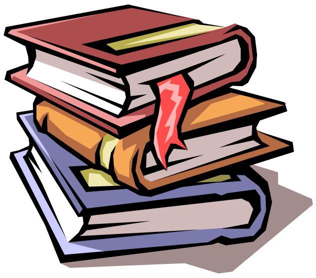
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



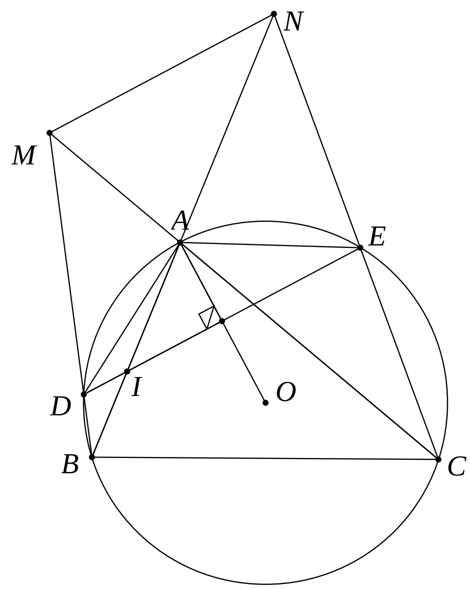
103 BÀI TOÁN HÌNH HỌC
TỔNG HỢP LUYỆN THI VÀO 10

(Liệu hệ tài liệu word môn toán SĐT (zalo) : 039.373.2038)

Tài liệu sưu tầm, ngày 15 tháng 8 năm 2023

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm D thuộc cung nhỏ AB. Kẻ dây DE vuông góc với OA. Gọi M là giao điểm của BD và CA, N là giao điểm của BA và CE. Chứng minh rằng MN song song với DE.

Lời giải :



Gọi I là giao điểm của DE và AB.

$OA \perp DE \Rightarrow OA$ đi qua trung điểm dây DE (Liên hệ đường kính và dây).

$\Rightarrow DE$ là đường trung trực của DE.

$\Rightarrow AD = AE$ (Tính chất đường trung trực).

$\Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AE}$ (Liên hệ dây và cung).

Theo tính chất góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn ta có:

$\widehat{BNC} = \frac{1}{2}\left(sđ - sđ\overset{\frown}{AE}\right)$.

$\widehat{BMC} = \frac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{BC} - sđ\overset{\frown}{AD}\right) = \frac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{BC} - sđ\overset{\frown}{AE}\right)$ (Vì $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AE}$).

$\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{BNC}$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BMNC$ là tứ giác nội tiếp (hai góc đỉnh M và N nhìn cạnh BC dưới cùng một góc).

$\Rightarrow \widehat{MNB} = \widehat{MCB}$ (Cùng chắn cung $\overset{\frown}{MB}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BMNC$).

Mà $\widehat{MCB} = \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{BD} + sđ\overset{\frown}{AD}\right)$ (Tính chất góc nội tiếp). (1)

Mặt khác: $\widehat{AIE} = \frac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{BD} + sđ\overset{\frown}{AE}\right)$ (Tính chất góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn).

$\widehat{AIE} = \frac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{BD} + sđ\overset{\frown}{AD}\right)$ ($\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AE}$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $\widehat{MNB} = \widehat{AIE}$

$\Rightarrow MN//DE$ (Cặp góc so le trong bằng nhau). (đpcm)

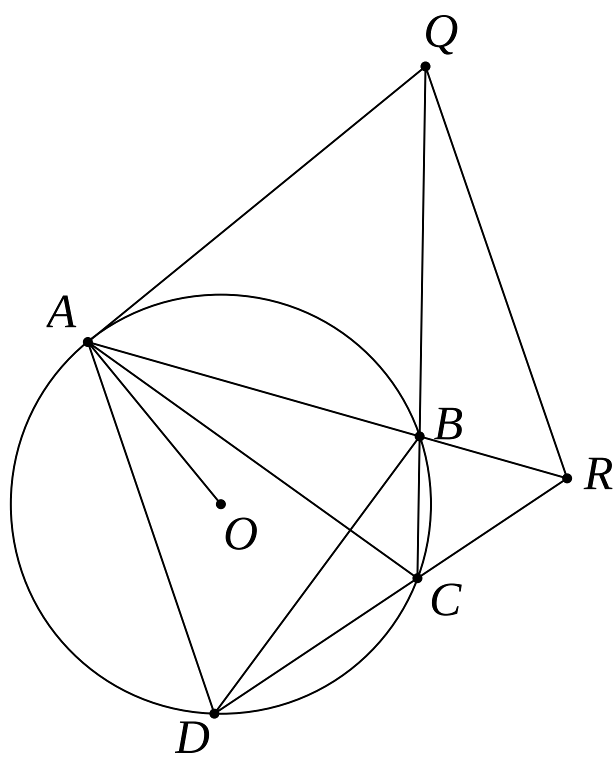
Bài 2: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) và $AB = BD$. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng BC tại Q. Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng AB và CD.

a) Chứng minh $AQ^2 = QB.QC$.

b) Chứng minh $AQRC$ nội tiếp.

c) Chứng minh $AD//QR$.

Lời giải :



a) Xét ΔAQB và ΔCQA có:

$\widehat{BAQ} = \widehat{ACQ}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp chắn cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$). $\widehat{AQB}$ là góc chung.

$\Rightarrow \Delta AQB \backsim \Delta CQA$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{AQ}{BQ} = \dfrac{CQ}{AQ} \Rightarrow AQ^2 = BQ.CQ$.

b) Ta có: $AB = BD \Rightarrow \Delta ABD$ cân $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BDA}$.

$\widehat{BAD} = \widehat{QCR}$ (góc ngoài bằng góc đối trong của tứ giác $ABCD$ nội tiếp).

$\widehat{QAB} = \widehat{BDA}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$).

$\Rightarrow \widehat{QAB} = \widehat{QCR}$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $AQRC$ nội tiếp (hai góc bằng nhau cùng nhìn một cạnh).

c) Xét tứ giác $AQRC$ nội tiếp có:

$\widehat{AQR}+\widehat{ACR}=180^o$ (tổng hai góc đối bằng 180^o) (1).

Cần CM: $\widehat{ACR}=\widehat{QAD}$.

Thật vậy: $\widehat{BAD}=\widehat{QCR}$ (chứng minh phần b).

$\widehat{QAB}=\widehat{ACB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn và góc nội tiếp chắn cùng $\overparen{AB}$).

$\Rightarrow \widehat{BAD}+\widehat{QAB}=\widehat{QCR}+\widehat{ACB}$.

$\Rightarrow \widehat{ACR}=\widehat{QAD}$ (2).

Từ $(1),(2)$ ta được:

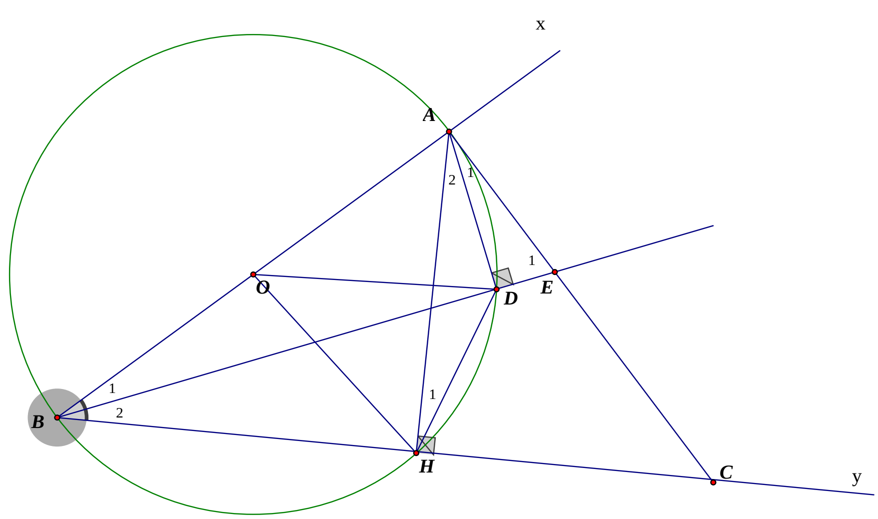
$\widehat{AQR}+\widehat{QAD}=180^o \Rightarrow AD//QR$ (trong cùng phía)

Bài 2: Cho góc nhọn $\widehat{xBy}$. Từ một điểm A ở trên tia Bx kẻ AH vuông góc với By tại H và kẻ AD vuông góc với đường phân giác của góc $\widehat{xBy}$ tại D, Chứng minh tứ giác $ABHD$ nội tiếp được đường tròn và xác định tâm O của đường tròn đó.

a) Chứng minh rằng $OD \perp AH$.

b) Tiếp tuyến tại A với đường tròn (O) cắt By tại C. Đường thẳng BD cắt AC tại E. Chứng minh tứ giác $HDEC$ nội tiếp.

Lời giải:



a) Ta có:

ΔADB vuông tại D nên ba điểm A,D,B cùng thuộc đường tròn đường kính AB (1)

ΔABH vuông tại H nên ba điểm A,B,H cùng thuộc đường tròn đường kính AB (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow$ Tứ giác $ABHD$ nội tiếp được đường tròn đường kính AB.

$\Rightarrow$ Tâm O trung điểm của đoạn AB.

b) Tứ giác $ABHD$ nội tiếp nên:

$$\widehat{B_2} = \widehat{A_2}\left(=\frac{1}{2}\text{sd}\,\overparen{AD}\right) \qquad (1)$$

$$\widehat{B_1} = \widehat{H_1}\left(=\frac{1}{2}sd\,\overparen{AD}\right) \qquad (2)$$

Mà $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (BE là phân giác của $\widehat{ABH}$) $\qquad (3)$

Từ $(1),(2)$ và (3) $\Rightarrow$ $\widehat{A_2} = \widehat{H_1}$ $\Rightarrow sd\,\overparen{AD} = sd\,\overparen{HD}$ $\Rightarrow AD = HD$

$\Rightarrow D$ thuộc đường trung trực của $HA(4)$

Mặt khác $OA = OH$ $\Rightarrow$ O thuộc đường trung trực của $HA(5)$

Từ $(4),(5) \Rightarrow$ OD là đường trung trực của AH $\Rightarrow$ $OD \perp AH$.

c) Ta có: $\widehat{BEC}$ là góc ngoài của tam giác ABE nên $\widehat{BEC} = 90° + \widehat{B_1}$

Ta lại có:

$$\left.\begin{matrix} OD \perp AH\,(cmt) \\ BH \perp AH\,(gt) \end{matrix}\right\} \Rightarrow OD // \text{BH} \Rightarrow \widehat{DHC} = \widehat{ODH} \text{ (So le trong)}$$

$\Delta OHD = \Delta ODA(c.c.c)$ $\Rightarrow \widehat{ODH} = \widehat{OAD}$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $\widehat{DHC} = \widehat{ODH}$ (Chứng min trên)$\Rightarrow \widehat{OHC} = \widehat{OAD}$

Mặt khác $\widehat{OAD} = 90° - \widehat{A_1}$ và $\widehat{A} = \widehat{B_1}\left(=\frac{1}{2}sd\,\overparen{AD}\right)$ $\Rightarrow \widehat{OAD} = 90° - \widehat{B_1}$

$\Rightarrow$ $\widehat{OHC} == 90° - \widehat{B_1}$

Xét tứ giác $HDEC$ có: $\widehat{BEC} + \widehat{OHC} = 90° + \widehat{B_1} + 90° - \widehat{B_1} = 180°$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên $HDEC$ nội tiếp.

