{9-c^2}}+\frac{c}{\sqrt{9-c^2}}$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM ta có:

$$(ab+ac+bc)^2 \geq 3(ab.ac+bc.ac+ab.bc)=3abc(a+b+c)=9$$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca \geq 3$

Tiếp tục áp dụng BĐT AM-GM ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{9-b^2}}=\frac{a}{\sqrt{(3-b)(3+b)}}=\frac{2\sqrt{2}a}{2\sqrt{(6-2b)(3+b)}} \geq \frac{2\sqrt{2}a}{6-2b+3+b}=\frac{2\sqrt{2}a}{9-b}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{2\sqrt{2}a}{9-b}+\frac{2\sqrt{2}b}{9-c}+\frac{2\sqrt{2}c}{9-a}=\frac{2\sqrt{2}a^2}{9a-ab}+\frac{2\sqrt{2}b^2}{9b-bc}+\frac{2\sqrt{2}c^2}{9c-ca} \geq \frac{2\sqrt{2}(a+b+c)^2}{9(a+b+c)-ab-ac-bc}$$

Đặt $t=a+b+c \geq \sqrt{3(ab+ac+bc)}=3$

$\Leftrightarrow (t-3)(8t-3) \geq 0$

$\Leftrightarrow 8t^2 \geq 27t-9$

$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^2 \geq 27(a+b+c)-3(ab+ac+bc)$

$\Leftrightarrow \frac{8}{3}.\frac{(a+b+c)^2}{9.(a+b+c)-(ab+ac+bc)} \geq 1$

$\Leftrightarrow P \geq \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Vậy GTNN của P là $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. Đạt tại $a=b=c=1$

Câu 46: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2018-2019]

Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \leq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Lời giải

Với ba số thực dương $a,\ b,\ c$ ta có $\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\le\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$. (1)

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\right)\le 3(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c\left(a^2+b^2\right)}{a+b}+\frac{a\left(b^2+c^2\right)}{b+c}+\frac{b\left(c^2+a^2\right)}{c+a}\le a^2+b^2+c^2$$

$$\Leftrightarrow c^2-\frac{c\left(a^2+b^2\right)}{a+b}+a^2-\frac{a\left(b^2+c^2\right)}{b+c}+b^2-\frac{b\left(c^2+a^2\right)}{c+a}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{ac(c-a)}{a+b}+\frac{bc(c-b)}{a+b}+\frac{ab(b-a)}{c+a}+\frac{bc(b-c)}{c+a}+\frac{ab(a-b)}{b+c}+\frac{ac(a-c)}{b+c}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{ac(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}+\frac{bc(c-b)^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{ab(b-a)^2}{(a+c)(b+c)}\ge 0. \quad (2)$$

Với ba số thực dương $a,\ b,\ c$ ta có (2) luôn đúng. Vậy (1) luôn đúng. (đpcm)

Câu 47: [TS10 Chuyên Bắc Giang, 2018-2019]

Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$M=\left|x^3-y^3\right|+\left|y^3-z^3\right|+\left|z^3-x^3\right|$.

Lời giải

Áp dụng tính chất $|a-b|\le|a|+|b|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab\le 0$.

Khi đó $M\le 2\left(|x|^3+|y|^3+|z|^3\right)$

Mặt khác $x^2+y^2+z^2=8 \Rightarrow \begin{cases}x^2\le 8\\ y^2\le 8\\ z^2\le 8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\le 2\sqrt{2}\\ |y|\le 2\sqrt{2}\\ |z|\le 2\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|x^3\right|\le 2\sqrt{2}x^2\\ \left|y^3\right|\le 2\sqrt{2}y^2\\ \left|z^3\right|\le 2\sqrt{2}z^2\end{cases}$

Vậy $M\le 2\left(|x|^3+|y|^3+|z|^3\right)\le 4\sqrt{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)=32\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $(x;y;z)=\left(2\sqrt{2};0;0\right)$ hoặc $(x;y;z)=\left(-2\sqrt{2};0;0\right)$ và các hoán vị của nó. Vậy giá trị lớn nhất của M bằng $32\sqrt{2}$.

Câu 48: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2018-2019]

Chứng minh rằng $x^4-x+\frac{1}{2}>0$ với mọi số thực x

Cho x,y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2-xy+y^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2$

Lời giải

a) Ta có

$$x^4-x+\frac{1}{2}=x^4-x^2+\frac{1}{4}+x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)\ge 0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-\frac{1}{2}=0\\ x-\frac{1}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=\frac{1}{2}\\ x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ (vô lý), do đó dấu bằng không xảy ra

Vậy $x^4-x+\frac{1}{2}>0$ với mọi số thực x

Ta có: $x^2-xy+y^2=3\Rightarrow P-xy=3\Rightarrow xy=P-3$

Áp dụng BĐT AM-GM cho hai số $x^2;y^2$ ta có: $x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2y^2}=2|xy|\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2}\ge |xy|$

$$\Rightarrow -\frac{x^2+y^2}{2}\le xy\le \frac{x^2+y^2}{2}\Rightarrow -\frac{P}{2}\le xy\le \frac{P}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{P}{2}\le P-3\le \frac{P}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-\frac{P}{2}\le P-3\\ P-3\le \frac{P}{2}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}3\le \frac{3P}{2}\\ \frac{P}{2}\le 3\end{cases}\Leftrightarrow 2\le P\le 6$$

Dấu bằng xảy ra $\Rightarrow x^2=y^2\Leftrightarrow |x|=|y|$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+x^2+x^2=3\\ x^2-x^2+x^2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x|=|y|=1\\ |x|=|y|=\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Vậy $P_{max}=6\Leftrightarrow |x|=|y|=\sqrt{3};P_{min}=2\Leftrightarrow |x|=|y|=1$

Câu 49: [TS10 Chuyên Vĩnh Long, 2018-2019]

Cho a,b,c là các số dương. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^3}{a^2+b^2}\ge a-\frac{b}{2}$.

b) $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\ge \frac{a+b+c}{3}$.

Lời giải

a) Ta có : $\frac{a^3}{a^2+b^2}=\frac{a(a^2+b^2)-ab^2}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2ab}=a-\frac{b}{2}$

b) Tương tự theo câu a), ta có: $\frac{b^3}{b^2+c^2}\ge b-\frac{c}{2}$, $\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge c-\frac{a}{2}$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Ta có: $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}\ge\dfrac{a^3}{a^2+\dfrac{a^2+b^2}{2}+b^2}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a^3}{a^2+b^2}$

Và $\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2}\ge\dfrac{b^3}{b^2+\dfrac{b^2+c^2}{2}+c^2}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{b^3}{b^2+c^2}$ $\dfrac{c^3}{c^2+ac+a^2}\ge\dfrac{c^3}{c^2+\dfrac{c^2+a^2}{2}+a^2}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{c^3}{c^2+a^2}$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{2}{3}\left(\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\right)\ge\frac{a+b+c}{3}$$

Câu 50: [TS10 Chuyên Khánh Hòa, 2018-2019]

Với $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=abc$.

Chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}+\dfrac{\sqrt{1+b^2}}{b}-\sqrt{1+c^2}<1$.

Lời giải

Ta có $a+b+c=abc\Leftrightarrow\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{ab}=1$. Đặt $\dfrac{1}{a}=x$, $\dfrac{1}{b}=y$, $\dfrac{1}{c}=z$

Khi đó $x,y,z>0$ và $xy+yz+zx=1$. Vì vậy

$$\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}+\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}-\sqrt{1+c^2}<1\Leftrightarrow\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}-\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}<1$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)-\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}+\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-z\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}{z}>0\ \ (4)$$

Ta có: $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}=\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}=\sqrt{(1-xy)^2+(x+y)^2}=(x+y)\sqrt{1+z^2}$.

$$(4)\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-z(x+y)\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-(xz+yz)\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-(1-xy)\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{xy\sqrt{1+z^2}}{z}>0,\forall x,y,z>0.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 51: [TS10 Chuyên Thừa Thiên Huế, 2018-2019]

a) Cho x,y,z là các số thực dương có tổng bằng 1.

Chứng minh rằng $\frac{1}{16x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{z}\ge \frac{49}{16}$.

b) Cho số tự nhiên z và các số nguyên x,y thỏa mãn $x+y+xy=1$. Tìm giá trị của x,y,z sao cho $\left(2^{z+1}+42\right)\left(x^2+y^2+1+x^2y^2\right)$ là số chính phương lớn nhất.

Lời giải

a) Ta có

$$\frac{1}{16x}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{z}\ge \frac{49}{16}\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{16}{z}\ge 49.$$

Với hai số thực không âm a,b ta có $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0\Leftrightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{a}=\sqrt{b}\Leftrightarrow a=b$.

Áp dụng kết quả trên, ta có:

$$\frac{1}{x}+49x\ge 2\sqrt{\frac{1}{x}.49x}\Rightarrow \frac{1}{x}+49x\ge 14. \qquad (1)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{1}{x}=49x\Leftrightarrow x=\frac{1}{7}$.

Tương tự, ta có: $\frac{4}{y}+49y\ge 28.$ (2)

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{4}{y}=49y\Leftrightarrow y=\frac{2}{7}$.

Và $\frac{16}{z}+49z\ge 56.$ (3)

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{16}{z}=49z\Leftrightarrow z=\frac{4}{7}$.

Cộng (1), (2), (3) theo vế ta được: $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{16}{z}+49\left(x+y+z\right)\ge 98$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{16}{z}\ge 49.$ Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{1}{7};y=\frac{2}{7};z=\frac{4}{7}$.

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

b) Ta có:

$$\left(2^{z+1}+42\right)\left(x^2+y^2+1+x^2y^2\right)=2\left(2^z+21\right)\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right).$$

Với: $1+x^2=x+y+xy+x^2=\left(x+y\right)\left(1+x\right)$, $1+y^2=x+y+xy+y^2=\left(x+y\right)\left(1+y\right)$,

$2=1+1=1+x+y+xy=\left(1+x\right)\left(1+y\right)$.

Suy ra $\left(2^{z+1}+42\right)\left(x^2+y^2+1+x^2y^2\right)=\left(2^z+21\right)\left(x+y\right)^2\left(1+x\right)^2\left(1+y\right)^2$.

Do đó, $\left(2^{z+1}+42\right)\left(x^2+y^2+1+x^2y^2\right)$ là số chính phương khi và chỉ khi 2^z+21 là số chính phương.

Nghĩa là tồn tại số tự nhiên n sao cho $2^z+21=n^2$.

Ta có $2\equiv -1\left(\mod 3\right)\Rightarrow 2^z\equiv\left(-1\right)^z\left(\mod 3\right)$.

Nếu z lẻ thì $2^z\equiv -1\left(\mod 3\right)\equiv 2\left(\mod 3\right)$. Khi đó $n^2\equiv 2\left(\mod 3\right)$ vô lí (vì số chính phương khi chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1).

Từ đó suy ra z là số chẵn.

Đặt $z=2k,\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$. Ta có $n^2=21+2^{2k}\Leftrightarrow n^2-\left(2^k\right)^2=21\Leftrightarrow\left(n-2^k\right)\left(n+2^k\right)=21$.

Vì $21=1.21=3.7$ và $n-2^k<n+2^k$ nên ta có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases}n-2^k=1\\ n+2^k=21\end{cases}\Rightarrow 2^k=10,$ không có giá trị của k thỏa mãn trường hợp này.

Trường hợp 2: $\begin{cases}n-2^k=3\\ n+2^k=7\end{cases}\Rightarrow 2^k=2\Rightarrow k=1.$

Từ giả thiết, ta có $2=\left(1+x\right)\left(1+y\right)$. Không mất tổng quát, giả sử $\left|x+1\right|\le\left|y+1\right|$, suy ra $\begin{cases}\left|x+1\right|=1\\ \left|y+1\right|=2\end{cases}$.

Giải hệ ta được $\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-2\\ y=-3\end{cases}$.

Nếu $x=0,y=1$ thì $\left(2^{z+1}+42\right)\left(x^2+y^2+1+x^2y^2\right)=100=10^2$.

Nếu $x=-2,y=-3$ thì $\left(2^{z+1}+42\right)\left(x^2+y^2+1+x^2y^2\right)=2500=50^2$.

Vậy $x=-2,y=-3,z=2$.

Câu 52: [TS10 Chuyên Kiên Giang, 2018-2019]

Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=2$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}\ge 1$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakoski với bộ ba số có:

$$\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right).\left(\left(\frac{A}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{B}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{C}{\sqrt{c}}\right)^2\right)\ge\left(\sqrt{a}.\frac{A}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}.\frac{B}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}.\frac{C}{\sqrt{c}}\right)^2=\left(A+B+C\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{A^2}{a}+\frac{B^2}{b}+\frac{C^2}{c}\ge\frac{\left(A+B+C\right)^2}{a+b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{(x+y+z)^2}{(y+z)+(z+x)+(x+y)}=\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}=1$$

Dấu "=" xảy ra khi: $x=y=z=\frac{2}{3}$.

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Câu 53: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2018-2019]

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $0\le a,b,c\le 2, a+b+c=3$.

Tìm GTLN và GTNN của $P=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM ta có: $\begin{cases} a^2+b^2\ge 2ab \\ b^2+c^2\ge 2bc \\ c^2+a^2\ge 2ca \end{cases}$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2\right)\ge\frac{1}{2}(2ab+2ac+2bc)$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc$$

$$\Rightarrow P=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\ge 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy $\text{Min}P=1$ khi $a=b=c=1$

Theo đề bài ta có:

$$0\le a,b,c\le 2\Rightarrow (a-2)(b-2)(c-2)\le 0$$

$$\Leftrightarrow abc-2(ab+ac+bc)+4(a+b+c)-8\le 0$$

$$\Leftrightarrow abc-2(ab+ac+bc)+12-8\le 0$$

$$\Rightarrow 2(ab+ac+bc)\ge 4+abc\ge 4$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca\ge 2$$

$$\Rightarrow P=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{ab+ac+bc}-2$$

$$\Leftrightarrow P=\frac{(a+b+c)^2}{ab+ac+bc}-2\le\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} abc=0 \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b+c=3 \end{cases} \\ \begin{cases} b=0 \\ a+c=3 \end{cases} \\ \begin{cases} c=0 \\ a+b=3 \end{cases} \\ 0\le a,b,c\le 2 \end{array}\right.$

Vậy $MaxP = \frac{5}{2}$ khi $abc = 0, a+b+c = 3, 0 \le a,b,c \le 2$

Câu 54: [TS10 Chuyên Thái Nguyên, 2018-2019]

Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}} + \frac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}} + \frac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^2+14xz}} \le \frac{x+y+z}{5}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM ta có: $x^2 + y^2 \ge 2xy$

$$\Rightarrow \sqrt{8x^2+3y^2+14xy} = \sqrt{8x^2+3y^2+12xy+2xy} \le \sqrt{8x^2+3y^2+12xy+x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{8x^2+3y^2+14xy} \le \sqrt{9x^2+12xy+4y^2} = \sqrt{(3x+2y)^2} = 3x+2y$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có: $\begin{cases} \sqrt{8y^2+3z^2+14yz} \le 3y+2z \\ \sqrt{8z^2+3x^2+14xz} \le 3z+2x \end{cases}$

Áp dụng BĐT AM-GM Schawz: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \ge \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ ta được:

$$\Rightarrow VT \ge \frac{x^2}{3x+2y} + \frac{y^2}{3y+2z} + \frac{z^2}{3z+2x} \ge \frac{(x+y+z)^2}{3x+2y+3y+2z+3z+2x} = \frac{x+y+z}{5}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$

Câu 55: [TS10 Chuyên Tuyên Quang, 2018-2019]

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c \le 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \frac{a^2+4a+1}{a^2+a} + \frac{b^2+4b+1}{b^2+b} + \frac{c^2+4c+1}{c^2+c}$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM và BĐT quen thuộc : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ge \frac{9}{x+y+z}$

$$M = \frac{a^2+4a+1}{a^2+a} + \frac{b^2+4b+1}{b^2+b} + \frac{c^2+4c+1}{c^2+c}$$

$$= \frac{(a^2+1)+4a}{a(a+1)} + \frac{(b^2+1)+4b}{b(b+1)} + \frac{(c^2+1)+4c}{c(c+1)}$$

$$\overset{AM-GM}{\ge} \frac{2a+4a}{a(a+1)} + \frac{2b+4b}{b(b+1)} + \frac{2c+4c}{c(c+1)} = 6\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right) \ge \frac{6.9}{a+b+c+3} \ge \frac{54}{6} = 9$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 9, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Câu 56: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2018-2019]

Cho a, b, c dương thỏa mãn $ab+bc+ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} - a^2 - 28b^2 - 28c^2$$

Lời giải

Theo đề bài ta có: $ab+bc+ca=1$

Áp dụng BĐT AM-GM vào biểu thức bài toán ta có:

$$\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{2a}{\sqrt{ab+bc+ca+a^2}}=\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}$$

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}=\frac{b}{\sqrt{b^2+ab+ac+bc}}=\frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}\le\frac{b}{4(b+c)}+\frac{b}{a+b}$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}=\frac{c}{\sqrt{c^2+ab+ac+bc}}=\frac{c}{\sqrt{(a+c)(c+b)}}\le\frac{c}{4(b+c)}+\frac{c}{a+c}$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\le\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{4(b+c)}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{4(b+c)}+\frac{c}{a+c}$$

$$=\frac{a+b}{a+b}+\frac{a+c}{a+c}+\frac{b+c}{4(b+c)}=1+1+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

Mặt khác:

$$\frac{a^2}{2}+\frac{49b^2}{2}\ge2\sqrt{\frac{a^2.49b^2}{4}}=7ab$$

$$\frac{a^2}{2}+\frac{49c^2}{2}\ge2\sqrt{\frac{a^2.49c^2}{4}}=7ac$$

$$\frac{7}{2}\left(b^2+c^2\right)\ge7bc$$

$$\Rightarrow a^2+28b^2+28c^2\ge7\left(ab+ac+bc\right)=7$$

$$\Rightarrow P\le\frac{9}{4}-7=\frac{-19}{4}$$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=7b=7c\\ab+bc+ca=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7\sqrt{15}}{15}\\b=c=\dfrac{\sqrt{15}}{15}\end{cases}$

Vậy $MaxP=-\dfrac{19}{4}$ khi $\begin{cases}a=\dfrac{7\sqrt{15}}{15}\\b=c=\dfrac{\sqrt{15}}{15}\end{cases}$

Câu 57: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2018-2019]

Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{ab}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=a+b+\dfrac{ab}{a+b}$

Lời giải

Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{ab}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=a+b+\dfrac{ab}{a+b}$.

Ta có: $2\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{ab}\Rightarrow\sqrt{ab}\ge4$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a}=\sqrt{b}\\ \sqrt{ab}=4\end{cases}\Leftrightarrow a=b=4$.

$$A=a+b+\frac{ab}{a+b}=\frac{3\left(a+b\right)}{4}+\frac{a+b}{4}+\frac{ab}{a+b}\ge\frac{3\sqrt{ab}}{2}+\sqrt{ab}=\frac{5\sqrt{ab}}{2}\ge10.$$

Suy ra: $A\ge10$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}a=b=4\\ \dfrac{a+b}{4}=\dfrac{ab}{a+b}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của *A* bằng 10 khi $a=b=4$.

Câu 58: [TS10 Chuyên Đồng Nai, 2018-2019]

Cho các số thực a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3}{ab\left(a^2+b^2\right)}+\frac{b^3+c^3}{bc\left(b^2+c^2\right)}+\frac{c^3+a^3}{ac\left(c^2+a^2\right)}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a^3+b^3}{ab(a^2+b^2)}\ge\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\Leftrightarrow\frac{2\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)}{2ab\left(a^2+b^2\right)}\ge\frac{a+b}{2ab}$$

$$\Leftrightarrow2\left(a^2+ab+b^2\right)+b^2\ge0\Leftrightarrow\left(a-b\right)^2\ge0$$

Điều này luôn đúng, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có: $\begin{cases}\dfrac{c^3+b^3}{cb\left(c^2+b^2\right)}\ge\dfrac{1}{2c}+\dfrac{1}{2b}\\ \dfrac{c^3+a^3}{ca\left(c^2+a^2\right)}\ge\dfrac{1}{2c}+\dfrac{1}{2a}\end{cases}$

Cộng vế theo vế ta có:

$$\frac{a^3+b^3}{ab\left(a^2+b^2\right)}+\frac{b^3+c^3}{bc\left(b^2+c^2\right)}+\frac{c^3+a^3}{ac\left(c^2+a^2\right)}\ge\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 59: [TS10 Chuyên Lâm Đồng, 2018-2019]

Cho $a,b,c>0$ và $a+2b+3c\ge20$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=a+b+c+\dfrac{3}{a}+\dfrac{9}{2b}+\dfrac{4}{c}$

Lời giải

Ta có:

$$S=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}=\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{4}+\left(\frac{3a}{4}+\frac{3}{a}\right)+\left(\frac{b}{2}+\frac{9}{2b}\right)+\left(\frac{c}{4}+\frac{4}{c}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(a+2b+3c)+\left(\frac{3a}{4}+\frac{3}{a}\right)+\left(\frac{b}{2}+\frac{9}{2b}\right)+\left(\frac{c}{4}+\frac{4}{c}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm ta có:

$$+)\frac{3a}{4}+\frac{3}{a}\geq 2\sqrt{\frac{3a}{4}.\frac{3}{a}}=3$$

$$+)\frac{b}{2}+\frac{9}{2b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{2}.\frac{9}{2b}}=3$$

$$+)\frac{c}{4}+\frac{4}{c}\geq 2\sqrt{\frac{c}{4}.\frac{4}{c}}=2$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{4}(a+2b+3c)+\left(\frac{3a}{4}+\frac{3}{a}\right)+\left(\frac{b}{2}+\frac{9}{2b}\right)+\left(\frac{c}{4}+\frac{4}{c}\right)\geq\frac{1}{4}.20+3+3+2=13$$

Dấu “ = “ xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases}a+2b+3c=20\\ \frac{3a}{4}=\frac{3}{a}\\ \frac{b}{2}=\frac{9}{2b}\\ \frac{c}{4}=\frac{4}{c}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=3(a,b,c>0\\ c=4\end{cases}$

Vậy $\text{MinS}=13$ khi $a=2;b=3;c=4$

Câu 60: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2018-2019]

Cho x,y,z là ba số thực không âm thỏa mãn: $12x+10y+15z\leq 60$.

Tìm giá trị lớn nhất của $T=x^2+y^2+z^2-4x-4y-z$.

Lời giải

Do x,y,z là ba số thực không âm thỏa mãn : $12x+10y+15z\leq 60$.

Ta có $\begin{cases}x,y,z\geq 0\\ x\leq 5\\ y\leq 6\\ z\leq 4\end{cases}$ (*)

Từ điều kiện trên ta có $T=x^2+y^2+z^2-4x-4y-z$

$=x(x-5)+y(y-6)+z(z-4)+x+2y+3z$

$\leq x+2y+3z\leq\frac{12x}{5}+2y+3z\leq\frac{60}{5}=12$

Vậy GTLN của T bằng 12 đạt được khi $\begin{cases} x=0 \\ y=6 \\ z=0 \end{cases}$ or $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=4 \end{cases}$

Câu 61: [TS10 Chuyên Đại Học Vinh, 2018-2019]

Cho các số thực không âm a, b thỏa mãn: $(a-b)^2 = a+b+2$.

Chứng minh rằng: $\left(1+\dfrac{a^3}{(b+1)^3}\right)\left(1+\dfrac{b^3}{(a+1)^3}\right) \le 9$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
&(a-b)^2 = a+b+2 \\
&\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = a+b+2 \\
&\Leftrightarrow a^2 + b^2 = a+b+2+2ab \\
&\Leftrightarrow (a^2+a)+(b^2+b) = 2(ab+a+b+1) \\
&\Leftrightarrow a(a+1)+b(b+1) = 2(a+1)(b+1) \\
&\Leftrightarrow \frac{a(a+1)+b(b+1)}{(a+1)(b+1)} = 2 \\
&\Leftrightarrow \frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1} = 2
\end{aligned}$$

Đặt $x = \dfrac{a}{b+1}; y = \dfrac{b}{a+1} \Rightarrow x+y=2$

Ta có:

$$\begin{aligned}
&(1+x^3)(1+y^3) \le 9 \\
&\Leftrightarrow 1+(xy)^3 + x^3 + y^3 \le 9 \\
&\Leftrightarrow (xy)^3 + (x+y)\left[(x+y)^2 - 3xy\right] \le 8 \\
&\Leftrightarrow xy(x^2y^2 - 6) \le 0
\end{aligned}$$

(do $0 \le xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4} = 1$)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} xy = 0 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0; b=2 \\ a=2; b=0 \end{array}\right.$

Câu 62: [TS10 Chuyên Hà Nam, 2018-2019]

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy+yz+xz \ge x+y+z$

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} + \dfrac{y^2}{\sqrt{y^3+8}} + \dfrac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \ge 1$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM ta có:

$(xy+yz+xz)^2 \ge (x+y+z)^2 \ge 3(xy+xz+yz) \Rightarrow xy+xz+yz \ge 3$

Áp dụng BĐT AM-GM-Schwwarz ta có:

$$VT \ge \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}+\sqrt{(y+2)(y^2-2y+4)}+\sqrt{(z+2)(z^2-2+4)}}$$

$$\Leftrightarrow VT \ge \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{(+y+z+6)\left[x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)+12\right]}}$$

$$\Leftrightarrow VT \ge \frac{(x+y+z)^2}{(2xy+2xz+2yz+3)\left[x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)+12\right]}$$

$$\Leftrightarrow VT \ge \frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)+15+2(xy+yz+xz)}$$

$$\Leftrightarrow VT \ge \frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2-2(x+y+z)+15}$$

$\Rightarrow$ Ta cần chứng minh:

$$\frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2-2(x+y+z)+15} \ge 1$$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^2+2(x+y+z)-15 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x+y+z+5)(x+y+z-3) \ge 0$

Điều này là luôn đúng do: $x+y+z \ge \sqrt{3(xy+yz+xz)} = 3$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$

Vậy $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\dfrac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\dfrac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \ge 1$

Câu 63: [TS10 Chuyên Đắc Lắc, 2018-2019]

1) Cho các số thực x, y không âm, chứng minh rằng $x^3+y^3 \ge x^2y+xy^2$.

2) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \le 1.$$

Lời giải

1) Cho các số thực x, y không âm, chứng minh rằng $x^3+y^3 \ge x^2y+xy^2$.

Bất đẳng thức: $x^3+y^3 \ge x^2y+xy^2$

$\Leftrightarrow x^2(x-y)-y^2(x-y) \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) \ge 0$, đúng $\forall x, y \ge 0$.

2) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le 1.$$

Chứng minh $a^5+b^5\ge a^2b^3+a^3b^2 \Leftrightarrow a^3(a^2-b^2)-b^3(a^2-b^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2)\ge 0,\quad \forall a,b>0\quad (*)$

Áp dụng (*): $a^5+b^5\ge a^2b^2(a+b)\Rightarrow a^5+b^5+ab\ge ab.\dfrac{a+b+c}{c}$

$\Rightarrow \dfrac{ab}{a^5+b^5+ab}\le \dfrac{c}{a+b+c}\quad (1)$

Tương tự $\dfrac{bc}{b^5+c^5+bc}\le \dfrac{a}{a+b+c}\quad (2)$; $\dfrac{ca}{c^5+a^5+ca}\le \dfrac{b}{a+b+c}\quad (3)$

Cộng (1), (2), (3) ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

Câu 64: [TS10 Chuyên Bến Tre, 2018-2019]

Cho hai số thực dương a,b thỏa $a+b=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}$

Lời giải

Ta có: $T=\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{4(a+b)}{a}+\dfrac{a+b}{b}=5+\dfrac{4b}{a}+\dfrac{a}{b}\ge 5+2\sqrt{\dfrac{4b}{a}.\dfrac{a}{b}}=5+4=9$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số thực dương ta có: $\dfrac{4b}{a}+\dfrac{a}{b}\ge 2\sqrt{\dfrac{4b}{a}.\dfrac{a}{b}}=4$

$\Rightarrow T=5+\dfrac{4b}{a}+\dfrac{a}{b}\ge 5+4=9$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{4b}{a}=\dfrac{a}{b}\\ a+b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=4b^2\\ a+b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=1\\ a=2b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{2}{3}(tm)\\ b=\dfrac{1}{3}(tm)\end{cases}$

Vậy $\text{Min}T=9$ khi $a=\dfrac{2}{3};b=\dfrac{1}{3}$

Câu 65: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2018-2019]

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ac+a^2}\ge 1$$

Lời giải

Ta có : Áp dụng bất đẳng thức AM-GM – Schaw thì:

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^2}{c(a+b+c)}\ge\frac{(a+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}$$

$$\frac{b^2}{b(a+b+c)}+\frac{c^2}{c^2+ac+a^2}\ge\frac{(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}$$

$$\frac{a^2}{a(a+b+c)}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}\ge\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ac+a^2}+\frac{a^2}{a(a+b+c)}+\frac{b^2}{b(a+b+c)}+\frac{c^2}{c(a+b+c)}$$

$$\ge\frac{(a+c)^2+(b+c)^2+(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ac+a^2}+\frac{a+b+c}{a+b+c}\ge\frac{(a+c)^2+(b+c)^2+(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^2}{c^2+ac+a^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+1\ge\frac{2\left(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc\right)}{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^2}{c^2+ac+a^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+1\ge 2$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^2}{c^2+ac+a^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}\ge 1\quad\text{(đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

Câu 66: [TS10 Chuyên Hưng Yên, 2018-2019]

Cho các số dương x,y,z thỏa $xy+yz+zx=3xyz$.

Chứng minh rằng $\dfrac{x^3}{z+x^2}+\dfrac{y^3}{x+y^2}+\dfrac{z^3}{y+z^2}\ge\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$

Lời giải

Theo đề bài ta có: $xy+yz+zx=3xyz$

$$\Leftrightarrow\frac{xy}{xyz}+\frac{yz}{xyz}+\frac{zx}{xyz}=3\Leftrightarrow\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$$

Lại có: $3xyz=xy+yz+xz\overset{AM-GM}{\ge}3\sqrt[3]{(xyz)^3}\Rightarrow xyz\ge 1\Rightarrow x+y+z\ge 3$

Ta có

$$\frac{x^3}{z+x^2}=x-\frac{xz}{z+x^2}\overset{AM-GM}{\ge}x-\frac{xz}{2\sqrt{zx^2}}=x-\frac{\sqrt{z}}{2}\ge x-\frac{z+1}{4}$$

(Do $z+1\ge 2\sqrt{z}\Rightarrow\sqrt{z}\le\dfrac{z+1}{2}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{z}}{2}\le\dfrac{z+1}{2}\Rightarrow-\dfrac{\sqrt{z}}{2}\ge\dfrac{z+1}{2}$)

Tương tự ta có: $\dfrac{y^3}{x+y^3}\ge y-\dfrac{x+1}{4}$; $\quad\dfrac{z^3}{y+z^2}\ge z-\dfrac{y+1}{4}$

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{x^3}{z+x^2}+\frac{y^3}{x+y^2}+\frac{z^3}{y+z^2}\ge x+y+z-\frac{x+y+z+3}{4}\ge 3-\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\text{(đpcm)}$$

Câu 67: [TS10 Chuyên Hưng Yên, 2018-2019]

Cho a, b là hai số thay đổi thỏa mãn các điều kiện $a>0$ và $a+b\ge 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{8a^2+b}{4a}+b^2$

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $a+b\ge 1\Leftrightarrow b\ge 1-a$

$$\Rightarrow A\ge \frac{8a^2+1-a}{4a}+b^2=2a+\frac{1}{4a}-\frac{1}{4}+b^2=a+\frac{1}{4a}+a+b^2-\frac{1}{4}$$

$$\ge a+\frac{1}{4a}+a+a^2-2a+1-\frac{1}{4}=a+\frac{1}{4a}+a^2-a+\frac{3}{4}=a+\frac{1}{4a}+a^2-a+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$

$$\overset{AM-GM}{\ge} 2\sqrt{a.\frac{1}{4a}}+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\ge 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{4a};a-\dfrac{1}{2}=0 \\ b=1-a\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2}$ (tm)

Vậy $\text{MinA}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2}$

Câu 68: [TS10 Chuyên Bình Định, 2018-2019]

Cho hai số dương a, b thỏa mãn $a+\dfrac{1}{b}=1$. Chứng minh rằng: $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2\ge\dfrac{25}{2}$

Lời giải

Ta có: $a+\dfrac{1}{b}=1\Leftrightarrow \dfrac{1}{b}=1-a\Leftrightarrow ab+1=b$ $(a>0, b>0)$

Lại có HĐT: $2(x^2+y^2)=(x+y)^2-(x-y)^2\Rightarrow x^2+y^2\ge\dfrac{(x+y)^2}{2}$ (1) , dấu”=” xãy ra khi và chỉ khi x= y

và có HĐT: $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy\Rightarrow (x+y)^2\ge 4xy$ (2), dấu”=” xãy ra khi và chỉ khi x= y

Áp dụng (1), ta có:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\ge\frac{\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2}{2}=\frac{\left(1+b+\frac{1}{a}\right)^2}{2}=\frac{\left(1+\frac{ab+1}{a}\right)^2}{2}=\frac{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}{2}\quad (1'),$$

dấu “=” xãy ra khi và chỉ khi: $a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}$ và $a+\dfrac{1}{b}=1$

Áp dụng (2), ta có:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2\ge 4\frac{a}{b}\Leftrightarrow 1\ge 4\frac{a}{b}\Leftrightarrow\frac{b}{a}\ge 4\quad (2'),$$

dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi: $a = \frac{1}{b}$ và $a + \frac{1}{b} = 1$

Từ (1') và (2') suy ra:

$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{(1+4)^2}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $a = \frac{1}{b}$ hay $b = \frac{1}{a}$

Vậy $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$, dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi: $a = \frac{1}{2}$ và $b = 2$.

Câu 69: [TS10 Chuyên Hà Tĩnh, 2018-2019]

Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}} + \sqrt{\frac{yz}{yz+x}} + \sqrt{\frac{xz}{xz+y}} \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}} = \sqrt{\frac{xy}{xy+z(x+y+z)}} = \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(y+z)}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z}\right)$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có:

$$\sqrt{\frac{yz}{yz+x}} \leq \frac{1}{2}.\left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{z+x}\right); \sqrt{\frac{xz}{xz+y}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{z}{y+z} + \frac{x}{x+y}\right)$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z} + \frac{y}{x+y} + \frac{z}{x+z} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z}\right)$$

$$\Leftrightarrow P \leq \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{x+z} + \frac{z}{x+z}\right) + \left(\frac{y}{x+y} + \frac{x}{x+y}\right) + \left(\frac{z}{y+z} + \frac{y}{y+z}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow P \leq \frac{1}{2}.3 = \frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$.

Câu 70: [TS10 Chuyên Nam Định, 2018-2019]

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $(x-y)(x-z) = 1$; $y \neq z$. Chứng minh

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \geq 4.$$

Lời giải

Đặt $x-y=a$; $x-z=b$ ta được $ab=1$; $a \neq b$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a-b)^2}\ge 4 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-2ab}\ge 4 \quad \Leftrightarrow a^2+b^2+\frac{1}{a^2+b^2-2}\ge 4$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2+\frac{1}{a^2+b^2-2}\ge 2.$$

Do $ab=1$; $a\ne b$ nên $a^2+b^2>2ab$ hay $a^2+b^2-2>0$.

Mặt khác $\left(a^2+b^2-2\right)+\frac{1}{a^2+b^2-2}\ge 2\sqrt{\left(a^2+b^2-2\right).\frac{1}{\left(a^2+b^2-2\right)}}$ tức là

$$a^2+b^2-2+\frac{1}{a^2+b^2-2}\ge 2.$$

Vậy $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\ge 4.$

Câu 71: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2018-2019]

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{bc}{b+c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}\right)\le 2$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{bc}{b+c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}\right)\le \sqrt{2.\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}\right)}.\sqrt{2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)}$$

$$=2\sqrt{\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)}\le\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)$$

$$=\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\right)+\left(\frac{c}{b+c}+\frac{b}{b+c}\right)=2$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Câu 72: [TS10 Chuyên Nam Định, 2018-2019]

Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$.

Chứng minh rằng $3(a+b)^2-(a+b)+4ab\ge\frac{1}{2}\sqrt{(a+3b)(b+3a)}$.

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương $\frac{1}{\sqrt{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt{b+3a}}\le 2.$

Áp dụng BĐT AM-GM cho 2 số dương ta có

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+3b}}=\sqrt{\frac{a}{a+b}}.\sqrt{\frac{a+b}{a+3b}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a+b}{a+3b}\right)\ (1)$$

và $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}.\sqrt{\dfrac{2b}{a+3b}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2b}{a+3b}\right)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{a}{a+b}\right)\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{a+3b}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{a}{a+b}\right)$. (3)

Chứng minh tương tự ta cũng có $\dfrac{1}{\sqrt{b+3a}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{b}{a+b}\right)$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{a+3b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b+3a}}\le 2$. (điều phải chứng minh)

Dấu $"="$ xảy ra khi $a=b=\dfrac{1}{4}$.

Câu 73: [TS10 Chuyên Khánh Hòa, 2018-2019]

Cho a, b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng $\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}+\dfrac{\sqrt{1+b^2}}{b}-\sqrt{1+c^2}<1$

Lời giải

Ta có: $a+b+c=abc\Leftrightarrow\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{bc}=1$

Đặt $x=\dfrac{1}{a};y=\dfrac{1}{b};z=\dfrac{1}{c}$ thì bất đẳng thức đã cho trở thành : $xy+xz+yz=1$

$$\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}+\dfrac{\sqrt{1+b^2}}{b}-\sqrt{1+c^2}<1$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+1}+\sqrt{\dfrac{1}{b^2}+1}-c\sqrt{\dfrac{1}{c^2}+1}<1$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}-\dfrac{\sqrt{1+z^2}}{z}<1$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2}+\dfrac{\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)-\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}+\dfrac{\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\dfrac{\sqrt{1+z^2}-z\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}{z}>0$$

Ta lại có:

$$\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}=\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}=\sqrt{(1-xy)^2+(x+y)^2}$$
$$=\sqrt{(xz+yz)^2+(x+y)^2}=\sqrt{(z^2+1)(x+y)^2}=(x+y)\sqrt{1+z^2}$$
$$\Rightarrow \text{bdt} \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-z(x+y)\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-(xz+yz)\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{\sqrt{1+z^2}-(1-xy)\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+y^2}-1\right)+\frac{xy\sqrt{1+z^2}}{z}>0$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 74: [TS10 Chuyên Phan Bội Châu, 2018-2019]

Cho a,b,c thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a^4-a^3+ab-2}}+\frac{1}{\sqrt{b^4-b^3+bc+2}}+\frac{1}{\sqrt{c^4+c^3+ac+2}}\le\sqrt{3}$$

Lời giải

Ta có:

$$(a-1)^2(a^2+a+1)\ge 0\Leftrightarrow (a^2-2a+1)(a^2+a+1)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow a^4-a^3-a+1\ge 0\Leftrightarrow a^4-a^3+1\ge a$$
$$\Leftrightarrow a^4-a^3+ab+2\ge ab+a+1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a^4-a^3+ab+2}}\le\frac{1}{\sqrt{ab+a+1}}$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{b^4-b^3+bc+2}}\le\frac{1}{\sqrt{bc+b+1}};\frac{1}{\sqrt{c^4-c^3+ac+2}}\le\frac{1}{\sqrt{ac+c+1}}$$

Như vậy

$$VT\le\frac{1}{\sqrt{ab+a+1}}+\frac{1}{\sqrt{bc+b+1}}+\frac{1}{\sqrt{ac+c+1}}\le\sqrt{3.\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ac+c+1}\right)}$$

(Áp dụng BĐT Bunyakovski cho 3 số)

Lại có

$$\sqrt{3.\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ac+c+1}\right)}=\sqrt{3.\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{abc+ab+a}+\frac{ab}{a^2bc+abc+ab}\right)}$$
$$=\sqrt{3.\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{1+ab+a}+\frac{ab}{a+ab+1}\right)}=\sqrt{3}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 75: [TS10 Chuyên Hà Nam, 2018-2019]

Cho a là số bất kì,chứng minh rằng: $\dfrac{a^{2010}+2010}{\sqrt{a^{2010}+2009}}>2$

Lời giải

Ta có:

$$a^{2010}+2010>2\sqrt{a^{2010}+2009} \Leftrightarrow a^{2010}+2009+1>2\sqrt{a^{2010}+2009}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a^{2010}+2009}\right)^2-2\sqrt{a^{2010}+2009}+1>0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a^{2010}+2009}-1\right)^2>0 \text{ luôn đúng với mọi a}$$

Câu 76: [TS10 Chuyên Nam Định, 2018-2019]

Cho các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$

Chứng minh rằng: $3(a+b)^2-(a+b)+4ab\ge \dfrac{1}{2}\sqrt{(a+3b)(b+3a)}$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{1}{2}\sqrt{(a+3b)(b+3a)} \overset{AM-GM}{\le} \dfrac{a+3b+b+3a}{4}=a+b$

Từ giả thiết ta có: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1 \Leftrightarrow a+b+2\sqrt{ab}=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{ab}=1-a-b \Leftrightarrow 4ab=(1-a-b)^2$

$$3(a+b)^2-(a+b)+4ab\ge \frac{1}{2}\sqrt{(a+3b)(b+3a)} \Leftrightarrow 3(a+b)^2-(a+b)+(1-a-b)^2\ge a+b$$

$$\Leftrightarrow 3a^2+6ab+3b^2-2a-2b+a^2+b^2+1-2a-2b+2ab\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+1+8ab-4a-4b\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (1-2a-2b)^2\ge 0$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

NĂM HỌC 2017-2018

Câu 77: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2017-2018]

Cho x, y là hai số thực dương. Tìm GTNN của biểu thức: $P=\dfrac{16\sqrt{xy}}{x+y}+\dfrac{x^2+y^2}{xy}$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM – GM cho ba số không âm ta có:

$$P=\frac{16\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{16\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{(x+y)^2}{xy}-2=\frac{8\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{8\sqrt{xy}}{x+y}+\frac{(x+y)^2}{xy}-2$$

$$\ge 3.\sqrt[3]{\frac{8\sqrt{xy}}{x+y}.\frac{8\sqrt{xy}}{x+y}.\frac{(x+y)^2}{xy}}-2=10$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{8\sqrt{xy}}{x+y}=\frac{(x+y)^2}{xy}\Leftrightarrow x=y$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 10

Câu 78: [TS10 Chuyên Lam Sơn, 2017-2018]

Cho a, b, c là độ dài của ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ca}>1$$

Lời giải

Ta có: $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ca}>1$

$\Leftrightarrow \frac{c(a^2+b^2-c^2)+a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)-2abc}{2abc}>0$

$\Leftrightarrow c(a^2+b^2-c^2)+a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)-2abc>0$

$\Leftrightarrow c(a^2+b^2-c^2+2ab)+a(b^2+c^2-a^2-2bc)+b(a^2+c^2-b^2-2ca)>0$

$\Leftrightarrow c((a+b)^2-c^2)+a((b-c)^2-a^2)+b((c-a)^2-b^2)>0$

$\Leftrightarrow c(a+b+c)(a+b-c)+a(b-c-a)(b+a-c)+b(c-a-b)(c+b-a)>0$

$\Leftrightarrow (a+b-c)\left[c\left(a+b+c\right)+a\left(b-c-a\right)+b\left(a-c-b\right)\right]>0$

$\Leftrightarrow (a+b-c)(c^2-a^2+2ab-b^2)>0$

$\Leftrightarrow (a+b-c)[c^2-(a-b)^2]>0$

$\Leftrightarrow (a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)>0$

Do a, b, c là ba cạnh của tam giác nên $\begin{cases}a+b-c>0\\c+b-a>0\\c+a-b>0\end{cases}$

Suy ra: $(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)>0\Leftrightarrow x=y$ (luôn đúng)

Vậy ta chứng minh được BĐT ban đầu.

Câu 79: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội vòng 1, 2017-2018]

Cho a, b là số các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M=(a+b)\left(\frac{1}{a^3+b}+\frac{1}{a+b^3}\right)-\frac{1}{ab}$$

Lời giải

Ta có: $(a^3+b)(\frac{1}{a}+b)\ge(a+b)^2;(b^3+a)(\frac{1}{b}+a)\ge(a+b)^2.$

Khi đó $\frac{1}{a^3+b}+\frac{1}{a+b^3}\le\frac{a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{(a+b)^2}\Leftrightarrow VT\le\frac{a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{a+b}-\frac{1}{ab}=1+\frac{1}{ab}-\frac{1}{ab}=1.$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = 1

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1 khi a = b = 1.

Câu 80: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội vòng 2, 2017-2018]

Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: ab + bc + ca + abc = 2.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M=\frac{a+1}{a^2+2a+2}+\frac{b+1}{b^2+2b+2}+\frac{c+1}{c^2+2x+2}$.

Lời giải

Với x, y dương ta có bất đẳng thức thức: $\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(*\right)$:

Thật vậy: $\left(*\right)\Leftrightarrow\frac{x+y}{4xy}\ge\frac{1}{x+y}\Leftrightarrow\left(x+y\right)^2\ge4xy\Leftrightarrow\left(x-y\right)^2\ge0$ (luôn đúng)

Bất đẳng thức (*) xảy ra dấu “=” khi x = y.

Quay trở lại bài toán ta có:

$$\begin{aligned}&abc+ab+bc+ca=2\\ \Leftrightarrow\ &abc+ab+ac+bc+a+b+c+1=a+b+c+3\\ \Leftrightarrow\ &(a+1)(b+1)(c+1)=(a+1)(b+1)(c+1)\\ \Leftrightarrow\ &\frac{(a+1)+(b+1)+(c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}=1\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{(b+1)(c+1)}+\frac{1}{(c+1)(a+1)}=1\end{aligned}$$

Đặt $a+1=\frac{\sqrt{3}}{x},b+1=\frac{\sqrt{3}}{y},c+1=\frac{\sqrt{3}}{z}$

Khi đó giả thiết bài toán trở thành: xy + yz + zx = 3 và

$$\begin{aligned}M&=\frac{a+1}{a^2+2a+2}+\frac{b+1}{b^2+2b+2}+\frac{c+1}{c^2+2x+2}\\ &=\frac{a+1}{(a+1)^2+1}+\frac{b+1}{(b+1)^2+1}+\frac{c+1}{(c+1)^2+1}\\ &=\frac{1}{a+1+\frac{1}{a+1}}+\frac{1}{b+1+\frac{1}{b+1}}+\frac{1}{c+1+\frac{1}{c+1}}\\ &=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{x}+\frac{x}{\sqrt{3}}}+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{y}+\frac{y}{\sqrt{3}}}+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{z}+\frac{z}{\sqrt{3}}}\\ &=\sqrt{3}(\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1})\\ &=\sqrt{3}(\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(y+z)(y+x)}+\frac{z}{(z+x)(z+y)})\end{aligned}$$

$\le\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}+\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+x}+\frac{z}{z+y})=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. (Áp dụng bất đẳng thức (*))

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z = $\sqrt{3}-1$

Vậy giá trị lớn nhất của M là $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Câu 81: [TS10 Chuyên Bình Dương, 2017-2018]

Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $x \geq 2y$.

Tìm GTNN của biểu thức $M = \frac{x^2 + y^2}{xy}$.

Lời giải

Ta có : $M = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2 + 4y^2}{xy} - \frac{3y^2}{xy} \geq \frac{4xy}{xy} - \frac{3y}{x} \geq 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x^2 = 4y^2 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{5}{2}$ khi x = 2y.

Câu 82: [TS10 Chuyên Nam Định, 2017-2018]

Xét các số thực a, b, c không âm, khác 1 thỏa mãn a + b + c = 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất cảu biểu thức $P = \frac{1}{a + bc} + \frac{1}{b + ac} + (a + b)(4 + 5c)$.

Lời giải

Áp dụng BĐT : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{x + y} (\forall x, y \neq 0)$

Ta có :

$$P = \frac{1}{a + bc} + \frac{1}{b + ac} + (a + b)(5c + 4) \geq \frac{4}{(a + b)(c + 1)} + (a + b)(5c + 4)$$

$$= \frac{4}{(1 - c)(1 + c)} + (1 - c)(5c + 4) \geq 4\sqrt{\frac{5c + 4}{c + 1}} = 4\sqrt{\frac{c}{c + 1} + 4} \geq 8$$

Dấu « = » xảy ra khi $c = 0, a = b = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỉ nhất của P là 8

Câu 83: [TS10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, 2017-2018]

Cho x, y là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{xy}{x^2 + y^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\sqrt{2(x^2 + y^2)}.$$

Lời giải

Ta có : $x^2 + y^2 \geq 2xy$ nên : $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$. Do đó :

$$P=\frac{xy}{x^2+y^2}+(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\sqrt{2(x^2+y^2)}\ge\frac{xy}{x^2+y^2}+(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(x+y)\ge\frac{xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{xy}+2$$

$$\ge\frac{4xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{xy}+2-\frac{3xy}{x^2+y^2}\ge 2\sqrt{4}+2-\frac{3(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)}$$

$$\ge 6-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}.$$

Dấu « = » xảy ra khi $\begin{cases} x^2+y^2=2xy \\ \dfrac{4xy}{x^2+y^2}=\dfrac{x^2+y^2}{xy} \end{cases} \Leftrightarrow x=y.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{2}$.

Câu 84: [TS10 Chuyên Bạc Lưu, 2017-2018]

Cho a, b, c thỏa mãn $a\ge 1;b\ge 4;c\ge 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$M=\frac{bc\sqrt{a-1}+ac\sqrt{b-4}+ab\sqrt{c-9}}{abc}.$$

Lời giải

Ta có : $M=\frac{\sqrt{a-1}}{a}+\frac{\sqrt{b-4}}{b}+\frac{\sqrt{c-9}}{c}$.

Do $a\ge 1;b\ge 4;c\ge 9$. Áp dụng BĐT AM –GM cho các cặp số không âm, ta có :

$$\begin{cases} a=(a-1)+1\ge 2\sqrt{a-1} \\ b=(b-4)+4\ge 4\sqrt{b-4} \\ c=(c-9)+9\ge 6\sqrt{c-9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{a-1}}{a}\le\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{b-4}}{b}\le\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{\sqrt{c-9}}{c}\le\dfrac{1}{6} \end{cases}$$. Do đó : $M\le\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$.

Dấu « = » xảy ra khi $\begin{cases} a-1=1 \\ b-4=4 \\ c-9=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=8 \\ c=18 \end{cases}$

Câu 85: [TS10 Chuyên Đắc Lắc, 2017-2018]

1) Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}>2$

2) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=11 \\ ab+bc+ca=7 \end{cases}$

Chứng minh: $\frac{1}{3}\le a,b,c\le 3.$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} x = a+b \\ y = b+c \\ z = c+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{y+z-x}{2} \\ b = \dfrac{x-y+z}{2} \\ c = \dfrac{x+y-z}{2} \end{cases}$

Ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}=\frac{y+z-x}{2x}+\frac{x-y+z}{2y}+4\frac{x+y-z}{2z}$$

$$=\left(\frac{y}{2x}+\frac{x}{2y}\right)+\left(\frac{2y}{z}+\frac{z}{2y}\right)+\left(\frac{2x}{z}+\frac{z}{2x}\right)-3$$

$$\overset{AM-GM}{\geq} 2\sqrt{\frac{y}{2x}.\frac{x}{2y}}+2\sqrt{\frac{2y}{z}.\frac{z}{2y}}+2\sqrt{\frac{2x}{z}.\frac{z}{2x}}-3$$

$$=1+2+2-3$$

$$=2$$

Dấu "=" không xảy ra nên $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{4c}{a+b}>2$ (đpcm)

Cách khác:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM-Schwars ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{4c^2}{ac+bc}\geq\frac{(a+b+2c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Ta lại có: $\dfrac{(a+b+2c)^2}{2(ab+bc+ca)}>2\ (*)$

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow(a+b+2c)^2-4(ab+bc+ca)>0\Leftrightarrow(a-b)^2+4c^2>0$ (đúng)

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

b) Ta có: $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=11 \\ ab+bc+ca=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=5-c \\ ab=7-c(a+b)=7-c(5-c) \end{cases}$

Do: $(a-b)^2\geq 0\Leftrightarrow(a+b)^2\geq 4ab\Leftrightarrow(5-c)^2\geq 4(7-5c+c)^2$

$$\Leftrightarrow 3c^2-10c+3\leq 0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\leq c\leq 3$$

Chứng minh tương tự ta được: $\dfrac{1}{3}\leq a\leq 3, \dfrac{1}{3}\leq b\leq 3$

Vậy $\dfrac{1}{3}\leq a,b,c\leq 3$

Câu 86: [TS10 Chuyên Bắc Giang, 2017-2018]

Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $2\sqrt{xy}+\sqrt{\dfrac{x}{3}}=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất biểu thức: $P=\frac{x}{y}+\frac{4x}{3y}+15xy$.

Lời giải

Tách và áp dụng BĐT AM-GM ta được:

$$P=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{3y}+3xy+12xy+\frac{4}{3}-\frac{4}{3}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}+2.\sqrt{\frac{x}{3y}.3xy}+2\sqrt{12xy.\frac{4}{3}}-\frac{4}{3}$$

$$\geq 2+2x+8\sqrt{xy}-\frac{4}{3}=2x+\frac{2}{3}+8\sqrt{xy}$$

$$\geq 2\sqrt{2x.\frac{2}{3}}+8\sqrt{xy}=4\sqrt{\frac{x}{3}}+8\sqrt{xy}=4$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{1}{3}$

Câu 87: [TS10 Chuyên Hà Tĩnh, 2017-2018]

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $\frac{1}{1+a}+\frac{2017}{2017+b}+\frac{2018}{2018+c}\leq 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=abc$.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{2017}{2017+b}+\frac{2018}{2018+c}\leq 1\Rightarrow 1-\frac{2018}{2018+c}\geq\frac{1}{1+a}+\frac{2017}{2017+b}$$

$$\Leftrightarrow\frac{c}{2018+c}\geq\frac{1}{1+a}+\frac{2017}{2017+b}\overset{AM-GM}{\geq}2\sqrt{\frac{1}{1+a}.\frac{2017}{2017+b}}$$

Tương tự: $\frac{b}{2017+b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{1+a}.\frac{2018}{2018+c}}$; $\frac{a}{1+a}\geq 2\sqrt{\frac{2017}{2017+b}.\frac{2018}{2018+c}}$

Nhân theo vế ta được:

$$\frac{abc}{(a+1)(2017+b)(2018+c)}\geq 8\frac{2017.2018}{(a+1)(2017+b)(2018+c)}\Leftrightarrow abc\geq 8.2017.2018$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=1,b=2017,c=2018$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 8.2017.2018

Câu 88: [TS10 Chuyên Bình Phước, 2017-2018]

a) Cho ba số a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0$ và $|a|\leq 1,\ |b|\leq 1,\ |c|\leq 1$. Chứng minh rằng $a^4+b^6+c^8\leq 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)}$ với x,y là các số thực lớn hơn 1.

Lời giải

a) Từ giả thiết $|a|\le 1,|b|\le 1,|c|\le 1$, ta có $a^4\le a^2,b^6\le b^2,c^8\le c^2$. Từ đó

$a^4+b^6+c^8\le a^2+b^2+c^2$

Lại có $(a-1)(b-1)(c-1)\le 0$ và $(a+1)(b+1)(c+1)\ge 0$ nên

$(a+1)(b+1)(c+1)-(a-1)(b-1)(c-1)\ge 0$

$\Leftrightarrow 2ab+2bc+2ca+2\ge 0\Leftrightarrow -2(ab+bc+ca)\le 2$.

Hơn nữa $a+b+c=0\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=-(ab+bc+ca)\le 2$. Vậy $a^4+b^6+c^8\le 2$.

b) Ta có $T=\dfrac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)}=\dfrac{x^2(x-1)+y^2(y-1)}{(x-1)(y-1)}=\dfrac{x^2}{y-1}+\dfrac{y^2}{x-1}$

Do $x>1,y>1$ nên $x-1>0,y-1>0$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số dương $\dfrac{x^2}{y-1},\dfrac{y^2}{x-1}$, ta có :

$(x-1)+1\ge 2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2\ge 0\Leftrightarrow x-2\sqrt{x-1}\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}\ge 2$

$(y-1)+1\ge 2\sqrt{y-1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{y-1}-1\right)^2\ge 0\Leftrightarrow y-2\sqrt{y-1}\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{x}{\sqrt{y-1}}\ge 2$

Do đó $T=\dfrac{x^2}{y-1}+\dfrac{y^2}{x-1}\ge\dfrac{2xy}{\sqrt{x-1}.\sqrt{y-1}}\ge 8$

Dấu "=" xẩy ra khi $\begin{cases}\dfrac{x^2}{y-1}=\dfrac{y^2}{x-1}\\ x-1=1\\ y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=8$ khi $x=y=2$.

Câu 89: [TS10 Chuyên Quảng Ninh, 2017-2018]

Cho $a;b$ thoả mãn $|a|\ge 2;|b|\ge 2$. Chứng minh rằng:

$$(a^2+1)(b^2+1)\ge(a+b)(ab+1)+5.$$

Lời giải

Xét hiệu $M=(a^2+1)(b^2+1)-(a+b)(ab+1)-5$

$=(a^2b^2-a^2b-ab^2+ab)+(a^2+b^2-a-b-ab)-4$

$=ab(a-1)(b-1)+\dfrac{1}{2}\left[(a-b)^2+a(a-2)+b(b-2)\right]-4$.

Chỉ ra với $|a|\ge 2$ thì $a(a-1)\ge 2$ và $a(a-2)\ge 0$

$|b| \ge 2$ thì $b(b-1) \ge 2$ và $b(b-2) \ge 0$

nên $ab(a-1)(b-1) \ge 4$; $\frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + a(a-2) + b(b-2)\right] \ge 0$

$\Rightarrow M \ge 0$ hay $(a^2+1)(b^2+1) \ge (a+b)(ab+1)+5$.

Câu 90: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2017-2018]

Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$4\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a^3+b^3+c^3\right) \ge 9.$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$4\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)-3\left(a^3+b^3+c^3\right) \ge 27$$

$$\Leftrightarrow 4\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)-3\left(a^3+b^3+c^3\right) \ge \left(a+b+c\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \left(a^3+b^3+c^3\right)+4\left(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2\right) \ge \left(a+b+c\right)^3 \quad (1)$$

Ta có đẳng thức $\left(a+b+c\right)^3 = \left(a^3+b^3+c^3\right)+3\left(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2\right)+6abc$.

Do đó (1) tương đương với $a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b \ge 6abc$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b = a^2\left(b+c\right)+b^2\left(c+a\right)+c^2\left(a+b\right)$$

$$\ge 2a^2\sqrt{bc}+2b^2\sqrt{ca}+2c^2\sqrt{ab} = 2\left(a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}\right) \ge 6abc.$$

Vậy BĐT (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 91: [TS10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội, 2017-2018]

Các số thực không âm $x_1, x_2, x_3, ..., x_9$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+...+x_9=10 \\ x_1+2x_2+3x_3+...+9x_9=18 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $1.19x_1+2.18x_2+3.17x_3+...+9.11x_9 \ge 270$

Lời giải.

Ta có : $9\left(x_1+x_2+x_3+...+x_9\right)=90$, suy ra :

$$\begin{cases} 9\left(x_1+x_2+x_3+...+x_9\right)=90 \\ 10\left(x_1+2x_2+3x_3+...+9x_9\right)=180 \end{cases} \Rightarrow 19x_1+29x_2+39x_3+...+99x_9=270$$

Mặt khác:

$$1.19x_1+2.18x_2+3.17x_3+...+9.11x_9$$

$$=\left(19x_1+29x_2+39x_3+...+99x_9\right)+\left(7x_2+12x_3+15x_4+...+7x_8\right) \ge 270 \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x_1 = 9 \\ x_9 = 1 \\ x_2 = x_3 = ... = x_8 = 0 \end{cases}$

Câu 92: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2017-2018]

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}=6$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$

Lời giải

Ta có:

$$6=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}$$
$$\leq\sqrt{3\left(x^2+y^2+y^2+z^2+z^2+x^2\right)}=\sqrt{6\left(x^2+y^2+z^2\right)}$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq 6$$

Do đó:

$$M=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{x^2}{\sqrt{2\left(y^2+z^2\right)}}+\frac{y^2}{\sqrt{2\left(z^2+x^2\right)}}+\frac{z^2}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}$$
$$\geq\frac{6-\left(y^2+z^2\right)}{\sqrt{2\left(y^2+z^2\right)}}+\frac{6-\left(z^2+x^2\right)}{\sqrt{2\left(z^2+x^2\right)}}+\frac{6-\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}$$
$$\geq\frac{6}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}\right)$$
$$\geq\frac{6}{\sqrt{2}}.\frac{9}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}}-\frac{6}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{6}{\sqrt{2}}.\frac{9}{6}-\frac{6}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Câu 93: [TS10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội vòng 2, 2017-2018]

Cho các số dương a,b,c,d . Chứng minh rằng trong 4 số

$a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{c};b^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d};c^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d};d^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ Có ít nhất một số không nhỏ hơn 3.

Lời giải

Giả sử cả bốn số đều nhỏ hơn 3 thì

$$P=a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+b^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+c^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+d^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<3$$

Mặt khác :

$$P=a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+b^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+c^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+d^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=a^2+b^2+c^2+d^2+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

Do $4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\ge\left(a+b+c+d\right)^2;\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\ge\frac{4}{a+b+c+d}$

$$\Rightarrow P\ge\frac{\left(a+b+c+d\right)^2}{4}+\frac{16}{a+b+c+d}+\frac{16}{a+b+c+d}\ge\sqrt[3]{\frac{\left(a+b+c+d\right)^2}{4}.\frac{16}{a+b+c+d}.\frac{16}{a+b+c+d}}=12$$

Trái điều giả sử suy ra có ít nhất một số không nhỏ hơn 3.

Câu 94: [TS10 Chuyên Hưng Yên, 2017-2018]

Cho 3 số a, b, c dương và $a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4=3a^4b^4c^4$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a^3b+2c^2+1}+\frac{1}{b^3c+2a^2+1}+\frac{1}{c^3a+2b^2+1}\le\frac{3}{4}.$$

Lời giải

Ta có:

$$a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4=3a^4b^4c^4\Leftrightarrow\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}=4\quad(1)$$

Sử dụng AM-GM ta có:

$$\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\ge4\sqrt[4]{\frac{1}{a^{12}}.\frac{1}{b^4}}=\frac{4}{a^3b}$$

Là tương tự và cộng theo vế ta được: $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\ge\frac{1}{a^3b}+\frac{1}{b^3c}+\frac{1}{c^3a}$ (2)

Mặt khác: $\frac{1}{a^4}+1\overset{AM-GM}{\ge}\frac{2}{a^2}$

Làm tương tự và cộng lại ta được: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)+\frac{3}{2}$ (3)

Với x, y, z, t dương ta có: $\frac{1}{x+y+z+t}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)$ (*)

Thật vậy, sử dụng AM-GM ta có:

$$\left(x+y+z+t\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)\ge4\sqrt[4]{xyzt}.\frac{4}{\sqrt[4]{xyzt}}=16$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x+y+z+t}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z = t.