Bài 4: Cho đường tròn (O) ; đường kính $AB = 2R$; tiếp tuyến Ax .Trên tiếp tuyến Ax lấy điểm F sao cho BF cắt đường tròn tại C; tia phân giác $\widehat{ABF}$ cắt đường tròn tại E và cắt tiếp tuyến Ax tại D

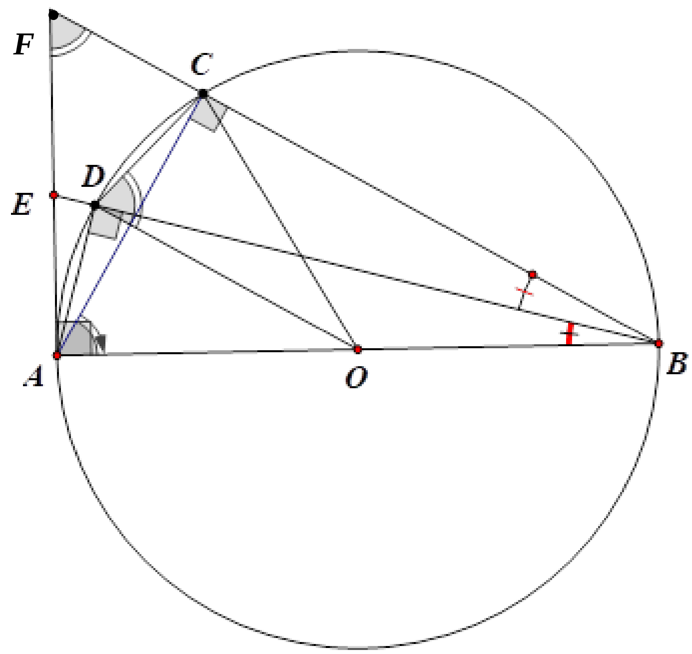
a)Chứng minh OD // BC

b)Chứng minh $BD.BE = BC.BF$

c)Chứng minh : tứ giác $CDEF$ nội tiếp

d)Xác định số đo $\widehat{ABC}$ để tứ giác $AOCD$ là hình thoi.Tính diện tích tứ giác $AOCD$ theo R

Lời giải :



a)Chứng minh : $OD//BC$

Ta có $\widehat{CBD};\widehat{DBA}$ lần lượt là các góc nội tiếp chắn các cung $\overset{\frown}{AD};\ \overset{\frown}{DC}$

Maf $\widehat{CBD}=\widehat{DBA}\ \ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DC}\Rightarrow AD=DC$ kết hợp với $OA=OC=R\ \Rightarrow OD\perp AC$ (do OD là đường trung trực của AC)

Mà $C\in$ đường tròn đường kính $AB\Rightarrow\widehat{ACB}=90^\circ\Rightarrow AC\perp CB\Rightarrow CB//OD$

b)Ta có : D thuộc đường tròn đường kính $AB\Rightarrow AD\perp DB\Rightarrow\ AD\perp BE$

Tam giác AEB vuông ở A có đường cao $AD\Rightarrow AB^2=BD.BE$ (hệ thức lượng)

Tương tự ta cũng có : tam giác ABF vuông tại A đường cao $AC\Rightarrow AB^2=BC.BF$ (hệ thức lượng)

Vậy nên $BD.BE=BC.BF$

c)Do $BD.BE=BC.BF\Rightarrow\dfrac{BD}{BF}=\dfrac{BC}{BE}$

Xét tam giác BDC và tam giác BFE ta có :

$\begin{cases}\widehat{B}:chung\\ \dfrac{BD}{BF}=\dfrac{BC}{BE}\end{cases}\Rightarrow\Delta BDC\backsim\Delta BFE(c.g.c)\Rightarrow\widehat{BDC}=\widehat{BFE}\Rightarrow tgCDFE$ nt (góc ngoài bằng góc trong ở đỉnh đối diện)

d)Do $OD//BC\Rightarrow\widehat{ABC}=\widehat{AOD}$ (đồng vị)

Do $OA=OC;\ \ DA=DC\Rightarrow OADC$ là hình thoi khi và chỉ khi $OA=AD$ hay $OA=OD=AD$ khi đó tam giác AOD là tam giác đều nên $\widehat{AOD}=60^\circ\Rightarrow\widehat{ABC}=60^\circ$

Trong tam giác vuông ABC (vuông ở C): $sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = 2R.sin60° = 2R.\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$

$S_{AOCD} = \frac{1}{2}OD.AC = \frac{1}{2}R.\sqrt{3}R = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$

Bài 5:

Cho ba điểm $A;B;C$ thẳng hàng (B nằm giữa A và C).Vẽ đường tròn (O) đường kính BC ; vẽ tiếp tuyến AT .Từ tiếp điểm T vẽ đường thẳng vuông góc với BC ; đường thẳng này cắt BC tại H và cắt đường tròn (O) tại T' .Đặt $OB = R$

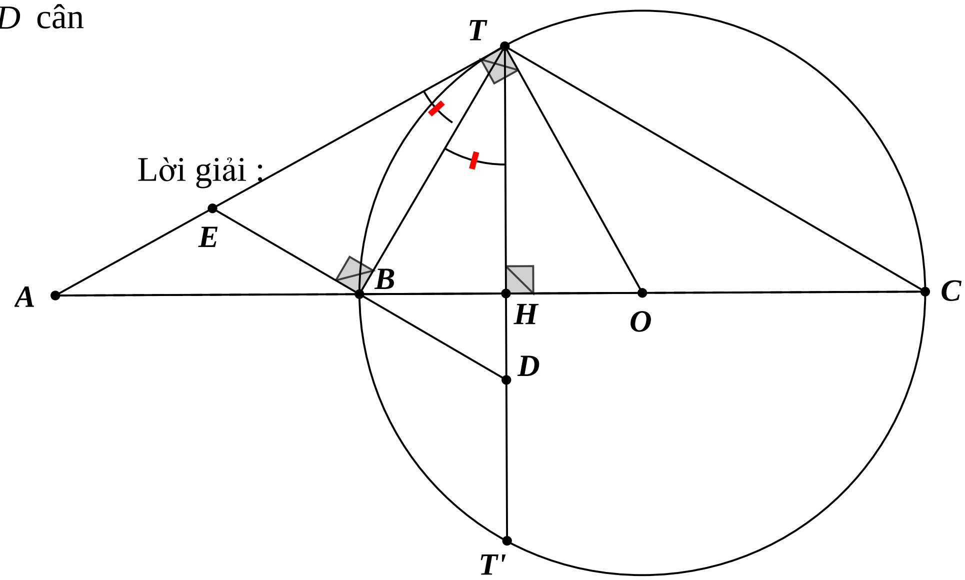
a)Chứng minh $OH.OA = R^2$

b)Chứng minh TB là phân giác góc $\widehat{ATH}$

c)Từ B kẻ đường thẳng song song TC .Gọi $D;E$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng vừa vẽ với TT' và TA .Chứng minh ΔTED cân

d)Chứng minh $\frac{HB}{HC} = \frac{AB}{AC}$

Lời giải :



a)Chứng minh : $OH.OA = R^2$

Do AT là tiếp tuyến của đường tròn $(O) \Rightarrow AT \perp OT \Rightarrow \Delta AOT$ vuông tại T có đường cao TH

$\Rightarrow OH.OA = OT^2 = R^2$

b)Chứng minh : TB là đường phân giác góc $\widehat{ATH}$

Ta có $\widehat{ATB} + \widehat{OTB} = \widehat{OTA} = 90°$ và $\widehat{BTH} + \widehat{OBT} = 90°$ maf

$OB = OT \Rightarrow \widehat{OBT} = \widehat{OTB} \Rightarrow \widehat{ATB} = \widehat{BTH}$

Vậy TB là đường phân giác góc $\widehat{ATH}$

c)Chứng minh : tam giác TED cân

+)Do T thuộc đường tròn đường kính $BC \Rightarrow BT \perp TC \Rightarrow TB \perp ED$ (vì $DE // TC$)

Mà theo câu (a) ta có TB là đường phân giác góc $\widehat{ETD} \Rightarrow \Delta TED$ cân ở T (đường cao đồng thời là đường phân giác)

d)Chứng minh : $\frac{HB}{HC} = \frac{AB}{AC}$

Ta có TB là đường phân giác trong của tam giác ATH mà $TC \perp TB \Rightarrow TC$ là đường phân giác ngoài của tam giác ATH

Vậy nên ta có : $\frac{AB}{BH} = \frac{AT}{TH}$ và $\frac{CA}{CH} = \frac{TA}{TH} \Rightarrow \frac{AB}{BH} = \frac{AC}{CH} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{HC}$ (đpcm)

Bài 6: Cho đường tròn (O) ; một dây cung AB ; một điểm C nằm ngoài đường tròn và nằm trên tia BA .Từ điểm chính giữa P của cung lớn AB kẻ đường kính PQ của đường tròn cắt dây AB tại D.Tia CP cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai I .Các dây AB và QI cắt nhau tại K

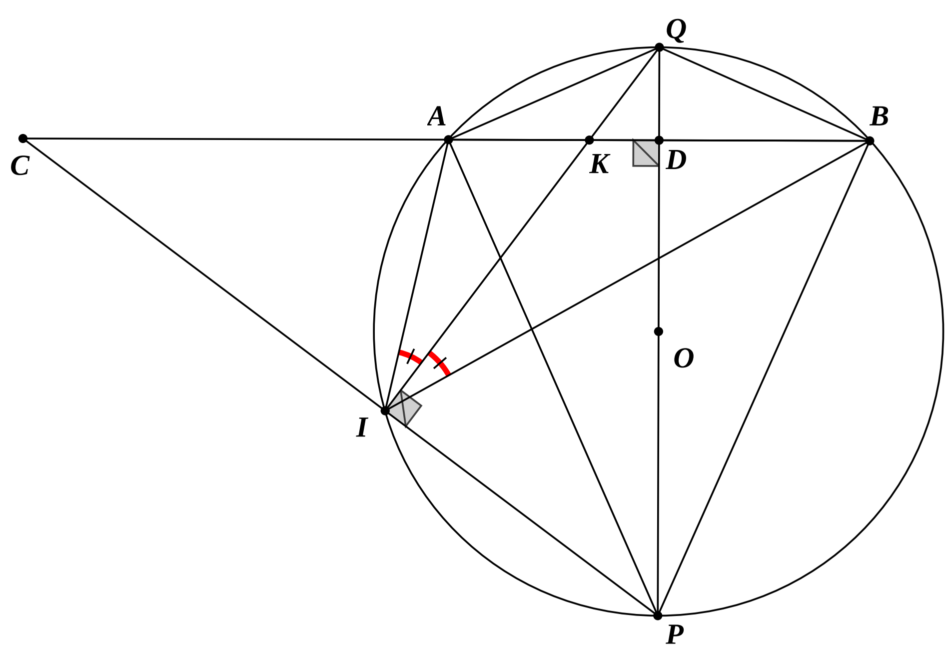
a)Chứng minh tứ giác $PDKI$ nội tiếp

b)Chứng minh : $CI.CP = CK.CD$

c)Chứng minh IC là phân giác góc ngoài tại đỉnh I của tam giác AIB

d)Giả sử ba điểm $A;B;C$ cố định ; chứng minh khi đường tròn (O) thay đổi nhưng vẫn đi qua $A;B$ thì đường thẳng QI luôn đi qua một điểm cố định

Lời giải



a)Cm : Tứ giác $PDKI$ nội tiếp

Ta có PQ là đường kính của đường tròn $(O) \Rightarrow \widehat{PIQ} = 90° \Rightarrow \widehat{PIK} = 90°$

Do $PQ \perp AB \Rightarrow \widehat{PDK} = 90° \Rightarrow \widehat{PDK} + \widehat{PIK} = 90° + 90° = 180° \Rightarrow tg$ PDKI nt (hai góc đối bù nhau)

b) Xét tam giác CIK và tam giác CDP ta có :

$$\begin{cases} \widehat{C} : chung \\ \widehat{CIK} = \widehat{CDP} = 90° \end{cases} \Rightarrow \Delta CIK \backsim \Delta CDP(g.g) \Rightarrow \frac{CI}{CD} = \frac{CK}{CP} \Rightarrow CI.CP = CD.CK$$

c)Ta có $PQ \perp AB$; PA=PB $\Rightarrow$ QA=QB hay điểm Q là điểm chính giữa cung nhỏ

$\overset{\frown}{AB} \Rightarrow \overset{\frown}{AQ} = \overset{\frown}{BQ}$

Do đó $\widehat{AIQ} = \widehat{BIQ}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau thì bằng nhau)

Hay IK là đường phân giác trong của tam giác AIB ; và lại có $IK \perp IC$ ($\widehat{PIQ} = 90°$) nên IC là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh I của tam giác AIB

d) Ta đi chứng minh K là điểm cố định

Ta có điểm D là trung điểm AB(OD $\perp$ AB)

Do $ABPI$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{CAI} = \widehat{CPB} \Rightarrow \Delta CAI \backsim \Delta CPB(g.g) \Rightarrow \frac{CA}{CP} = \frac{CI}{CB} \Rightarrow CA.CB = CI.CP$$

Vậy nên

$$CA.CB = CK.CD(=CI.CP) \Rightarrow CK.CD = (CD - DA)(CD + DB) = \left(CD - \frac{AB}{2}\right)\left(CD + \frac{AB}{2}\right) = CD^2 - \frac{AB^2}{4}$$

$$\Rightarrow CD^2 - CK.CD = \frac{AB^2}{4} \Rightarrow CD.KD = \frac{AB^2}{4} \Rightarrow KD = \frac{AB^2}{4CD}(\text{const})$$

$A;B;C;D$ là bốn điểm cố định nên K điểm cố định .Ta có đpcm

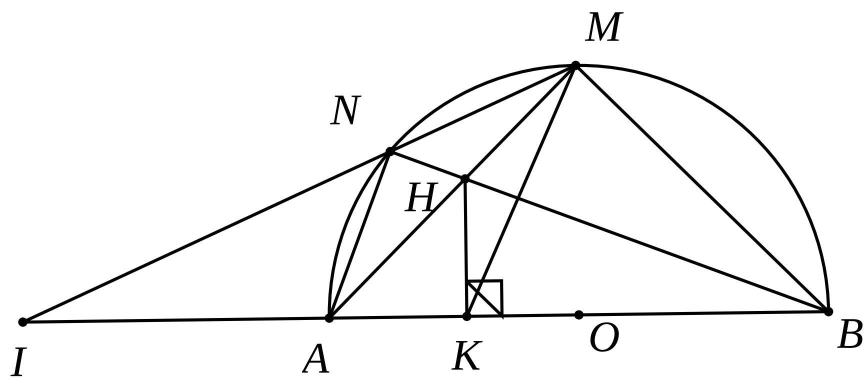
Bài 7. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M nằm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$. Trên cung $\overset{\frown}{AM}$ lấy điểm N $(N \neq A, N \neq M)$. Đường thẳng AM cắt đường thẳng BN tại H. Đường thẳng MN cắt đường thẳng AB tại I. Gọi K là hình chiếu của H trên AB. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $KHMB$ nội tiếp.

b) MA là tia phân giác của $\widehat{NMK}$.

c) $MN.MI = MB^2$.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{HKB} = 90^0$ (gt); $\widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tứ giác $KHMB$ có: $\widehat{HKB} + \widehat{AMB} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Hay $\widehat{HKB} + \widehat{HMB} = 180^0$

Mà $\widehat{HKB}$ và $\widehat{HMB}$ là hai góc đối nhau do đó tứ giác $KHMB$ nội tiếp (đpcm).

b) Ta có: $\widehat{HMK} = \widehat{HBK}$ (do tứ giác $KHMB$ nội tiếp)

Hay $\widehat{AMK} = \widehat{NBA}$

Mà $\widehat{NMA} = \widehat{NBA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AN}$)

$\Rightarrow \widehat{AMK} = \widehat{NMA} \Rightarrow MA$ là tia phân giác của $\widehat{NMK}$ (đpcm).

c) Dễ thấy $MA = MB$ $\Rightarrow \Delta MAB$ vuông cân tại M $\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 45^0$

$\Rightarrow \widehat{MAI} = 180^0 - 45^0 = 135^0$

Tứ giác $ABMN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ANM} = 135^0$

Từ đó ta có: $\widehat{ANM} = \widehat{MAI}$

Xét ΔMNA và ΔMAI có: $\widehat{AMI}$ chung và $\widehat{ANM} = \widehat{MAI}$ $\Rightarrow \Delta MNA \backsim \Delta MAI$ $(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{MN}{MA} = \dfrac{MA}{MI} \Rightarrow MN.MI = MA^2 = MB^2$ (đpcm).