Áp dụng (*) ta được: $\frac{1}{a^3b+2c^2+1}=\frac{1}{a^3b+c^2+c^2+1}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^3b}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^2}+1\right)$

Tương tự:

$$\frac{1}{b^3c+2a^2+1}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{b^3c}+\frac{2}{a^2}+1\right);\frac{1}{c^3a+2b^2+1}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{b^3c}+\frac{2}{a^2}+1\right)$$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{1}{a^3b+2c^2+1}+\frac{1}{b^3c+2a^2+1}+\frac{1}{c^3a+2b^2+1}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a^3b}+\frac{1}{b^3c}+\frac{1}{c^3a}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{3}{16}$$

Theo (1), (2) và (3) ta có thể suy ra:

$$\frac{1}{a^3b+2c^2+1}+\frac{1}{b^3c+2a^2+1}+\frac{1}{c^3a+2b^2+1}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a^3b}+\frac{1}{b^3c}+\frac{1}{c^3a}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{3}{16}$$

$$\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}+3\right)+\frac{3}{16}$$

$$=\frac{3}{16}+\frac{6}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 95: [TS10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, 2017-2018]

Cho a, b, c là các số thực dương.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{a^2+b^2+c^2}-\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Lời giải

Với a, b, c dương ta có: $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$ (1)

Thật vậy:

$$VT=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^3+ab^2+ac^2+b^2+ba^2+bc^2+c^3+ca^2+cb^2$$

$$=\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+\left(a^3+ab^2\right)+\left(b^3+bc^2\right)+\left(c^3+ca^2\right)$$

$$\overset{AM-GM}{\ge}\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+2a^2b+2b^2c+2c^2a$$

$$=3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)=VP$$

Do đó: $\dfrac{a^2b+b^2c+c^2a}{a^2+b^2+c^2}\le\dfrac{a+b+c}{3}$

$$P=\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{a^2+b^2+c^2}-\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\le\frac{a+b+c}{3}-\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\le\frac{a+b+c}{3}-\frac{1}{9}(a+b+c)^2=\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{3}(a+b+c)-\frac{1}{2}\right]^2\le\frac{1}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{1}{4}$

Câu 96: [TS10 Chuyên Tây Ninh, 2017-2018]

Cho x, y là số thực dương nhỏ hơn 1.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q=\frac{xy(1-x-y)}{(x+y)(1-x)(1-y)}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{Q}=\frac{(x+y)(1-x)(1-y)}{xy(1-x-y)}=\frac{(x+y)(1-x-y+xy)}{xy(1-x-y)}=\frac{x+y}{xy}+\frac{x+y}{1-x-y}=\frac{x+y}{xy}+\frac{x+y}{1-(x+y)}$$

Đặt t = x + y, ta được:

$$\frac{1}{Q}=\frac{x+y}{xy}+\frac{x+y}{1-(x+y)}\ge\frac{4(x+y)}{(x+y)^2}+\frac{x+y}{1-(x+y)}=\frac{4}{x+y}+\frac{x+y}{1-(x+y)}=\frac{4}{t}+\frac{t}{1-t}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$\frac{1}{Q}=\frac{4}{t}+\frac{t}{1-t}=\frac{2^2}{t}+\frac{1}{1-t}-1\ge\frac{(2+1)^2}{t+1-t}-1=\frac{9}{1}-1=8\Rightarrow Q\le\frac{1}{8}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{1}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của Q là $\frac{1}{8}$

Câu 97: [TS10 Chuyên Ninh Bình, 2017-2018]

Cho a, b, c dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2018$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{a}{a+\sqrt{2018a+bc}}+\frac{b}{b+\sqrt{2018b+ca}}+\frac{c}{c+\sqrt{2018c+ab}}$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a}{a+\sqrt{2018a+bc}}=\frac{a}{a+\sqrt{(a+b+c)a+bc}}=\frac{a}{a+\sqrt{ab+(a^2+bc)+ac}}$$

$$\le\frac{a}{a+\sqrt{ab+2a\sqrt{bc}+ac}}=\frac{a}{a+\sqrt{\left(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}\right)^2}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Tương tự: $\frac{b}{b+\sqrt{2018b+ca}}\le\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$; $\frac{c}{c+\sqrt{2018c+ab}}\le\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Cộng theo vế ta được: $P\le\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=1$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{2018}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1.

Câu 98: [TS10 Chuyên Đồng Tháp, 2018-2019]

Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^3+y^3+z^3=1$. Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}}\ge 2$

Lời giải

Sử dụng BĐT AM-GM ta được:

$$\sqrt{x^2\left(1-x^2\right)}\le\frac{x^2+1-x^2}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x^3}{\sqrt{x^2\left(1-x^2\right)}}\ge 2x^3$$

Tương tự: $\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\ge 2y^3$; $\frac{x^2}{\sqrt{1-z^2}}\ge 2z^3$

Cộng theo vế ta được: $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}}\ge 2\left(x^3+y^3+z^3\right)=2$ (đpcm)

Câu 99: [TS10 Chuyên Thừa Thiên Huế, 2018-2019]

Cho a, b, c là số dương thay đổi thỏa mãn điều kiên: $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$. Tìm giá trị biểu thức: $E=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$E=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{2\left(a+b+c\right)}=\frac{a+b+c}{2}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của E là 1.

Câu 100: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2018-2019]

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c\le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=\frac{a^2+6a+3}{a^2+a}+\frac{b^2+6b+3}{b^2+b}+\frac{c^2+6c+3}{c^2+c}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a^2+6a+3}{a^2+a}=\frac{\left(3a^2+3\right)+6a-2a^2}{a^2+a}\overset{AM-GM}{\ge}\frac{6a+6a-2a^2}{a^2+a}=\frac{12a-2a^2}{a^2+a}=\frac{14}{a+1}-2$$

Tương tự: $\frac{b^2+6b+3}{b^2+b}\ge\frac{14}{b+1}-2$; $\frac{c^2+6c+3}{c^2+c}\ge\frac{14}{c+1}-2$

Cộng theo vế và sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng cộng mẫu số ta được:

$$M=\frac{a^2+6a+3}{a^2+a}+\frac{b^2+6b+3}{b^2+b}+\frac{c^2+6c+3}{c^2+c}\ge 14\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)-6$$

$$\ge 14.\frac{9}{a+b+c+3}-6\ge 14.\frac{9}{3+3}-6=15$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 101: [TS10 Chuyên Vĩnh Long, 2018-2019]

Cho x, y, z dương thỏa mãn $x+y+z=4$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}\ge 1$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge\frac{1}{x}.\frac{4}{y+z}=\frac{4}{x\left(y+z\right)}\ge\frac{16}{\left(x+y+z\right)^2}=1\,(\text{đpcm})$$

Dấu "=" xảy ra khi x = 2, y = z = 1.

NĂM HỌC 2016-2017

Câu 102: [TS10 Chuyên Hà Tĩnh, 2016-2017]

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn: $a+b+c=2016$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a}{a+\sqrt{2016a+bc}}+\dfrac{b}{b+\sqrt{2016b+ac}}+\dfrac{c}{c+\sqrt{2016c+ab}}$.

Lời giải

Ta có $a+\sqrt{2016a+bc}=a+\sqrt{\left(a+b+c\right)a+bc}=a+\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}$

Áp dụng bđt Bunyakoskicopski ta có:

$$\left(a+b\right)\left(a+c\right)=\left[\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2\right].\left[\left(\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{a}\right)^2\right]\ge\left(\sqrt{ac}+\sqrt{ab}\right)^2$$

Suy ra $a+\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}\ge a+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$

Suy ra $\dfrac{a}{a+\sqrt{2016a+bc}}\le\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Tương tự $\dfrac{b}{b+\sqrt{2016b+ac}}\le\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$; $\dfrac{c}{c+\sqrt{2016c+ab}}\le\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Suy ra $P\le\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=1$, Dấu = xảy ra khi $a=b=c=672$

Câu 103: [TS10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, 2016-2017]

Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn ab + bc + ca = 3abc. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Từ điều kiện đề bài ta có $\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=3\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3$

Áp dụng hai lần bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$a^2+bc\ge2\sqrt{a^2.bc}=2a\sqrt{bc}\Rightarrow\frac{a}{a^2+bc}\le\frac{2}{2a\sqrt{bc}}=\frac{1}{2\sqrt{bc}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}}.\frac{1}{\sqrt{c}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Rightarrow\frac{a}{a^2+bc}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Tương tự ta có: $\frac{b}{b^2+ca}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right);\frac{c}{c^2+ab}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Suy ra $\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{3}{2}$.

Câu 104: [TS10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, 2016-2017]

Cho hai số thực *a*, *b* đều lớn hơn 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{6}{a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}}+\sqrt{3ab+4}\ge\frac{11}{2}.$$

Lời giải

Ta có: $a\sqrt{b-1}\le a.\frac{b-1+1}{2}=\frac{ab}{2}$.

Tương tự: $b\sqrt{a-1}\le b.\frac{a-1+1}{2}=\frac{ab}{2}\Rightarrow\frac{6}{a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}}\ge\frac{6}{ab}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=2$.

$$Q=\frac{6}{a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}}+\sqrt{3ab+4}\ge\frac{6}{ab}+\sqrt{3ab+4}=\frac{18}{3ab}+\sqrt{3ab+4}.$$

Đặt $y=\sqrt{3ab+4}\Rightarrow 3ab=y^2-4$. Khi đó:

$$Q\ge\frac{18}{y^2-4}+y=\frac{18}{(y+2)(y-2)}+\frac{3}{4}(y-2)+\frac{1}{4}(y+2)+1\overset{AM-GM}{\ge}3\sqrt[3]{18.\frac{3}{4}.\frac{1}{4}}+1=\frac{11}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $y=2$ hay $a=b=2$.

Câu 105: [TS10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, 2016-2017]

Cho *x, y, z* là 3 số dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3xyz$. Chứng minh :

$$\frac{x^2}{y+2}+\frac{y^2}{z+2}+\frac{z^2}{x+2}\ge1.$$

Lời giải

Ta có $\frac{x^2}{y+2}+\frac{y+2}{9}\ge2\sqrt{\frac{x^2}{y+2}.\frac{y+2}{9}}=\frac{2}{3}x\Rightarrow\frac{x^2}{y+2}\ge\frac{6x-y-2}{9}$

Tương tự $\frac{y^2}{z+2}\ge\frac{6y-z-2}{9}$, $\frac{z^2}{x+2}\ge\frac{6z-x-2}{9}$.

Đặt vế trái của (*) là P. Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta được: $P \geq \dfrac{5(x+y+z)-6}{9}$

Lại có $\dfrac{(x+y+z)^3}{9} \geq 3xyz,\ x^2+y^2+z^2 \geq \dfrac{1}{3}(x+y+z)^2$.

Từ giả thiết suy ra $\dfrac{(x+y+z)^3}{9} \geq \dfrac{1}{3}(x+y+z)^2 \Leftrightarrow x+y+z \geq 3$.

Do đó $P \geq 1$.

Câu 106: [TS10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội, 2016-2017]

Cho a, b, c là ba số thực không âm và thỏa mãn: a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4} \geq 7$$

Lời giải

Vì a, b, c không âm và có tổng bằng 1 nên $0 \leq a,b,c \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} a(1-a) \geq 0 \\ b(1-b) \geq 0 \\ c(1-c) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq a^2 \\ b \geq b^2 \\ c \geq c^2 \end{cases}$

Suy ra $\sqrt{5a+4} \geq \sqrt{a^2+4a+4} = \sqrt{(a+2)^2} = a+2$

Tương tự $\sqrt{5b+4} \geq b+2; \sqrt{5c+4} \geq c+2$

Do đó $\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4} \geq (a+b+c)+6 = 7$ (đpcm)

Câu 107: [TS10 Chuyên Sơn La, 2016-2017]

Cho hai số dương a, b thỏa mãn: $a+b \leq 2\sqrt{2}$. Tìm GTNN của biểu thức: $P = \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

Lời giải

Với mọi a, b ta luôn có: $(a - b)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab \geq 4ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$ (*)

Vì a, b đều dương nên ab và a+ b cũng dương bất đẳng thức (*) trở thành:

$\Leftrightarrow \dfrac{a+b}{ab} \geq \dfrac{4}{a+b} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b} \Rightarrow P \geq \dfrac{4}{a+b}$ mà $a+b \leq 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \dfrac{4}{a+b} \geq \dfrac{4}{2\sqrt{2}} \Rightarrow P \geq \sqrt{2}$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ a+b = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{2}$

Vậy min P= $\sqrt{2}$

Câu 108: [TS10 Chuyên Bình Thuận, 2016-2017]

Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng:

$$\frac{xy}{x^2+yz+zx}+\frac{yz}{y^2+zx+xy}+\frac{zx}{z^2+xy+yz}\le\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM-Schwar ta có:

$$\frac{xy}{x^2+yz+zx}\le\frac{xy\left(y^2+yz+zx\right)}{\left(x^2+yz+zx\right)\left(y^2+yz+zx\right)}\le\frac{xy\left(y^2+yz+zx\right)}{\left(xy+yz+zx\right)^2}$$

Tương tự: $\frac{yz}{y^2+zx+xy}\le\frac{yz\left(z^2+zx+xy\right)}{\left(xy+yz+zx\right)^2}$; $\frac{zx}{z^2+xy+yz}\le\frac{zx\left(x^2+xy+yz\right)}{\left(xy+yz+zx\right)^2}$

Suy ra

$$\frac{xy}{x^2+yz+zx}+\frac{yz}{y^2+zx+xy}+\frac{zx}{z^2+xy+yz}\le\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(xy+yz+zx\right)}{\left(xy+yz+zx\right)^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi x = y = z.

Câu 109: [TS10 Chuyên Thừa Thiên Huế, 2016-2017]

Cho x, y > 0 và $x+y\ge3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$M=6x^2+4y^2+10xy+\frac{4x}{y}+\frac{3y}{x}+2016$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$xy+\frac{4x}{y}\ge4x\ ;\quad 3xy+\frac{3y}{x}\ge6y$$

Do đó: $A\ge6x^2+6xy+4y^2+4x+6y=6x\left(x+y\right)+4y^2+6y+4x\ge6x.3+4y^2+6y+4x$

$$=2x+4y^2+6y\ge22x+4\left(4y-4\right)+6y=22\left(x+y\right)-16\ge50$$

Suy ra: $M\ge50+2016=2066$

Dấu "=" xảy ra khi x = 1; y = 2.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 2066.

Câu 110: [TS10 Chuyên Thái Nguyên, 2016-2017]

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge9$

Ta có: $P=\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=\sqrt{x-9+6\sqrt{x-9}+9}+\sqrt{x-9-6\sqrt{x-9}+9}$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x-9}+3\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-9}-3\right)^2}=\sqrt{x-9}+3+\left|3-\sqrt{x-9}\right|\ge\sqrt{x-9}+3+3-\sqrt{x-9}$$

$$=6$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x\ge9\\3-\sqrt{x-9}\ge0\end{cases}\Leftrightarrow9\le x\le18.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 6.

Câu 111: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2016-2017]

Cho x, y, z ≥ 1 và thỏa mãn $3x^2+4y^2+5z^2=52$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=x+y+z$

Dự đoán: Ta đoán dấu bằng xảy ra khi x = y = 1, z = 3.

Lời giải

Do x, y, z ≥ 1 nên: $(x-1)(y-1)\ge 0 \Leftrightarrow xy\ge x+y-1$

Làm tương tự và cộng theo vế ta được: $xy+yz+zx\ge 2(x+y+z)-3$

Do đó:

$$5(x+y+z)^2=5(x^2+y^2+z^2)+10(xy+yz+zx)\ge 52+2x^2+y^2+10[2(x+y+z)-3]$$

$$\ge 52+2+1+20(x+y+z)-30$$

Suy ra: $x+y+z\ge 5$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = 1, z = 3.

Vậy giá trị nhỏ nhất của F là 5.

Câu 112: [TS10 Chuyên Quảng Bình, 2016-2017]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$.

Chứng minh: $\dfrac{1}{\sqrt{a^3+b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b^3+c}}+\dfrac{1}{\sqrt{c^3+a}}\le\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}}\le\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{a^3.b}}}=\frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt[4]{a^3.b}}\le\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Tương tự: $\dfrac{1}{\sqrt{b^3+c}}\le\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left(\dfrac{3}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$; $\quad\dfrac{1}{\sqrt{c^3+a}}\le\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left(\dfrac{3}{c}+\dfrac{1}{a}\right)$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+c}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+a}}\le\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{3}{\sqrt{2}}\text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 113: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2016-2017]

Cho các số x, y dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2}{\sqrt{(2x+y)^3+1}-1}+\frac{2}{\sqrt{(x+2y)^2+1}-1}+\frac{(2x+y)(x+2y)}{4}-\frac{8}{3(x+y)}$$

Lời giải

Đặt $2x+y=a,\ x+2y=b$ và sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$P=\frac{2}{\sqrt{a^3+1}-1}+\frac{2}{\sqrt{b^3+1}-1}+\frac{ab}{4}-\frac{8}{a+b}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{(a+1)(a^2-a+1)}-1}+\frac{2}{\sqrt{(b+1)(b^2-a+1)}-1}+\frac{ab}{4}-\frac{8}{a+b}$$

$$\geq\frac{2}{\frac{a+1+a^2-a+1}{2}-1}+\frac{2}{\frac{b+1+b^2-a+1}{2}-1}+\frac{ab}{4}-\frac{4}{\sqrt{ab}}=\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{ab}{4}-\frac{4}{\sqrt{ab}}$$

$$\geq\frac{8}{ab}+\frac{ab}{4}-\frac{4}{\sqrt{ab}}$$

Đặt $t=\sqrt{ab}$. Ta sẽ chứng minh: $\frac{8}{t^2}+\frac{t^2}{4}-\frac{4}{t}\geq 1$ (*)

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow(t-2)^2(t^2+4t+8)\geq 0$

Vậy $P\geq 1$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1.

Câu 114: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2016-2017]

Cho x, y là hai số dương. Chứng minh rằng: $\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+y}-\frac{x+y}{2}\leq\frac{1}{4}$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$x+\frac{1}{4}\geq\sqrt{x}\qquad(1);$$

$$y+\frac{1}{4}\geq\sqrt{y}\qquad(2);$$

$$x+y\geq 2\sqrt{xy}\qquad(3).$$

Cộng theo vế (1) và (2): $x+y+\frac{1}{2}\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}\qquad(4)$

Nhân theo vế (3) và (4):

$$(x+y)^2+\frac{1}{2}(x+y)\geq 2\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\qquad(5)$$

Chia của 2 vế của (5) cho $2(x+y)$ được:

$$\frac{x+y}{2}+\frac{1}{4}\geq\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}\Rightarrow\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+y}-\frac{x+y}{2}\leq\frac{1}{4}\text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{1}{4}$.

Câu 115: [TS10 Chuyên Ninh Bình, 2016-2017]

Cho a, b, c là số thực dương thỏa mãn abc = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\leq\frac{3}{4}$$

Lời giải

Với x, y dương ta có bất đẳng thức thức: $\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(*)$:

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow\frac{x+y}{4xy}\ge\frac{1}{x+y}\Leftrightarrow(x+y)^2\ge 4xy\Leftrightarrow(x-y)^2\ge 0$ (luôn đúng)

Bất đẳng thức (*) xảy ra dấu "=" khi x = y.

Áp dụng BĐT (*) ta được: $\frac{1}{ab+a+2}=\frac{c}{1+ac+2c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1}+\frac{1}{a+1}\right)$

Chứng minh tương tự ta được:

$$\frac{1}{bc+b+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right);\quad \frac{1}{ca+c+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{b}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+1}+\frac{1}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{1}{c}\right)=\frac{3}{4}\text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 116: [TS10 Chuyên Nam Định, 2016-2017]

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $(x-y)(x-z)=1$ và $y\ne z$. Chứng minh:

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\ge 4$$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}=\frac{(x-y)^2+(x-z)^2}{(x-y)^2(x-z)^2}=\frac{(y-z)^2+2(x-y)(x-z)}{(x-y)^2(x-z)^2}$

$$=\frac{(y-z)^2}{(x-y)^2(x-z)^2}+2.\frac{1}{(x-y)(x-z)}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\ge\frac{(y-z)^2}{(x-y)^2(x-z)^2}+2.\frac{1}{(x-y)(x-z)}+\frac{1}{(z-x)^2}$$

$$\overset{AM-GM}{\ge}\frac{4}{(x-y)(x-z)}=4$$

Câu 117: [TS10 Chuyên Ninh Thuận, 2016-2017]

Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện: $ab+bc+ca=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=a^2+b^2+c^2-6(a+b+c)+2017$

Lời giải

Ta có:

$$P=a^2+b^2+c^2-6(a+b+c)+2017=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)-6-6(a+b+c)+2017$$
$$=(a+b+c)^2-6(a+b+c)+2011=(a+b+c)^2-6(a+b+c)+9+2002$$
$$=(a+b+c-3)^2+2002$$
$$\geq 2002$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2002.

Câu 118: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2016-2017]

Cho a, b, c > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M=\dfrac{3a^4+3b^4+c^3+2}{(a+b+c)^3}$

Lời giải

Sử dụng AM-GM ta được:

$$3a^4+1=a^4+a^4+a^4+1\geq 4\sqrt[4]{a^{12}}=4a^3;\quad 3b^4+1=b^4+b^4+b^4+1\geq 4\sqrt[4]{b^{12}}=4b^3$$

Do đó:

$$M=\frac{3a^4+3b^4+c^3+2}{(a+b+c)^3}\geq\frac{4a^3+4b^3+c^3}{(a+b+c)^3}$$

Ta dễ dàng chứng minh được BĐT với a, b dương thì: $4(a^3+b^3)\geq(a+b)^3\quad(*)$

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow a^3+b^3\geq ab(a+b)\Leftrightarrow(a+b)(a-b)^2\geq 0$ (đúng)

Vậy (*) được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi a = b.

Áp dụng (*) ta được:

$$M\geq\frac{4a^3+4b^3+c^3}{(a+b+c)^3}\geq\frac{(a+b)^3+c^3}{(a+b+c)^3}\geq\frac{(a+b+c)^3}{4(a+b+c)^3}=\frac{1}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = 1, c = 2.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{1}{4}$

Câu 119: [TS10 Chuyên Ninh Thuận, 2016-2017]

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}=12$

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{2x+3y+3z}+\dfrac{1}{3x+2y+3z}+\dfrac{1}{3x+3y+2z}\leq 3.$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Với a, b, c dương ta có: $\dfrac{1}{a+b}\leq\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ (*)

Thậy vậy: $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geq 2\sqrt{ab}.\dfrac{2}{\sqrt{ab}}=4\Rightarrow\dfrac{1}{a+b}\leq\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

Vậy (*) được chứng minh, dấu "=" xảy ra khi a = b .

Sử dụng (*) ta được:

$$\frac{1}{2x+3y+3z}=\frac{1}{(x+y)+(x+z)+2(y+z)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x+y)+(x+z)}+\frac{1}{2(y+z)}\right)$$

$$\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)+\frac{1}{2(y+z)}\right]=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{2}{y+z}\right)$$

Tương tự:

$$\frac{1}{3x+2y+3z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{2}{x+z}\right);\quad \frac{1}{3x+3y+2z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}+\frac{2}{x+y}\right).$$

Cộng 3 BĐT trên theo vế được:

$$\frac{1}{2x+3y+3z}+\frac{1}{3x+2y+3z}+\frac{1}{3x+3y+2z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)=3\ \text{(đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z.

Câu 120: [TS10 Chuyên Đồng Tháp, 2016-2017]

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}$$

Lời giải

Ta có:

$$P=\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}=\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}$$

Do a dương và $a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow 0<a<1\Rightarrow 0<a^2<1$

Áp dụng AM-GM ta được:

$$a^2\left(1-a^2\right)^2=\frac{1}{2}.2x^2.\left(1-x^2\right)\left(1-x^2\right)\le\frac{1}{2}\left[\frac{2x^2+\left(1-x^2\right)+\left(2-x^2\right)}{3}\right]^3=\frac{4}{27}$$

$$\Rightarrow a\left(1-a^2\right)\le\frac{2}{3\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{1}{a\left(1-a^2\right)}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{a}{1-a^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

Chứng minh tương tự ta được: $\frac{b}{1-b^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}b^2;\quad \frac{c}{1-c^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$P=\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{(đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 121: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2016-2017]

Biết $x\ge y\ge z, x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=6.$

1) Tính $S=\left(x-y\right)^2+\left(x-y\right)\left(y-z\right)+\left(y-z\right)^2$

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)\right|$

Lời giải

1) Ta có:

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 6 - \frac{(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{2} = 6 - \frac{0^2 - 6}{2} = 9$$

2) Đặt $a = x - y, b = y - z$. Khi đó ta có $a \ge 0, b \ge 0$ và $a^2 + ab + b^2 = 9$

$$\Rightarrow (a+b)^2 - 9 = ab \le \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow a + b \le 2\sqrt{3}$$

Đặt $t = a + b$. Khi đó: $P = t(t^2 - 9)$

Ta sẽ chứng minh: $t(t^2 - 9) \le 6\sqrt{3}$ $(*)$

Thật vậy: $(*) \Leftrightarrow (t - 2\sqrt{3})(t + \sqrt{3}) \le 0$ (đúng)

Do đó: $P \le 6\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = \sqrt{3}, y = 0, z = -\sqrt{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $6\sqrt{3}$

Câu 122: [TS10 Chuyên KHTN, 2016-2017]

Với x, y là số thực thỏa mãn điều kiện $0 < x \le x \le y \le 2, 2x + y \ge 2xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x^2(x^2 + 1) + y^2(y^2 + 1)$

Lời giải

$P = x^4 + y^4 + x^2 + y^2$

Ta có bất đẳng thức: $a^2 + b^2 \ge \frac{1}{2}(a+b)^2$ $\quad (*)$

Ta có: $2x + y \ge 2xy \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{2}{y} \ge 2$ (vì x, y dương)

Áp dụng (*) suy ra: $\frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right)^2 \ge 2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \ge 2 - \frac{4}{y^2}$ (1)

Áp dụng tiếp (*) ta có: $\frac{1}{x^4} + \frac{16}{y^4} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2}\right)^2 \ge 2 \Rightarrow \frac{1}{x^4} \ge 2 - \frac{16}{y^4}$ $\quad (2)$

Có $x \le y \le 2 \Rightarrow \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)(y^2 - 4) \le 0 \Leftrightarrow y^2 \le 4 + x^2 - \frac{4x^2}{y^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 4 + 2x^2 - \frac{4x^2}{y} = 4 + x^2\left(2 - \frac{4}{y^2}\right) \le 4 + x^2.\frac{1}{x^2} = 5$ (do (1))

Tương tự: $\left(1 - \frac{x^4}{y^4}\right)(y^4 - 4) \le 0 \Leftrightarrow y^4 \le 16 + x^4 - \frac{16x^4}{y^4}$

$\Leftrightarrow y^4 + x^4 \le 16 + \left(2 - \frac{16}{y^4}\right).x^4 \le 16 + \frac{1}{x^4}.x^4 = 17$ (do (2))

$P \le 17 + 5 = 22$

Dấu "=" xảy ra khi x = 1, y = 2.

Vậy gí trị lớn nhất của P là 22.

Câu 123: [TS10 Chuyên Nam Định, 2016-2017]

Cho hai số a, b không âm thỏa mãn $a+b\le 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2+2a}{1+2a}+\frac{1-4b}{1+4b}\ge \frac{8}{15}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$P=\frac{2+2a}{1+2a}+\frac{1-4b}{1+4b}=\frac{1}{1+2a}+1+\frac{1-4b}{1+4b}=\frac{1}{1+2a}+\frac{2}{1+4b}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{1}{1+2a}+\frac{2}{1+4b}=\frac{1}{1+2a}+\frac{2}{1+4b}=\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{\frac{1}{2}+2b}\ge 2\frac{1}{\sqrt{(1+2a)(\frac{1}{2}+2b)}}\quad (1)$$

$$\sqrt{(1+2a)(\frac{1}{2}+2b)}\le \frac{1+2a+\frac{1}{2}+2b}{2}\le \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow 2\frac{1}{\sqrt{(1+2a)(\frac{1}{2}+2b)}}\ge \frac{8}{15}\quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{2+2a}{1+2a}+\frac{1-4b}{1+4b}\ge \frac{8}{15}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra chỉ khi : $1+2a=\frac{1}{2}+2b$ và $a+b=3 \Leftrightarrow a=\frac{11}{8};b=\frac{13}{8}$

Cách khác:

Ta có:

$$P=\frac{2+2a}{1+2a}+\frac{1-4b}{1+4b}=\frac{1}{1+2a}+1+\frac{1-4b}{1+4b}=\frac{1}{1+2a}+\frac{2}{1+4b}=2\left(\frac{1}{2+4a}+\frac{1}{1+4b}\right)$$

Với a, b, c dương ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge \frac{4}{a+b}$ (*)

Thậy vậy: $\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 2\sqrt{ab}.\frac{2}{\sqrt{ab}}=4\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge \frac{4}{a+b}$

Vậy (*) được chứng minh, dấu "=" xảy ra khi a = b .

Áp dụng (*) ta được:

$$P=2\left(\frac{1}{2+4a}+\frac{1}{1+4b}\right)\ge 2.\frac{4}{2+4a+1+4b}=\frac{8}{3+4\left(a+b\right)}\ge \frac{8}{3+4.3}=\frac{8}{15}\text{(đpcm)}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} a+b=3 \\ 2+4a=1+4b \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{11}{8}; b=\frac{13}{8}$

Câu 124: [TS10 Chuyên Nam Định, 2016-2017]

Cho a, b, c dương và thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=\frac{1}{4x^2-yz+2}+\frac{1}{4y^2-zx+2}+\frac{1}{4z^2-xy+2}$$

Lời giải

Ta có

$$\frac{1}{4x^2-yz+2}=\frac{1}{4x^2-yz+2(xy+yz+zx)}=\frac{1}{4x^2+2xy+yz+2zx}=\frac{1}{(2x+y)(2x+z)}.$$

Tương tự, ta có $S=\frac{1}{(2x+y)(2x+z)}+\frac{1}{(2y+z)(2y+x)}+\frac{1}{(2z+x)(2z+y)}$

$$\Leftrightarrow S=\frac{yz}{(2xz+yz)(2xy+yz)}+\frac{xz}{(2xy+xz)(2yz+xz)}+\frac{xy}{(2yz+xy)(2xz+xy)}$$

Với mọi a,b ta có $(a-b)^2\ge 0\Rightarrow (a+b)^2\ge 4ab\Rightarrow ab\le\frac{(a+b)^2}{4}$.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được:

$$S\ge\frac{yz}{\frac{(2xy+2yz+2zx)^2}{4}}+\frac{xz}{\frac{(2xy+2yz+2zx)^2}{4}}+\frac{xy}{\frac{(2xy+2yz+2zx)^2}{4}}$$

$$\Rightarrow S\ge\frac{xy+yz+zx}{\frac{(2xy+2yz+2zx)^2}{4}}=\frac{1}{xy+yz+zx}=1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng 1.

Cách khác:

Đặt $a=xy,b=yz,c=zx$ khi đó $a+b+c=1$ và $x^2=\frac{ac}{b};y^2=\frac{ab}{c},z^2=\frac{bc}{a}$

Ta có:

$$\frac{1}{4x^2-yz+2}=\frac{1}{\frac{4ac}{b}-b+2(a+b+c)}=\frac{1}{\frac{4ac}{b}+2a+b+2c}$$

$$=\frac{b}{4ac+2ab+b^2+2bc}=\frac{b}{(2a+b)(2c+b)}\ge\frac{4b}{(2a+2b+2c)^2}=\frac{a}{(a+b+c)^2}$$

Tương tự: $\frac{1}{4y^2-zx+2}\ge\frac{c}{(a+b+c)^2}$; $\frac{1}{4z^2-xy+2}\ge\frac{a}{(a+b+c)^2}$

Cộng 3 bất đẳng trên theo vế ta được:

$$P\ge\frac{a+b+c}{(a+b+c)^2}=\frac{1}{a+b+c}=1$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1.

Câu 125: [TS10 Chuyên Lam Sơn, 2016-2017]

Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z\le\frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x(yz+1)^2}{z^2(zx+1)}+\frac{y(zx+1)^2}{x^2(xy+1)}+\frac{z(xy+1)^2}{y^2(yz+1)}$$

Lời giải

Ta có:

$$P=\frac{x(yz+1)^2}{z^2(zx+1)}+\frac{y(zx+1)^2}{x^2(xy+1)}+\frac{z(xy+1)^2}{y^2(yz+1)}=\frac{\left(\frac{yz+1}{z}\right)^2}{\left(\frac{zx+1}{x}\right)}+\frac{\left(\frac{zx+1}{x}\right)^2}{\left(\frac{xy+1}{y}\right)}+\frac{\left(\frac{xy+1}{y}\right)^2}{\left(\frac{yz+1}{z}\right)}$$

$$\Rightarrow P=\frac{\left(y+\frac{1}{z}\right)^2}{z+\frac{1}{x}}+\frac{\left(z+\frac{1}{x}\right)^2}{x+\frac{1}{y}}+\frac{\left(x+\frac{1}{y}\right)^2}{y+\frac{1}{z}}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM-Schwar ta có:

$$P=\frac{\left(y+\frac{1}{z}\right)^2}{z+\frac{1}{x}}+\frac{\left(z+\frac{1}{x}\right)^2}{x+\frac{1}{y}}+\frac{\left(x+\frac{1}{y}\right)^2}{y+\frac{1}{z}}\ge\frac{\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}{x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

$$=x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge x+y+z+\frac{9}{x+y+z}=(x+y+z)+\frac{9}{4(x+y+z)}+\frac{27}{4(x+y+z)}$$

$$\overset{AM-GM}{\ge}2\sqrt{(x+y+z).\frac{9}{4(x+y+z)}}+\frac{9}{4.\frac{3}{2}}=\frac{15}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{2}$

Câu 126: [TS10 Chuyên Lam Sơn vòng 2, 2016-2017]

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+...+\frac{1}{2016\sqrt{2015}}>\frac{1931}{1975}$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+...+\frac{1}{2016\sqrt{2015}}>\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{2015.2016}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}$$

$$=1-\frac{1}{2016}=\frac{2015}{2016}>\frac{1931}{1975} \quad \text{(đpcm)}$$

Câu 127: [TS10 Chuyên Hải Phòng, 2016-2017]

Cho $a,b,c>0; a+b+c\ge 9$, tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A=2\sqrt{a^2+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{5}}+3\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{25}{c}}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM-Schwar ta được:

$$\left(a^2+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{5}\right)(1+3+5)\ge(a+b+c)^2 \Rightarrow 2\sqrt{a^2+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{5}}\ge\frac{2(a+b+c)}{3}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{25}{c}\ge\frac{(1+3+5)^2}{a+b+c}=\frac{81}{a+b+c}\Rightarrow 3\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{25}{c}}\ge\frac{27}{\sqrt{a+b+c}}$$

Do đó:

$$A=2\sqrt{a^2+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{5}}+3\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{25}{c}}\ge\frac{2(a+b+c)}{3}+\frac{27}{\sqrt{a+b+c}}$$

$=$

$$=\frac{a+b+c}{6}+\frac{a+b+c}{2}+\frac{27}{2\sqrt{a+b+c}}+\frac{27}{2\sqrt{a+b+c}}\ge\frac{9}{6}+3\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{2}.\frac{27}{2\sqrt{a+b+c}}.\frac{27}{2\sqrt{a+b+c}}}$$

$$=\frac{9}{6}+3.\frac{9}{2}=\frac{3}{2}+\frac{27}{2}=15$$

Dấu "=" xảy ra khi a = 1, b = 3, c = 5.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 15.

Câu 128: [TS10 Chuyên Tiền Giang, 2016-2017]

Cho a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c\le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2018}{ab+bc+ca}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số dương $a+b+c\ge\sqrt[3]{abc}; \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$

Suy ra $$\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9\,(*)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Ta có $$ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2\Rightarrow ab+bc+ca\le\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}\le 3$$

Suy ra $$\frac{2016}{ab+bc+ca}\ge\frac{2016}{3}=672$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) , ta có

$$\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)\ge 9$$

Suy ra $$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{ab+bc+ca}\ge\frac{9}{\left(a+b+c\right)^2}\ge 1$$

Do đó ta được $P=\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{2018}{ab+bc+ca}\ge 673$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 673.

Câu 129: [TS10 Chuyên Lào Cai, 2016-2017]

Cho a, b, c là số dương thỏa mãn: $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}=2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{8a^2+1}+\frac{1}{8b^2+1}+\frac{1}{8c^2+1}\ge 1$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2\Rightarrow 3-\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)=1\Rightarrow\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=1$$

Mặt khác:

$$\frac{1}{8a^2+1}+\frac{1}{8b^2+1}+\frac{1}{8c^2+1}\ge 1\Leftrightarrow 3-\left(\frac{1}{8a^2+1}+\frac{1}{8b^2+1}+\frac{1}{8c^2+1}\right)\le 2$$
$$\Leftrightarrow\frac{8a^2}{8a^2+1}+\frac{8b^2}{8b^2+1}+\frac{8c^2}{8c^2+1}\le 2\Leftrightarrow\frac{4a^2}{8a^2+1}+\frac{4b^2}{8b^2+1}+\frac{4c^2}{8c^2+1}\le 1$$

Ta chứng minh: $\dfrac{4a^2}{8a^2+1}\le\dfrac{a}{a+1}\,(*)$

Thật vậy: $\dfrac{4a^2}{8a^2+1}\le\dfrac{a}{a+1}\Leftrightarrow 4a^3+4a^2\le 8a^3+a\Leftrightarrow 4a^3-4a^2+a\ge 0$

$$\Leftrightarrow 4a^2-4a+1\ge 0\Leftrightarrow\left(2a-1\right)^2\ge 0\ \text{(đúng)}$$

Tương tự: $\dfrac{4b^2}{8b^2+1}\le\dfrac{b}{b+1}$; $\dfrac{4c^2}{8c^2+1}\le\dfrac{c}{c+1}$

Cộng 2 bất đẳng thức theo vế ta được:

$$\frac{4a^2}{8a^2+1}+\frac{4b^2}{8b^2+1}+\frac{4c^2}{8c^2+1}\le\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=1\,(\text{đpcm})$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{2}$

Câu 130: [TS10 Chuyên Cần Thơ, 2016-2017]

Cho a, b, c lần lượt là độ dài 3 cạnh của tam giác và $2ab+3bc+4ca=5abc$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{7}{a+b-c}+\dfrac{6}{b+c-a}+\dfrac{5}{c+a-b}$

Lời giải

Ta có: $2ab+3bc+4ca=5abc\Leftrightarrow\dfrac{2}{c}+\dfrac{3}{a}+\dfrac{4}{b}=5\left(\text{do } a,b,c>0\right)$

Sử dụng BĐT AM-GM-Schwar ta được:

$$5=\frac{2}{c}+\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=\frac{2^2}{2c}+\frac{3^2}{3a}+\frac{4^2}{4b}\ge\frac{\left(2+3+4\right)^2}{3a+4b+2c}\Rightarrow 3a+4b+2c\ge\frac{81}{5}$$

$$P=\frac{7}{a+b-c}+\frac{6}{b+c-a}+\frac{5}{c+a-b}=\frac{7^2}{7\left(a+b-c\right)}+\frac{6^2}{6\left(b+c-a\right)}+\frac{5^2}{5\left(c+a-b\right)}$$

$$\ge\frac{\left(7+6+5\right)^2}{7\left(a+b-c\right)+6\left(b+c-a\right)+5\left(c+a-b\right)}=\frac{18^2}{2\left(3a+4b+2c\right)}=10$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{9}{5}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 10.

Câu 131: [TS10 Chuyên Đồng Nai, 2016-2017]

Cho a, b, c là số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$

1) Chứng minh rằng: $ab+bc+ca\le 3$
2) Chứng minh rằng: $a^2b+b^2c+c^2a\le 4$

Lời giải

1) Ta có:

$$ab+bc+ca\le\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}=3\,(\text{đpcm})$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c =1.

2) Giả sử b nằm giữa a và c ta có:

$\left(b-a\right)\left(b-c\right)\le 0\Leftrightarrow b^2+ac\le ab+bc\Leftrightarrow b^2c+ac^2\le b^2c+ac^2$

Áp dụng AM-GM ta có:

$$a^2b+b^2c+c^2a\le a^2b+b^2c+2abc=b\left(a+c\right)^2=b\left(a+c\right)\left(a+c\right)\le\frac{4\left(a+b+c\right)^3}{27}=4$$

Câu 132: [TS10 Chuyên Bình Định, 2016-2017]

Cho x, y, z thay đổi thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P=xy+yz+xz+\frac{1}{2}\left[x^2(y-z)^2+y^2(x-z)^2+z^2(x-y)^2\right]$$

Lời giải

Ta chứng minh:

$$P=xy+yz+xz+\frac{1}{2}\left[x^2(y-z)^2+y^2(x-z)^2+z^2(x-y)^2\right]\le 1$$

$$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-xyz(x+y+z)\le(x^2+y^2+z^2)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(x^2+y^2)(x-y)^2+(y^2+z^2)(y-z)^2+(z^2+x^2)(x-z)^2\right]\ge 0 \text{ (đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1.

Câu 133: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2016-2017]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh rằng"

$$4(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3)\ge 9$$

Lời giải

Ta có:

$$4(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3)\ge 9$$

$$\Leftrightarrow 3(a^3+b^3+c^3)+27\le 12(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow 6abc\le a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$$

$$\Leftrightarrow 8abc\le(a+b)(b+c)(c+a)$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo AM-GM, vậy bài toán được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

Câu 134: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2016-2017]

Cho các số thực x, y, z ≥ 1 và thỏa mãn $3x^2+4y^2+5z^2=52$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=x+y+z$

Lời giải

***) Bài này muốn giải được trước tiên ta phải dự đoán giá trị lớn nhất của F đạt được khi x = y = 1, z = 3**

Ta có: $5(x^2+y^2+z^2)=52+2x^2+y^2\ge 52+2+1=55\Rightarrow x^2+y^2+z^2\ge 11 \quad (1)$

Lại có: $(x-1)(y-1)\ge 0\Leftrightarrow xy+1\ge x+y$

Tương tự: $yz+1\ge y+z;\quad zx+1\ge z+x$

Cộng theo vế: $xy+yz+zx+3\ge 2(x+y+z)\Rightarrow 2(xy+yz+zx)+6\ge 4(x+y+z)$ (2)

Lấy (1) cộng (2) theo vế ta được: $(x+y+z)^2\ge 5+4(x+y+z)\Leftrightarrow x+y+z\ge 5$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = 1, z = 3.

Vậy giá trị lớn nhất của F là 5.

Câu 135: [TS10 Chuyên Thừa Thiên Huế, 2016-2017]

Cho $x,y>0$ và $x+y\ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$M=6x^2+4y^2+10xy+\frac{4x}{y}+\frac{3y}{x}+2016$$

Lời giải

Ta có:

$$M=6x^2+4y^2+10xy+\frac{4x}{y}+\frac{3y}{x}+2016=(x+y)(6x+4y)+\frac{4(x+y)}{y}+\frac{3(y+x)}{x}+2009$$

$$=(x+y)\left(6x+4y+\frac{3}{x}+\frac{4}{y}\right)+2009\ge 3\left(6x+4y+\frac{3}{x}+\frac{4}{y}\right)+2009$$

$$=3\left[\left(3x+\frac{3}{x}\right)+\left(y+\frac{4}{y}\right)+3(x+y)\right]+2009$$

$$\ge 3\left[2\sqrt{3x.\frac{3}{x}}+2\sqrt{y.\frac{4}{y}}+3.3\right]+2009=2066$$

Dấu "=" xảy ra khi x = 1, y = 2.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 2066.

Câu 136: [TS10 Chuyên Phan Bội Châu, 2016-2017]

Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2}{(b+c)^2}+\frac{c}{4a}$$

Lời giải

Với x, y dương ta có các bất đẳng thức cơ bản sau (bạn đọc tự chứng minh):

$(x+y)^2\ge 4xy \quad (1)$

$x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{3}(x+y+z)^2 \qquad (2)$

$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{3}{2} \qquad (3)$

Áp dụng các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$$P=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2}{(b+c)^2}+\frac{c}{4a}=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2}{(b+c)^2}+\frac{c^2}{4ac}\ge\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2}{(b+c)^2}+\frac{c^2}{(a+c)^2}$$

$$\ge\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}\right)^2\ge\frac{1}{3}.\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

Dấu "=" xảy ra kho a = b = c.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{4}$

Câu 137: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2016-2017]

Cho 2 số thực x, y thỏa mãn $0 < x \le 1, 0 < y \le 1$ và x + y = 3xy.

Tìm GTLN và GTNN của biểu thức: $P = x^2 + y^2 - 4xy$

Lời giải

Ta có:

$P = x^2 + y^2 - 4xy = (x+y)^2 - 6xy = 9x^2y^2 - 6xy = (3xy-1)^2 - 1$

Do $x, y \in (0;1] \Rightarrow (1-x)(1-y) \ge 0 \Leftrightarrow 1 + xy \ge x + y = 3xy \Leftrightarrow xy \le \frac{1}{2}$

Mặt khác $x, y \in (0;1] \Rightarrow 3xy = x + y \overset{AM-GM}{\ge} 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \ge \frac{4}{9}$

Vậy $\frac{4}{9} \le xy \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} \le 3xy - 1 \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{9} \le (3xy-1)^2 \le \frac{1}{4}$

$\Rightarrow -\frac{8}{9} \le (3xy-1)^2 - 1 \le -\frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{8}{9} \le P \le -\frac{3}{4}$

Vậy: GTLN của P là $-\frac{3}{4}$ khi $(x, y) = \left(1; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

GTNN của P là $-\frac{8}{9}$ khi $x = y = \frac{2}{3}$

Câu 138: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2016-2017]

Cho 3 số thực a, b, c sao cho $0 < a \le 1, 0 < b \le 1, 0 < c \le 1$. Chứng minh:

$a + b + c + 3abc \ge 2(ab + bc + ca)$

Lời giải

Ta có:

$0 < a, b \le 1 \Rightarrow (1-a)(1-b) \ge 0 \Leftrightarrow 1 + ab \ge a + b \Rightarrow c + abc \ge ac + bc \quad (\text{do} \quad 0 < c \le 1)$

Chứng minh tương tự được: $b + abc \ge ab + bc$; $a + abc \ge ab + ac$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế được: $a + b + c + 3abc \ge 2(ab + bc + ca)$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi (a, b, c) = (1, 1, 0) và các hoán vị.

Câu 139: [TS10 Chuyên Hà Nội, 2016-2017]

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh:

$\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \ge a + b + c$

Lời giải

Áp dụng AM-GM ta được:

$\frac{2a^2}{a+b^2} = \frac{2a(a+b^2) - 2ab^2}{a+b^2} = 2a - \frac{2ab^2}{a+b^2} = 2a - \sqrt{b.ab} \ge 2a - \frac{b+ab}{2}$

Làm tương tự và cộng theo vế của bất đẳng thức ta được:

$\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \ge \frac{3}{2}(a+b+c) - \frac{ab+bc+ca}{2}$

Mặt khác ta có: $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\ge 3(ab+bc+ca)^2 \Rightarrow a+b+c\ge ab+bc+ca$

Do đó: $\dfrac{2a^2}{a+b^2}+\dfrac{2b^2}{b+c^2}+\dfrac{2c^2}{c+a^2}\ge \dfrac{3}{2}(a+b+c)-\dfrac{ab+bc+ca}{2}\ge a+b+c$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 140: [TS10 Chuyên Long An, 2016-2017]

Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q=\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

Lời giải

Do a, b, c là 3 cạnh của tam giác nên $(b+c-a)>0,(c+a-b)>0,(a+b-c)>0$

Sử dụng AM-GM ta được:

$$(b+c-a)(c+a-b)\le\left(\frac{b+c-a+c+a-b}{2}\right)^2=c^2$$

Tương tự: $(c+a-b)(a+b-c)\le a^2$; $(b+c-a)(a+b-c)\le b^2$

Nhân 3 bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$(b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2\le a^2b^2c^2 \Rightarrow (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\le abc$$

$$\Rightarrow Q=\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}\ge 1$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 1.

Câu 141: [TS10 Chuyên Phan Bộ Châu, 2016-2017]

Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q=14(a^2+b^2+c^2)+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$

Lời giải

Với a, b, c dương ta có: $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\ge 3(a^2b+b^2c+c^2a)$ (1)

Thật vậy:

$$VT=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=a^3+ab^2+ac^2+b^2+ba^2+bc^2+c^3+ca^2+cb^2$$

$$=(a^2b+b^2c+c^2a)+(a^3+ab^2)+(b^3+bc^2)+(c^3+ca^2)$$

$$\overset{AM-GM}{\ge}(a^2b+b^2c+c^2a)+2a^2b+2b^2c+2c^2a$$

$$=3(a^2b+b^2c+c^2a)=VP$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

Sử dụng (1) ta được:

$$Q \ge 14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{3\left(ab+bc+ca\right)}{a^2+b^2+c^2}=14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{3\left(1-a^2-b^2-c^2\right)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$=14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{3}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}-\frac{3}{2}$$

Ta có: $a^2+b^2+c^2 \ge \frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2=\frac{1}{3}$

Sử dụng AM-GM ta được:

$$Q \ge 14\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{3}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}-\frac{3}{2}$$

$$=\left[\frac{27}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)+\frac{3}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}\right]+\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)-\frac{3}{2}$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{27}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right).\frac{3}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}}+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}$$

$$=2.\frac{9}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{23}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{23}{3}$

NĂM HỌC 2015-2016

Câu 142: [TS10 Chuyên Hòa Bình, 2015-2016]

Cho $\begin{cases} x>0, y>0, z>0 \\ xyz=1 \end{cases}$.Chứng minh rằng: $\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}\le 1$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} x=a^3 \\ y=b^3 \\ z=c^3 \end{cases}$, vì $\begin{cases} x,y,z>0 \\ xyz=1 \end{cases}$ => $\begin{cases} a,b,c>0 \\ abc=1 \end{cases}$

Ta có

$$x+y+1=a^3+b^3+1=(a+b)(a^2-ab+b^2)+1\ge (a+b)ab+1=ab(a+b+c)=\frac{a+b+c}{c}$$

Do đó

$$\frac{1}{x+y+1}\le \frac{c}{a+b+c}$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{y+z+1}\le\frac{a}{a+b+c};\qquad \frac{1}{z+x+1}\le\frac{b}{a+b+c}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta có:

$$\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}\le\frac{a+b+c}{a+b+c}=1\left(dpcm\right)$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z.

Câu 143: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2015-2016]

Cho a,b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3+4ab\le 12$.

Chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+2015ab\le 2016$.

Lời giải

Ta có $12\ge (a+b)^3+4ab\ge\left(2\sqrt{ab}\right)^3+4ab$. Đặt $t=\sqrt{ab},t>0$ thì

$12\ge 8t^3+4t^2 \Leftrightarrow 2t^3+t^2-3\le 0\Leftrightarrow (t-1)(2t^2+3t+3)\le 0$

Do $2t^2+3t+3>0,\forall t$ nên $t-1\le 0\Leftrightarrow t\le 1$. Vậy $0<ab\le 1$

Chứng minh được $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\le\frac{2}{1+\sqrt{ab}},\forall a,b>0$ thỏa mãn $ab\le 1$

Thật vậy, BĐT $\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+\sqrt{ab}}+\frac{1}{1+b}-\frac{1}{1+\sqrt{ab}}\le 0$

$$\frac{\sqrt{ab}-a}{(1+a)(1+\sqrt{ab})}+\frac{\sqrt{ab}-b}{(1+b)(1+\sqrt{ab})}\le 0\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{1+a}-\frac{\sqrt{b}}{1+b}\right)$$

$\Leftrightarrow\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2(\sqrt{ab}-1)}{(1+\sqrt{ab})(1+a)(1+b)}\le 0.$ Do $0<ab\le 1$ nên BĐT này đúng

Tiếp theo ta sẽ CM: $\frac{2}{1+\sqrt{ab}}+2015ab\le 2016,\forall a,b>0$ thỏa mãn $ab\le 1$

Đặt $t=\sqrt{ab},0<t\le t$ ta được $\frac{2}{1+t}+2015t^2\le 2016$

$2015t^3+2015t^2-2016t-2014\le 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(2015t^2+4030t+2014)\le 0.$ BĐT này đúng $\forall t:0<t\le 1$

Đẳng thức xảy ra a = b = 1

Vậy $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+2015ab\le 2016.$

Câu 144: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2015-2016]

Cho ba số thực x; y; z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y + z - (xy + yz + zx)$

Lời giải

Ta có $xy+yz+xz=\dfrac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}$

Do đó $P=x+y+z-\dfrac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}$

$$P=\frac{1}{2}\left[2(x+y+z)-(x+y+z)^2+(x^2+y^2+z^2)\right]=-\frac{1}{2}(x+y+z-1)^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2+1)$$

Suy ra $P\le\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2+1)\le\frac{1}{2}(9+1)=5$

Vậy P_{max} = 5 khi và chỉ khi $\begin{cases}x+y+z-1=0\\x^2+y^2+z^2=9\end{cases}$ (chẳng hạn $x=2;y=-2;z=1$)

Câu 145: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2015-2016]

Cho 3 số thực dương *x, y, z* thỏa mãn: $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{y^2z^2}{x(y^2+z^2)}+\dfrac{z^2x^2}{y(z^2+x^2)}+\dfrac{x^2y^2}{z(x^2+y^2)}$

Lời giải

Ta có: $P=\dfrac{1}{x(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{y^2})}+\dfrac{1}{y(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2})}+\dfrac{1}{z(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2})}$

Đặt $\dfrac{1}{x}=a;\dfrac{1}{y}=b;\dfrac{1}{z}=c$ thì a,b,c>0 và $a^2+b^2+c^2=1$

$$P=\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}=\frac{a^2}{a(1-a^2)}+\frac{b^2}{b(1-b^2)}+\frac{c^2}{c(1-c^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có:

$$a^2(1-a^2)^2=\frac{1}{2}.2a^2(1-a^2)(1-a^2)\le\frac{1}{2}\left(\frac{2a^2+1-a^2+1-a^2}{3}\right)=\frac{4}{27}$$

$$\Rightarrow a(1-a^2)\le\frac{2}{3\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{a^2}{a(1-a^2)}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2(1)$$

Tương tự: $\dfrac{b^2}{b(1-b^2)}\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}b^2(2);\dfrac{c^2}{c(1-c^2)}\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}c^2(3)$

Từ (1); (2); (3) ta có $P\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ hay $x = y = z = \sqrt{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Câu 146: [TS10 Chuyên Ninh Bình, 2015-2016]

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \le 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{1}{2}(ab+bc+ca) \ge 3$$

Lời giải

Ta chứng minh BĐT

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \ge 9(*)$$

$$(*) \Leftrightarrow 3+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}) \ge 9$$

Áp dụng BĐT AM-GM cho hai số dương ta có:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2;\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \ge 2;\ \frac{c}{a}+\frac{a}{c} \ge 2$$

=> (*) đúng

$$=> \frac{9}{a+b+c} \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le 3 => a+b+c \ge 3$$

Trở lại bài toán: Áp dụng BĐT AM-GM cho hai số dương ta có $1+b^2 \ge 2b$

Ta có: $\dfrac{a}{1+b^2} = a - \dfrac{ab^2}{1+b^2} \ge a - \dfrac{ab^2}{2b} = a - \dfrac{ab}{2}(1)$

Tương tự ta có: $\dfrac{b}{1+c^2} \ge b - \dfrac{bc}{2}$ (2); $\dfrac{c}{1+a^2} \ge c - \dfrac{ca}{2}$ (3)

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2} \ge a+b+c-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)$$

$$=> \frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{1}{2}(ab+bc+ca) \ge a+b+c \ge 3$$

=>đpcm

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 147: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2015-2016]

Cho hai số dương a , b thỏa mãn điều kiện: a + b ≤ 1. Chứng minh rằng: $a^2 - \dfrac{3}{4a} - \dfrac{a}{b} \le \dfrac{-9}{4}$

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với: $4a^2 + 9 \le \dfrac{3}{a} + \dfrac{4a}{b}$

Ta có: $a+b \le 1 \Rightarrow a \le 1-b$ mà a, b dương nên $0 < a < 1$

Do đó: $4a^2+9\le\frac{3}{a}+\frac{4a}{b}\Leftrightarrow\frac{3}{a}+\frac{4a}{1-a}\le\frac{3}{a}+\frac{4a}{b}$

Vì thế chỉ cần chứng minh: $4a^2+9\le\frac{3}{a}+\frac{4a}{1-a}$ **(*)**

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow\frac{(a^2+3)(2a-1)^2}{a(1-a)}\ge 0$ (đúng)

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 148: [TS10 Chuyên Bình Phước, 2015-2016]

1) Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\sqrt{(1+a)(1+b)}\ge 1+\sqrt{ab}$

2) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2+2a}+\frac{1}{b^2+2b}+\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$$

Lời giải

a) Ta có

$\sqrt{(1+a)(1+b)}\ge 1+\sqrt{ab}\Leftrightarrow(1+a)(1+b)\ge 1+ab+2\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow 1+a+b+ab\ge 1+ab+2\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0$ (luôn đúng)

b) Sử dụng BĐT ở ý a) $\sqrt{(1+x)(1+y)}\ge 1+\sqrt{xy}$ và BĐT $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ ta được:

$$P\ge\frac{4}{a^2+2a+b^2+2b}+1+ab=\frac{4}{(a+b)^2-2ab+2(a+b)}+1+ab=\frac{4}{a^2b^2}+ab+1$$

$$=\left(\frac{4}{a^2b^2}+\frac{ab}{16}+\frac{ab}{16}\right)+\frac{7ab}{8}+1\ge 3.\sqrt[3]{4.\frac{1}{16}.\frac{1}{16}}+\frac{7ab}{8}+1=\frac{7}{4}+\frac{7ab}{8}$$

Mặt khác: từ giả thiết, ta có: $ab=a+b\ge 2\sqrt{ab}\Rightarrow ab\ge 4$

Do đó $P\ge\frac{7}{4}+\frac{7.4}{8}=\frac{21}{4}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{21}{4}$ khi $a=b=2$

Câu 149: [TS10 Chuyên Quảng Bình, 2015-2016]

Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\frac{a}{1+a}+\frac{2b}{1+b}=1$. Chứng minh $ab^2\le\frac{1}{8}$.

Lời giải

Từ giả thiết $\frac{a}{1+a}+\frac{2b}{1+b}=1$. Đặt $x=\frac{a}{1+a}$; $y=\frac{b}{1+b}$ Suy ra $a=\frac{x}{1-x}$; $b=\frac{y}{1-y}$.

Khi đó ta được $x+2y=1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{xy^2}{(1-x)(1-y)^2}\le\frac{1}{8}$$

Từ giả thiết ta suy ra $1-x=2y;\ 1-y=x+y$ nên lại viết bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{xy^2}{2y(x+y)^2}\le\frac{1}{8}\Leftrightarrow 4xy\le(x+y)^2$$

Đánh giá cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Câu 150: [TS10 Chuyên Bắc Giang, 2015-2016]

Cho a, b, c > 0 thỏa mãn: a + b + c = 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\ge\frac{1}{3}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT AM-GM cho 4 số không âm, ta có:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{a+2}{27}+\frac{b+2}{27}+\frac{1}{9}\ge 4\sqrt[4]{\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}.\frac{a+2}{27}.\frac{b+2}{27}.\frac{1}{9}}=4\sqrt[4]{\frac{a^4}{9^4}}=\frac{4a}{9}$$

$$\Rightarrow\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}\ge\frac{11a}{27}-\frac{b}{27}-\frac{7}{27}(1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}\ge\frac{11b}{27}-\frac{c}{27}-\frac{7}{27}(2)$$

$$\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\ge\frac{11c}{27}-\frac{a}{27}-\frac{7}{27}(3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\ge\frac{11(a+b+c)}{27}-\frac{a+b+c}{27}-\frac{21}{27}$$

Thay điều kiện a + b + c = 3 ta được:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\ge\frac{1}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 151: [TS10 Chuyên Bạc Lưu, 2015-2016]

Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 3. Chứng minh rằng $a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 6$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM: $a^5+\frac{1}{a}\ge 2a^2$; $b^5+\frac{1}{b}\ge 2b^2$; $c^5+\frac{1}{c}\ge 2c^2$

Suy ra $a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2(a^2+b^2+c^2)$

Mặt khác $a^2+1\ge 2a$; $b^2+1\ge 2b$; $c^2+1\ge 2c$

Suy ra $a^2+b^2+c^2\ge 2\left(a+b+c\right)-3=3$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 152: [TS10 Chuyên Đại học Vinh, 2015-2016]

Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn a + b + c = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}$ (1)

Áp dụng BĐT AM-GM cho hai số không âm, ta có $1+b^2\ge 2b$

Thay vào (1) ta được: $\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$ (2)

Tương tự, ta có: $\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2}$ (3); $\frac{c}{1+a^2}\ge c-\frac{ca}{2}$ (4)

Cộng từng vế ba BĐT (2), (3), (4) ta được:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge a+b+c-\left(\frac{ab+bc+ca}{2}\right) \quad (5)$$

Mặt khác: $\left(a+b+c\right)^2-3\left(ab+bc+ca\right)=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\ge 0$

$$\Rightarrow ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=3 \quad (6)$$

Thay điều kiện a + b + c = 3 và BĐT (6) vào (5) ta có: $P=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge\frac{3}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$, đạt được khi a = b = c = 1.

Câu 153: [TS10 Chuyên Hà Giang, 2015-2016]

Tìm giá trị lớn nhất của $A=\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}$, biết x + y = 4

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakoskicopxki cho 2 bộ số (1;1) và $\left(\sqrt{x-1};\sqrt{y-2}\right)$ ta có

$$A^2=\left(1.\sqrt{x-1}+1.\sqrt{y-2}\right)^2\le\left(1^2+1^2\right)\left(x-1+y-2\right)=2\left(x+y-3\right)=2\Rightarrow A\le\sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{1}{1}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{y-2}}\\ x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=y-2\\ x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ y=\frac{5}{2}\end{cases}$

Vậy GTLN của A là $\sqrt{2}$

Câu 154: [TS10 Chuyên Lam Sơn, 2015-2016]

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn: x + y + z = 3.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+z^2}+\frac{z}{1+x^2}$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{x}{1+y^2}=x-\frac{xy^2}{1+y^2}\ge x-\frac{xy^2}{2y}=x-\frac{xy}{2}$$

Tương tự : $\frac{y}{1+z^2}\ge y-\frac{yz}{2};\quad \frac{z}{1+x^2}\ge z-\frac{zx}{2}$

Cộng theo vế ta được:

$$S=\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+z^2}+\frac{z}{1+x^2}\ge\left(x+y+z\right)-\frac{xy+yz+zx}{2}$$

$$\ge\left(x+y+z\right)-\frac{\left(x+y+z\right)^2}{6}=3-\frac{3^2}{6}=\frac{3}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi x = y = z = 1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là : $\frac{3}{2}$

Câu 155: [TS10 Chuyên Nam Định, 2015-2016]

Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{4a^2+(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b^2+(c-a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{4c^2+(a-b)^2}{2c^2+a^2+b^2}\ge 3.$$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{4a^2+(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2}=\dfrac{2(2a^2+b^2+c^2)-(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}=2-\dfrac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}$

Làm tương tự và cộng lại ta được bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}\le 3.$$

Áp dụng BĐT AM-GM – Schwarz cho 4 số dương $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}\ge\dfrac{(x+y)^2}{m+n}$, ta có:

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}\le\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}$$

Ta có hai BĐT tương tự, cộng từng vế ta có:

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}$$
$$\le\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\right)+\left(\frac{c^2}{b^2+c^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{a^2}{c^2+a^2}+\frac{b^2}{c^2+b^2}\right)$$
$$=\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{c^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+b^2}\right)+\left(\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\right)$$

= 3

$\Rightarrow$ BĐT đã cho được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c.