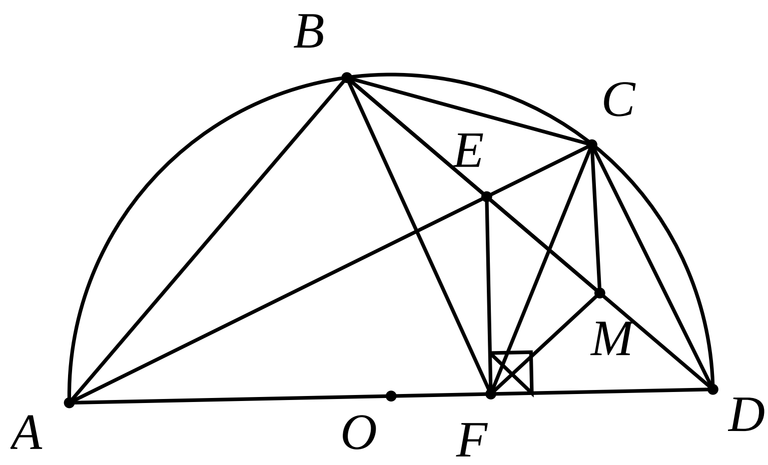
Bài 8. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong nửa đường tròn (O) đường kính AD, E là giao điểm của AC và BD, kẻ $EF \perp AD$ tại F; M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng:

a) Các tứ giác $ABEF$, $DCEF$ nội tiếp.

b) Tia CA là phân giác của $\widehat{BCF}$.

c) Tứ giác $BCMF$ nội tiếp.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{AFE} = 90^0$ (gt); $\widehat{ABE} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tứ giác $ABEF$ có: $\widehat{AFE} + \widehat{ABE} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà $\widehat{AFE}$ và $\widehat{ABE}$ là hai góc đối nhau do đó tứ giác $ABEF$ nội tiếp (đpcm).

Ta có: $\widehat{DFE} = 90^0$ (gt); $\widehat{DCE} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tứ giác $DCEF$ có: $\widehat{DFE} + \widehat{DCE} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà $\widehat{DFE}$ và $\widehat{DCE}$ là hai góc đối nhau do đó tứ giác $DCEF$ nội tiếp (đpcm).

b) Ta có: $\widehat{ECF} = \widehat{FDE}$ (do tứ giác $DCEF$ nội tiếp)

Hay $\widehat{ACF} = \widehat{ADB}$

Mà $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$)

$\Rightarrow \widehat{ACF} = \widehat{ACB}$ $\Rightarrow$ CA là tia phân giác của $\widehat{BCF}$ (đpcm).

c) Chứng minh tương tự ta có EF là tia phân giác của $\widehat{BFC}$ $\Rightarrow \widehat{BFC} = 2\widehat{CFE} = 2\widehat{CDM}$

Ta có $\Rightarrow 2\widehat{CDM} = \widehat{CME}$ hay $2\widehat{CDM} = \widehat{BMC}$.

$\Rightarrow \widehat{BFC} = \widehat{BMC}$ do đó tứ giác $BCMF$ nội tiếp (đpcm).

Bài 9. Cho đường tròn $(O;R)$ hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M $(M \neq O)$, đường thẳng CM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N với đường tròn (O) ở điểm P.

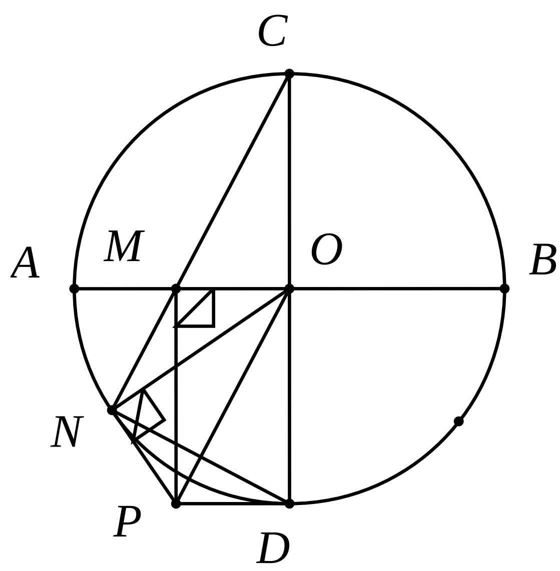
a) Chứng minh tứ giác $OMNP$ nội tiếp được đường tròn.

b) Tứ giác $CMPO$ là hình gì?

c) Chứng minh tích $CM.CN$ không đổi.

d) Chứng minh khi M di động trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên một đường thẳng cố định.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{ONP}=90^0$ (NP là tiếp tuyến của (O)); $\widehat{OMP}=90^0$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{ONP}=\widehat{OMP}=90^0$

Xét tứ giác $ABEF$ có hai đỉnh $M;N$ cùng nhìn đoạn OP dưới một góc vuông

Do đó tứ giác $OMNP$ nội tiếp được đường tròn (đpcm).

b) Dễ thấy $OC\,//\,MP$ $\Rightarrow \widehat{MPO}=\widehat{DOP}$

Mà $\widehat{MPO}=\widehat{MNO}$ (do tứ giác $OMNP$ nội tiếp c/m câu a)

Lại có $\widehat{MCO}=\widehat{MNO}$ (vì $OC=ON=R$)

Từ các điều trên ta có $\widehat{MCO}=\widehat{DOP}$ $\Rightarrow CM\,//\,$PO

Xét tứ giác $CMPO$ có $\begin{cases} OC\,//\,MP \\ CM\,//\,PO \end{cases}$ $\Rightarrow$ Tứ giác $CMPO$ là hình bình hành.

c) Xét ΔCMO và ΔCDN có $\widehat{COM}=\widehat{CND}=90^0$; $\widehat{DCN}$ chung $\Rightarrow \Delta CMO \backsim \Delta CDN$ $(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{CM}{CD}=\dfrac{CO}{CN}\Rightarrow CM.CN=CD.CO=2R^2$ không đổi.

d) Ta có $MP\perp AB$

Lại có tứ giác $CMPO$ là hình bình hành (c/m câu b) $\Rightarrow MP=CO=R$ không đổi

$\Rightarrow P$ luôn cách AB một khoảng bằng R không đổi

$\Rightarrow$ P thuộc đường thẳng song song với AB và cách AB một khoảng R không đổi.

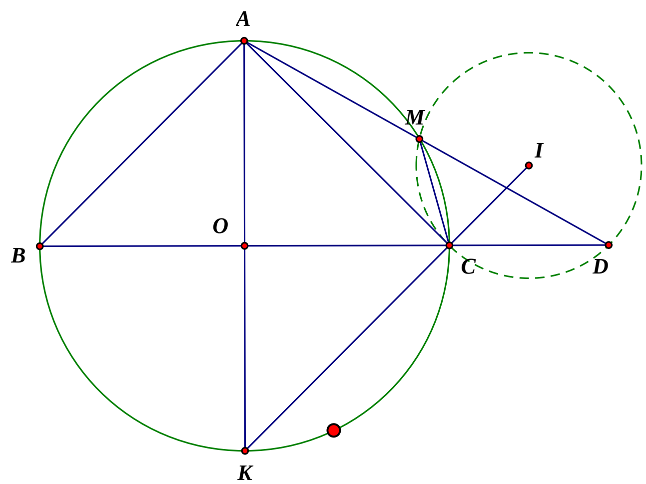
Vậy khi M di động trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên một đường thẳng cố định.

Ta suy ra kết quả PD là tiếp tiếp tại D của (O)

Bài 10: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn $(O;R)$ và có $AB=AC=\sqrt{2}R$. Tính độ dài BC theo R.

a) Gọi M là điểm di động trên cung nhỏ AC (M khác A và C) .tia AM cắt BC tại D .Chứng minh tích $AM.AD$ không đổi.
b) Tìm vị trí của M trên cung nhỏ AC để tổng $2.AM+AD$ có giá trị nhỏ nhất.
c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD .Chứng minh I di động trên đường cố định M di động trên cung nhỏ AC .

Lời giải

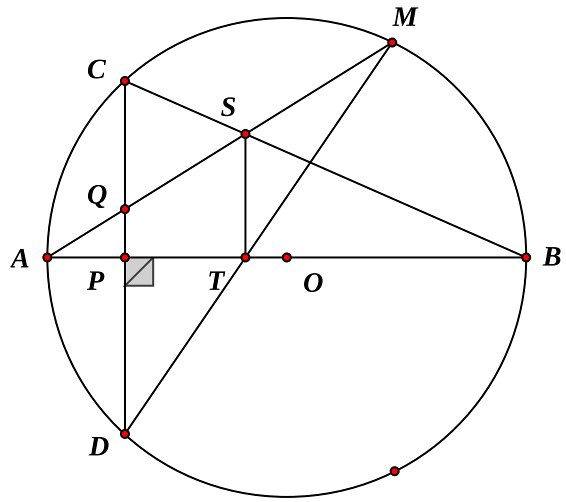


a) Kẻ $OH\perp BC$ tính được $\widehat{BAH}=45°$ suy ra tam giác ABC vuông cân tại A từ đó tính được $BC=2R$
b) $\Delta AMC\backsim\Delta ACD\left(g-g\right)\Rightarrow AM.AD=AC^2=2R^2$ không đổi khi M di chuyển
c) Theo bất đẳng thức Cô-si : $2.AM+AD\geq 2\sqrt{2.AM.AD}=4R^2$ vậy giá trị nhỏ nhất là $4R^2$ xảy ra khi $2AM=AD\Leftrightarrow AM=R$
d) Kẻ đường kính AK của (O) $\Rightarrow\widehat{ACK}=90°$ (1) mặt khác $AM.AD=AC^2$ nên AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD $\Rightarrow\widehat{ACI}=90°$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra K,C,I thẳng hàng mà C,K cố định nên I thuộc đường hẳng CK cố định.

Bài 11 : Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD vuông góc với AB tại P .Trên cung nhỏ BC lấy điểm M (M khác C và B) đường thẳng AM cắt CD tại Q

a) Chứng minh tứ giác $PQMB$ nội tiếp;
b) Chứng minh $\Delta APQ\backsim ABM$ suy ra $AC^2=AQ.AM$;
c) Gọi giao điểm của CB và AM là S, MD với AB là T chứng minh $ST//CD$.

Lời giải



a) $\widehat{QPB}+\widehat{QMB}=180^\circ$ nên tứ giác $QPBM$ nội tiếp

b) Ta có : $\Delta APQ \backsim ABM\left(g-g\right)\Rightarrow AQ.AM=AP.AB=AC^2$ (HTL trong tam giác ACB)

c) Ta có : $\widehat{ACS}=\frac{1}{2}sđ\left(\overset\frown{AC}+\overset\frown{BM}\right)$; $\widehat{ATD}=\frac{1}{2}sđ\left(\overset\frown{AD}+\overset\frown{BM}\right)$ mà $\overset\frown{AC}=\overset\frown{AD}$ nên

$\widehat{ACS}=\widehat{ATD}\Rightarrow\widehat{MSB}=\widehat{MTB}$ suy ra $MSTB$ nội tiếp $\Rightarrow\widehat{MTS}=90^\circ\Rightarrow ST\perp MB\Rightarrow ST//CD$.

Bài 12: Cho nửa đường tròn *(O)* đường kính *AB*. Gọi M là điểm chính giữa cung *AB*,*P* là điểm thuộc cung *MB* (*P* không trùng với *M* và *B*), đường thẳng *AP* cắt đường thẳng *OM* tại *C*,đường thẳng *OM* cắt đường thẳng *BP* tại *D*

a) Chứng minh *OBPC* là một tứ giác nội tiếp và tích: *AC.AP* không đổi;

b) Chứng minh hai tam giác *BDO* và *CAO* đồng dạng;

c) Tiếp tuyến thứ hai của nửa đường tròn ở *P* cắt *CD* tại *I*. Chứng minh *I* là trung điểm của đoạn thẳng *CD*.