Câu 156: [TS10 Chuyên Nam Định, 2015-2016]

Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn abc =1.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{a}{b^4+c^4+a}+\frac{b}{a^4+c^4+b}+\frac{c}{a^4+b^4+c}$$

Lời giải

Ta có: $a^4+b^4\ge ab(a^2+b^2)\forall a;b\in R$

Thật vậy:

$a^4+b^4\ge ab(a^2+b^2)$

$<=> a^4+b^4\ge a^3b+ab^3$

$<=> (a-b)(a^3-b^3)\ge 0$

$<=> (a-b)^2(a^2+ab+b^2)\ge 0$ (luôn đúng $\forall a;b\in R$)

$=> a^4+b^4+c\ge ab(a^2+b^2)+c <=> a^4+b^4+c\ge ab(a^2+b^2)+abc^2$ (vì a;b;c > 0 và abc = 1)

$<=> \dfrac{c}{a^4+b^4+c}\le\dfrac{c}{ab(a^2+b^2)+abc^2}$ (Vì c>0) $<=> \dfrac{c}{a^4+b^4+c}\le\dfrac{c}{ab(a^2+b^2+c^2)}$

$<=> \dfrac{c}{a^4+b^4+c}\le\dfrac{c^2}{abc(a^2+b^2+c^2)} <=> \dfrac{c}{a^4+b^4+c}\le\dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$ (1)

Tương tự:

$$\frac{b}{a^4+c^4+b}\le\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}(2)$$

$$\frac{a}{b^4+c^4+a}\le\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}(3)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1),(2) và (3) ta có:

$$\frac{a}{b^4+c^4+a}+\frac{b}{a^4+c^4+b}+\frac{c}{a^4+b^4+c}\le\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=1$$

Vậy $T\le 1\ \forall a;b;c>0$ thỏa mãn abc = 1

Với a = b = c = 1 thì T = 1

Vậy GTLN của T là 1

Câu 157: [TS10 Chuyên Ninh Bình, 2015-2016]

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\ge 3$$

Lời giải

Ta chứng minh BĐT

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ge 9 \qquad (*)$$

$$(*) <=> 3+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})\ge 9$$

Áp dụng BĐT AM-GM cho hai số dương ta có:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2;\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2;\ \frac{c}{a}+\frac{a}{c}\ge 2$$

=>(*) đúng

$$=>\frac{9}{a+b+c}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3 => a+b+c\ge 3$$

Trở lại bài toán: Áp dụng BĐT AM-GM cho hai số dương ta có $1+b^2\ge 2b$

Ta có: $\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}(1)$

Tương tự ta có:

$$\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2}\quad (2);\qquad \frac{c}{1+a^2}\ge c-\frac{ca}{2}\quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge a+b+c-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)$$

$$=>\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\ge a+b+c\ge 3$$

=>đpcm

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 158: [TS10 Chuyên Đắc Lắc, 2015-2016]

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện x + y + z = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{350}{xy+yz+zx}+\frac{386}{x^2+y^2+z^2}>2015$$

Lời giải

Với mọi a, b > 0 và x, y, z thỏa điều kiện đề bài, áp dụng bất đẳng thứcAM-GM cho 2 số dương:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 2\sqrt{ab}.2\sqrt{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}}=4\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}(*)$$

$$\left(x^2+y^2\right)+\left(y^2+z^2\right)+\left(z^2+x^2\right)\ge 2xy+2yz+2zx\Rightarrow x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\ge 3\left(xy+yz+zx\right)\Rightarrow xy+yz+zx\le\frac{\left(x+y+z\right)^2}{3}=\frac{1}{3}$$

Áp dụng 2 bất đẳng thức trên ta có:

$$P=\frac{350}{xy+yz+zx}+\frac{386}{x^2+y^2+z^2}=386\left(\frac{1}{2xy+2yz+2zx}+\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{157}{xy+yz+zx}$$

$$\ge 386.\frac{4}{2xy+2yz+2zx+x^2+y^2+z^2}+\frac{157}{xy+yz+zx}$$

$$=\frac{1544}{(x+y+z)^2}+\frac{157}{xy+yz+zx}=1544+\frac{157}{xy+yz+zx}\ge 1544+\frac{157}{\frac{1}{3}}=2015$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}x=y=z\\x+y+z=1\\2xy+2yz+2zx=x^2+y^2+z^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=z=\dfrac{1}{3}\\\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\text{(không xảy ra)}$$

Vậy P > 2015 (đpcm)

Câu 159: [TS10 Chuyên Quảng Bình, 2015-2016]

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 11. Tìm GTNN

$$P=\frac{5a+5b+2c}{\sqrt{12(a^2+11)}+\sqrt{12(b^2+11)}+\sqrt{c^2+11}}$$

Lời giải

Thay 11 = ab + bc + ca vào P, ta có:

$$P=\frac{5a+5b+2c}{\sqrt{12(a^2+11)}+\sqrt{12(b^2+11)}+\sqrt{c^2+11}}$$

$$=\frac{5a+5b+5c}{\sqrt{12(a^2+ab+bc+ca)}+\sqrt{12(b^2+ab+bc+ca)}+\sqrt{c^2+ab+bc+ca}}$$

$$=\frac{5a+5b+5c}{2\sqrt{3(a+b)(a+c)}+2\sqrt{3(b+a)(b+c)}+\sqrt{(c+a)(c+b)}} \quad (*)$$

Áp dụng BĐT Cô–si cho hai số không âm, ta có:

$$2\sqrt{3(a+b)(a+c)}\le 3(a+b)+(a+c)=4a+3b+c \quad (1)$$

Tương tự:

$$2\sqrt{3(b+a)(b+c)}\le 4b+3a+c \quad (2)$$

$$\sqrt{(c+a)(c+b)}\le\frac{1}{2}(a+b+2c) \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có

$$2\sqrt{3(a+b)(a+c)}+2\sqrt{3(b+a)(b+c)}+\sqrt{(c+a)(c+b)}\le\frac{15}{2}a+\frac{15}{2}b+3c \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có

$$P\ge\frac{5a+5b+2c}{\frac{15}{2}a+\frac{15}{2}b+3c}=\frac{2}{3}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}3(a+b)=a+c\\3(b+a)=b+c\\c+a=c+b\\ab+bc+ca=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=\frac{c}{5}\\ab+bc+ca=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=1\\c=5\end{cases}$

Vậy GTNN của P là $\frac{2}{3}$,đạt được khi a = b = 1, c = 5.

Câu 160: [TS10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội, 2015-2016]

Tìm các số thực không âm a và b thỏa mãn

$$(a^2+b+\frac{3}{4})(b^2+a+\frac{3}{4})=(2a+\frac{1}{2})(2b+\frac{1}{2})$$

Lời giải

Với mọi x, y không âm, ta có:

$(x-\frac{1}{2})^2\ge 0 \iff x^2+\frac{1}{4}\ge x$ (*) Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Mặt khác:

$(x-y)^2 \ge 0 <=> x^2-2xy+y^2 \ge 0$

$<=> x^2+2xy+y^2 \ge 4xy$

$<=> (x+y)^2 \ge 4xy$ (**)

Dấu bằng xảy ra ⇔ x = y.

Áp dụng BĐT (*) với x = a và x = b ta được

$$\begin{cases} a^2+b+\frac{3}{4}=(a^2+\frac{1}{4})+b+\frac{1}{2} \ge a+b+\frac{1}{2}>0 \\ b^2+a+\frac{3}{4}=(b^2+\frac{1}{4})+a+\frac{1}{2} \ge b+a+\frac{1}{2}>0 \end{cases}$$

$$=> (a^2+b+\frac{3}{4})(b^2+a+\frac{3}{4}) \ge (a+b+\frac{1}{2})^2 (1)$$

Áp dụng BĐT (**) ta được:

$$(a+b+\frac{1}{2})^2=\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\left(b+\frac{1}{4}\right)^2\right] \ge 4(a+\frac{1}{4})(b+\frac{1}{4})$$

$$=(2a+\frac{1}{2})(2b+\frac{1}{2})(2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $(a^2+b+\frac{3}{4})(b^2+a+\frac{3}{4})=(2a+\frac{1}{2})(2b+\frac{1}{2})$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \\ a+\frac{1}{4}=b+\frac{1}{4} \end{cases} <=> a=b=\frac{1}{2}$

Vậy $a=b=\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 161: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2015-2016]

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1} \ge \frac{3}{2}$$

Lời giải

Giả sử $a \ge b \ge c$, từ giả thiết suy ra ab ≥1. Ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2} \ge \frac{2}{1+ab} <=> \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \ge 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy ta cần chứng minh: $\frac{2}{1+ab}+\frac{1}{1+c^2} \ge \frac{3}{2}$

$<=> c^2+3-ab \ge 3abc^2 <=> c^2+ca+bc \ge 3abc^2 <=> a+b+c \ge 3abc$

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì $\begin{cases} (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)=9 \\ ab+bc+ca \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2} \end{cases}$

Hay a + b + c ≥ 3≥3abc

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c =1

Câu 162. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn a+ b +c = 3.Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ca}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{3}{2}$$

Ta có: $\frac{(a+b+c)^2}{3}\ge ab+bc+ca \Rightarrow ab+bc+ca\le 3$

Ta có

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{ab}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}}=\frac{ab}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}\le\frac{ab}{2}(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c})$$

$$VT\le\frac{1}{2}(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{bc}{b+a}+\frac{ca}{c+b}+\frac{ca}{a+b})=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1

Câu 162: [TS10 Chuyên KHTN, 2015-2016]

Giả sử x, y, z là các số thực lớn hơn 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x}{\sqrt{y+z-4}}+\frac{y}{\sqrt{z+x-4}}+\frac{z}{\sqrt{x+y-4}}$$

Lời giải

Ta có $P=\frac{4x}{4\sqrt{y+z-4}}+\frac{4y}{4\sqrt{z+x-4}}+\frac{4z}{4\sqrt{x+y-4}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$4\sqrt{y+z-4}=2\sqrt{4\left(y+z-4\right)}\le y+z-4+4=y+z$$

Áp dụng tương tự thì ta được

$$P=\frac{4x}{4\sqrt{y+z-4}}+\frac{4y}{4\sqrt{z+x-4}}+\frac{4z}{4\sqrt{x+y-4}}\ge 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)$$

Dễ dàng chứng minh được $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{3}{2}$

Do đó ta được $P\ge 6$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 6.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=4$.

Câu 163: [TS10 Chuyên Nghệ An, 2015-2016]

Cho a,b,c là các số thực bất kỳ . Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\ge\frac{3\left(a+b+c\right)^2}{4}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(2a^2+2\right)\left(2b^2+2\right)\left(2c^2+2\right)\ge 3\left(\sqrt{2}a+\sqrt{2}b+\sqrt{2}c\right)^2$$

Đặt $x=a\sqrt{2};\ y=b\sqrt{2};\ z=c\sqrt{2}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)\left(z^2+2\right)\ge 3\left(x+y+z\right)^2$$

Ta có $\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)=x^2y^2+1+2x^2+2y^2+3$

Suy ra $\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)\ge 2xy+x^2+y^2+\dfrac{\left(x+y\right)^2}{2}+3=\dfrac{3}{2}\left[\left(x+y\right)^2+2\right]$

$$\Rightarrow \left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)\left(z^2+2\right)\ge \frac{3}{2}\left[\left(x+y\right)^2z^2+4+2\left(x+y\right)^2+2z^2\right]$$

$$\ge \frac{3}{2}\left[4\left(x+y\right)z+2\left(x+y\right)^2+2z^2\right]=3\left(x+y+z\right)^2$$

Do đó ta được $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\ge \dfrac{3\left(a+b+c\right)^2}{4}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 164: [TS10 Chuyên Vũng Tàu, 2015-2016]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

Chứng minh rằng:

a) $a+b+c\ge 3abc$

b) $\sqrt{\dfrac{a^3}{1+3bc}}+\sqrt{\dfrac{b^3}{1+3ca}}+\sqrt{\dfrac{c^3}{1+3ab}}\ge \dfrac{3}{2}$

Lời giải

a) Giả thiết của bài toán được viết lại thành

$$abc\left(a+b+c\right)=ab+bc+ca$$

Mà ta lại có $$ab+bc+ca\le \frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}$$

Do đó ta được $$abc\left(a+b+c\right)\le \frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}\Leftrightarrow 3abc\le a+b+c$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

b) Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\sqrt{\frac{a^4}{a+3abc}}+\sqrt{\frac{b^4}{b+3abc}}+\sqrt{\frac{c^4}{c+3abc}}\ge \frac{3}{2}$$

Áp dụng kết quả câu a ta được

$$\sqrt{\frac{a^4}{a+3abc}}+\sqrt{\frac{b^4}{b+3abc}}+\sqrt{\frac{c^4}{c+3abc}}\ge\frac{a^2}{\sqrt{2a+b+c}}+\frac{b^2}{\sqrt{a+2b+c}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+b+2c}}$$

Ta cần chỉ ra được

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a+b+c}}+\frac{b^2}{\sqrt{a+2b+c}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+b+2c}}\ge\frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a+b+c}}+\frac{b^2}{\sqrt{a+2b+c}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+b+2c}}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\sqrt{2a+b+c}+\sqrt{a+2b+c}+\sqrt{a+b+2c}}$$

Mà theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\sqrt{2a+b+c}+\sqrt{a+2b+c}+\sqrt{a+b+2c}\le\sqrt{12\left(a+b+c\right)}$$

Suy ra

$$\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\sqrt{2a+b+c}+\sqrt{a+2b+c}+\sqrt{a+b+2c}}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{2\sqrt{3\left(a+b+c\right)}}=\frac{\left(a+b+c\right)\sqrt{a+b+c}}{2\sqrt{3}}$$

Cũng từ giả thiết $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ta suy ra được

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}\Rightarrow a+b+c\ge3$$

Do đó $\frac{\left(a+b+c\right)\sqrt{a+b+c}}{2\sqrt{3}}\le\frac{3}{2}$.

Từ các kết quả trên ta được $\frac{a^2}{\sqrt{2a+b+c}}+\frac{b^2}{\sqrt{a+2b+c}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+b+2c}}\ge\frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 165: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2015-2016]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2+a^2b}+\frac{1}{2+b^2c}+\frac{1}{2+c^2a}\ge1$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2b}{2+a^2b}+\frac{b^2c}{2+b^2c}+\frac{c^2a}{2+c^2a}\le1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $2+a^2b=1+1+a^2b\ge3\sqrt[3]{a^2b}$

Do đó ta được $$\frac{a^2b}{2+a^2b}\le\frac{a^2b}{3\sqrt[3]{a^2b}}=\frac{a\sqrt[3]{ab^2}}{3}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a^2b}{2+a^2b}+\frac{b^2c}{2+b^2c}+\frac{c^2a}{2+c^2a}\le\frac{a\sqrt[3]{ab^2}+b\sqrt[3]{bc^2}+c\sqrt[3]{ca}}{3}$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được $\sqrt[3]{ab^2} \le \frac{a+b+b}{3} = \frac{a+2b}{3}$

Suy ra $a\sqrt[3]{ab^2} \le \frac{a(a+2b)}{3} = \frac{a^2+2ab}{3}$

Hoàn toàn tương tự ta được $a\sqrt[3]{ab^2} + b\sqrt[3]{bc^2} + c\sqrt[3]{ca} \le \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$

Từ đó ta được $\frac{a^2b}{2+a^2b} + \frac{b^2c}{2+b^2c} + \frac{c^2a}{2+c^2a} \le 1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 166: [TS10 Chuyên Cần Thơ, 2015-2016]

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{z(z+x)} + \frac{y}{x(x+y)} + \frac{z}{x(x+z)}$$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Đặt $a=\frac{1}{x}$; $b=\frac{1}{y}$; $c=\frac{1}{z}$, khi đó giả thiết trở thành $a+b+c=2$.

Ta viết lại biểu thức P là $P = \frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b^2+2c} + \frac{c^2}{c+2a}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$P = \frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b^2+2c} + \frac{c^2}{c+2a} \ge \frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{3} = \frac{2}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{2}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{3}{2}$

Câu 167: [TS10 Chuyên Tiền Giang, 2015-2016]

Cho ba số thực $x;y;z>1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^4}{(y-1)^2} + \frac{y^4}{(z-1)^2} + \frac{z^4}{(x-1)} \ge 48$$

Lời giải

Ta đi chứng minh bất đẳng thức: Với $a>1$ thì $a^4 \ge 16(a-1)^2$

Thật vậy

$$a^4 \ge 16(a-1)^2 \Leftrightarrow a^4 - 16a^2 + 32a - 16 \ge 0 \Leftrightarrow (a-2)^2(a^2+4a-4) \ge 0$$

Vì $a > 1$ nên $a^2 + 4a - 4 > 0$, do đó bất đẳng thức trên đúng.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được $y^4 \ge 16(y-1)^2$ do đó $\dfrac{x^4}{(y-1)^2} \ge \dfrac{16x^4}{y^4}$.

Hoàn ta tương tự ta được

$$\frac{x^4}{(y-1)^2} + \frac{y^4}{(z-1)^2} + \frac{z^4}{(x-1)} \ge 16\left(\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{z^4} + \frac{z^4}{x^4}\right) \ge 48$$

Vì theo bất đẳng thức Cauchy thì $\dfrac{x^4}{y^4} + \dfrac{y^4}{z^4} + \dfrac{z^4}{x^4} \ge 3$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 168: [TS10 Chuyên Đại học Vinh, 2015-2016]

Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \dfrac{ab + bc + ca}{2} + \dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$

Lời giải

Từ giả thiết $a + b + c = 2$ ta được $ab + bc + ca = \dfrac{4 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$

Do đó biểu thức P được viết lại thành

$$P = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{4 - (a^2 + b^2 + c^2)}{4} + \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Đặt $t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{3}} \le t \le 2$. Khi đó ta được

$$P = t + \frac{1}{t^2} - \frac{t^2}{4} + 1 = \frac{t}{8} + \frac{t}{8} + \frac{1}{2t^2} + \frac{3t}{4} - \frac{t^2}{4} + 1 \ge \frac{3}{4} + \frac{(t-1)(2-1)}{4} + \frac{3}{2} \ge \frac{9}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{9}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 0; c = 2$ và các hoán vị.

Câu 169: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2015-2016]

Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ac + abc \le 4$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \ge 2(ab + bc + ac)$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy 4 số ta có :

$4 \ge abc + ab + bc + ac \ge 4\sqrt[4]{a^3b^3c^3} \Rightarrow 1 \ge abc \Rightarrow a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc} \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

Khi đó ta quy bài toán về chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \ge 2(ab + bc + ac)$

Đặt $\sqrt[3]{a^2}=x,\sqrt[3]{b^2}=y,\sqrt[3]{c^2}=z\ (x,y,z>0)$, bất đẳng thức được viết lại thành

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge 2\sqrt{x^3y^3}+2\sqrt{z^3x^3}+2\sqrt{z^3y^3}$$

Dễ dàng chứng minh được

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy(x+y)+yz(y+z)+xz(x+z)$$

$$xy(x+y)+yz(y+z)+xz(x+z)\ge 2\sqrt{x^3y^3}+2\sqrt{z^3x^3}+2\sqrt{z^3y^3}$$

Khi đó ta được

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge 2\sqrt{x^3y^3}+2\sqrt{z^3x^3}+2\sqrt{z^3y^3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 170: [TS10 Chuyên KHTN Bình Thuận, 2015-2016]

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3\sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}}\ge\frac{3}{4}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$2\sqrt{8x(3y+5z)}\le 8x+3y+5z$$

Suy ra
$$\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}}=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{8x(3y+5z)}}\ge\frac{4\sqrt{2}}{8x+3y+5z}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}}\ge\frac{4\sqrt{2}}{8y+3z+5x};\ \frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}}\ge\frac{4\sqrt{2}}{8z+3x+5y}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}}$$
$$\ge\frac{4\sqrt{2}}{8x+3y+5z}+\frac{4\sqrt{2}}{8y+3z+5x}+\frac{4\sqrt{2}}{8z+3x+5y}$$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{4\sqrt{2}}{8x+3y+5z}+\frac{4\sqrt{2}}{8y+3z+5x}+\frac{4\sqrt{2}}{8z+3x+5y}\ge\frac{9.4\sqrt{2}}{16(x+y+z)}=\frac{36\sqrt{2}}{16.3\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$$

Suy ra $$\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}}\ge\frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt{2}$.

NĂM HỌC 2014-2015

Câu 171: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2014-2015]

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 2014$.

Lời giải

Giá trị nhỏ nhất của P là 2011 khi a =b = 1

$4P = a^2 - 2ab + b^2 + 3(a^2 + b^2 + 4 + 2ab - 4a - 4b) + 4.2014 - 12$

$= (a - b)^2 + 3(a + b - 2)^2 + 8044 \ge 8044$

Suy ra: $P \ge 2011$

Dâu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a=b \\ a+b-2=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2011 khi và chỉ khi a = b = 1.

Câu 172: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2014-2015]

Cho các số thực a, b, c dương. Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}>2$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2(b^2+c^2)}}\ge\frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}\ge\frac{2b^2}{a^2+b^2+c^2}$; $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge\frac{2c^2}{a^2+b^2+c^2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge 2$

Vì đẳng thức không xảy ra nên ta có bất đẳng thức $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}>2$

Bài toán được chứng minh xong.

Câu 173: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2014-2015]

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn điều kiện $2c+b=abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=\frac{3}{b+c-a}+\frac{4}{c+a-b}+\frac{5}{a+b-c}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $a+b-c>0;\ b+c-a>0;\ c+a-b>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ ta được

$$S=\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\right)+2\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+b-c}\right)+3\left(\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\right)$$
$$\ge\frac{2}{c}+\frac{4}{b}+\frac{6}{a}$$

Mà $2c+b=abc\Leftrightarrow\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=a$ nên kết hợp với bất đẳng thức Cauchy ta được

$$S\ge 2a+\frac{6}{a}\ge 4\sqrt{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $4\sqrt{3}$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Câu 174: [TS10 Chuyên Đắc Lắc, 2014-2015]

Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=\frac{(b+c-a)^3}{2a}+\frac{(c+a-b)^3}{2b}+\frac{(a+b-c)}{2c}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{(b+c-a)^3}{2a}+\frac{2a}{4}+\frac{1}{2}\ge\frac{3(b+c-a)}{2}$$
$$\frac{(c+a-b)^3}{2b}+\frac{2b}{4}+\frac{1}{2}\ge\frac{3(c+a-b)}{2}$$
$$\frac{(a+b-c)^3}{2c}+\frac{2c}{4}+\frac{1}{2}\ge\frac{3(a+b-c)}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{(b+c-a)^3}{2a}+\frac{(c+a-b)^3}{2b}+\frac{(a+b-c)}{2c}+\frac{a+b+c}{2}+\frac{3}{2}\ge\frac{3(a+b+c)}{2}$$

Hay $$\frac{(b+c-a)^3}{2a}+\frac{(c+a-b)^3}{2b}+\frac{(a+b-c)}{2c}\ge a+b+c-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 175: [TS10 Chuyên Hà Tĩnh, 2014-2015]

Biết phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm.

Chứng minh rằng $a^2+b^2 \ge \frac{4}{5}$

Lời giải

Dễ dàng nhận thấy x = 0 không phải là nghiệm của phương trình

Giả sử $x_0 \ne 0$ là nghiệm của phương trình đã cho. Chia 2 vế của phương trình cho $x_0{}^2 \ne 0$ được

$$(x_0{}^2+\frac{1}{x_0{}^2})+a(x_0+\frac{1}{x_0})+b=0$$

Đặt $t=x_0+\frac{1}{x_0}$ =>$|t|\ge 2; x_o{}^2+\frac{1}{x_0{}^2}=t^2-2$

Do đó ta có phương trình:

$t^2-2=-at-b$

Áp dụng BĐT Bunyakoski được

$(a^2+b^2)(t^2+1)\ge (at+b)^2=(t^2-2)^2$

$$=> a^2+b^2 \ge \frac{t^4-4t^2+4}{t^2+1}=\frac{t^3-4t^2+4}{t^2+1}-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{5t^4-24t^2+16}{5(t^2+1)}+\frac{4}{5}=\frac{(5t^2-4)(t^2-4)}{5(t^2+1)}+\frac{4}{5}\ge\frac{4}{5}$$

Vậy $a^2+b^2\ge\frac{4}{5}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}|t|=2\\ \frac{a}{t}=\frac{b}{t}\end{cases} <=> \begin{cases}|x_0|=1\\ a=bt\end{cases} => \begin{cases}b=-\frac{2}{5}\\ a=-\frac{4}{5}\end{cases}$

Câu 176: [TS10 Chuyên Nam Định, 2014-2015]

Cho các số thực dương *x, y, z* thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+xz}+\frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Vì *x, y, z* dương, áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$+)2x^2\sqrt{yz}\le x^4+yz <=> \frac{1}{2x^2\sqrt{yz}}\ge\frac{1}{x^4+yz} <=> \frac{x^2}{x^4+yz}\le\frac{1}{2\sqrt{yz}} \quad (1)$$

$$+)\frac{2}{\sqrt{yz}}\le\frac{1}{y}+\frac{1}{z} <=> \frac{1}{2\sqrt{yz}}\le\frac{1}{4}(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) => $\frac{x^2}{x^4+yz}\le\frac{1}{4}(\frac{1}{y}+\frac{1}{z})$

Tương tự:

$$\frac{y^2}{y^4+xz}\le\frac{1}{4}(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}); \quad \frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{1}{4}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$$

$$=> A \le \frac{1}{4}(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}.\frac{xy+yz+zx}{xyz} (3)$$

Mà lại có : $xy+yz+zx \le x^2+y^2+z^2 (4)$

Từ (3) và (4) có : $A \le \frac{1}{2}.\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz} = \frac{1}{2}.\frac{3xyz}{xyz} = \frac{3}{2}$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z = 1

Câu 177: [TS10 Chuyên Bình Định, 2014-2015]

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$ với 0 < x< 1

Lời giải

Ta có: $y = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{1-x} - 2 + \frac{1}{x} - 1 + 3 = \frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x} + 3$

Vì $0 < x < 1 => \frac{2x}{1-x} > 0; \ \frac{1-x}{x} > 0$

Ta có: $\frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x} \ge 2\sqrt{\frac{2x}{1-x}.\frac{1-x}{x}} = 2\sqrt{2}$ (Bất đẳng thức AM-GM)

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\frac{2x}{1-x} = \frac{1-x}{x} <=> 2x^2 = x^2-2x+1 <=> x^2+2x-1=0 <=> \left[\begin{array}{l} x=-1+\sqrt{2} (TM) \\ x=-1-\sqrt{2} (L) \end{array}\right.$$

$=> y \ge 2\sqrt{2}+3$

Dấu "=" xảy ra khi $x = -1+\sqrt{2}$

Vậy $y_{min} = 2\sqrt{2}+3$ khi x= $-1+\sqrt{2}$

Câu 178: [TS10 Chuyên Ninh Bình, 2014-2015]

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện a + b + c = 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2} + \frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2} + \frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}$

Lời giải

Ta sẽ chứng minh: $P = \frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2} \le 2b-a$

Thật vậy: $\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2} - (2b-a) = \frac{5b^3-a^3-(ab+3b^2)(2b-a)}{ab+3b^2}$

$= \frac{5b^3-a^3-(2ab^2-a^2b+6b^3-3b^2a)}{ab+3b^2} = \frac{-b^5-a^3+a^2b+b^2a}{ab+3b^2}$

$= \frac{-(a+b)(a-b)^2}{ab+3b^2} \le 0$

$=> \frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2} \le 2b-a$

Ta có 2 BĐT tương tự:

$\frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2} \le 2c-b; \quad \frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2} \le 2a-c$

Cộng từng vế 3 BĐT trên ta được

$P \le 2(a+b+c)-(a+b+c)=a+b+c=3$

Dấu bằng xảy ra $<=> \begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=3 \end{cases} <=> a=b=c=1$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3 $\Leftrightarrow$ a = b = c = 1.

Câu 179: [TS10 Chuyên Ngoại ngữ Hà Nội, 2014-2015]

Chứng minh rằng: $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+....+\frac{2014}{2^{2013}}+\frac{2015}{2^{2014}}<4$

Lời giải

Đặt $S=\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+....+\frac{2014}{2^{2013}}+\frac{2015}{2^{2014}}$

Ta có:

$2S=\frac{3}{2}+\frac{4}{2^2}+....+\frac{2014}{2^{2012}}+\frac{2015}{2^{2013}}$

$=> 2S-S=\frac{3}{2}+\frac{4-3}{2^2}+\frac{5-4}{2^3}+....+\frac{2015-2014}{2^{2013}}-\frac{2015}{2^{2014}}$

$=> S=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+....+\frac{1}{2^{2013}})-\frac{2015}{2^{2014}}$

Ta có: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+....+\frac{1}{2^{2013}}=\frac{1-(\frac{1}{2})^{2014}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{2013}}$

Do đó: $S=2-\frac{1}{2^{2013}}-\frac{2015}{2^{2014}}<2 => 1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+....+\frac{2014}{2^{2013}}+\frac{2015}{2^{2014}}<4$

Câu 180: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2014-2015]

Cho x; y là hai số dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}+\frac{(x+y)^2}{xy}$$

Lời giải

Ta có: $S=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}+\frac{(x+y)^2}{xy}=1+\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{xy}+2$

$=3+(\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{2xy})+\frac{x^2+y^2}{2xy}$

Do x, y là các số dương nên ta có:

$\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{2xy} \overset{AM-GM}{\ge} 2\sqrt{\frac{2x}{x^2+y^2}.\frac{x^2+y^2}{2xy}}=2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2}{2xy} <=> (x^2+y^2)^2=4x^2y^2 <=> (x^2-y^2)^2=0$$

$<=> x^2=y^2 <=> x=y \quad (x;y>0)$

+) $x^2+y^2\ge 2xy => \dfrac{x^2+y^2}{2xy}\ge 1$

Cộng các bất đẳng thức ta được $S\ge 6$

Dấu "=" xảy ra khi x = y.

Vậy Min S = 6 khi và chỉ khi x = y

Câu 181: [TS10 Chuyên Phan Bội Châu, 2014-2015]

Cho các số *a, b, c* không âm. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{(abc)^2}\ge 2(ab+bc+ca)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Đặt $\sqrt[3]{a^2}=x; \sqrt[3]{b^2}=y; \sqrt[3]{c^2}=z.$

$=> a^2=x^3; b^2=y^3; c^2=z^3, a=\sqrt{x^3}; b=\sqrt{y^3}; c=\sqrt{z^3}; x,y,z\ge 0$

Bất đẳng thức đã cho trở thành: $x^3+y^3+z^3+3xyz\ge 2(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3})(1)$

Vì vai trò của x; y ; z bình đẳng nên có thể giả sử $x\ge y\ge z\ge 0$

Khi đó: $x(x-y)^2+z(y-x)^2+(z+x-y)(x-y)(y-z)\ge 0$

$=> x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy(z+y)+yz(y+z)+zx(z+x) \qquad (2)$

Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có $xy(x+y)\ge 2xy\sqrt{xy}=2\sqrt{x^3y^3}(3)$

Tương tự ta có: $yz(y+z)\ge 2\sqrt{y^3z^3} \qquad (4); \qquad zx(z+x)\ge 2\sqrt{z^3x^3} \qquad (5)$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (3), (4), (5) ta được

$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\ge 2(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3}) \qquad (6)$

Từ (2) và (6) ta có: $x^3+y^3+z^2+3xyz\ge 2(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3})$

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z hay a = b = c.

Câu 182: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2014-2015]

Cho các số dương x, y, z thay đổi thỏa mãn: $x(x+1)+y(y+1)+z(z+1)\le 18$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B=\dfrac{1}{x+y+1}+\dfrac{1}{y+z+1}+\dfrac{1}{z+x+1}$

Lời giải

Với mọi a, b, c > 0, ta có:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0 \Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\ge 0$$
$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)\ge 2ab+2bc+2ca$$
$$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2)\ge a^2+b^2+c^2 2ab+2bc+2ca$$
$$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2)\ge (a+b+c)^2 (*)$$

Với mọi a, b, c > 0, áp dụng BĐT Cô–si cho ba số dương, ta có:

$$\begin{cases} a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}>0 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}}>0 \end{cases} \Rightarrow (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9$$
$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{9}{a+b+c} (**)$$

Áp dụng BĐT (*) với a = x, b = y, c = z và từ điều kiện của x, y, z ta có:

$$18\ge x^2+y^2+z^2+x+y+z\ge \frac{(x+y+z)^2}{3}+x+y+z$$
$$\Rightarrow (x+y+z)^2+3(x+y+z)-54\le 0$$
$$\Rightarrow (x+y+z+9)(x+y+z-6)\le 0$$

$\Rightarrow x+y+z\le 6$ (do x + y + z + 9 > 0) (***)

Áp dụng BĐT (**) với a = x + y + 1, b = y + z + 1, c = z + x + 1, ta có:

$$B=\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}\ge \frac{9}{x+y+1+y+z+1+z+x+1}=\frac{9}{2(x+y+z)+3}$$

Áp dụng (***) ta có: $B\ge \dfrac{9}{2.6+3}=\dfrac{3}{5}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z \\ x+y+1=y+z+1=z+x+1 \\ x+y+z=6 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $\dfrac{3}{5}$, xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 2.

Câu 183: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2014-2015]

Cho a, b, c là ba số thực dương và có tổng bằng 1.

Chứng minh: $\dfrac{a-bc}{a+bc}+\dfrac{b-ca}{b+ca}+\dfrac{c-ab}{c+ab}\le \dfrac{3}{2}$

Lời giải

Thay 1 = a + b + c ta có:

A+bc = a(a+b+c)+bc = (a+b)(a+c)

Do đó:

$$\frac{a-bc}{a+bc}=\frac{a+bc-2bc}{a+bc}=1-\frac{2bc}{a+bc}=1-\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}$$

Ta có 2 đẳng thức tương tự:

$$\frac{b-ca}{b+ca}=1-\frac{2ca}{(b+c)(b+a)};\quad \frac{c-ab}{c+ab}=1-\frac{2ab}{(c+a)(c+b)}$$

Cộng từng vế của 3 đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}=3-2\left[\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\right]$$

Do đó:

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}<=>\left[\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\right]\ge\frac{3}{4}$$

$$<=>\frac{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{3}{4}$$

$$<=>4(b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2)\ge 3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc)$$

$$<=>b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2\ge 6abc(*)$$

Áp dụng BĐT AM-GM cho ba số dương ta có:

$$\begin{cases}b^2c+c^2a+a^2b\ge 3abc\\ bc^2+ca^2+ab^2\ge 3abc\end{cases}=>(*)\text{ đúng}$$

Vậy BĐT đã cho được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Câu 184: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2014-2015]

a) Cho x, y là 2 số thực khác 0. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\ge\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

b) Cho a, b là hai số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{ab}(a+b)}$

Lời giải

a) Ta có:

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\ge\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{x^4+y^4-x^3y-xy^3}{x^2y^2}\ge 0$$

$$=\frac{(x-y)(x^3-y^3)}{x^2y^2}=\frac{(x-y)^2(x^2+xy+y^2)}{x^2y^2}$$

$$=\frac{(x-y)^2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\right]}{x^2y^2}\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vậy bài toán được chứng minh.