Lời giải

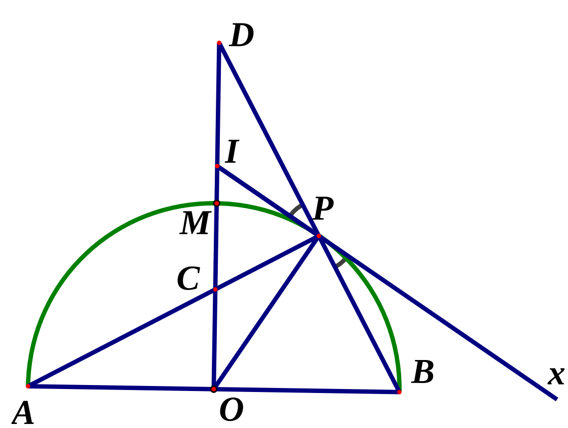
a) + Chứng minh tứ giác $OBPC$ nội tiếp:

Vì M là điểm chính giữa của $\overset\frown{AB}$ nên:

$\overset\frown{MA}=\overset\frown{MB}\Rightarrow MA=MB\Rightarrow\Delta MAB$ cân tại $M\Rightarrow$ đường trung tuyến MO cũng là đường cao . Do đó:

$MO\perp AB\Rightarrow\widehat{MOB}=90^\circ\Rightarrow\widehat{COB}=90^\circ$

Mặt khác: $\widehat{CPB}=\widehat{APB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)



Suy ra: $\widehat{COB}+\widehat{CPB}=90^\circ+90^\circ=180^\circ\Rightarrow OBPC$ nội tiếp.

+ Xét ΔAPB và ΔAOC có: $\widehat{A}$ chung , $\widehat{APB}=\widehat{AOC}=90^\circ$

suy ra: $\Delta APB \backsim \Delta AOC \Rightarrow \dfrac{AP}{AO} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AC.AP = OA.AB = \dfrac{AB}{2}.AB = \dfrac{AB^2}{2}$ (Không đổi)

Do đó tích $AC.AP$ không đổi.

b) + Xét ΔBDO và ΔCAO có: $\widehat{BOD} = \widehat{AOC} = 90°$ (theo câu a)

$\widehat{OAC} = \widehat{ODB}$ (cùng phụ $\widehat{OBD}$)

Suy ra: $\Delta BDO \backsim \Delta CAO(g.g)$

c) Ta có: $\widehat{IPD} = \widehat{BPx}$ (Hai góc đối đỉnh), $\widehat{BPx} = \widehat{PAB} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overparen{PB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overparen{PB}$),

$\widehat{PAB} = \widehat{IDP}$ (theo câu b) **.** Do đó **:** $\widehat{IPD} = \widehat{IDP} \Rightarrow \Delta IPD$ cân tại I $\Rightarrow IP = ID(1)$

Mặt khác: $\widehat{IPD} + \widehat{IPC} = 90°$, $\widehat{ICP} + \widehat{IDP} = 90°(\Delta DCP$ vuông tại P) mà $\widehat{IPD} = \widehat{IDP}$

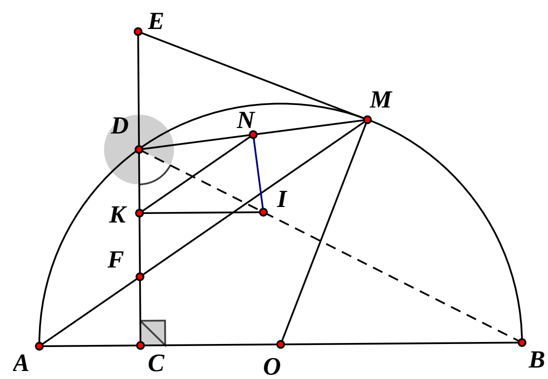
Suy ra : $\widehat{ICP} = \widehat{IPC} \Rightarrow \Delta ICP$ cân tại $I \Rightarrow IC = IP(2)$. Từ (1), (2) ta có : $IC = ID(= IP)$

Vậy I là trung diểm của CD.

Bài 13: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, một điểm C cố định thuộc đoạn AO (C khác A và O) đường thẳng đi qua C và vuông góc với AO cắt nửa đường tròn tại D trên cung BD lấy điểm M bất kì (khác B và D) .Tiếp tuyến của nửa đường tròn đã cho tại M cắt CD tại E, gọi F là giao điểm của AM và CD

a) Chứng minh $BCFM$ nội tiếp
b) Chứng minh $EM = EF$
c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác FDM chứng minh D, I, B thẳng hàng và góc ABI có số đo không đổi khi M di chuyển trên cung BD

Giải



a) Ta có : $\widehat{BCF} = \widehat{BMF} = 90°(gt) \Rightarrow \widehat{BCF} + \widehat{BMF} = 180°$ vậy tứ giác $BCFM$ nội tiếp

b) Do $BCFM$ nội tiếp nên $\widehat{MFE} = \widehat{ABM}$ (góc ngoài bằng đối trong)

Mà $\widehat{AMB} = \widehat{AFC}$ (cùng phụ $\widehat{BAM}$) và $\widehat{ABM} = \widehat{EMA}$ (góc tạo bởi tt và dây)

Nên $\widehat{EMF} = \widehat{FME} \Rightarrow EM = EF$

c) Kẻ $IN \perp DM; IK \perp DF$ do I là tâm đường tròn ngoại tiếp nên KN là đường trung bình của ΔDMF suy ra $KN // MF \Rightarrow \widehat{DNK} = \widehat{DMA} = \widehat{DBA}$

Do tứ giác $DNKI$ nội tiếp nên $\widehat{DNK}=\widehat{DIK}\Rightarrow\widehat{DIK}=\widehat{DBA}\Rightarrow\widehat{CDI}=\widehat{CDB}$ (cùng phụ $\widehat{DIK}=\widehat{DBC}$) suy ra D,I,B thẳng hàng

Từ đó $\widehat{ABI}=\widehat{ABD}$ không đổi do A,D,B cố định

Bài 14: Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định một điểm I nằm giữa A và O sao cho $AI=\frac{2}{3}AO$ kẻ dây MN vuông góc với AB tại I , gọi C là điểm tùy ý thuộc cung BM (khác B và M) AC cắt MN tại E

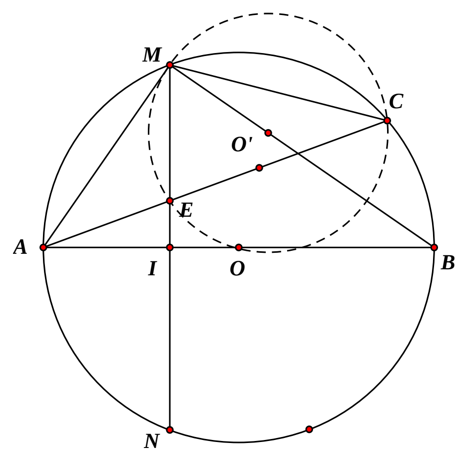
a) Chứng minh tứ giác $IECB$ nội tiếp

b) Chứng minh $\Delta AME\backsim\Delta ACM$ và $AM^2=AE.AC$

c) Chứng minh $AE.AC-IB.IA=IA^2$

d) Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME chứng minh M,O',B thẳng hàng và số đo góc $O'BA$ không đổi khi C di chuyển trên cung nhỏ BM

Giải



a) $\widehat{BCE}+\widehat{BIE}=180°$ nên tứ giác $BCEI$ nội tiếp

b) Ta có $\Delta AME\backsim\Delta ACM\,(g-g)\Rightarrow AM^2=AC.AE$

c) Do $IA.IB=IM.IN=IM^2\,(IM=IN)$ vậy $AC.AE-IA.IB=AM^2-IM^2=IA^2$ (Py ta go trong tam giác vuông AMI)

d) Giống bài 13:

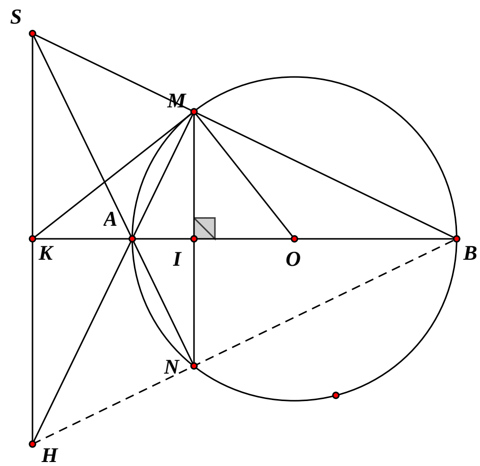
Bài 15: Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB . Điểm I nằm giữa hai điểm A và O kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại I đường thẳng này cắt (O) tại M và N gọi S là giao điểm của BM và AN qua S vẽ đường thẳng song song với MN đường thẳng này cắt AB và AM lần lượt tại K và H chứng minh

a) Tứ giác $SKAM$ nội tiếp và $HS.HK=HA.HM$

b) KM là tiếp tuyến của (O)

c) Ba điểm H,B,N thẳng hàng

Giải



a) Ta có : $\widehat{SKA}+\widehat{SMA}=180°$ nên tứ giác $SKAM$ nội tiếp

$\Delta HKA \backsim \Delta HMS\left(g-g\right) \Rightarrow HK.HS = HA.HM$

b) Ta có : $\widehat{BAN}=\widehat{BAM};\widehat{BAN}=\widehat{SAK}$ và $\widehat{BAM}=\widehat{OMA};\widehat{KSA}=\widehat{KMA}$ nên $\Rightarrow \widehat{OMA}+\widehat{KMA}=90°$

(do $\widehat{KSA}+\widehat{KAS}=90°$) $\Rightarrow \widehat{KMO}=90°$ vậy KM là tiếp tuyến của (O)

c) Ta có : $SK.SH = SM.SB = SA.SN \Rightarrow \Delta ASK \backsim \Delta SNH\left(c-g-c\right) \Rightarrow \widehat{SNH}=90°$

Mà $\widehat{SNB}=90° \Rightarrow \widehat{SNH}+\widehat{SNB}=180°$ vậy $N,H\ ,B$ thẳng hàng

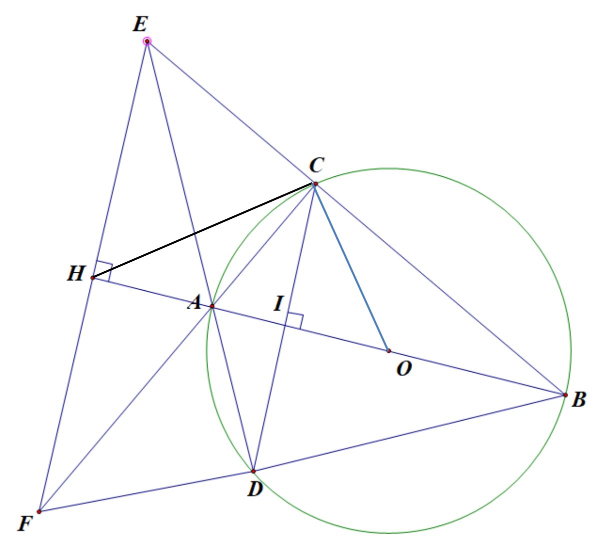
Bài 16: Cho đường tròn (O;R) đường kính AB và dây CD vuông góc với nhau (CA<CB). Hai tia BC và DA cắt nhau tại E. Từ E kẻ EH vuông góc với AB tại H; EH cắt CA tại F. CHứng minh rằng :

a. Tứ giác CDEF nội tiếp đường tròn.

b. Ba điểm B,D,F thẳng hàng

c. HC là tiếp tuyến của đường tròn O.

d. BC.BE = BD.BF



Lời giải:

a) Xét tứ giác CDEF có:

EF// CD (cùng vuông góc AB)

$\Rightarrow \widehat{\text{DEF}}=\widehat{EDC}$ (1)

gọi I là giao điểm của AB và CD.

AB vuông góc CD

$\Rightarrow$ I là trung điểm CD

$\Rightarrow$ AB là đường trung trực của DC $\Rightarrow AC = AD$

$\Rightarrow \widehat{ACD}=\widehat{ADC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Rightarrow \widehat{\text{DEF}}=\widehat{FCD}$ cùng chắn cung FD.

Suy ra tứ giác CDEF nội tiếp đường tròn.

b) Ta có Tứ giác CDFE nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{ECF} = \widehat{EDF} = 90^0 (3)$

$\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) (4)

từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{EDF} + \widehat{ADB} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{BDF} = 180^0$ (góc bẹt)

suy ra ba điểm B,D,F thẳng hàng.

c) Xét tứ giác EHAC có:

$\Rightarrow \widehat{EHA} + \widehat{ADB} = 180^0$

do đó tứ giác EHAC nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{HCA} = \widehat{AEH}$ (vì là hai góc nội tiếp chắn cung AH)

Mà $\widehat{HEA} = \widehat{EDC}$ (2 góc so le trong)

$\Rightarrow \widehat{HCA} = \widehat{EDC}$ $(=\frac{1}{2}$ số đo cung AC)

$\Rightarrow HC$ là tiếp tuyến của đường tròn 0.

d) Xét ΔEDB và ΔFCB có:

$\hat{B}$ góc chung.

$\widehat{EDB} = \widehat{FCB} = 90^0$

do đó $\Delta EDB \sim \Delta FCB$ (g.g)

$\frac{BC}{BD} = \frac{BF}{BE} \Rightarrow BC.BE = BD.BF$ (đpcm).

Bài 17: Cho (O) đường kính AC, trên đoạn OC lấy điểm B và vẽ đường tròn tâm (O'), đường kính BC. Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Từ M vẽ dây cung DE vuông góc với AB, DC cắt đường tròn tâm O' tại I

a) Tứ giác ADBE là hình gì ?

b) Chứng minh DMBI nội tiếp

c) Chứng minh I, B, E thẳng hàng và $MI = MD$

d) Chứng minh MI là tiếp tuyến của (O') và $MI^2 = MB.MC$

lời giải:

Ta có $DE \perp AB$ (gt)

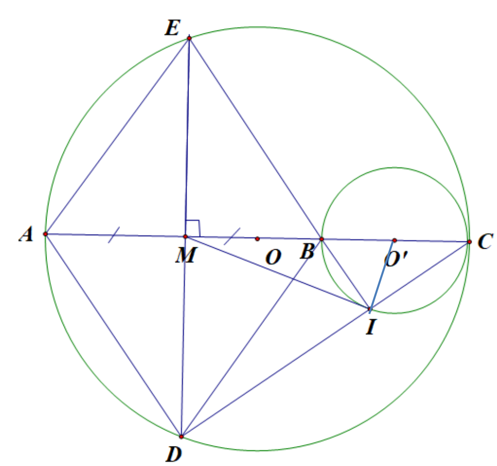
$\Rightarrow DE \perp AC$ (quan hệ giữa đường kính và dây)

$\Rightarrow ME = MD$

mà $MA = MB$ (vì M là trung điểm AB)

và $DE \perp AB$ (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác ADBE là hình thoi vì hai đường chéo vuông góc và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.



b) vì DC cắt đường tròn tâm O' tại I
$\Rightarrow I$ nằm trên dường tròn tâm O'.
BC là đường kính

$\widehat{BIC}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Rightarrow \widehat{BIC}=90^0$

Ta có: $\widehat{BIC}+\widehat{BID}=180^0$ (2 góc kề bù)

thay số $90^0+\widehat{BID}=180^0 \Rightarrow \widehat{BID}=180^0-90^0=90^0$

Xét tứ giác DMBI có: $\widehat{DMB}+\widehat{BID}=90^0+90^0=180^0$ (hai góc đối nhau trong tứ giác)

$\Rightarrow$ tứ giác DMBI nội tiếp đường tròn.

c)Xét tam giác ADC có: $\widehat{ADC}$ là góc nội tiếp chắn cung AC

$\Rightarrow$ tam giác ADC vuông tại D.

$\Rightarrow AD \perp DC$

mà $BI \perp DC$ (vì $\widehat{BIC}=90^0$)

$\Rightarrow AD // BI$ (1)

Ta có $AD // EB$ (vì tứ giác ADBE là hình thoi) (2)

từ (1) và (2) $\Rightarrow E, B, I$ thẳng hàng (theo tiên đề Ơ-clit)

Ta có $\widehat{MBD}=\widehat{MID}$ vì là 2 góc nội tiếp cùng chắn cung MD (3)

Ta có EB = BD (vì tứ giác AEBD là hình thoi)

$\widehat{EDB}=\widehat{DEB}$ (quan hệ góc và cạnh đối diện) (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{MID}=\widehat{MDI}$

$\Rightarrow$ Tam giác MDI cân tại M $\Rightarrow MD=MI$ (đpcm).

e) Ta có $O'I=O'C=r \Rightarrow \Delta O'IC$ tại $O' \Rightarrow \widehat{O'CI}=\widehat{O'IC}$

Mà $\widehat{O'CI}=\widehat{AED}$ (vì là hai góc nội tiếp chắn cung AD)

Ta có $\widehat{AED}=\widehat{EDB}$ (2 góc so le trong)

Mà $\widehat{EDB}=\widehat{MIB}$ (vì là hai góc nội tiếp chắn cung MB)

$\Rightarrow \widehat{O'IC}=\widehat{MIB}$

Ta có $\widehat{BIO'}+\widehat{O'IC}=\widehat{BIC}$

$\widehat{BIO'}+\widehat{MIB}=90^0$ (vì $\widehat{O'IC}=\widehat{MIB}$)

$\Rightarrow \widehat{MIO'}=90^0$

mà I thuộc đường tròn tâm O'

vậy MI là tiếp tuyến của (O').

Xét ΔMIC vuông tại I.

$\Rightarrow MI^2 = MB.MC$ (hệ thức lượng giác).

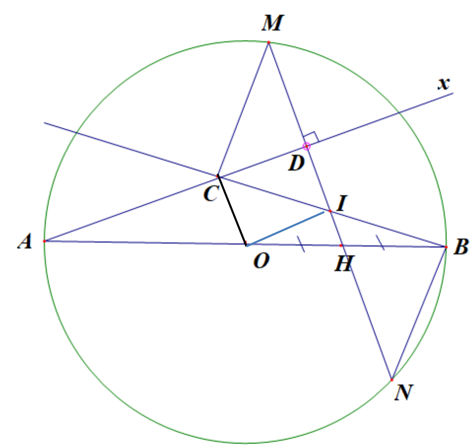
Bài 18: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Một cát tuyến MN quay quanh trung điểm H của OB.

a. CMR: Khi cát tuyến MN di động, trung điểm I của MN luôn nằm trên một đường tròn cố định.

b. Từ A kẻ tia Ax vuông góc với MN. Tia BI cắt Ax tại C. CMR: CM=BN.

c. Khi MN quay chung quanh H thì điểm C di chuyển trên đường nào? vì sao?

lời giải:



Ta có MI = NI (gt)

a) OI thuộc đường kính đi qua trung điểm I của MN

$\Rightarrow OI \perp MN$ (quan hệ đường kính và dây)

$\Rightarrow \widehat{OIH} = 90^0$

Vậy khi cát tuyến MN di động ,I của MN luôn nằm trên đường tròn đường kính OH.

b) Ta có $\left.\begin{matrix} OI \perp MN(cmt) \\ AD \perp MN(gt) \end{matrix}\right\} \Rightarrow OI // AD \Rightarrow OI // AC$

Xét ΔBAC có:

$\left.\begin{matrix} OI // AC(cmt) \\ OA = OB(gt) \end{matrix}\right\} \Rightarrow IB = IC$ (định lý) (1)

Xét ΔMCI và ΔNBI có:

$IC = IB(cmt)$

$\widehat{CIM} = \widehat{BIN}$ (2 góc đối đỉnh)

$IM = IN$ (vì I là trung điểm MN)

Do đó $\Delta MCI = \Delta NBI$ (c.g.c)

$\Rightarrow CM = BN$ (2 cạnh tương ứng)

c) Nối OC.

Ta có $\left.\begin{matrix} CI = CB(cmt(1)) \\ AO = OB(gt) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ OI là đường trung bình ΔABC.

$\Rightarrow \frac{OI}{OC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AC}{OI} = 2$

Ta có OA = OB; H là trung điểm OB

$\Rightarrow \frac{OH}{OB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OH}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OA}{OH} = 2$

$\Rightarrow \frac{OA}{OH} = \frac{AC}{OI} = 2$

Xét ΔACO và ΔOIH có:

$$\frac{OA}{OH}=\frac{AC}{OI}=2$$

$\widehat{ACO}=\widehat{IOH}$ (đồng vị)

do đó $\Delta ACO\sim\Delta OIH$ (c.g.c)

$\widehat{OIH}=90^0$

Vậy MN quay chung quanh H thì điểm C di chuyển trên đường tròn đường kính AO

Bài 19. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. Gọi M là một điểm di động trên cung nhỏ AB (M không trùng với điểm A và B).

a) Chứng minh rằng MD là phân giác của góc BMC.

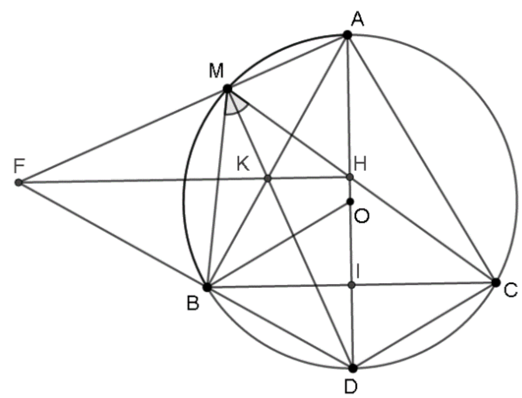
b) Cho $AD=2R$. Tính diện tích tứ giác $ABCD$ theo R.

c) Gọi K là giao điểm của AB và MD, H là giao điểm của AD và MC. Chứng minh rằng ba đường thẳng AM, BD, HK đồng quy.

d) Chứng minh $DM.DK+AK.AB$ không đổi.

Lời giải

a) Chứng minh rằng MD ***là phân giác của góc*** BMC.



Ta có:

O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow O$ cũng là trực tâm và tâm của đường tròn ngoại tiếpcủa ΔABC

$$\Rightarrow \begin{cases}\widehat{BAD}=\widehat{DMC} & (1)\\ AD\perp BC & (2)\end{cases}$$

Từ (1) suy ra: $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$.

$\Rightarrow \widehat{BMD}=\widehat{DMC}$ (2 góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

b) Tính diện tích tứ giác $ABCD$ **theo** R.

Gọi I là giao điểm của AD và BC.

Tứ giác $ABCD$ có: $AD\perp BC$ (do (2)).

$\Rightarrow AI\perp BC\Rightarrow OI\perp BC$.

Lại có: ΔOBC cân tại O (do $OB=OC=R$).

Và $\widehat{BOC}=2\widehat{BAC}=2.60^\circ=120^\circ$.

Do đó: $\widehat{BOI}=\frac{1}{2}.120^\circ=60^\circ\Rightarrow\widehat{OBI}=30^\circ$ (ΔBOI vuông tại I).

$OB = \frac{1}{2}AD = \frac{R}{2}$.

Xét ΔBOI vuông tại I có: $IB = OB.\cos\widehat{OBI} = OB.\cos 30^\circ = \frac{R}{2}$.

$\Rightarrow BC = 2IB = 2.\frac{R}{2} = R$.

Do đó: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AD.BC = \frac{1}{2}.2R.R = R^2$ (đvdt).

c) Gọi K là giao điểm của AB và MD, H là giao điểm của AD và MC. Chứng minh rằng ba đường thẳng AM, BD, HK đồng quy.

Gọi F là giao điểm của AM và BD.

Xét ΔFAD có: $DM \perp FA$, $AB \perp FD$ và K là giao điểm của AB và MD.

$\Rightarrow K$ là trực tâm của $\Delta FAD \Rightarrow FK \perp AD$ (*)

Xét tứ giác $AMKH$ có: $\widehat{M_1} = \widehat{A_1}$ (góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau)

Suy ra: $AMKH$ nội tiếp (2 đỉnh A, M cùng nhìn cạnh KH dưới một góc không đổi).

Mà $\widehat{AMK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KHA} = 90^\circ$.

$\Rightarrow KH \perp AD$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra: F, K, H thẳng hàng

$\Rightarrow AM, HK, BD$ đồng quy tại F.

d) Chứng minh $DM.DK + AK.AB$ không đổi.

Xét hai tam giác ΔDHK và ΔDMA có:

$\widehat{D}$ chung và $\widehat{H} = \widehat{M} = 90^\circ$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta DHK \backsim \Delta DMA$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{DK}{DH} = \frac{DA}{DM} \Rightarrow DK.DM = DH.DA$ (3)

Tương tự ta có: $\Delta AHK \backsim \Delta ABD$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AK}{AD} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AK.AB = AH.DA$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $DM.DK + AK.AB = DH.DA + AH.DA = 2DA = 4R$. (đpcm)

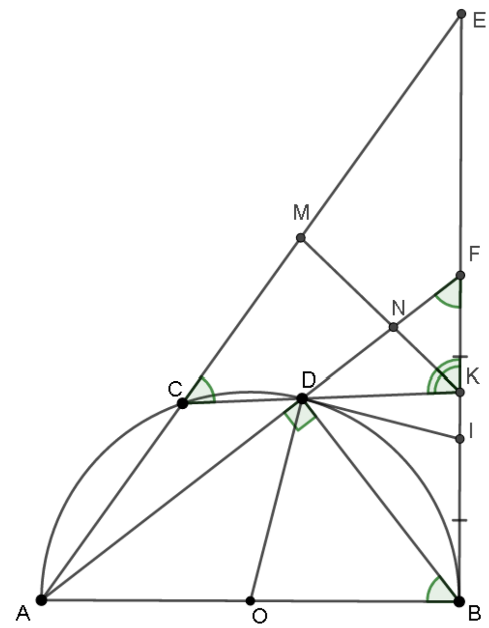
Bài 20. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, trên nửa đường tròn lấy điểm C (C khác A và B). Trên cung BC lấy điểm D (D khác B và C). Vẽ đường thẳng d vuông góc với AB tại B. Các đường thẳng AC và AD cắt d lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh tứ giác $CDFE$ nội tiếp.

b) Gọi I là trung điểm của BF. Chứng minh ID là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

c) Đường thẳng CD cắt d tại K, tia phân giác của góc CKE cắt AE và AF tại M và N. Chứng minh tam giác AMN là tam giác cân.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $CDFE$ nội tiếp.