Dấu “=” xảy ra khi x = y.

b) Ta có:

$$P=\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{ab}(a+b)}=\frac{(a+b)^2+ab}{\sqrt{ab}(a+b)}=\frac{\frac{1}{4}(a+b)^2+ab+\frac{3}{4}(a+b)^2}{\sqrt{ab}(a+b)}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}(a+b)^2+ab}{\sqrt{ab}(a+b)}+\frac{\frac{3}{4}(a+b)}{\sqrt{ab}}\ge\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}(a+b)^2.ab}}{\sqrt{ab}(a+b)}+\frac{\frac{3}{4}\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$$

$$=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $<=>\begin{cases}\frac{1}{4}(a+b)^2=ab\\ a=b\end{cases}<=>a=b$

Câu 185: [TS10 Chuyên Lam Sơn, 2014-2015]

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}=2014$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$

Lời giải

Đặt $a=\sqrt{x^2+y^2};b=\sqrt{y^2+z^2};c=\sqrt{z^2+x^2}(*)=>a+b+c=2014(1)$

Từ $(*)=>x^2=\frac{a^2-b^2+c^2}{2};y^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2};z^2=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}$

Áp dụng BĐT Cau chy ta có:

$y+z\le\sqrt{2(y^2+z^2)}=b\sqrt{2}$

$z+x\le\sqrt{2(z^2+x^2)}=c\sqrt{2}$

$x+y\le\sqrt{2(x^2+y^2)}=a\sqrt{2}$

Từ đó ta có:

$$T=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{b}+\frac{a^2+b^2-c^2}{c}+\frac{-a^2+b^2+c^2}{a}\right)$$

$$T\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a}-a-b-c\right)\qquad(2)$$

Áp dụng BĐT AM-GM ta lại có:

$$\frac{a^2}{b}+b\ge2a;\frac{c^2}{b}+b\ge2c;\frac{a^2}{c}+c\ge2a;\frac{b^2}{c}+c\ge2b;\frac{b^2}{a}+a\ge2b;\frac{c^2}{a}+a\ge2c$$

$$=>\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a}\ge4(a+b+c)-2(a+b+c)=2(a+b+c)\qquad(3)$$

Từ (2) và (3)$=>T\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}(a+b+c)$ (4)

Từ (1) và (4) $=>T\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}.2014.$

Vậy $T_{MIN}=\frac{2014}{2\sqrt{2}}$ khi $x=y=z=\frac{2014}{3\sqrt{2}}$

Câu 186: [TS10 Chuyên Lam Sơn, 2014-2015]

Cho ba số thực x, y, z. Tìm giá trị lớn nhất biểu thức: $S=\dfrac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}$

Lời giải

Theo Bunyakoski: $(x+y+z)^2\le 3(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow x+y+z\le\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\Rightarrow S\le\dfrac{xyz(\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}=\dfrac{xyz(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(xy+yz+zx)}$

$\Rightarrow S\le\dfrac{xyz(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}\sqrt[6]{x^2y^2z^2}\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}$

$\Rightarrow S_{max}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}$ khi x = y = z

Câu 187: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2014-2015]

Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\ne 0)$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{8a^2-6ab+b^2}{4a^2-2ab+ac}$

Lời giải

Gọi $x_1;\ x_2\ (x_1\le x_2)$ là hai nghiệm của phương trình đã cho. Theo định lí Vi-ét ta có

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\ x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Khi đó $P=\dfrac{8a^2-6ab+b^2}{4a^2-2ab+ac}=\dfrac{8-6\dfrac{b}{a}+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{4-2\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}}=\dfrac{8+6(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}$

Do $0\le x_1\le x_2\le 2\Rightarrow x_1^2\le x_1x_2;\ x_2^2\le 4\Rightarrow x_1^2+x_2^2\le x_1x_2+4$

$\Rightarrow (x_1+x_2)^2\le 3x_1x_2+4$

Do đó ta được $P\le\dfrac{8+6(x_1+x_2)+3x_1x_2+4}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}=3$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=2$ hoặc $x_1=0;\ x_2=2$ hay $\left[\begin{array}{l}c=-b=4a\\ b=-2a;\ c=0\end{array}\right.$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3.

Câu 188: [TS10 Chuyên Hà Nội Amsterdam, 2014-2015]

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn (a + b)(b + c)(c + a) = 1.

Chứng minh $ab + ac + bc \le \frac{3}{4}$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cô–si cho ba số không âm, kết hợp điều kiện (1) ta có:

$$(a+b)+(b+c)+(c+a) \ge 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} = 3 \Rightarrow a+b+c \ge \frac{3}{2} \qquad (2)$$

Áp dụng BĐT Cô–si cho hai số không âm, kết hợp điều kiện (1) ta có:

$$\begin{cases} a+b \ge 2\sqrt{ab} \\ b+c \ge 2\sqrt{ac} \\ c+a \ge 2\sqrt{ca} \end{cases} \Rightarrow 1 = (a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc \Rightarrow abc \le \frac{1}{8} \qquad (3)$$

Biến đổi (1), chú ý 2 BĐT (2) và (3), ta được:

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 1$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(bc+ba+c^2+ca) = 1$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(bc+ba+ca)+ac^2+bc^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(ab+bc+ca)+c(ab+bc+ca)-abc = 1$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc = 1$$
$$\Leftrightarrow ab+bc+ca = \frac{1+abc}{a+b+c} \le \frac{1+\frac{1}{8}}{3} = \frac{3}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Câu 189: [TS10 Chuyên Hà Nội Amsterdam, 2014-2015]

Chứng minh tồn tại các số nguyên a, b, c sao cho $0 < \left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| < \frac{1}{1000}$

Lời giải

Xét nửa khoảng A = (0;1]. Chia nửa khoảng này thành 1000 nửa khoảng

$$A_1 = \left(0;\frac{1}{1000}\right], A_2 = \left(\frac{1}{1000};\frac{2}{1000}\right], \dots, A_n = \left(\frac{n-1}{1000};\frac{n}{1000}\right], \dots, A_{1000} = \left(\frac{999}{1000};1\right]$$

Xét bộ số $x_1;x_2;\dots;x_{1001}$ với $x_k = \left[1-k\sqrt{2}\right]+k\sqrt{2}\,(k \in \mathbb{N}^*, k \le 1001)$

Với mọi k ta có $-k\sqrt{2} < \left[1-k\sqrt{2}\right] \le 1-k\sqrt{2}$ (tính chất phần nguyên) nên

$0 < \left[1-k\sqrt{2}\right]+k\sqrt{2} \le 1 \Rightarrow x_k \in A$

$\Rightarrow x_k$ thuộc một trong các 1000 khoảng $A_1, A_2, \dots, A_{1000}$

Có 1001 số x_k mà có 1000 nửa khoảng, do đó tồn tại 2 số x_i, x_j thuộc cùng một nửa khoảng A_m nào đó $0 \le |x_i - x_j| < \frac{1}{1000}$.

Đặt $a = \left[1 - i\sqrt{2}\right] - \left[1 - j\sqrt{2}\right], b = i - j => x_i - x_j = a + b\sqrt{2} + 0.\sqrt{3}$

Mà a là số nguyên, $b\sqrt{2}$ là số vô tỷ nên $a + b\sqrt{2} \ne 0 \Rightarrow |x_i - x_j| > 0$

Do đó $0 < |x_i - x_j| < \frac{1}{1000} \Rightarrow 0 < \left|a + b\sqrt{2} + 0.\sqrt{3}\right| < \frac{1}{1000}$

Vậy tồn tại các số nguyên a, b, c thỏa mãn đề bài.

Câu 190: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2014-2015]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $6a + 3b + 2c = abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{b^2+4}} + \frac{3}{\sqrt{c^2+9}}$

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành $\frac{6}{bc} + \frac{3}{ca} + \frac{2}{ab} = 1$. Đặt $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{2}{y}$; $c = \frac{3}{z}$, khi đó ta được $xy + yz + zx = 1$

Biểu thức B được viết lại thành $B = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$

Để ý đến giả thiết $xy + yz + zx = 1$ ta có $x^2 + 1 = x^2 + xy + yz + zx = (x+y)(z+x)$

Khi đó ta được $$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(z+x)}}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $B = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}} + \frac{z}{\sqrt{(z+x)(y+z)}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(z+x)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{z+x}\right)$$
$$\frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y} + \frac{y}{y+z}\right)$$
$$\frac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+x} + \frac{z}{y+z}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$B=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}}+\frac{z}{\sqrt{(z+x)(y+z)}}\le\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là $\frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\sqrt{3};\ b=2\sqrt{3};\ c=3\sqrt{3}$

Câu 191: [TS10 Chuyên Hà Nội 2014-2015]

Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1-x^2}{x+yz}+\frac{1-y^2}{y+zx}+\frac{1-z^2}{z+xy}\ge 6$$

Lời giải

Áp dụng giả thiết ta được

$$\frac{1-x^2}{x+yz}=\frac{(1-x)(1+x)}{(x+y)(z+x)}=\frac{(x+y)(y+z)+(z+x)(y+z)}{(x+y)(z+x)}$$

Hoàn toàn tương tưh ta được

$$\frac{1-y^2}{y+zx}=\frac{(x+z)(x+y)+(x+z)(y+z)}{(x+y)(y+z)}$$

$$\frac{1-z^2}{z+xy}=\frac{(x+y)(y+z)+(x+y)(x+z)}{(y+z)(z+x)}$$

Đặt $a=(x+y)(y+z);\ b=(y+z)(z+x);\ c=(x+y)(z+x)$, khi đó ta viết lại được bất đẳng thức thành

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge 6$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2;\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2;\ \frac{c}{a}+\frac{c}{a}\ge 2$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge 6$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Câu 192: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh 2014-2015]

Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng giả thiết ta được $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}}=\dfrac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}=\sqrt{\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{z+x}\right)$$

Do đó ta được $$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{z+x}\right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y}+\frac{y}{y+z}\right);\ \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+x}+\frac{z}{y+z}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$$
$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{z+x}+\frac{y}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}+\frac{z}{y+z}\right)=\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 193: [TS10 Chuyên Tiền Giang 2014-2015]

1) Cho a, b, c là ba số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}\le\frac{3}{4}(a+b+c)$$

2) Cho a, b, c là ba số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}\le 1$$

Lời giải

1) Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt{ab}=2.\sqrt{\frac{a}{4}.b}\le\frac{a}{4}+b;\ \sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{\frac{a}{4}.b.4c}\le\frac{\frac{a}{4}+b+4c}{3}$$

Từ đó ta có $a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}\le a+\dfrac{a}{4}+b+\dfrac{\frac{a}{4}+b+4c}{3}=\dfrac{4(a+b+c)}{3}$.

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=4b=16c$

2) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\ge 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\ge \frac{\left(a+b+c\right)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}=1$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Câu 194: [TS10 Chuyên Bắc Giang 2014-2015]

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{b+3}}+\frac{b^2}{\sqrt{c+3}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+3}}\ge \frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{b+3}}+\frac{b^2}{\sqrt{c+3}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+3}}=\frac{4a^2}{4\sqrt{b+3}}+\frac{4b^2}{4\sqrt{c+3}}+\frac{4c^2}{4\sqrt{a+3}}\ge \frac{4a^2}{b+7}+\frac{4b^2}{c+7}+\frac{4c^2}{a+7}$$

Áp dụng tiếp bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{4a^2}{b+7}+\frac{4b^2}{c+7}+\frac{4c^2}{a+7}\ge \frac{4\left(a+b+c\right)^2}{a+b+c+21}=\frac{4.9}{3+21}=\frac{3}{2}$$

Suy ra ta được $$\frac{a^2}{\sqrt{b+3}}+\frac{b^2}{\sqrt{c+3}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+3}}\ge \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 195: [TS10 Chuyên Đại học Vinh 2014-2015]

Cho ba số thực x, y, z không âm thỏa mãn $x+y+z+xyz=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=xy+yz+zx$$

Lời giải

Giả sử x là số lớn nhất trong các số x, y, z.

Khi đó ta được $x+y+z\le 3x;\ xyz\le x^3$

Suy ra $x^3+3x\ge 4$ hay $\left(x-1\right)\left(x^2+x+4\right)\ge 0\Rightarrow x\ge 1$.

Ta có

$$P = xy + yz + zx = x(x+y+z) + yz - x^2 = x(4 - xyz) + yz - x^2$$
$$= -(x-2)^2 + 4 + yz(1 - x^2) \le 4$$

Suy ra $P \le 4$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x = 0;\ y = z = 2$ và các hoán vị.

Câu 196: [TS10 Chuyên Yên Bái 2014-2015]

Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x > -1;\ y > -2;\ z > -3$ và $x + y + z = -5$.

Chứng minh rằng: $$\frac{1}{x+1} + \frac{4}{y+2} + \frac{9}{z+3} \ge 36$$

Lời giải

Do $x > -1;\ y > -2;\ z > -3$ nên $x + 1 > 0;\ y + 2 > 0;\ z + 3 > 0$. Khi đó áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{1}{x+1} + \frac{4}{y+2} + \frac{9}{z+3} \ge \frac{(1+2+3)^2}{x+y+z+6} = 36$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x + y + z = -5 \\ \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{y+2} = \dfrac{3}{z+3} \end{cases}$$

Câu 197: [TS10 Chuyên Quảng Trị 2014-2015]

Cho các số thực a, b, c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} > 2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\dfrac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2(b^2+c^2)}} \ge \dfrac{2a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\dfrac{b}{\sqrt{c^2+a^2}} \ge \dfrac{2b^2}{a^2+b^2+c^2};\ \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \ge \dfrac{2c^2}{a^2+b^2+c^2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\dfrac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{c^2+a^2}} + \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \ge 2$

Vì đẳng thức không xẩy ra nên ta có bất đẳng thức $\dfrac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{c^2+a^2}} + \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} > 2$

Bài toán được chứng minh xong.

NĂM HỌC 2013-2014

Câu 198: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2013-2014]

Cho tam giác ABC có chu vi bằng 2. Ký hiệu a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{a}{b+c-a}+\frac{4b}{c+a-b}+\frac{9c}{a+b-c}$$

Lời giải

Với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 2 nên $a+b+c=2$.

Đặt $b+c-a=x;\ c+a-b=y;\ a+b-c=z$, do a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên $x;y;z>0$. Khi đó ta được $x+y+z=2$ và $a=\frac{y+z}{2};\ b=\frac{x+z}{2};\ c=\frac{x+y}{2}$.

Khi đó

$$S=\frac{y+z}{2x}+\frac{4(x+z)}{2y}+\frac{9(x+y)}{2z}=\frac{1}{2}\left[\frac{y+z}{x}+\frac{4(x+z)}{y}+\frac{9(x+y)}{z}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{9x}{z}\right)+\left(\frac{4z}{y}+\frac{9y}{z}\right)\right]$$

Ta có

$$\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}=\left(\sqrt{\frac{y}{x}}-2\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2+2\ge 2$$
$$\frac{z}{x}+\frac{9x}{z}=\left(\sqrt{\frac{z}{x}}-3\sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2+6\ge 6$$
$$\frac{4z}{y}+\frac{9y}{z}=\left(2\sqrt{\frac{z}{y}}-3\sqrt{\frac{y}{z}}\right)^2+12\ge 12$$

Do đó $S\ge\frac{1}{2}(4+6+12)=11$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}y=2x\\z=3x\\2z=3y\\x+y+z=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{2}{3}\\z=1\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{5}{6};\ b=\frac{2}{3};\ c=\frac{1}{2}$$

Khi đó $a^2=b^2+c^2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 11 khi ΔABC vuông.

Câu 199: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2013-2014]

Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{\sqrt{x^2-xy+y^2}}{x+y+2z}+\frac{\sqrt{y^2-yz+z^2}}{y+z+2x}+\frac{\sqrt{z^2-zx+x^2}}{z+x+2y}$$

Lời giải

Ta có $x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy\ge(x+y)^2-\frac{3(x+y)^2}{4}=\frac{(x+y)^2}{4}$

Suy ra $$\frac{\sqrt{x^2-xy+y^2}}{x+y+2z}\ge\frac{x+y}{2(x+z+y+z)}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$S\ge\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{y+z+z+x}+\frac{y+z}{z+x+x+y}+\frac{z+x}{x+y+y+z}\right)$$

Đặt $a=x+y;\ b=y+z;\ c=z+x$, khi đó ta được

$$S\ge\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\ge\frac{1}{2}.\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

Vì theo bất đẳng thức Neibizt thì $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$.

Vậy ta được giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{3}{4}$ đạt được tại $x=y=z$.

Câu 200: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2013-2014]

Giả sử a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $abc+bcd+cda+dab=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4(a^3+b^3+c^3)+9c^3$

Lời giải

Do vai trò của a, b, c như nhau nên ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=kd$, với k là số dương.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số dương ta được

$$\frac{1}{k^2}(a^3+b^3+c^2)\ge\frac{3abc}{k^2}$$
$$\frac{a^3}{k^3}+\frac{b^3}{k^3}+d^3\ge\frac{3abd}{k^2}$$
$$\frac{b^3}{k^3}+\frac{b^3}{k^3}+d^3\ge\frac{3bcd}{k^2}$$
$$\frac{c^3}{k^3}+\frac{a^3}{k^3}+d^3\ge\frac{3cad}{k^2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\left(\frac{1}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right)\left(a^3+b^3+c^2\right)+3d^3\ge\frac{3\left(abc+abd+bcd+cad\right)}{k^2}=\frac{3}{k^2}$$

Hay
$$\left(\frac{3}{k^2}+\frac{6}{k^3}\right)\left(a^3+b^3+c^2\right)+9d^3\ge\frac{9}{k^2}$$

Ta cần tìm k để $\frac{3}{k^2}+\frac{6}{k^3}=4\Leftrightarrow 4k^3-3k-6=0$ và ta chọn k là số dương.

Đặt $k=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ thay vào phương trình trên và biến đổi ta thu được $x^6-12x^3+1=0$

Giải phương trình này ta được $x=\sqrt[3]{6\pm\sqrt{35}}$, để ý là $\left(6+\sqrt{35}\right)\left(6-\sqrt{35}\right)=1$ nên ta tính được $k=\dfrac{\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}{2}$

Do đó ta tính được giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{36}{\left(\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\right)^2}$.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}{2}.d$

Câu 201: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2013-2014]

Giả sử dãy số thực có thứ tự $x_1\le x_2\le x_3\le...\le x_{192}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+...+x_n=0\\|x_1|+|x_2|+|x_3|+...+|x_{192}|=2013\end{cases}$$

Chứng minh rằng:
$$x_{192}-x_1\ge\frac{2013}{96}$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bài toán phụ sau: Với $a_1\le a_2\le a_3\le...\le a_n$ thỏa mãn

$$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+...+a_n=0\\|a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n|=1\end{cases}$$

Khi đó ta được $a_n-a_1\ge\frac{2}{n}$.

Thật vậy, từ điều kiện của bài toán ta nhận thấy tồn tại số tự nhiên k để

$$a_1\le a_2\le a_3\le...\le a_k\le 0\le a_{k+1}\le...\le a_n$$

Khi đó từ $\begin{cases} a_1+a_2+a_3+...+a_n=0 \\ |a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n|=1 \end{cases}$ suy ra

$$\begin{cases} (a_1+a_2+a_3+...+a_k)+(a_{k+1}+...+a_n)=0 \\ -(a_1+a_2+a_3+...+a_k)+(a_{k+1}+...+a_n)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{k+1}+...+a_n=\dfrac{1}{2} \\ a_1+a_2+a_3+...+a_k=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Cũng từ $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_k \le 0 \le a_{k+1} \le ... \le a_n$ ta được

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_k \Rightarrow a_1 \le -\frac{1}{2k}$$

$$a_{k+1} \le ... \le a_n \Rightarrow a_n \ge \frac{1}{2(n-k)}$$

Do đó $a_n - a_1 \ge \dfrac{1}{2(n-k)} + \dfrac{1}{2k} = \dfrac{n}{2(n-k)n} \ge \dfrac{2n}{(n-k+n)^2} = \dfrac{2}{n}$

Như vậy bài toán được chứng minh xong.

Từ giả thiết của bài toán trên ta viết lại như sau

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{2013}+\dfrac{x_2}{2013}+\dfrac{x_3}{2013}+...+\dfrac{x_n}{2013}=0 \\ \left|\dfrac{x_1}{2013}\right|+\left|\dfrac{x_2}{2013}\right|+\left|\dfrac{x_3}{2013}\right|+...+\left|\dfrac{x_{192}}{2013}\right|=1 \end{cases}$$

Áp dụng kết quả của bài toán phụ ta được

$$\frac{x_{192}}{2013}-\frac{x_1}{2013} \ge \frac{2}{192} \Rightarrow x_{192}-x_1 \ge \frac{2013}{96}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Câu 202: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2013-2014]

. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}+\sqrt{\frac{bc+2a^2}{1+bc-a^2}}+\sqrt{\frac{ac+2b^2}{1+ac-b^2}} \ge 2+ab+ba+ca$$

Lời giải

Do $a^2+b^2+c^2=1$ nên ta có

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}=\sqrt{\frac{ab+2c^2}{a^2+b^2+c^2+ab-c^2}}=\sqrt{\frac{ab+2c^2}{a^2+b^2+ab}}=\frac{ab+2c^2}{\sqrt{(ab+2c^2)(a^2+b^2+ab)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{\left(ab+2c^2\right)\left(a^2+b^2+ab\right)}\le\frac{2c^2+a^2+b^2+2ab}{2}\le\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}=a^2+b^2+c^2$$

Suy ra $\sqrt{\dfrac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}}=\dfrac{ab+2c^2}{\sqrt{\left(ab+2c^2\right)\left(a^2+b^2+ab\right)}}\ge\dfrac{ab+2c^2}{a^2+b^2+c^2}=ab+2c^2$

Tương tự ta được $\sqrt{\dfrac{bc+2a^2}{1+bc-a^2}}\ge bc+2a^2$; $\sqrt{\dfrac{ca+2b^2}{1+ca-b^2}}\ge ca+2b^2$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên kết hợp $a^2+b^2+c^2=1$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 203: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2013-2014]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\ge\frac{3}{4}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$4a(c+1)+4b(a+1)+4c(b+1)\ge 3(a+1)(b+1)(c+1)$$
$$\Leftrightarrow 4(ab+bc+ca)+4(a+b+c)\ge 3abc+3(ab+bc+ca)+3(a+b+c)+3$$
$$\Leftrightarrow ab+bc+ca+a+b+c\ge 6$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho các số dương ta được

$$ab+bc+ca\ge 3.\sqrt[3]{(abc)^2}=3;\ a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $ab+bc+ca+a+b+c\ge 6$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 204: [TS10 Chuyên TP. Hà Nội, 2013-2014]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+ab+bc+ca=6abc$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\ge 3$

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{2}{ab};\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{2}{bc};\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\ge\frac{2}{ca}$$
$$\frac{1}{a^2}+1\ge\frac{2}{a};\frac{1}{b^2}+1\ge\frac{2}{b};\frac{1}{c^2}+1\ge\frac{2}{c}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+3\ge 2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=2.6=12$$

Hay $$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

Câu 205: [TS10 Chuyên Ninh Bình, 2013-2014]

Cho x, y là các số thực thoả mãn $x^2\left(x^2+2y^2-3\right)+\left(y^2-2\right)^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C=x^2+y^2$.

Lời giải

Ta có:

$$x^2\left(x^2+2y^2-3\right)\left(y^2-2\right)^2=1\Leftrightarrow x^4+2x^2y^2-3x^2+y^4-4y^2+4=1$$
$$\Leftrightarrow x^4+2x^2y^2+y^4-4\left(x^2+y^2\right)+x^2+3=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^2-4\left(x^2+y^2\right)+3=-x^2\le 0\ \forall x$$

Với $x^2+y^2=C$ thì ta có $C^2-4C+3\le 0\Leftrightarrow C^2-4C+4\le 1\Leftrightarrow (C-2)^2\le 1$

$\Leftrightarrow |C-2|\le 1\Leftrightarrow -1\le C-2\le 1\Leftrightarrow 1\le C\le 3$

$$C=1\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=\pm 1\end{cases};\ C=3\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x^2+y^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

Vậy minC = 1 khi $x=0$ và $y=\pm 1$; maxC = 3 khi $x=0$ và $y=\pm\sqrt{3}$.

Câu 206: [TS10 Chuyên TP. Hà Nội, 2013-2014]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{3}{4}$$

Lời giải

Đặt $a=\frac{x}{y};\ b=\frac{y}{z};\ c=\frac{z}{x}$. Gọi P là vế trái, khi đó ta được

$$P=\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}$$
$$=\frac{yz}{xy+xz+2yz}+\frac{zx}{xy+yz+2xz}+\frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

Biến đổi tương đương ta được

$$3-P=1-\frac{yz}{xy+xz+2yz}+1-\frac{zx}{xy+yz+2xz}+1-\frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

$$3-P=(xy+yz+xz)\left(\frac{1}{xy+xz+2yz}+\frac{1}{xy+yz+2xz}+\frac{1}{xz+yz+2xy}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\ge\frac{1}{A+B+C}$

Ta có $3-P=(xy+yz+xz)\frac{9}{4xy+4yz+4xz}=\frac{9}{4}\Leftrightarrow P\le 3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 207: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2013-2014]

a) Chứng minh rằng: $a^3+b^3\ge ab(a+b)$, với a, b là hai số dương.

b) Cho a, b là hai số dương thỏa mãn $a+b\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F=\left(a^3+b^3\right)^2+\left(a^2+b^2\right)+\frac{3}{2}ab$$

Lời giải

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)-ab(a+b)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left(a^2-2ab+b^2\right)\ge 0\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2\ge 0$$

Ta thấy với a, b là hai số dương nên bất đẳng thức đã cho luôn đúng.

b) Ta có $F=\left(a^3+b^3\right)^2+(a+b)^2-\frac{1}{2}ab$

Mà ta luôn có bất đẳng thức $a^3+b^3\ge\frac{(a+b)^3}{4}$, với mọi a, b > 0.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có $\left(a^3+b^3\right)^2\ge\left[\frac{(a+b)^3}{4}\right]^2\ge\frac{1}{16}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$F\ge\frac{1}{16}+(a+b)^2-\frac{(a+b)^2}{8}=\frac{1}{16}+\frac{7(a+b)^2}{8}\ge\frac{1}{16}+\frac{7}{8}=\frac{15}{16}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của F là bằng $\frac{15}{16}$, đạt được khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Câu 208: [TS10 Chuyên Bình Phước, 2013-2014]

a. Chứng minh rằng: $a^3+b^3\ge ab(a+b)$, với a, b là hai số dương.

b. Cho a, b là hai số dương thỏa mãn $a+b\ge 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=\left(a^3+b^3\right)^2+\left(a^2+b^2\right)+\frac{3}{2}ab.$

Lời giải

a) Ta có bất đẳng thức

$(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)\ge 0\Leftrightarrow(a+b)(a^2-2ab+b^2)\ge 0\Leftrightarrow(a+b)(a-b)^2\ge 0$

Ta thấy với a, b là hai số dương nên bất đẳng thức đã cho luôn đúng.

Dấu "=" xảy ra khi a = b.

b) Áp dụng bất đẳng thức đã chứng minh ở câu (a) ta có: $\left(a^3+b^3\right)^2\ge\left[ab(a+b)\right]^2$ mà theo giả thiết $a+b\ge 1$

Do đó $\left(a^3+b^3\right)^2\ge\left[ab(a+b)\right]^2\ge(ab)^2$

+) Mặt khác ta có: $F=a^2+b^2=\left(a+b\right)^2-2ab\ge 1-1ab$

+) Do đó

$$F\ge\left(ab\right)^2+1-2ab+\frac{3}{2}ab=\left(ab\right)^2-\frac{ab}{2}+1=\left(ab\right)^2-2.ab.\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{15}{16}=\left(ab-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\ge\frac{15}{16}$$

+) Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\ ab=\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

+) Vậy giá trị nhỏ nhất của F là bằng $\frac{15}{16}$, đạt được khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Câu 209: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2013-2014]

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $12\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\le 3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Chứng minh rằng: $$\frac{1}{4a+b+c}+\frac{1}{a+4b+c}+\frac{1}{a+b+4c}\le\frac{1}{6}$$

Lời giải

Theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\le 12\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\le 3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Suy ra $$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1\right)\left[4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+3\right]\le 0$$

Do đó ta được $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 1 \text{ và } a+b+c\ge 9$$

Đặt $$P=\frac{1}{4a+b+c}+\frac{1}{a+4b+c}+\frac{1}{a+b+4c}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $\frac{4}{x+y}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ ta được

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{4a+b+c}+\frac{1}{a+4b+c}+\frac{1}{a+b+4c}\\&\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{a+b+c}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}+\frac{3}{a+b+c}\right)\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Câu 210: [TS10 Chuyên Nam Định, 2013-2014]

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+xz}+\frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$2x^2\sqrt{yz}\le x^4+yz\Leftrightarrow\frac{1}{2x^2\sqrt{yz}}\ge\frac{1}{x^4+yz}\Leftrightarrow\frac{x^2}{x^4+yz}\le\frac{1}{2\sqrt{yz}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{yz}}\le\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{yz}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta được $\frac{x^2}{x^4+yz}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{y^2}{y^4+xz}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right);\ \frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+xz}+\frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{xy+yz+zx}{xyz}$$

Mặt khác ta lại có $\quad xy+yz+zx\le x^2+y^2+z^2$

Do đó ta được $\quad \dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz}=\dfrac{3xyz}{xyz}=3$

Suy ra $\quad \dfrac{x^2}{x^4+yz}+\dfrac{y^2}{y^4+xz}+\dfrac{z^2}{z^4+xy}\le\dfrac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$

Câu 211: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2013-2014]

Cho hai số x và y thỏa mãn: $xy(2013-\dfrac{xy}{2})=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{y^4}{4}-2014$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tích xy.

Lời giải

Ta có: $xy(2013-\dfrac{xy}{2})=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{y^4}{4}-2014\ \ge\ 2.\sqrt{\dfrac{x^4}{4}.\dfrac{y^4}{4}}-2014$ (theo BĐT Cô–Si) (*)

(*) $\Leftrightarrow$ $(xy)^2-2013xy-2014\le 0$

Đặt t = xy thì (*) $\Leftrightarrow$ $t^2-2013t-2014\le 0\ \Leftrightarrow\ (t+1)(t-2014)\le 0\ \Leftrightarrow\ -1\le t\le 2014$

GTLN của xy là 2014 khi $x=y=\pm\sqrt{2014}$

GTNN của xy là –1 Khi (x = 1 ; y =–1) hoặc (x = –1; y = 1)

Câu 212: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2013-2014]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$2abc(a+b+c)\le\frac{5}{9}+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức dạng $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ ta được

$$a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2\ge abc\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

Bài toán quy về chứng minh $2abc(a+b+c)\le\dfrac{5}{9}+abc\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$

Hay $\quad 2(a+b+c)\le\dfrac{5}{9abc}+\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $a^2b+\frac{1}{9b}\ge\frac{2a}{3}$; $b^2c+\frac{1}{9c}\ge\frac{2b}{3}$; $c^2a+\frac{1}{9a}\ge\frac{2c}{3}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$a^2b+b^2c+c^2a+\frac{1}{9a}+\frac{1}{9b}+\frac{1}{9c}\ge\frac{2a}{3}+\frac{2b}{3}+\frac{2c}{3}$$

Hay $$a^2b+b^2c+c^2a+\frac{ab+bc+ca}{9abc}\ge\frac{2}{3}(a+b+c)$$

Như vậy ta cần chỉ ra được $2(a+b+c)\le\frac{4}{9abc}+\frac{2}{3}(a+b+c)$

Hay $$\frac{4abc(a+b+c)}{3}\le\frac{4}{9}\Leftrightarrow 3abc(a+b+c)\le 1$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng vì $1=(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

NĂM HỌC 2012-2013

Câu 213: [TS10 Chuyên Nghệ An, 2012-2013]

Cho ba số dương x,y,z thoả mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}\ge\sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}\ge 1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$,

với $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$, $a+b+c=1$.