Xét tứ giác $CDFE$ ta có:

$$\widehat{CEF} = \widehat{AEB} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{CB}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AC} = \widehat{ADC}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CDFE$ nội tiếp.

b) Chứng minh ID là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

Ta có:

$\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \Delta BDF$ vuông tại D. Mà I là trung điểm DF

Do đó: $DI = IF \Rightarrow \Delta IDF$ cân tại I (1)

Lại có: ΔODB cân tại O (2)

$\Delta ADB \backsim \Delta ABF$ (2 tam giác vuông có $\widehat{A}$ chung)

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{AFB}$ (2 góc tương ứng) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\Delta IDF \backsim \Delta ODB$ (g.g)

$\Rightarrow \widehat{DIF} = \widehat{DOB} \Rightarrow$ Tứ giác $OBID$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ODI} = 90^\circ$.

Vậy ID là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

c) Chứng minh tam giác AMN là tam giác cân.

Ta có: $ABDC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{MCK}$

Xét ΔMCK và ΔNFK có:

$\widehat{MCK} = \widehat{NFK}$ (cùng bằng $\widehat{ABD}$)

và $\widehat{CKM} = \widehat{NKF}$ (KM là phân giác của $\widehat{CKE}$)

Suy ra: $\Delta MCK \backsim \Delta NFK$ (g.g)

$\Rightarrow \widehat{CMK} = \widehat{KNF} \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{KNF}$

Mà $\widehat{KNF} = \widehat{ANM}$.

Suy ra: $\widehat{AMN} = \widehat{ANM} \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A.

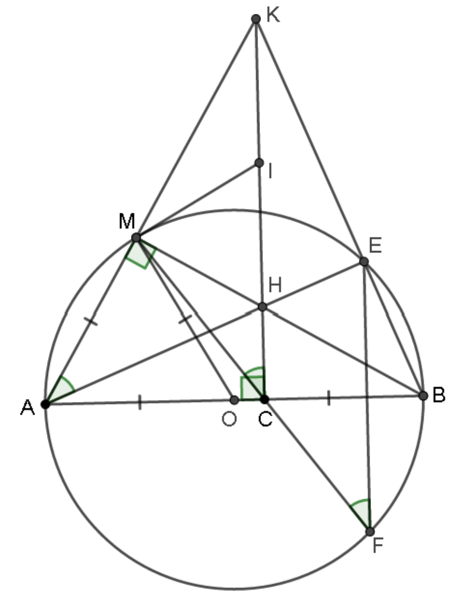
Bài 21. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi M là một điểm nằm trên đường tròn (O) sao cho $AM = R$, C là một điểm tùy ý trên đoạn OB (C khác B). Đường thẳng qua C và vuông góc với AB lần lượt cắt các đường thẳng MA, MB tại K và H.

a) Chứng minh $AMHC$ nội tiếp.

b) Tính độ dài đoạn BM và diện tích tam giác MAB theo R.

c) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M cắt CK tại I. Chứng minh tam giác MIH đều.

d) Các đường thẳng KB và MC cắt đường tròn (O) lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng EF //KC.



Lời giải

a) Chứng minh $AMHC$ nội tiếp.

Xét tứ giác $AMHC$ có:

$\widehat{AMH} = \widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{HCA} = 90^\circ$ (gt)

Suy ra: $\widehat{AMH} + \widehat{HCA} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

$\Rightarrow AMHC$ nội tiếp.

b) Tính độ dài đoạn BM và diện tích tam giác MAB theo R.

* Xét ΔABM vuông tại M, ta có:

$BM^2 = AB^2 - AM^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2$

$\Rightarrow BM = R\sqrt{3}$ (đvđd)

*Diện tích ΔMAB là: $S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2}MA.MB = \frac{1}{2}.R.R\sqrt{3} = R^2\frac{\sqrt{3}}{2}$ (đvdt)

c) Chứng minh ΔMIH đều.

Ta có: ΔAMO đều (vì $AM = OM = OA = R$) $\Rightarrow \widehat{AMO} = 60^\circ$

$AMHC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MHI}$

Mà $\widehat{MAB} = \widehat{IMB} = \widehat{IMH}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tt và dc cùng chắn $\overset{\frown}{MB}$)

Suy ra: $\widehat{MHI} = \widehat{IMH} \Rightarrow \Delta MIH$ cân tại I

Lại có: $\widehat{IMH} = \widehat{AMO} = 60^\circ$ (cùng phụ $\widehat{OMB}$)

Do đó: ΔMIH đều.

d) Các đường thẳng KB và MC cắt đường tròn (O) lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng EF //KC.

Xét (O) ta có: $\widehat{EFM} = \widehat{EAM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{ME}$) (1)

Tứ giác $AMHC$ nội tiếp nên ta có:

$\widehat{HAM} = \widehat{HCM}$ (cùng chắn $\overparen{HM}$)

$\Rightarrow \widehat{EAM} = \widehat{HCM}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{EFM} = \widehat{HCM}$.

$\Rightarrow EF // CK$ (2 góc ở vị trí đồng vị bằng nhau) (đpcm).

Bài 22: Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O) đường kính BC = 2R, điểm D là trung điểm của OC. Đường vuông góc với OC tại D cắt AC và AB theo thứ tự tại E và F.

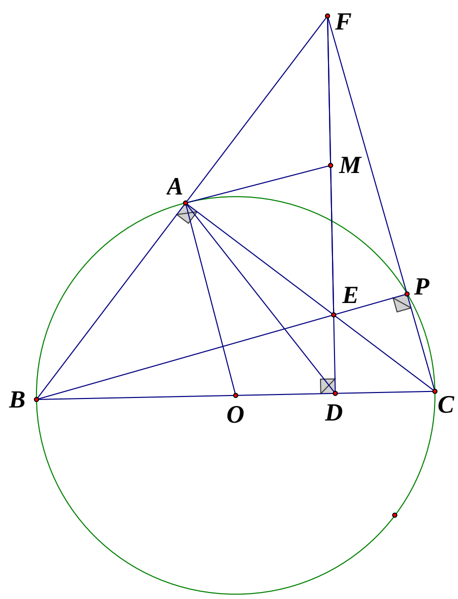
a) Chứng minh tứ giác ABDE nội tiếp và tích CE.CA không phụ thuộc vào vị trí điểm A.

b) Chứng minh $\widehat{CAD} = \widehat{CFD}$.

c) Gọi M là trung điểm của EF. Chứng minh AM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

d) Gọi P là giao điểm của FC và đường tròn (O) . Chứng minh B,E,P thẳng hàng.

Giải:



a) Vì A nằm trên (O) và BC là đường kính suy ra $\widehat{BAC}$ chắn nửa đường tròn (O) nên $\widehat{BAC} = 90°$.

Xét tứ giác ABDE có $\widehat{BAE} + \widehat{BDE} = 180°$. Suy ra ABDE nội tiếp.

Xét ΔABC và ΔDEC có:

$\widehat{BAC} = \widehat{EDC} = 90°$.

$\widehat{ACB} = \widehat{DCE}$ (góc chung)

Suy ra $\Delta ABC \# \Delta DEC$ (g.g)

$\dfrac{CE}{BC}=\dfrac{CD}{AC}\Leftrightarrow CE.AC=BC.CD$.

Mặt khác $BC=2R$ và DC $=\dfrac{2R}{4}=\dfrac{R}{2}$.

Suy ra $CE.CA=BC.CD=2R.\dfrac{R}{2}=R^2=const$.

Vậy $CE.CA$ không phụ thuộc vào vị trí điểm A.

b) Xét tứ giác $CFAD$ có $\widehat{FAC}=\widehat{FDC}=90^\circ$, mà 2 góc này cùng nhìn đoạn CF nên suy ra tứ giác $CFAD$ nội tiếp.

Từ đó suy ra $\widehat{CAD}=\widehat{CFD}$ (cùng nhìn cung CD).

c) Nhận thấy AM là trung tuyến của tam giác FAD vuông tại A. Suy ra $AM=MF=ME$. Từ đó suy ra $\widehat{MAF}=\widehat{MFA}$. (1)

Mặt khác OB= OA = R suy ra ΔAOB cân tại O nên $\widehat{OBA}=\widehat{OAB}$. (2)

Ta lại có ΔFDB vuông tại D nên $\widehat{DBF}+\widehat{DFB}=90^\circ$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $\widehat{OAB}+\widehat{MAF}=90^\circ \Rightarrow \widehat{OAM}=90^\circ$.

Vậy AM là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

d) Vì P thuộc (O) nên $\widehat{BPC}=90^\circ \Rightarrow$ BP ⊥ FC. (4)

Mặt khác vì E là giao của CA và FD nên suy ra E là trực tâm của tam giác FBC. Từ đó suy ra BE cũng là đường cao của tam giác FBC hay BE ⊥ FC (5).

Từ (4) và (5) suy ra B, E, P thẳng hàng.

Bài 23: Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Các điểm C và D bất kì thuộc cung AB sao cho sđ $\overset{\frown}{CD}=90^\circ$ (C thuộc cung AD). Gọi E là giao điểm của AC và BD, K là giao điểm của AD và BC.

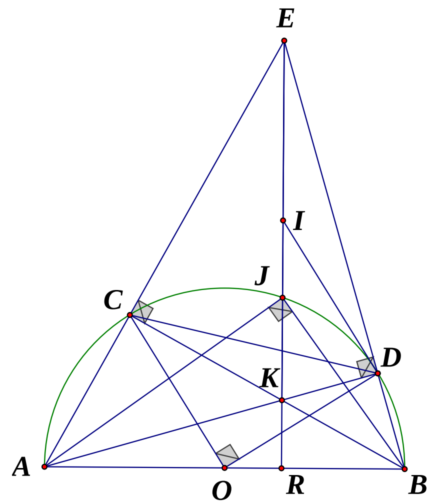
a) Tính số đo góc CED

b) Chứng minh tứ giác ECKD nội tiếp và xác định tâm I của đường tròn đó.

c) Chứng minh rằng OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ECKD.

d) Chứng minh rằng tổng AK.AD + BK.BC không phụ thuộc vào vị trí của hai điểm C và D.

Giải:



a) Ta có: $\widehat{CEA} = \frac{1}{2}\left(sđ\overset\frown{AB} - sđ\overset\frown{CD}\right) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 90^\circ\right) = 45^\circ$.

b) Vì C và D nằm trên nửa đường tròn tâm O nên $\widehat{BEC} = \widehat{ADE} = 90^\circ$. Xét tứ giác ECKD có tổng hai góc đối diện bằng 180° nên ECKD nội tiếp.

Gọi I là trung điểm của EK , dễ dàng chứng minh được $IE = IC = ID = IK$, suy ra tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ECKD là trung điểm của EK.

c) Đầu tiên ta có nhận xét rằng K chính là trực tâm của ΔEAB, suy ra EK ⊥ AB.

Gọi R là giao điểm của AB và EK.

Vì ΔERB vuông tại R nên $\widehat{REB} + \widehat{RBE} = 90^\circ$ (1) .

Mặt khác ΔIED cân tại I và ΔODB cân tại O nên ta có $\widehat{IDE} = \widehat{IED}$ và $\widehat{ODB} = \widehat{OBD}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\widehat{IDE} + \widehat{ODB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IDO} = 90^\circ$.

Vậy OD là tiếp tuyến của đường tròn tâm I ngoại tiếp tứ giác ECOD.

d) Gọi J là giao điểm của EK với (O) .

Dễ dàng chứng minh được tứ giác ACKR nội tiếp suy ra $BK.BC = BR.BA$.

Tương tự chứn minh được tứ giác BDKR nội tiếp suy ra $AK.AD = AR.AB$.

Áp dụng hệ thức liên hệ giữa các cạnh trong tam giác vào tam giác AJB vuông tại J đường cao JR suy ra :

$BK.BC = BR.BA = BJ^2$.

$AK.AD = AR.AB = AJ^2$.

Từ đó suy ra $AK.AD + BK.BC = AJ^2 + BJ^2 = AB^2 = \left(2R\right)^2 = const$.

Vậy AK.AD + BK.BC không phụ thuộc vào hai điểm C và D.

Bài 24: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Lấy điểm C thuộc nửa đường tròn (C khác A và B, CA < CB). Lấy điểm M thuộc đoạn OB (M khác O và B), đường thẳng đi qua M vuông góc với AB cắt hai đường thẳng AC và BC lần lượt tại hai điểm D và H.

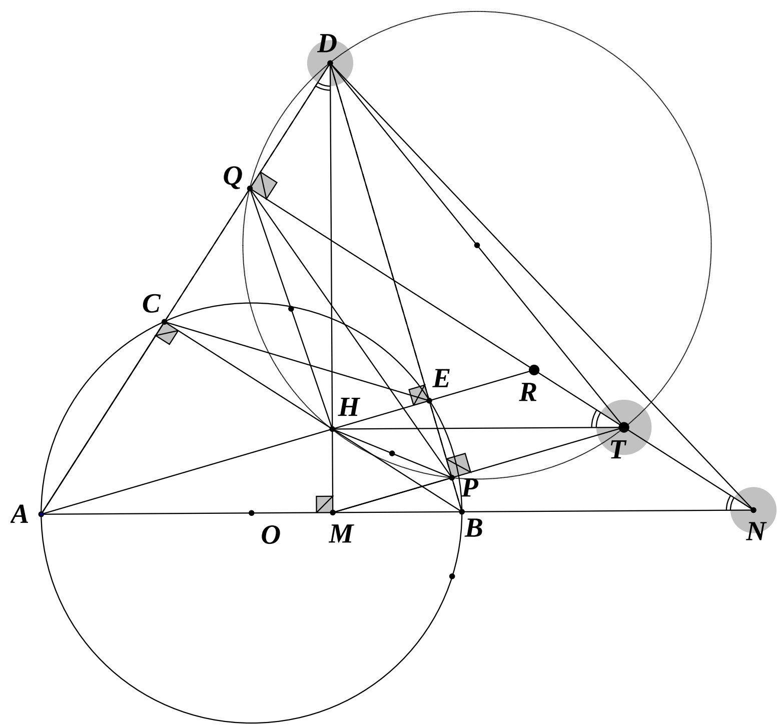
a) Chứng minh bốn điểm A,C,H,M cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MA.MB = MD.MH

c) Gọi E là giao điểm của đường thẳng BD với đường tròn (O) , (E khác B). Chứng minh rằng ba điểm A,H,E thẳng hàng.

d) Trên tia đối của tia BA lấy điểm N sao cho MN = AB. Gọi P và Q tương ứng là hình chiếu vuông góc của điểm M trên BD và N trên AD. Chứng minh bốn điểm D,Q,H,P cùng thuộc một đường tròn.

Giải:



a) Vì tứ giác ACHM có $\widehat{ACH}+\widehat{AMH}=180^\circ$ và 2 góc này ở vị trí đối diện nên tứ giác ACHM nội tiếp, suy ra 4 điểm A,C,H,M cùng thuộc một đường tròn.

b) Xét ΔAMD và ΔHMB có :

$\widehat{AMD}=\widehat{HMB}=90^\circ$.

$\widehat{ADM}=\widehat{MBH}$ (cùng phụ với $\widehat{CAM}$).

Nên $\Delta AMD \backsim \Delta HMB$ (gg)

Suy ra : $\frac{AM}{HM}=\frac{MD}{MB} \Rightarrow AM.MB=HM.MD$ (đpcm).

c) Vì E nằm trên (O) nên $\widehat{AEB}=90^\circ \Rightarrow$ AE ⊥ BD. (1)

Mặt khác vì H là giao của AM và BC là những đường cao của tam giác ADB. Suy ra H là trực tâm của tam giác ADB , nên AH cũng là đường cao của tam giác ADB $\Rightarrow$ AH ⊥ BD. (2)

Từ (1) và (2) suy ra A, H, E, thẳng hàng.

d) Gọi giao điểm của AE và NQ là R, giao điểm của MP và NQ là T như hình vẽ. Xét tứ giác DQPT có $\widehat{DQT}=\widehat{TPD}=90^\circ$, mà hai góc này cùng nhìn đoạn TD nên tứ giác DQPT nội tiếp. (1)

Trong ΔARN có MT // AR $\Rightarrow \frac{NT}{NR}=\frac{NM}{NA}$ và NR // BH $\Rightarrow \frac{AH}{AR}=\frac{AB}{AN}$ (Đl Thales).

Mà $\frac{AB}{AN}=\frac{NM}{NA}$ (vì AB = MN)

Suy ra $\frac{AH}{AR}=\frac{NT}{NR} \Rightarrow$ HT // AN (Hệ quả định lí Thales).

Suy ra $\widehat{HTQ}=\widehat{ANQ}$ (So le trong)

Mà $\widehat{ANQ}=\widehat{ADM}$ (cùng phụ với $\widehat{DQN}$)

Suy ra $\widehat{QDH}=\widehat{QTH}$.

Xét tứ giác DQHT có $\widehat{QDH}=\widehat{QTH}$ (cmt) mà hai góc này cùng nhìn QH nên suy ra tứ giác DQHT nội tiếp. (2)

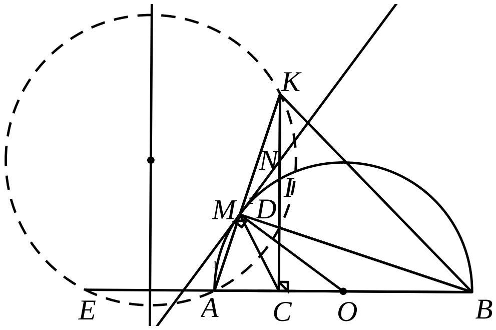
Từ (1) và (2) suy ra D,Q,H,P,T cùng nằm trên một đường tròn, hay 4 điểm D, Q, H, P cùng nằm trên một đường tròn. (đpcm)

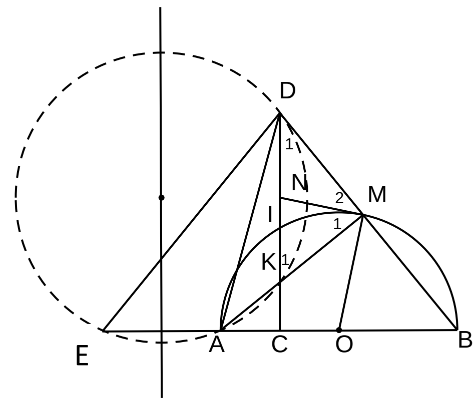
Bài 25. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính $AB.$ Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng $AO.$ Một đường thẳng (a) vuông góc với AB tại C và cắt nửa đường tròn (O) tại $I.$ Trên đoạn CI lấy điểm K bất kỳ (K không trùng với C và I). Tia AK cắt nửa đường trọn (O) tại $M,$ tia BM cắt đường thẳng (a) tại $D.$

a) Chứng minh rằng: Tứ giác $BCKM$ nội tiếp; tích $AK.AM$ không phụ thuộc vào vị trí điểm $K.$

b) Tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại M cắt đường thẳng (a) tại $N.$ Chứng minh $NK = ND.$

c) Chứng minh rằng khi K chuyển động trên đoạn thẳg CI thì tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAKD luôn nằm trên một đường thẳng cố định.





Lời giải:

a)

- $\widehat{AMB}=90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn). Hay $\widehat{KMB}=90^0$

$\widehat{KCB}=90^0$ (gt)

Do đó: $\widehat{KMB}+\widehat{KCB}=180^0$

Vậy tứ giác $CKMB$ nội tiếp đường tròn đường kính KO.

- $\Delta ACK \backsim \Delta AMB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AM}=\dfrac{AK}{AB}\Rightarrow AM.AK=AC.AB$ mà $AC.AB$ cố định nên $AM.AK$ không đổi.

b) Ta có $\widehat{M_1}=\widehat{B}(=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset\frown{AM})$; $\widehat{NKM}=\widehat{B}$ (Tứ giác $CKMB$ nội tiếp)

Suy ra $\widehat{M_1}=\widehat{NKM}$ $\Rightarrow \Delta NKM$ cân tại $N\Rightarrow NK=NM$

Ta có: $\widehat{M_1}+\widehat{M_2}=\widehat{K_1}+\widehat{D_1}=90^0$

Mà $\widehat{M_1}=\widehat{K_1}$ nên $\widehat{M_2}=\widehat{D_1}\Rightarrow NM=ND$.

Vậy $NK=ND$.

c) Gọi E là giao điểm của BA và đường tròn ngoại tiếp tam giác DKA.

Ta có $\widehat{N}=\widehat{B}(=\widehat{K_1})$ $\Rightarrow \Delta DBN$ cân, có DC là đường cao nên là đường trung tuyến

$\Rightarrow C$ là trung điểm của NB

$\Rightarrow N$ đối xứng B qua C

$\Rightarrow N$ cố định vì B, C cố định.

Tứ giác $DKAN$ nội tiếp $\Rightarrow$đường tròn ngoại tiếp tam giác AKD đi qua A và E. Mà A, E cố định nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKD di động trên đường trung trực của AE là đường cố định.

Cách 2.

Gọi E là điểm đối xứng của B qua C.

$\Rightarrow$ N cố định vì B, C cố định

ΔDNB cân $\Rightarrow \widehat{N}=\widehat{B}$

Ta có $\widehat{K_1}=\widehat{B}\Rightarrow \widehat{K_1}=\widehat{N}\Rightarrow$ Tứ giác $DKAN$ nội tiếp.

Suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKD luôn nằm trên đường trung trực của AE là đường thẳng cố định.

Bài 26. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB. Một điểm M cố định thuộc đoạn thẳng OB (M khác B và O). Đường thẳng d vuông góc với AB tại M cắt nửa đường tròn (O) tại N. Trên cung NB lấy điểm E bất kì (E khác B và N), tia BE cắt đường thẳng d tại C, đường thẳng AC cắt nửa đường tròn tại D. Gọi H là giao điểm của AE với đường thẳng d.

a) Chứng minh tứ giác BMHE nội tiếp.

b) Chứng minh ba điểm B, H, D thẳng hàng.

c) Tính giá trị của biểu thức $BN^2 + AD.AC$ theo R.

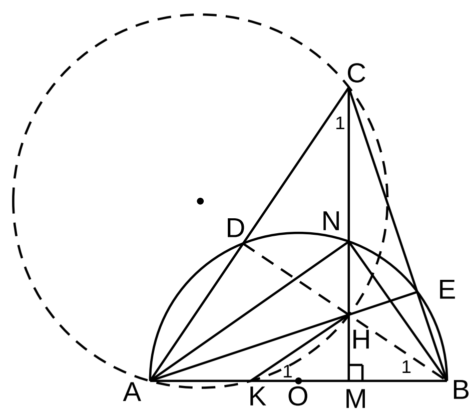
d) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC cắt AB tại K. Chứng minh rằng khi E di động trên cung NB thì độ dài đoạn thẳng BK không đổi.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

a) Ta có: $\widehat{BMH} = 90^0$ (gt) ; $\widehat{BEH} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{BMH} + \widehat{BAH} = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác BMHE nội tiếp đường tròn đường kính BH.



b) ΔCAB có hai đường cao CM và AE cắt nhau tại H.

$\Rightarrow$ H là trực tâm của ΔCAB

$\Rightarrow BH \perp AC$ (1)

Lại có $\widehat{ADB} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow BD \perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: B, H, D thẳng hàng.

c) ΔANB vuông tại N có NM là đường cao nên: $BN^2 = BM.AB$ (3)

$\Delta ADB \# \Delta AMC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AM} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AD.AC = AM.AB$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $BN^2 + AD.AC = BM.AB + AM.AB = AB.(BM + AM = AB^2 = 4R^2$

d) Tứ giác AKHC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{C_1}$

Mà $\widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ (cùng phụ $\widehat{CAB}$)

Do đó: $\widehat{K_1} = \widehat{B_1} \Rightarrow \Delta HKB$ cân tại H, có HM là đường cao đồng thời là đường trung trực.

$\Rightarrow$ K đối xứng với B qua M.

$\Rightarrow$ K cố định (vì B, M cố định)

$\Rightarrow$ BK không đổi.

Bài 27. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB cố định. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C sao cho AC = R. Kẻ đường thẳng d vuông góc với BC tại C. Gọi D là trung điểm của OA, qua D vẽ dây EF bất kì của đường tròn (O;R), (EF không là đường kính). Tia BE cắt d tại M và tia BF cắt d tại N.

a) Chứng minh tứ giác MCAE nội tiếp.

b) Chứng minh BE.BM = BF.BN.

c) Khi EF vuông góc với AB, tính đồ dài đoạn thẳng MN theo R.

d) Chứng minh rằng tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi dây cung EF thay đổi.

Hướng dẫn giải:

a) Ta có : $\widehat{AEB} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{AEM} = 90^0$ (kề bù)

Lại có: $\widehat{ACM} = 90^0$ (gt)

Do đó: $\widehat{AEM} + \widehat{ACM} = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác MCAE nội tiếp đường tròn đường kính MA.

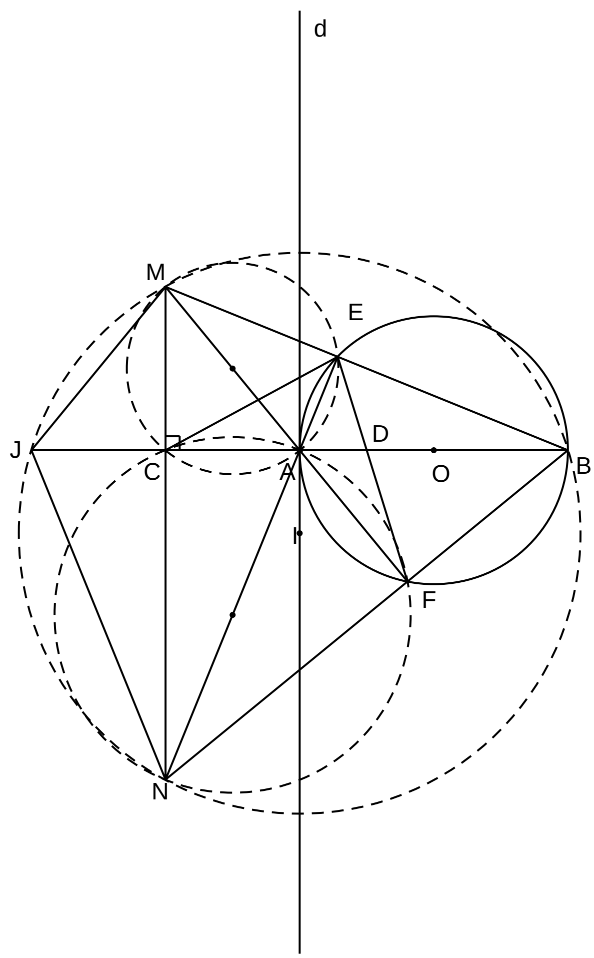
b) Ta có BE.BM = BA.BC (1)

(hai cát tuyến kẻ từ 1 điểm đến đường tròn)

Tứ giác CAFN nội tiếp đường tròn đường kính AN

$\Rightarrow$ BF.BN = BA.BC (2)

Từ (1) và (2) suy ra: BE.BM = BF.BN



c) $EF \perp AB \Rightarrow DE = DF$ và $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AF}$

Ta có: DA = DO; DE = DF; $OA \perp EF$ tại D.