Ta có: $\sqrt{a+bc}=\sqrt{a(a+b+c)+bc}$

$=\sqrt{a^2+a(b+c)+bc}\ge\sqrt{a^2+2a\sqrt{bc}+bc}=a+\sqrt{bc}$.

Tương tự: $\sqrt{b+ca}\ge b+\sqrt{ca}$; $\sqrt{c+ab}\ge c+\sqrt{ab}$.

Từ đó ta có đpcm. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=3$.

Câu 214: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2012-2013]

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A = 14\left(a^2+b^2+c^2\right) + \frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$$

Lời giải

Dễ dàng tính được $ab+bc+ca = \dfrac{1-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}$. Lại có

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) = a^3+b^2a+b^3+bc^2+c^3+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^3+b^2a \ge 2a^2b;\ b^3+bc^2 \ge 2b^2c;\ c^3+ca^2 \ge 2c^2a$$

Do đó suy ra

$$a^2+b^2+c^2 = a^3+b^2a+b^3+bc^2+c^3+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a \ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

Từ đó ta được $$\frac{1}{a^2b+b^2c+c^2a} \ge \frac{3}{a^2+b^2+c^2}$$

Hay $$\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a} \ge \frac{3(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} = \frac{3-3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

Đặt $t = a^2+b^2+c^2 \Rightarrow t \ge \dfrac{1}{3}$. Khi này biểu thức được viết lại thành

$$A = 14t + \frac{3-3t}{2t} = \frac{28t}{2} + \frac{3}{2t} - \frac{3t}{2t} = \frac{27t}{2} + \frac{3}{2t} + \frac{t}{2} - \frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\dfrac{27t}{2} + \dfrac{3}{2t} \ge 2\sqrt{\dfrac{27t}{2}.\dfrac{3}{2t}} = 9$

Mặt khác $\dfrac{t}{2} - \dfrac{3}{2} \ge \dfrac{1}{6} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{4}{3}$. Suy ra $A \ge 9 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{23}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\dfrac{23}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$

Câu 215: [TS10 Chuyên KHTN, 2012-2013]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a \le b \le 3 \le c;\ c \ge b+1;\ a+b \ge c$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \dfrac{2ab+a+b+c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$

Lời giải

Ta có

$$Q=\frac{2ab+a+b+c\left(ab-1\right)}{\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)}=\frac{\left(a+1\right)\left(b+1\right)+\left(ab-1\right)\left(c+1\right)}{\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)}$$
$$=\frac{1}{c+1}+\frac{ab-1}{\left(a+1\right)\left(b+1\right)}=\frac{1}{a+b+1}+\frac{ab-1}{ab+a+b+1}$$

Từ giả thiết

$$a+b\ge c\ge b+1\Rightarrow b\ge a\ge 1\Rightarrow \left(a-1\right)\left(b-1\right)\ge 0\Rightarrow ab\ge a+b-1\ge c-1\ge 2$$

Suy ra $$Q\ge \frac{1}{ab+2}+\frac{ab-1}{2\left(ab+1\right)}$$

Đặt $x=ab\Rightarrow x\ge 2$, khi đó ta được $Q\ge \frac{1}{x+2}+\frac{x-1}{2\left(x+1\right)}$

Suy ra $$Q-\frac{5}{12}\ge \frac{1}{x+2}+\frac{x-1}{2\left(x+1\right)}-\frac{5}{12}=\frac{\left(x-2\right)\left(x+5\right)}{12\left(x+1\right)\left(x+2\right)}\ge 0$$

Do đó ta có $Q\ge \frac{5}{12}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{5}{12}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1;b=2;c=3$

Câu 216: [TS10 Chuyên Bình Phước, 2012-2013]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$P=\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\le \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2a}=\frac{ab+bc+ca}{2abc}=\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 217: [TS10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội, 2012-2013]

Cho n số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ với $n\ge 3$. Kí hiệu $Max\left\{x_1, x_2, ..., x_n\right\}$ là số lớn nhất trong các số $x_1, x_2, ..., x_n$.Chứng minh rằng:

$$Max\left\{x_1, x_2, ..., x_n\right\}\ge \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}+\frac{\left|x_1-x_2\right|+\left|x_2-x_3\right|+...+\left|x_n-x_1\right|}{2n}$$

Lời giải

Để ý là trong hai số thực x, y bất kì ta luôn có

$$Min\{x,y\}\le x,y\le Max\{x,y\} \text{ và } Max\{x,y\}=\frac{x+y+\left|x-y\right|}{2}$$

Sử dụng đẳng thức $\text{Max}\{x,y\}=\dfrac{x+y+|x-y|}{2}$, ta có:

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}+\frac{|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+...+|x_n-x_1|}{2n}$$

$$=\frac{x_1+x_2+|x_1-x_2|}{2n}+\frac{x_2+x_2+|x_2-x_3|}{2n}+...+\frac{x_n+x_1+|x_n-x_1|}{2n}$$

$$\le\frac{\text{Max}\{x_1,x_2\}+\text{Max}\{x_2,x\}+\text{Max}\{x_n,x_1\}}{n}\le\text{Max}\{x_1;x_2;...;x_n\}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=...=x_n$

Câu 218: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2012-2013]

Cho x, y, z là các số không âm thỏa mãn $x+y+z=\dfrac{3}{2}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất: $S=x^3+y^3+z^3+x^2y^2z^2$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakoskicopxki ta có

$$\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}+\sqrt{z^2}\right)\left(\left(x\sqrt{x}\right)^2+\left(y\sqrt{y}\right)^2+\left(z\sqrt{z}\right)^2\right)\ge\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$$

Hay $\dfrac{3}{2}\left(x^3+y^3+z^3\right)\ge\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3\ge\dfrac{2}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$ (*)

Mặt khác, dễ dàng chứng minh được

$$xyz\ge(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)=\left(\frac{3}{2}-2z\right)\left(\frac{3}{2}-2x\right)\left(\frac{3}{2}-2y\right)$$

$$=\frac{27}{8}-\frac{9}{2}(x+y+z)+6(xy+yz+xz)-8xyz$$

$$\Leftrightarrow 9xyz\ge\frac{27}{8}-3\left(x^2+y^2+z^2\right)\Leftrightarrow x^2y^2z^2\ge\left(\frac{3}{8}-\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^2$$

Đặt $t=x^2+y^2+z^2\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{3}=\dfrac{3}{4}$. Khi đó ta được

$S\ge\dfrac{2}{3}t^2+\left(\dfrac{3}{8}-\dfrac{t}{3}\right)^2=\dfrac{2t^2}{3}+\dfrac{t^2}{9}-\dfrac{t}{4}+\dfrac{9}{64}=\dfrac{7t^2}{9}-\dfrac{t}{4}+\dfrac{9}{64}=\dfrac{1}{6}\left(t-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{11}{8}t^2+\dfrac{3}{64}\ge\dfrac{25}{64}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\dfrac{25}{64}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{2}$

Câu 219: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2012-2013]

Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+3a}{1+b^2}+\frac{1+3b}{1+c^2}+\frac{1+3c}{1+a^2}\ge 6$$

Lời giải

Ta viết lại vế trái thành

$$\frac{1+3a}{1+b^2}+\frac{1+3b}{1+c^2}+\frac{1+3c}{1+a^2}=\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+a^2}+\frac{3a}{1+b^2}+\frac{3b}{1+c^2}+\frac{3c}{1+a^2}$$

Khi đó áp dụng ta đẳng thức Cauchy ta được : $\frac{1}{b^2+1}=1-\frac{b^2}{b^2+1}\ge 1-\frac{b^2}{2b}=1-\frac{b}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{1}{c^2+1}\ge 1-\frac{c}{2};\ \frac{1}{a^2+1}\ge 1-\frac{a}{2}$

Khi đó ta có bất đẳng thức: $\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{a^2+1}\ge 3-\frac{a+b+c}{2}$

Mặt khác ta lại có $\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}=a+b+c-\frac{3}{2}$

Do đó ta được : $\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+a^2}+\frac{3a}{1+b^2}+\frac{3b}{1+c^2}+\frac{3c}{1+a^2}\ge 3+\frac{5\left(a+b+c\right)}{2}-\frac{9}{2}\ge 6$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 220: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2012-2013]

Cho 2 số dương a, b thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q=\frac{1}{a^4+b^2+2ab^2}+\frac{1}{b^4+a^2+2ba^2}.$$

Lời giải

Với $a>0;b>0$ ta có: $(a^2-b)^2\ge 0\Leftrightarrow a^4-2a^2b+b^2\ge 0\Rightarrow a^4+b^2\ge 2a^2b$

$\Leftrightarrow a^4+b^2+2ab^2\ge 2a^2b+2ab^2 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{a^4+b^2+2ab^2}\le \frac{1}{2ab\left(a+b\right)}$ (1)

Tương tự có $\frac{1}{b^4+a^2+2a^2b}\le \frac{1}{2ab\left(a+b\right)}$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow Q\le \frac{1}{ab\left(a+b\right)}$

Vì $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2\Leftrightarrow a+b=2ab$ mà $a+b\ge 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow ab\ge 1\Rightarrow Q\le \frac{1}{2(ab)^2}\le \frac{1}{2}$.

Khi a = b = 1 thì $\Rightarrow Q=\frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $\frac{1}{2}$

Câu 221: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2012-2013]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{abc}+\frac{1}{1-2\left(ab+bc+ca\right)}$$

Lời giải

Do $a+b+c=1 \Rightarrow 1-2\left(ab+bc+ca\right)=a^2+b^2+c^2$

Suy ra $$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$

Dễ chứng minh: $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}$

Do đó ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}$$

Áp dụng tiếp đánh giá trên ta được

$$\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)\ge 9$$

Hay $$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{ab+bc+ca}\ge 9$$

Mặt khác ta lại có $$\frac{7}{ab+bc+ca}\ge 21$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 30$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 30. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Câu 222: [TS10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội, 2012-2013]

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện: $\sqrt{xy}\left(x-y\right)=x+y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra: x > y > 0, Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\left(x+y\right)^2=xy\left(x-y\right)^2=\frac{1}{4}.4xy\left(\left(x+y\right)^2-4xy\right)\le\frac{1}{4}\left(\frac{4xy+\left(x+y\right)^2-4xy}{2}\right)^2=\frac{1}{16}\left(x+y\right)^4.$$

Do đó $x+y\ge 4$. Vậy $\min A=4$ khi $x=2+2\sqrt{2}; y=2-\sqrt{2}$.

Câu 223: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2012-2013]

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc\le 1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge a+b+c$$

Lời giải

Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}\Rightarrow xyz\ge 1$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}\ge \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Áp dụng bất đẳng thức Binhiacopcxki ta được

$$\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}\ge \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{xx+yz+zx}\ge x^2+y^2+z^2$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $x^2+y^2+z^2\ge \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

Thật vậy theo một đánh giá quen thuộc và giả thiết $xyz\ge 1$ ta có

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx\ge \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 224: [TS10 Chuyên KHTN, 2012-2013]

Giả sử a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right)\ge 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$.

Lời giải.

Ta có:

$\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right)\ge 4\Leftrightarrow 4\le \sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+1\le \frac{x+y}{2}+\frac{x+1}{2}+\frac{y+1}{2}+1\Leftrightarrow x+y\ge 2$ Mặt khác: $\frac{x^2}{y}+y\ge 2y,\ \ \frac{y^2}{x}+x\ge 2x$

Do đó $P\ge x+y\ge 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2 khi $x = y = 1$.

Câu 225: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2012-2013]

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)\ge 8\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right)$$

Lời giải

Vì a, b, c là các số dương và $a+b+c=1$ nên ta có $a,b,c<1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$1+a=1-b+1-c\ge 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$$

Tương tự ta có $1+b\ge 2\sqrt{(1-c)(1-a)};\ 1+c\ge 2\sqrt{(1-a)(1-b)}$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$(1+a)(1+b)(1+c)\ge 8(1-a)(1-b)(1-c)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Câu 226: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2012-2013]

Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $0\le a\le b\le c\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A=(a+b+c+1)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$$

Lời giải

Đặt $x=1+c,\ y=1+b,\ z=1+a$. Từ $0\le a\le b\le c\le 1$ ta được $1\le x\le y\le z\le 2$

Ta viết lại biểu thức A là $A=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}$

$$\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{y}{z}\right)\ge 0\Leftrightarrow 1-\frac{x}{y}-\frac{y}{z}+\frac{x.y}{y.z}\ge 0\Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{z}\le\frac{x}{z}+1$$

$$\left(1-\frac{z}{y}\right)\left(1-\frac{y}{x}\right)\ge 0\Leftrightarrow 1-\frac{z}{y}-\frac{y}{x}+\frac{z.y}{y.x}\ge 0\Leftrightarrow \frac{z}{y}+\frac{y}{x}\le\frac{z}{x}+1$$

$$\Rightarrow\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\le\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+2\Rightarrow\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}\le 2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+2$$

Đặt $t=\frac{x}{z}\Rightarrow\frac{1}{2}\le t\le 1$. Do đó ta được

$$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}=t+\frac{1}{t}=\frac{t^2+1}{t}=\frac{2t^2-5t+2}{2t}+\frac{5}{2}=\frac{(2t-1)(t-2)}{2t}+\frac{5}{2}$$

Do $\frac{1}{2}\le t\le 1$ nên ta có $\frac{(2t-1)(t-2)}{2t}$ suy ra $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\le\frac{5}{2}$

Từ đó ta được $A\le 3+2.\frac{5}{2}+2=10$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 10. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi.

Câu 227: [TS10 Chuyên Hải Phòng, 2012-2013]

Cho ba số dương a,b,c .Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{9c}{a+b}>4$

Lời giải

$$\frac{a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{9c}{a+b}>4 \Leftrightarrow (a+b+c)(\frac{1}{b+c}+\frac{4}{a+c}+\frac{9}{a+b})>18$$

Thật vậy:

$$[(b+c)+(a+c)+a+b)](\frac{1}{b+c}+\frac{4}{a+c}+\frac{9}{a+b})>(\sqrt{\frac{b+c}{b+c}}+\sqrt{\frac{4(a+c)}{(a+c)}}+\sqrt{\frac{9(a+b)}{(a+b)}})^2=36$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(\frac{1}{b+c}+\frac{4}{a+c}+\frac{9}{a+b})>18 \text{ (đpcm)}$$

Câu 228: [TS10 Chuyên Nam Định, 2012-2013]

Cho a, b, c ,d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{a^3+b^3+c^3+d^3}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$4\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\geq\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2;$$
$$\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\geq\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$4\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)^2\geq\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$$

Hay $16\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)^2\geq 4\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\geq\left(a+b+c+d\right)^2=9$$

Do vậy $4\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\geq 9\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2$

Suy ra ta được $16\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)^2\geq 9\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)^2$

Hay $4\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)\geq 3\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)$

Do đó ta được $P=\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{a^3+b^3+c^3+d^3}\geq\frac{3}{4}$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$, đạt được khi $a=b=c=d=\frac{3}{4}$

NĂM HỌC 2011-2012

Câu 229: [TS10 Chuyên Bình Phước, 2011-2012]
Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c\le 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge \frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{1+ab}=1-\frac{ab}{1+ab}\ge 1-\frac{ab}{2\sqrt{ab}}=1-\frac{\sqrt{ab}}{2}$$

Tương tự ta có $\frac{1}{1+bc}\ge 1-\frac{\sqrt{bc}}{2};\ \frac{1}{1+ca}\ge 1-\frac{\sqrt{ca}}{2}$

Cộng theo vế theo vế các bất đẳng thức trên và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge 3-\frac{1}{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$$
$$\ge 3-\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}\right)=3-\frac{a+b+c}{2}\ge 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Câu 230: [TS10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội, 2011-2012]
Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>4$$

Lời giải

Dễ thấy $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}>\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}};...\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

Do đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$$

Suy ra

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}\right)>\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$$

Hay $2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}\right)>\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+...+\sqrt{81}-\sqrt{80}$

Nên ta được $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>4$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 231: [TS10 Chuyên Nghệ An, 2011-2012]

Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)}\ge abc+\sqrt[3]{\left(a^3+abc\right)\left(b^3+abc\right)\left(c^3+abc\right)}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)}\ge 1+\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc}+1\right)\left(\frac{b^2}{ca}+1\right)\left(\frac{c^2}{ab}+1\right)}$$

Đặt $x=\frac{a}{b};\ y=\frac{b}{c};\ z=\frac{c}{a}\Rightarrow x;\ y;\ z>0;\ xyz=1$

Khi đó bất đẳng thức trên trở thành

$$\sqrt{\left(xy+yz+zx\right)\left(x+y+z\right)}\ge 1+\sqrt[3]{\left(\frac{x}{z}+1\right)\left(\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{z}{y}+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)+xyz}\ge 1+\sqrt[3]{\frac{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}{xyz}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)+1}\ge 1+\sqrt[3]{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}$$

Đặt $t=\sqrt[3]{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}$ suy ra $t\ge 2$. Khi đó ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\sqrt{t^3+1}\ge 1+t\Leftrightarrow t^3+1\ge 1+2t+t^2\Leftrightarrow t\left(t-2\right)\left(t+1\right)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $t\ge 2$.

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Câu 232: [TS10 Chuyên Thanh Hóa, 2011-2012]

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=2$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{ab}{\sqrt{ab+2c}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+2a}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+2b}}$$

Lời giải

Để ý đến giả thiết $a+b+c=2$ ta có $ab+2c=ab+c\left(a+b+c\right)=\left(b+c\right)\left(c+a\right)$

Do đó theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+2c}}=\frac{ab}{\sqrt{\left(b+c\right)\left(c+a\right)}}\le\frac{2ab}{b+c}+\frac{2ab}{c+a}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{bc}{\sqrt{bc+2a}}\le\frac{2bc}{a+b}+\frac{2bc}{c+a};\ \frac{ca}{\sqrt{ca+2b}}\le\frac{2ca}{a+b}+\frac{2ca}{b+c}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+2c}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+2a}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+2b}}\le\frac{2ab}{b+c}+\frac{2ab}{c+a}+\frac{2bc}{a+b}+\frac{2bc}{c+a}+\frac{2ca}{a+b}+\frac{2ca}{b+c}$$
$$=2\left(a+b+c\right)=4$$

Hay $P\le 4$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 4.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

Câu 233: [TS10 Chuyên Kiên Giang, 2011-2012]

Chứng minh rằng: $21.\left(a+\frac{1}{b}\right)+3.\left(b+\frac{1}{a}\right)>31$, với $a,\ b\ >\ 0$

Lời giải

*Ta có: $21.\left(a+\frac{1}{b}\right)+3.\left(b+\frac{1}{a}\right)=21a+\frac{21}{b}+3b+\frac{3}{a}$

Với $a,\ b>0$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$21a+\frac{3}{a}\ge 2\sqrt{21a\cdot\frac{3}{a}}=6\sqrt{7}\quad (1)$$

$$3b+\frac{21}{b}\ge 2\sqrt{3b\cdot\frac{21}{b}}=6\sqrt{7}\quad (2)$$

Cộng từng vế của (1) và (2) ta được: $21\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right)+3\cdot\left(b+\frac{1}{b}\right)\ \ge\ 12\sqrt{7}$

Mà: $12\sqrt{7}=\sqrt{144.7}=\sqrt{1008}$; $31=\sqrt{31^2}=\sqrt{961}\Rightarrow 12\sqrt{7}>31$

$\Rightarrow 21\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right)+3\cdot\left(b+\frac{1}{b}\right)>31$ (đpcm)

Câu 234: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2011-2012]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=\frac{9}{4}$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3>a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a^3+b^3}{2}\ge\frac{ab(a+b)}{2}>\frac{ab(a+b)}{\frac{9}{4}}=\frac{ab(a+b)}{abc}=\frac{a+b}{c}$$

Từ đó ta có $\qquad c^3+\dfrac{a^3+b^3}{2}>c^3+\dfrac{a+b}{c}\ge 2c\sqrt{a+b}$

Tương tự ta có

$$b^3+\frac{a^3+c^3}{2}>b^3+\frac{a+c}{b}\ge 2b\sqrt{a+c}$$
$$a^3+\frac{b^3+c^3}{2}>a^3+\frac{b+c}{a}\ge 2a\sqrt{b+c}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$a^3+b^3+c^3>a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Câu 235: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2011-2012]

Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{c^2\left(a^2+b^2\right)^2+a^2\left(b^2+c^2\right)^2+b^2\left(c^2+a^2\right)^2}\ge\frac{54(abc)^3}{(a+b+c)^2\sqrt{(ab)^4+(bc)^4+(ca)^4}}$$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{c^2\left(a^2+b^2\right)^2+a^2\left(b^2+c^2\right)^2+b^2\left(c^2+a^2\right)^2}\ge\sqrt{c^2(2ab)^2+a^2(2bc)^2+b^2(2ca)^2}$$
$$=\sqrt{12a^2b^2c^2}=2\sqrt{3}abc$$
$$(a+b+c)^2\sqrt{(ab)^4+(bc)^4+(ca)^4}\ge\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^2\sqrt{3\sqrt[3]{a^8b^8c^8}}=9\sqrt{3.\sqrt[3]{a^4b^4c^3}.\sqrt[3]{a^8b^8c^8}}$$
$$=9\sqrt{3a^2b^2c^2}$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{c^2\left(a^2+b^2\right)^2+a^2\left(b^2+c^2\right)^2+b^2\left(c^2+a^2\right)^2}\,(a+b+c)^2\sqrt{(ab)^4+(bc)^4+(ca)^4}$$
$$=2\sqrt{3}abc.9\sqrt{3a^2b^2c^2}=54(abc)^3$$

Hay $\sqrt{c^2\left(a^2+b^2\right)^2+a^2\left(b^2+c^2\right)^2+b^2\left(c^2+a^2\right)^2}\ge\dfrac{54\left(abc\right)^3}{\left(a+b+c\right)^2\sqrt{\left(ab\right)^4+\left(bc\right)^4+\left(ca\right)^4}}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 236: [TS10 Chuyên Vũng Tàu, 2011-2012]

Cho các số dương a,b,c thay đổi và thoã mãn $3a+4b+5c=12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S=\dfrac{ab}{ab+a+b}+\dfrac{2ac}{ac+a+c}+\dfrac{3bc}{bc+b+c}$

Lời giải

Ta viết lại biểu thức S thành

$$S=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1}+\frac{2}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+1}+\frac{3}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{x+y+z}\le\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$ ta có

$$S=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1}+\frac{2}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+1}+\frac{3}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1}\le\frac{a+b+1}{9}+\frac{2\left(c+a+1\right)}{9}+\frac{3\left(b+c+1\right)}{9}$$

$$=\frac{6+3a+4b+5c}{9}=\frac{18}{9}=2$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức S là 2. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 237: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2011-2012]

Cho a, b là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{a^3}{a^3+8b^3}}+\sqrt{\frac{4b^3}{b^3+\left(a+b\right)^3}}$$

Lời giải

Biểu thức P được viết lại là $P=\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{8b^3}{a^3}}}+\sqrt{\dfrac{\dfrac{4b^3}{a^3}}{\dfrac{b^3}{a^3}+\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^3}}$

Đặt $t=\dfrac{b}{a}>0$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại là

$$P=\sqrt{\frac{1}{1+8t^3}}+\sqrt{\frac{4t^3}{t^3+\left(1+t\right)^3}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$1+8t^3=(1+2t)(1-2t+4t^2)\le\frac{(2+4t^2)^2}{2}=(1+2t^2)^2$$

Suy ra $$\sqrt{\frac{1}{1+8t^3}}\ge\sqrt{\frac{1}{(1+2t^2)^2}}=\frac{1}{1+2t^2}$$

Ta sẽ chứng minh $$\sqrt{\frac{4t^3}{t^3+(1+t)^3}}\ge\frac{2t^2}{1+2t^2}$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{4t^3}{t^3+(1+t)^3}\ge\left(\frac{2t^2}{1+2t^2}\right)^2\Leftrightarrow(1+2t^2)^2\ge t^4+t(1+t)^3\Leftrightarrow(t-1)^2(2t^2+t+1)\ge0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng với mọi t.

Do đó ta được

$$P=\sqrt{\frac{1}{1+8t^3}}+\sqrt{\frac{4t^3}{t^3+(1+t)^3}}\ge\frac{1}{1+2t^2}+\frac{2t^2}{1+2t^2}=1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 1. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

Câu 238: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2011-2012]

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{3a+3b+2c}{\sqrt{6(a^2+5)}+\sqrt{6(b^2+5)}+\sqrt{c^2+5}}$$

Lời giải

Từ giả thiết $ab+bc+ca=5$ ta có

$$a^2+5=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(c+a)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{6(a^2+5)}=\sqrt{6(a+b)(c+a)}\le\frac{3(a+b)+2(c+a)}{2}=\frac{5a+3b+2c}{4}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{6(b^2+5)}\le\frac{3a+5b+2c}{2};\ \sqrt{c^2+5}\le\frac{a+b+2c}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{6\left(a^2+5\right)}+\sqrt{6\left(b^2+5\right)}+\sqrt{c^2+5}\le\frac{9a+9b+6c}{2}$$

Suy ra $\quad P=\dfrac{3a+3b+2c}{\sqrt{6\left(a^2+5\right)}+\sqrt{6\left(b^2+5\right)}+\sqrt{c^2+5}}\ge\dfrac{2\left(3a+3b+2c\right)}{9a+9b+6c}=\dfrac{2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\dfrac{2}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1;\ c=2$.

Câu 239: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2011-2012]

Cho hai số x, y liên hệ với nhau bởi đẳng thức $x^2+2xy+7(x+y)+2y^2+10=0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x+y+1$.

Lời giải

Viết lại biểu thức đã cho thành $(x+y+1)^2+5(x+y+1)+4=-y^2$ (*).

Như vậy với mọi x và mọi y ta luôn có $S^2+5S+4\le0$ (với $S=x+y+1$)

Suy ra: $(S+4)(S+1)\le0\Leftrightarrow-4\le S\le-1$.

Từ đó có: $S_{min}=-4$, khi $\begin{cases}x=-5\\y=0\end{cases}$

$S_{max}=-1$, khi $\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$.

Câu 240: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2011-2012]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $\quad P=\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc}$

Lời giải

Ta có $\quad a^2+abc=a^2\left(a+b+c\right)+abc=a\left(a+b\right)\left(a+c\right)$

Do đó ta được $\sqrt{a^2+abc}=\sqrt{a\left(a+b\right)\left(a+c\right)}\le\dfrac{\sqrt{a}\left(a+b+a+c\right)}{2}=\dfrac{\sqrt{a}\left(a+1\right)}{2}$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{b^2+abc}\le\frac{\sqrt{b}\left(b+1\right)}{2};\quad\sqrt{c^2+abc}\le\frac{\sqrt{c}\left(c+1\right)}{2}$$

Do đó ta được

$$\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}\le\frac{\sqrt{a}\left(a+1\right)}{2}+\frac{\sqrt{b}\left(b+1\right)}{2}+\frac{\sqrt{c}\left(c+1\right)}{2}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\frac{\sqrt{a}\left(a+1\right)}{2}+\sqrt{abc}\le\sqrt{a}\left(\frac{a+1}{2}+\frac{b+c}{2}\right)=\sqrt{a}\left(\frac{a+b+c+1}{2}\right)=\sqrt{a}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{\sqrt{b}\left(b+1\right)}{2}+\sqrt{abc}\le\sqrt{b};\ \frac{\sqrt{c}\left(c+1\right)}{2}+\sqrt{abc}\le\sqrt{c}$$

Như vậy ta có

$$P=\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+6\sqrt{abc}$$

Mà ta có

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\sqrt{3\left(a+b+c\right)}=\sqrt{3};\ 6\sqrt{abc}\le6\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Nên ta suy ra $P\le\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Câu 241: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2011-2012]

Cho a, b, c là số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{2ab}{3a+8b+6c}+\frac{3bc}{3b+6c+a}+\frac{3ca}{9c+4a+4b}\le\frac{a+2b+3c}{9}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}=\frac{xy}{81}.\frac{\left(6+2+1\right)^2}{2\left(x+y+z\right)+2y+x}\le\frac{xy}{81}\left(\frac{18}{x+y+z}+\frac{2}{y}+\frac{1}{x}\right)$$
$$=\frac{2xy}{9\left(x+y+z\right)}+\frac{2x+y}{81}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{yz}{3y+4z+2x}\le\frac{2y+z}{81}+\frac{2yz}{9\left(x+y+z\right)};\ \frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{2z+x}{81}+\frac{2zx}{9\left(x+y+z\right)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{xy}{3x+4y+2z}+\frac{yz}{3y+4z+2x}+\frac{zx}{3z+4x+2y}\le\frac{x+y+z}{27}+\frac{2\left(xy+yz+zx\right)}{9\left(x+y+z\right)}$$

Đến đây chứng minh hoàn toàn tương tự như trên.

Câu 242: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2011-2012]

Giả sử a, b, c là các số dương thoả mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = \frac{a}{b^2 + c^2 + a} + \frac{b}{c^2 + a^2 + b} + \frac{c}{a^2 + b^2 + c}$$

Lời giải

Ta chứng minh $M \le 1$

Đặt $\sqrt[3]{a} = x;\ \sqrt[3]{b} = y;\ \sqrt[3]{c} = z$, khi đó $x;\ y;\ z > 0$ và $xyz = 1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^3}{y^6 + z^6 + x^3} + \frac{y^3}{z^6 + x^6 + y^3} + \frac{z^3}{x^6 + y^6 + z^3} \le 1$$

Dễ thấy $\quad (y - z)(y^5 - z^5) \ge 0 \Rightarrow y^6 + z^6 \ge y^5 z + yz^5$

Suy ra $\quad y^6 + z^6 + x^4 yz \ge yz(x^4 + y^4 + z^4)$

Từ đó ta được $\quad \dfrac{1}{y^6 + z^6 + x^3} \le \dfrac{1}{yz(x^4 + y^4 + z^4)}$

Hay $\quad \dfrac{x^4 yz}{y^6 + z^6 + x^3} \le \dfrac{x^4}{x^4 + y^4 + z^4}$

Do đó ta được $\quad \dfrac{x^3}{y^6 + z^6 + x^3} \le \dfrac{x^4}{x^4 + y^4 + z^4}$

Tương tự ta có $\dfrac{y^3}{z^6 + x^6 + y^3} \le \dfrac{y^4}{x^4 + y^4 + z^4}$; $\dfrac{z^3}{x^6 + y^6 + z^3} \le \dfrac{z^4}{x^4 + y^4 + z^4}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^3}{y^6 + z^6 + x^3} + \frac{y^3}{z^6 + x^6 + y^3} + \frac{z^3}{x^6 + y^6 + z^3} \le 1$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Câu 243: [TS10 Chuyên Hà Tĩnh, 2011-2012]

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = \dfrac{1 - 4\sqrt{x}}{2x + 1} - \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 0$

$$F = \frac{1 - 4\sqrt{x}}{2x + 1} + 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} + 1 - 2 = \frac{2(\sqrt{x} - 1)^2}{2x + 1} + \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} - 2 \ge -2.$$

Vậy MinF = - 2 khi và chỉ khi x = 1.

Câu 244: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2011-2012]

Cho a, b, c là các số dương thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}\ge\frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương ta được

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b}{2}+\frac{c+a}{4}\ge\frac{3}{2}a;\ \frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c}{2}+\frac{a+b}{4}\ge\frac{3}{2}b;\ \frac{c^3}{a(b+c)}+\frac{a}{2}+\frac{b+c}{4}\ge\frac{3}{2}c$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}+a+b+c\ge\frac{3(a+b+c)}{2}$$

Hay $$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$

Nên ta được $$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}\ge\frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

NĂM HỌC 2010-2011

Câu 245: [TS10 Chuyên KHTN, 2010-2011]

Giả sử x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x+y+z=1$.

Chứng minh rằng: $$\frac{\sqrt{xy+z}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{1+\sqrt{xy}}\ge 1$$

Lời giải

Ta sẽ quy bài toán về việc chứng minh bất đẳng thức cùng bậc là

$$\frac{\sqrt{xy+z(x+y+z)}+\sqrt{2x^2+2y^2}}{x+y+z+\sqrt{xy}}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+z)(y+z)}+\sqrt{2x^2+2y^2}\ge x+y+z+\sqrt{xy}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\sqrt{2x^2+2y^2}\ge x+y$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $\sqrt{(z+x)(z+y)}\ge z+\sqrt{xy}$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$z^2+xy+z\left(x+y\right)\ge z^2+xy+2z\sqrt{xy}\Leftrightarrow z\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\ge 0$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2};\ z=0$.

Câu 246: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2010-2011]

Cho a , b là các số dương thỏa $a^2+2b^2\le 3c^2$ .Chứng minh $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\ge\frac{3}{c}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\ge\frac{9}{a+2b}$ $\left(1\right)\Leftrightarrow\left(a+2b\right)\left(b+2a\right)\ge 9ab$

$\Leftrightarrow 2a^2-4ab+2b^2\ge 0\Leftrightarrow 2\left(a-b\right)\ge 0$ (đúng)

a + 2b $\le\sqrt{3\left(a^2+2b^2\right)}$ $\left(2\right)\Leftrightarrow\left(a+2b\right)^2\le 3\left(a^2+2b^2\right)$

$\Leftrightarrow 2a^2-4ab+2b^2\ge 0\Leftrightarrow 2\left(a-b\right)^2\ge 0$ (đúng)

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\ge\frac{9}{a+2b}\ge\frac{9}{\sqrt{3\left(a^2+2b^2\right)}}\ge\frac{3}{c}$ (do $a^2+2b^2\le 3c^2$) (đpcm)

Câu 247: [TS10 Chuyên KHTN, 2010-2011]

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c+ab+bc+ca=6$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2\ge 3$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{ab+bc+ac}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

Do đó ta được $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(ab+bc+ca\right)$

Nên ta có $$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{ab+bc+ac}\ge a^2+b^2+c^2$$

Do đó ta suy ra $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2$

+ Chứng minh $a^2+b^2+c^2\ge 3$.

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^2+b^2\ge 2ab;\ b^2+c^2\ge 2bc;\ c^2+a^2\ge 2ca;\ a^2+1\ge 2a; b^2+1\ge 2b; c^2+1\ge 2c$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)+3\ge 2\left(ab+bc+ca+a+b+c\right)=12$$

Hay $a^2+b^2+c^2\ge 3$

Kết hợp hai kết quả trên ta được $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2\ge 3$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 248: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2010-2011]

Cho các số dương a, b, c thoả mãn $a+b+c=abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S=\frac{a}{\sqrt{bc\left(1+a^2\right)}}+\frac{b}{\sqrt{ca\left(1+b^2\right)}}+\frac{c}{\sqrt{ab\left(1+c^2\right)}}$$

Lời giải

Kết hợp với giả thiết ta có

$$\sqrt{bc\left(1+a^2\right)}=\sqrt{bc+a^2bc}=\sqrt{bc+a\left(a+b+c\right)}=\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\sqrt{ca\left(1+b^2\right)}=\sqrt{\left(a+b\right)\left(b+c\right)};\ \sqrt{ba\left(1+c^2\right)}=\sqrt{\left(a+c\right)\left(b+c\right)};$$

Nên

$$\begin{aligned}S&=\frac{a}{\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}}+\frac{b}{\sqrt{\left(a+b\right)\left(b+c\right)}}\frac{c}{\sqrt{\left(a+c\right)\left(b+c\right)}}\\&=\sqrt{\frac{a}{a+b}.\frac{a}{a+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}.\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+b}.\frac{c}{a+c}}\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}.\frac{a}{a+c}}\le\frac{1}{2}\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$S\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}+\frac{c}{b+c}\right)=\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Câu 249: [TS10 Chuyên Phú Thọ, 2010-2011]

Cho các số dương a, b c .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\frac{c(ab+1)^2}{b^2(bc+1)}+\frac{a(bc+1)^2}{c^2(ca+1)}+\frac{b(ca+1)^2}{a^2(ab+1)}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}$ ta được

$$S\ge 3\sqrt[3]{\frac{c(ab+1)^2.a(bc+1)^2.b(ca+1)^2}{b^2(bc+1).c^2(ac+1).a^2(ab+1)}}=3\sqrt[3]{\frac{(ab+1)(bc+1)(ac+1)}{abc}}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca}}{abc}}=6$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 6, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 250: [TS10 Chuyên Đại Học Vinh, 2010-2011]

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=18\sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x(y+z)}}+\frac{1}{\sqrt{y(z+x)}}+\frac{1}{\sqrt{z(x+y)}}\ge\frac{1}{4}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{2x(y+z)}}+\frac{1}{\sqrt{2y(z+x)}}+\frac{1}{\sqrt{2z(x+y)}}\ge\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $2\sqrt{2x(y+z)}\le 2x+y+z$, do đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{2x(y+z)}}\ge\frac{2}{2x+y+z}$$

Hoàn toàn tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{2x(y+z)}}+\frac{1}{\sqrt{2y(z+x)}}+\frac{1}{\sqrt{2z(x+y)}}\ge 2\left(\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\right)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\ge\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

Thật vậy theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\ge\frac{9}{4\left(x+y+z\right)}=\frac{9}{4.18\sqrt{2}}=\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=6\sqrt{2}$

Câu 251: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2010-2011]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$1+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{6}{ab+bc+ca}$$

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương:

$$\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)+3\left(ab+bc+ca\right)\ge6\left(a+b+c\right)$$

Để ý rằng $$\left(ab+bc+ca\right)^2\ge3abc\left(a+b+c\right)=3\left(a+b+c\right)$$

Nên bài toán quy về chứng minh $\sqrt{3\left(a+b+c\right)^3}+3\sqrt{3\left(a+b+c\right)}\ge6\left(a+b+c\right)$

Bất đẳng thức trên tương đương với $\sqrt{3\left(a+b+c\right)}\left(\sqrt{a+b+c}-\sqrt{3}\right)^2\ge0$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Câu 252: [TS10 Chuyên Lam Sơn, 2010-2011]

Cho 3 số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $b+c\ge16abc$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Ta có: $(a+b+c)^2=(a+(b+c))^2\ge4a(b+c)$.

Do $a+b+c=1$ nên từ bất đẳng thức trên suy ra: $1\ge4a(b+c)\Leftrightarrow b+c\ge4a(b+c)^2$.

Lại có: $(b+c)^2\ge4bc\Rightarrow b+c\ge16abc$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=\frac{1}{2};b=c=\frac{1}{4}$.

Câu 253: [TS10 Chuyên Hải Phòng, 2010-2011]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c\le2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\ge\frac{\sqrt{97}}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(1+\frac{81}{16}\right)} \ge \sqrt{\left(a+\frac{9}{4b}\right)^2} = a+\frac{9}{4b}$$

Hay $$\frac{\sqrt{97}}{4}\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}} \ge a+\frac{9}{4b}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{\sqrt{97}}{4}\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}} \ge b+\frac{9}{4c};\ \frac{\sqrt{97}}{4}\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}} \ge c+\frac{9}{4a}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{\sqrt{97}}{4}\left(\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\right) \ge a+b+c+\frac{9}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Mà ta lại có $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$$

Do đó ta được

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}} \ge \frac{4}{\sqrt{97}}\left[a+b+c+\frac{81}{4(a+b+c)}\right]$$

Ta cần chứng minh $$\frac{4}{\sqrt{97}}\left[a+b+c+\frac{81}{4(a+b+c)}\right] \ge \frac{\sqrt{97}}{2}$$

Hay $$a+b+c+\frac{81}{4(a+b+c)} \ge \frac{97}{8}$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a+b+c+\frac{81}{4(a+b+c)} = a+b+c+\frac{4}{a+b+c}+\frac{65}{4(a+b+c)}$$
$$\ge 2\sqrt{(a+b+c)\frac{4}{a+b+c}}+\frac{65}{4.2} = 4+\frac{65}{8} = \frac{97}{8}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

Câu 254: [TS10 Chuyên Hà Tĩnh, 2010-2011]

Cho các số $a,\ b,\ c \in [1;2]$. Chứng minhrằng:

$$\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{b^2+c^2}{bc}+\frac{c^2+a^2}{ca} \le 7$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\le 7abc$$
$$\Leftrightarrow c\left(ab-ca-b^2+bc\right)+a\left(ab-ca-b^2+bc\right)+5abc-2bc^2-2a^2b\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \left(ab-ca-b^2+bc\right)\left(c+a\right)+b\left(4ca-2c^2-2a^2+ca\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c+a\right)+b\left(2a-c\right)\left(2c-a\right)\ge 0$$

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $2\ge a\ge b\ge c\ge 1$ khi đó ta được $2a\ge 2\ge c;\ 2c\ge 2\ge a$. Do đó ta được

$$\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c+a\right)\ge 0;\ b\left(2a-c\right)\left(2c-a\right)\ge 0$$

Nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=2;\ c=1$ và các hoán vị.

Câu 255: [TS10 Chuyên Bình Định, 2010-2011]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \le 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge 9.$$

Lời giải.

Với x, y, z là các số thực dương ta có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}$ (*)

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 3\sqrt[3]{xyz}.3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}=9\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}.$$

Vậy (*) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z.

Áp dụng BĐT (*) ta có:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}=\frac{9}{(a+b+c)^2}\ge\frac{9}{1}=9$$

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

Câu 256: [TS10 Chuyên Đại học Vinh, 2010-2011]

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=x^2+x-2x\sqrt{y}+y^2+y-2y\sqrt{x}+2010.$$

Lời giải.

Ta có: $P=(x-\sqrt{y})^2+(y-\sqrt{x})^2+2010\ge 2010\,(\forall x\ge 0; y\ge 0)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y = 1 hoặc x = y = 0.

Câu 257: [TS10 Chuyên Nghệ An, 2010-2011]

Cho a, b, c là các số thực dương không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}-\sqrt{abc}$

Lời giải

Đặt $x=\sqrt{a};\ y=\sqrt{b};\ z=\sqrt{c}$. Từ giả thiết ta được $x^2+y^2+z^2=3$.

Khi này biểu thức P trở thành $P=x^2y+y^2z+z^2x-xyz$

Dễ thấy $P\ge 0$ theo bất đẳng thức Cauchy

Không mất tính tổng quát ta giả sử y là số nằm giữa x, z. Khi đó ta có

$$z(y-z)(y-x)\le 0 \Leftrightarrow y^2z+z^2x-xyz\le z^2y$$

Do đó ta có $P=x^2y+y^2z+z^2x-xyz\le x^2y+z^2y=y\left(x^2+z^2\right)$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$2y^2\left(x^2+z^2\right)\left(x^2+z^2\right)\le\left(\frac{2x^2+2y^2+2z^2}{3}\right)^3=8$$

Suy ra $y\left(x^2+z^2\right)\le 2$ nên ta được $P\le 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} x=y=z \\ \begin{cases} z=0 \\ x^2=2y^2 \end{cases} \end{array}\right. \text{ và các hoán vị } \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c=1 \\ a=2;\ b=1;\ c=0 \end{array}\right. \text{ và các hoán vị}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là 2.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=2;\ b=1;\ c=0$ và các hoán vị.

Câu 258: [TS10 Chuyên Hòa Bình, 2010-2011]

Cho x, y là hai số không âm. Chứng minh rằng

$$x^3+8y^3\ge 2x^2y+4xy^2$$

Lời giải

Ta các

$$\begin{aligned}&x^3+8y^3\ge 2x^2y+4xy^2\\ &\Leftrightarrow (x+2y)(x^2-2xy+4y^2)\ge 2xy(x+2y)\\ &\Leftrightarrow (x+2y)(x^2-4xy+4y^2)\ge 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x+2y)(x-2y)^2\ge 0\quad \forall x\ge 0, y\ge 0\ \text{(đúng)}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 259: [TS10 Chuyên Hưng Yên, 2010-2011]

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{bc}+\frac{\sqrt{b^2+1}-b}{ac}+\frac{\sqrt{c^2+1}-c}{ab}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Lời giải

Để ý là $a^2+1=a^2+ab+bc+ca=\left(a+b\right)\left(c+a\right)$, do đó ta được

$$\sqrt{a^2+1}=\sqrt{\left(a+b\right)\left(c+a\right)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{bc}=\frac{\sqrt{\left(a+b\right)\left(c+a\right)}-a}{bc}\le\frac{\frac{2a+b+c}{2}-a}{bc}=\frac{b+c}{2bc}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{\sqrt{b^2+1}-b}{ac}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$; $\frac{\sqrt{c^2+1}-c}{ab}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{bc}+\frac{\sqrt{b^2+1}-b}{ac}+\frac{\sqrt{c^2+1}-c}{ab}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 260: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2010-2011]

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{2\sqrt[3]{abc}}\ge\frac{(a+b+c+\sqrt[3]{abc})^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ $(\forall a,b,c>0)$

Lời giải.

Dễ thấy: $(a+b)(b+c)(c+a)=c^2(a+b)+a^2(b+c)+b^2(c+a)+2abc.$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si và bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta được:

$$(c^2(a+b)+a^2(b+c)+b^2(c+a)+2abc).\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{2\sqrt[3]{abc}}\right)$$

$$\ge\left(c\sqrt{a+b}.\frac{1}{\sqrt{c+a}}+a\sqrt{b+c}.\frac{1}{\sqrt{b+c}}+b\sqrt{c+a}.\frac{1}{\sqrt{c+a}}+\sqrt{2abc}.\sqrt{\frac{1}{2\sqrt[3]{abc}}}\right)^2=\left(c+a+b+\sqrt[3]{abc}\right)^2.$$

Suy ra điều phải chứng minh, đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

Câu 261: [TS10 Chuyên Kiên Giang, 2010-2011]

Tìm a, b để biểu thức: $X = 2a^2 + 9b^2 + 2a - 18b - 6ab + 2010$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

Ta có:

$X = (3b)^2 - 2.3b.(3 + a) + 9 + 6a + a^2 + a^2 - 4a + 4 + 1997$

$= (3b)^2 - 2.3b.(3 + a) + (3 + a)^2 + (a^2 - 4a + 4) + 1997$

$= (3b - 3 - a)^2 + (a - 2)^2 + 1997 \geq 1997$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} 3b-3-a=0 \\ a-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b-3-2=0 \\ a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{5}{3} \\ a=2 \end{cases}$

Vậy với a = 2 và b = $\dfrac{5}{3}$ thì $X_{max} = 1997$

Câu 262: [TS10 Chuyên Phú Yên, 2010-2011]

a) Cho 2 số dương a và b. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{a+b} \leq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

b) Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2010.$ Tìm GTLN của biểu thức:

$$P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}$$

Lời giải

a) Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên như sau

$$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

b) Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right) \leq \frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right); \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{2010}{4}=\frac{1005}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1005}{2}$. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x=y=z=670$

NĂM HỌC 2009-2010

Câu 263: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2009-2010]

Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2x-3}}=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{4x-3}}+\frac{1}{\sqrt{5x-6}}\right)$.

Lời giải

Ta chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\ge\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{a+2b}}+\frac{1}{\sqrt{b+2c}}+\frac{1}{\sqrt{c+2a}}\right)$ (*)

với $a>0; b>0; c>0$

+ Với $a>0; b>0$ ta có: $\sqrt{a}+2\sqrt{b}\le\sqrt{3(a+2b)}$ (1)

+ Do $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{2}{\sqrt{b}}\right)\left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)\ge 9$ nên $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{2}{\sqrt{b}}\ge\frac{9}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}$ (2)

+ Từ (1) và (2) ta có: $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{2}{\sqrt{b}}\ge\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a+2b}}$ (3) (Với $a>0$; $b>0$; $c>0$)

+ Áp dụng (3) ta có:

$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\ge\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{a+2b}}+\frac{1}{\sqrt{b+2c}}+\frac{1}{\sqrt{c+2a}}\right)$ với $a>0$; $b>0$; $c>0$

Phương trình $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2x-3}}=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{4x-3}}+\frac{1}{\sqrt{5x-6}}\right)$ có ĐK: $x>\frac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức (*) với a = x; b = x; c = 2x - 3 ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2x-3}}\ge\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3x}}+\frac{1}{\sqrt{5x-6}}+\frac{1}{\sqrt{4x-3}}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2x-3}}\ge\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{5x-6}}+\frac{1}{\sqrt{4x-3}}\right) \text{ với } x>\frac{3}{2}$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=2x-3\Leftrightarrow x=3$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 3.

Câu 264: [TS10 Chuyên Hải Phòng, 2009-2010]

a) Cho các số dương a, b, c tùy ý. Chứng minh rằng: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$

b) Cho các số dương a, b, c thoả mãn $a+b+c\le 3$. Chứng ming rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2009}{ab+bc+ca}\ge 670$$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số dương $a+b+c\ge \sqrt[3]{abc}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$

Suy ra $$\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

b) Ta có $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2 \Rightarrow ab+bc+ca\le \frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}\le 3$

Suy ra $$\frac{2007}{ab+bc+ca}\ge 669$$

Áp dụng bất đẳng thức trong câu a, ta có

$$\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)\ge 9$$

Suy ra $$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge \frac{9}{\left(a+b+c\right)^2}\ge 1$$

Do đó ta được $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2009}{ab+bc+ca}\ge 670$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 265: [TS10 Chuyên Phú Yên, 2009-2010]

a) Cho x, y, z, a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{xyz}\le \sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)}.$$

b) Từ đó suy ra : $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}\le 2\sqrt[3]{3}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{xyz}\ \le\ \sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)}$ (1)

Lập phương 2 vế của (1) ta được :

$$abc+xyz+3\sqrt[3]{(abc)^2xyz}+3\sqrt[3]{abc(xyz)^2}\le (a+x)(b+y)(c+z)$$

$\Leftrightarrow abc+xyz+3\sqrt[3]{(abc)^2xyz}+3\sqrt[3]{abc(xyz)^2}\le abc+xyz+abz+ayc+ayz+xbc+xyc+xbz$

$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(abc)^2xyz}+3\sqrt[3]{abc(xyz)^2}\le (abz+ayc+xbc)+(ayz+xbz+xyc)$ (2)

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$(abz + ayc + xbc) \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2xyz}$ (3)

$(ayz + xbz + xyc) \geq 3\sqrt[3]{abc(xyz)^2}$ (4)

Cộng hai bất đẳng thức (3) và (4) ta được bất đẳng thức (2), do đó (1) được chứng minh.

b) Áp dụng BĐT (1) với $a = 3+\sqrt[3]{3}$, $b = 1$, $c = 1$, $x = 3 - \sqrt[3]{3}$, $y = 1$, $z = 1$

Ta có : $abc = 3 + \sqrt[3]{3}$, $xyz = 3 - \sqrt[3]{3}$, $a + x = 6$, $b + y = 2$, $c + z = 2$

Từ đó : $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} \leq \sqrt[3]{6.2.2} = 2\sqrt[3]{3}$ (đpcm).

Câu 266: [TS10 Chuyên Đà Nẵng, 2009-2010]

Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(ab + bc + ca) - 1$.

Lời giải

Ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $c^2 + a^2 \geq 2ca$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \qquad (1)$

Lại có: $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 - 1$

Hay $\quad a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) - 1 \qquad (2)$

(1) và (2) $\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(ab + bc + ca) - 1$ đpcm

Câu 267: [TS10 Chuyên Bình Định, 2009-2010]

Với số tự nhiên $n \geq 3$. Chứng minh rằng $S_n < \frac{1}{2}$.

Với $S_n = \dfrac{1}{3\left(1+\sqrt{2}\right)} + \dfrac{1}{5\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} + \ldots + \dfrac{1}{(2n+1)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}$

Lời giải

Với $n \geq 3$, ta có

$$\frac{1}{(2n+1)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n+1} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n+1}}$$

$$< \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}.\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

Do đó ta được

$$S_n < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < \frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 268: [TS10 Chuyên Hải Dương, 2009-2010]

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\left|\sqrt{x^2-4x+5}-\sqrt{x^2+6x+13}\right|$

Lời giải

Ta có: $P=\left|\sqrt{(x-2)^2+1^2}-\sqrt{(x+3)^2+2^2}\right|$

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy lấy các điểm A(x-2; 1), B(x+3; 2)

Ta chứng minh được: $AB=\sqrt{(x-2-x-3)^2+(1-2)^2}=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$

$$OA=\sqrt{(x-2)^2+1^2},\ OB=\sqrt{(x+3)^2+2^2}$$

Mặt khác ta có: $|OA-OB|\le AB\Rightarrow\left|\sqrt{(x-2)^2+1^2}-\sqrt{(x+3)^2+2^2}\right|\le\sqrt{26}$

Dấu "=" xảy ra khi A thuộc đoạn OB hoặc B thuộc đoạn OA

$\Rightarrow\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=7$.Thử lại x = 7 thì A(5; 1); B(10; 2).

Câu 269: [TS10 Chuyên Bình Định, 2009-2010]

Chứng minh rằng $\left|\dfrac{m}{n}-\sqrt{2}\right|\ge\dfrac{1}{n^2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$, với mọi số nguyên m, n.

Lời giải

Vì m, n là các số nguyên nên $\dfrac{m}{n}$ là số hữu tỉ và $\sqrt{2}$ là số vô tỉ nên $\dfrac{m}{n}-\sqrt{2}\ne0$.

Ta xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Với $\dfrac{m}{n}>\sqrt{2}$, khi đó ta được

$$m^2>2n^2\Rightarrow m^2\ge2n^2+1\text{ hay }m\ge\sqrt{2n^2+1}$$

Từ đó suy ra

$$\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right|\ge\frac{\sqrt{2n^2+1}}{n}-\sqrt{2}=\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{2}$$

$$=\frac{2+\frac{1}{n^2}-2}{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2}}=\frac{1}{n^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2}\right)}\ge\frac{1}{n^2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$$

+ Trường hợp 2: Với $\dfrac{m}{n}<\sqrt{2}$, khi đó ta được

$$m^2 < 2n^2 \Rightarrow m^2 \le 2n^2 - 1 \text{ hay } m \le \sqrt{2n^2 - 1}$$

Từ đó suy ra

$$\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| = \sqrt{2} - \frac{m}{n} \ge \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2n^2 - 1}}{n} = \sqrt{2} - \sqrt{2 - \frac{1}{n^2}} = \frac{2 - 2 + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 - \frac{1}{n^2}}}$$

$$= \frac{1}{n^2\left(\sqrt{2} + \sqrt{2 - \frac{1}{n^2}}\right)} \ge \frac{1}{n^2\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 270: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2009-2010]

Cho ba số thực a, b, c đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} \ge 2$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)^2 \ge 2 + 2\left(\frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)} + \frac{ca}{(a-b)(b-c)}\right)$$

Mà ta lại có

$$\frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)} + \frac{ca}{(a-b)(b-c)}$$

$$= \frac{ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1$$

Do đó bất đẳng thức trên trở thành $\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)^2 \ge 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 271: [TS10 Chuyên Lam Sơn, 2009-2010]

Cho biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd$, trong đó $ad - bc = 1$.

Chứng minh rằng: $P \ge \sqrt{3}$

Lời giải

Ta có

$$\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2=a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2$$
$$=a^2\left(c^2+d^2\right)+b^2\left(d^2+c^2\right)=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$$

Vì $ad-bc=1$ nên $1+\left(ac+bd\right)^2=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$P=a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd\ge 2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)}+ac+bd$$

Suy ta $P\ge 2\sqrt{1+\left(ac+bd\right)^2}+ac+bd$. Rõ ràng $P>0$ vì $2\sqrt{1+\left(ac+bd\right)^2}>\left|ac+bd\right|^2$

Đặt $x=ac+bd$, khi đó ta được

$$P\ge 2\sqrt{1+x^2}+x\Leftrightarrow P^2\ge 4\left(1+x^2\right)+4x\sqrt{1+x^2}+x^2=\left(1+x^2\right)+4x\sqrt{1+x^2}+4x^2+3$$

Hay $P^2\ge\left(\sqrt{1+x^2}+2x\right)^2+3\ge 3$. Do đó ta được $P\ge\sqrt{3}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} ad-bc=1\\ 2a=\sqrt{3}d-c\\ 2b=-\sqrt{3}c-d\end{cases}$

Câu 272: [TS10 Chuyên Nghệ An, 2009-2010]

Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$$

Lời giải

Dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$ và giá trị nhỏ nhất của P là 4. Ta quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức

$$a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge 4$$

Thật vậy, kết hợp với giả thiết ta có

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
$$=a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$$

Áp dụng bất đăngr thức Cauchy ta có

$$a^3+ab^2\ge 2a^2b;b^3+bc^2\ge 2b^2c;\ c^3+ca^2\ge 2c^2a$$

Suy ra $$3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)>0$$

Do đó ta được $a^2+b^2+c^2+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge a^2+b^2+c^2+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge 4$$

Hay $$a^2+b^2+c^2+\frac{9-\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}\ge 4$$

Đặt $t=a^2+b^2+c^2$.

Từ giả thiết $a+b+c=3\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge 3$, do đó ta được $t\ge 3$

Bất đẳng thức trên trở thành

$$t+\frac{9-t}{2t}\ge 4\Leftrightarrow 2t^2+9-t\ge 8t\Leftrightarrow \left(t-3\right)\left(2t-3\right)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $t\ge 3$. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Câu 273: [TS10 Chuyên Lam Sơn, 2009-2010]

Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z ta luôn có:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}>\frac{2x^2+2y^2+2z^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2x^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2y^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{2z^2}{a^2+b^2+c^2}>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2\left(b^2+c^2-a^2\right)}{a^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}+\frac{y^2\left(a^2+c^2-b^2\right)}{b^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}+\frac{z^2\left(a^2+b^2-c^2\right)}{c^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}>0$$

Do a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác nhọn nên

$$a^2+b^2>c^2;\ b^2+c^2>a^2;\ c^2+a^2>b^2$$

Nên ta được $$b^2+c^2-a^2>0;\ a^2+c^2-b^2>0;\ a^2+b^2-c^2>0$$

Do vậy bất đẳng thức trên luôn đúng. Bài toán được chứng minh xong.

Câu 274: [TS10 Chuyên KHTN, 2009-2010]

Với a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\ge\frac{a+b+c}{5}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$3a^2+8b^2+14ab=3a^2+8b^2+12ab+2ab\le 4a^2+9b^2+12ab=(2a+3b)^2$$

Suy ra $$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}\ge\frac{a^2}{\sqrt{(2a+3b)^2}}=\frac{a^2}{2a+3b}$$

Áp dụng tương tự ta thu được

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}$$
$$\ge\frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a}\ge\frac{(a+b+c)^2}{5(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{5}$$

Do đó ta được: $$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\ge\frac{a+b+c}{5}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Câu 275: [TS10 Chuyên KHTN, 2009-2010]

Giả sử x, y, z là những số thực thoả mãn điều kiện $0\le x,\ y,\ z\le 2$ và $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức:

$$M=x^4+y^4+z^4+12(1-x)(1-y)(1-z)$$

Lời giải

Đặt $a=x-1;\ b=y-1;\ c=z-1$, ta được $-1\le a;\ b;\ c\le 1$ và $a+b+c=0$. Biểu thức M được viết lại thành

$$M=a^4+b^4+c^4+4(a^3+b^3+c^3)+6(a^2+b^2+c^2)+4(a+b+c)+3-12abc$$

Để ý là khi $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ nên biểu thức trên thử thành

$$M=a^4+b^4+c^4+6(a^2+b^2+c^2)+3$$

Theo một đánh giá quen thuộc thì

$$a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)=0$$
$$a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}(a+b+c)^2=0$$

Do đó suy ra $M\ge 3$ hay giá trị nhỏ nhất của M là 3.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=0$ hay $x=y=z=1$.

Mặt khác do $-1\le a;\ b;\ c\le 1$ nên ta có $|a|;\ |b|;\ |c|\le 1$. Từ đó ta có

$$a^4\le a^2\le |a|;\ b^4\le b^2\le |b|;\ c^4\le c^2\le |c|$$

Suy ra $M=a^4+b^4+c^4+6\left(a^2+b^2+c^2\right)+3\le 7\left(|a|+|b|+|c|\right)+3$

Mà ta lại có $a+b+c=0$ nên trong ba số a, b, c có một hoặc hai số âm, tức là luôn tồn tại hai số cùng dấu. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là b và c. Khi đó ta được

$$|b|+|c|=|b+c|=|a|$$

Đến đây ta có $M\le 14|a|+3\le 17$ hay giá trị lớn nhất của M là 17. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1;\ b=-1; c=0$ và các hoán vị hay $x=2;\ y=0;\ z=1$ và các hoán vị

Câu 276: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2009-2010]

a) Cho k là số nguyên dương bất kì. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

b) Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}+\dfrac{1}{4\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{2010\sqrt{2009}}<\dfrac{88}{45}$

Lời giải

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<\frac{2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}}{\sqrt{k}.\sqrt{k+1}}\Leftrightarrow 2k+1-2\sqrt{k(k+1)}>0\Leftrightarrow\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^2>0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng với mọi k nguyên dương.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

b) Áp dụng kết quả câu a ta có

$$\begin{aligned}VT&=\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2010\sqrt{2009}}\\&<2\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{\sqrt{2009}}-\frac{1}{\sqrt{2010}}\right)\\&=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2010}}\right)<2\left(1-\frac{1}{45}\right)=\frac{88}{45}=VP\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Câu 277: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2009-2010]

a) Cho 3 số thực a, b, c bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca+\frac{(a-b)^2}{26}+\frac{(b-c)^2}{6}+\frac{(c-a)^2}{2009}$$

b) Cho $a>0;\ b<0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a}\ge\frac{2}{b}+\frac{8}{2a-b}$

Lời giải

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a-b)^2}{2}+\frac{(b-c)^2}{2}+\frac{(c-a)^2}{2}\ge\frac{(a-b)^2}{26}+\frac{(b-c)^2}{6}+\frac{(c-a)^2}{2009}$$

Hay $$\frac{12(a-b)^2}{13}+\frac{(b-c)^2}{3}+\frac{2007(c-a)^2}{2}\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

b) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{-b}\ge\frac{8}{2a-b}$$

Đặt $c=-b$, do $b<0$ nên ta được $c>0$, khi đó bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{c}\ge\frac{8}{2a+c}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta được

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{c}=\frac{2}{2a}+\frac{2}{c}\ge\frac{2.4}{2a+c}=\frac{8}{2a+c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $2a=-b$.

Câu 278: [TS10 Chuyên Phú Thọ 2009-2010]

Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $xyz=x+y+z+2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1$.

Đặt $a=\frac{1}{x+1};\ b=\frac{1}{y+1};\ c=\frac{1}{z+1}$. Khi đó ta được $a+b+c=1$. Từ đó suy ra

$$x=\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a};\ y=\frac{1-b}{b}=\frac{c+a}{b};\ z=\frac{1-c}{c}=\frac{a+b}{a}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành:

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}+\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}+\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}\le\frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)$$
$$\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+a}+\frac{b}{a+b}\right)$$
$$\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}+\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}+\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}\le\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$

Câu 279: [TS10 Chuyên Phú Thọ 2009-2010]

Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+2}\le 1$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2}{a^2+2}+\frac{b^2}{b^2+2}+\frac{c^2}{c^2+2}\ge 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{a^2+2}+\frac{b^2}{b^2+2}+\frac{c^2}{c^2+2}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6}=\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 280: [TS10 Chuyên Đại học Vinh 2009-2010]

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+2y+3z=18$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2y+3z+5}{1+x}+\frac{3z+x+5}{1+2y}+\frac{x+2y+5}{1+3z}\ge\frac{51}{7}$$

Lời giải

Đặt $a = x;\ b = 2y;\ c = 3x$, khi đó giả thiết trở thành $a + b + c = 18$ và bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{b+c+5}{1+a}+\frac{c+a+5}{1+b}+\frac{a+b+5}{1+c}\ge\frac{51}{7}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{b+c+5}{1+a}+1+\frac{c+a+5}{1+b}+1+\frac{a+b+5}{1+c}+1\ge\frac{51}{7}+3$$

Hay
$$(a+b+c+6)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)\ge\frac{72}{7}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge\frac{3}{7}$$

Thật vậy theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge\frac{9}{3+a+b+c}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 6$ hay $x = 6;\ y = 3;\ z = 2$.

Câu 281: [TS10 Chuyên Đại học Vinh 2009-2010]

Cho các số thực x, y thỏa mãn: $x > 8y > 0$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x + \frac{1}{y(x-8y)}.$$

Lời giải

Sử dụng BĐT Cauchy cho ba số dương ta có:

$$P = (x-8y)+8y+\frac{1}{y(x-8y)}\ge 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x-8y=8y \\ 8y=\dfrac{1}{y(x-8y)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=16y \\ y^3=\dfrac{1}{64}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=4 \\ y=\dfrac{1}{4}\end{cases}.$

Vậy minP = 6. khi và chỉ khi x = 4 và y = $\frac{1}{4}$.