$\Rightarrow$ Tứ giác OEAF là hình thoi.

$\Rightarrow \widehat{AOE} = 60^0 \Rightarrow \widehat{B_1} = 30^0 \Rightarrow \widehat{B_2} = 30^0$

Ta có: $MC = BC.\tan \widehat{B_1} = 3R.\tan 30^0 = R\sqrt{3}$

$NC = BC.\tan \widehat{B_2} = 3R.\tan 30^0 = R\sqrt{3}$

Do đó: MN = MC + CN = $2R\sqrt{3}$.

d) Gọi J là giao điểm của BC với đường tròn (I)

Ta có $MC.MN = ME.MB\ (= MA.MF) \Rightarrow \dfrac{MC}{MB} = \dfrac{ME}{MN}$

ΔMCE và ΔMBN, có: $\dfrac{MC}{MB} = \dfrac{ME}{MN}$; $\widehat{NMB}$: chung.

Do đó: $\Delta MCE \# \Delta MBN \Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{MNB}$

Lại có: $\widehat{J_1} = \widehat{MNB}$ (Tứ giác JMBN nội tiếp); $\widehat{A_1} = \widehat{MEC}$ (Tứ giác MCAE nội tiếp).

Do đó: $\widehat{J_1} = \widehat{A_1} \Rightarrow \Delta MJA$ cân tại M; có MC là đường cao đồng thời là đường trung trực.

$\Rightarrow$ J đối xứng với A qua C $\Rightarrow$ J cố định (vì A, C cố định)

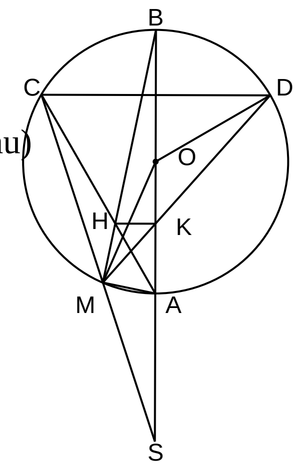
$\Rightarrow$ I nằm trên đường thẳng d cố định là đường trung trực của đoạn thẳng JB.

Vậy tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN luôn nằm trên một đường thẳng d cố định khi dây cung EF thay đổi.

Bài 28. Cho đường tròn (O; R), hai điểm C và D thuộc đường tròn , B là điểm chính giữa cung nhỏ CD. Kẻ đường kính BA. Trên tia đối của tia AB lấy điểm S. Nối SC cắt đường tròn (O) tại M; MD cắt AB tại K; MB cắt AC tại H. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{BMD} = \widehat{BAC}$. Từ đó suy ra tứ giác AMHK nội tiếp.

b) HK // CD c) OK.OS = R^2.



<u>Hướng dẫn giải:</u>

a) Ta có: $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{BAC}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Ta có $\widehat{BMD} = \widehat{BAC}$ hay $\widehat{HMK} = \widehat{HAK} \Rightarrow$ Tứ giác AMHK nội tiếp.

b) Tứ giác AMHK nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AKH} = 180^0 - \widehat{AMH} = 180^0 - 90^0 = 90^0$

$\Rightarrow$ HK $\perp$ AB. Mà AB $\perp$ CD. Do đó HK // CD.

c) ΔMOD cân tại O

$$\Rightarrow \widehat{OMK} = \frac{180^0 - \widehat{MOD}}{2} = 90^0 - \frac{\widehat{MOD}}{2} = 90^0 - \widehat{MCD}$$

Gọi J là giao điểm của CD và AB.

Ta có $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow OJ \perp CD$ tại J.

ΔSCJ vuông tại J $\Rightarrow \widehat{JSC} = 90^0 - \widehat{SCJ}$. Hay $\widehat{OSM} = 90^0 - \widehat{MCD}$

Do đó: $\widehat{OMK} = \widehat{OSM}$

Từ đó suy ra: $\Delta OMK \backsim \Delta OSM$ (g.g) $\Rightarrow OK.OS = OM^2 = R^2$.

Bài 29.

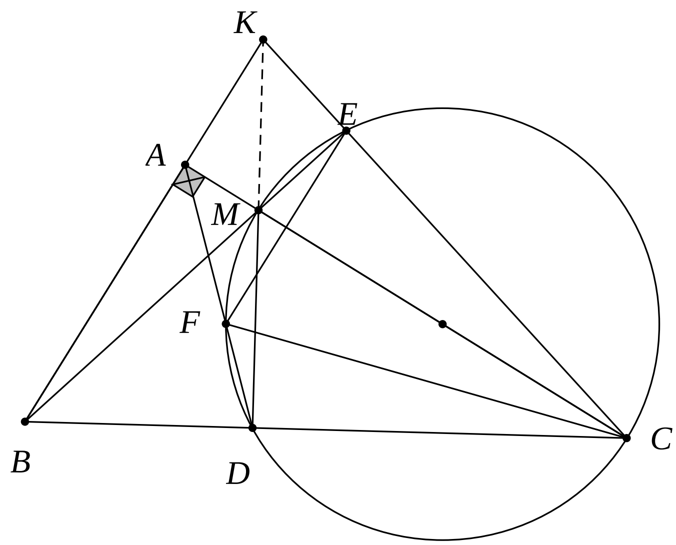
Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AC lấy điểm M, vẽ đường tròn đường kính MC cắt BC tại D. Các đường thẳng BM và AD lần lượt cắt đường tròn tại điểm thứ hai E và F. Chứng minh rằng:

a) $AB.MC = AC.MD$;

b) Tứ giác $ABDM$ và $AECB$ nội tiếp đường tròn

c) $AB//EF$;

d) Các đường thẳng AB, CE, MD đồng quy.



a)Chứng minh: $AB.MC = AC.MD$;

Xét đường tròn đường kính MC có $\widehat{MDC}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{MDC} = 90^0$;

Xét ΔABC và ΔDMC có $\begin{cases} \widehat{ABC} = \widehat{MDC} = 90^0 \\ \widehat{C} - chung \end{cases}$

Suy ra $\Delta ABC \# \Delta DMC$ (g.g)$\Rightarrow \dfrac{AB}{DM} = \dfrac{AC}{DC} \Rightarrow AB.DC = AC.DM$ (hai cạnh tương ứng tỉ lệ)

b) Tứ giác $ABDM$ và $AECB$ nội tiếp đường tròn

Xét tứ giác $ABDM$ có:

$\widehat{DAB} + \widehat{BDM} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Hai góc $\widehat{DAB}; \widehat{BDM}$ đối nhau

Nên tứ giác $ABDM$ nội tiếp đường tròn.

+ Ta có $\widehat{CEM} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính MC)

+ Xét tứ giác $AECB$ có

$\widehat{CEB} = \widehat{CAB} = 90^0$

Hai đỉnh A, E kề nhau

Nên tứ giác $AECB$ nội tiếp đường tròn

c)Chứng minh: $AB//EF$;

Theo câu b) Tứ giác $ABDM$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{ABM} = \widehat{ADM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset\frown{AM}$) (1)

+ Tứ giác $AECB$ nên nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset\frown{AE}$) (2)

Từ (1) (2) suy ra $\widehat{FDM} = \widehat{ECM}$

Mà $\widehat{FDM} = \widehat{FCM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{MD}$)

Nên $\widehat{FCM} = \widehat{ECM}$

Suy ra CM là phân giác của $\widehat{FCE}$ và CM là đường kính nên $CM \perp EF$

Lại có $AB \perp AC(gt)$

Suy ra $AB//EF$

d) Các đường thẳng AB, CE, MD đồng quy.

Gọi K là giao điểm của $AB; CE$

Xét ΔKBC có:

$CA \perp KB; BE \perp CK$

Nên CA, BE là đường cao của ΔKBC cắt nhau tại M

Do đó M là trực tâm của ΔKBC

Nên $KM \perp BC$

Lại có $MD \perp BC$ (cmt)

Suy ra ba điểm K, M, D thẳng hàng.

Hay các đường thẳng AB, CE, MD đồng quy tại K.

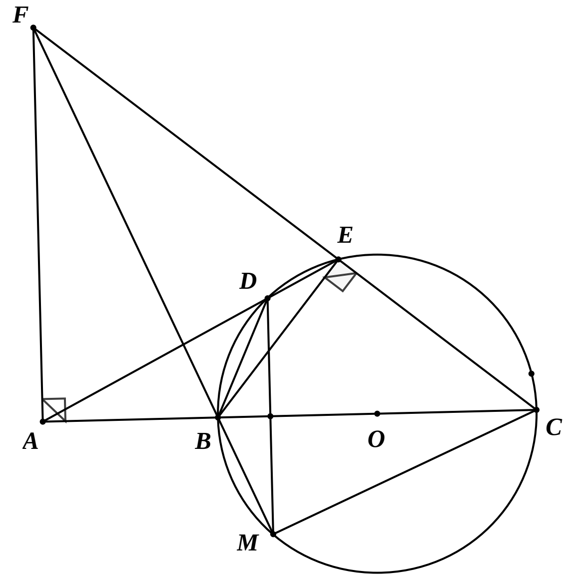
Bài 30

Cho (O). Lấy điểm A ở ngoài đường tròn (O), đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại hai điể m $B, C(AB < AC)$. Qua A vẽ đường thẳng không đi qua O và cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt $D, E(AD < AE)$. Đường thẳng vuông góc với AB tại A cắt đường thẳng CE tại F

a) Chứng minh rằng tứ giác $ABEF$ nội tiếp.

b) Gọi M là giao điểm thứ hai của đường thẳng FB với (O). Chứng minh MD vuông góc với AC

c) Chứng minh $CE.CF + AD.AE = AC^2$



a) Chứng minh rằng tứ giác $ABEF$ ***nội tiếp.***

$\widehat{BEC}=90^0 \Rightarrow \widehat{BEF}+\widehat{BAF}=180^0 \Rightarrow$ tứ giác $ABEF$ nội tiếp.

b) Gọi M ***là giao điểm thứ hai của đường thẳng*** FB ***với*** (O)***. Chứng minh*** MD ***vuông góc với*** AC

Tứ giác $DECM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADM}=\widehat{MCE}$

Tứ giác $BECM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FBE}=\widehat{MCE}$

Tứ giác $ABEF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FBE}=\widehat{FAE}$

Suy ra $\Rightarrow \widehat{FAE}=\widehat{ADM} \Rightarrow FA \| DM \Rightarrow DM \perp AE$

c) Chứng minh $CE.CF+AD.AE=AC^2$

$\Delta CEB \backsim \Delta CAF\,(g-g) \Rightarrow \dfrac{CE}{CA}=\dfrac{CB}{CF} \Rightarrow CE.CF=CB.CA$ (1)

Tứ giác $BDEC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADB}=\widehat{ACE} \Rightarrow \Delta ADB \backsim \Delta ACE\,(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AD.AE=AB.AC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CE.CF+AD.AE=AC.(AB+BC)=AC^2$

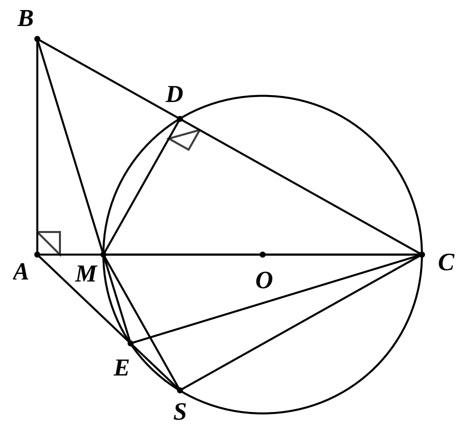
Bài 31

Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AC lấy một điểm M, vẽ đường tròn đường kính MC cắt BC tại D và cắt đường thẳng BM tại $E,(E$ khác $M)$. Đường thẳng AE cắt đường tròn tại S(S khác E). Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $ABDM$ nội tiếp.

b) $MA.MC=MB.ME$

c) $MD=MS$



a) Tứ giác $ABDM$ nội tiếp.

$\widehat{MDC}=90^\circ \Rightarrow \widehat{MDB}=90^\circ \Rightarrow \widehat{MDB}+\widehat{MAB}=180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $ABDM$ nội tiếp.

b) chứng minh: $MA.MC=MB.ME$

$\widehat{MEC}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \Delta MAB \backsim \Delta MEC\left(g-g\right) \Rightarrow \dfrac{MA}{ME}=\dfrac{MB}{MC} \Rightarrow MA.MC=ME.MB$

c) Chứng minh $MD=MS$

Có $MA.MC=ME.MB \Rightarrow \Delta MAE \backsim \Delta MBC\left(c-g-c\right) \Rightarrow \widehat{MEA}=\widehat{MCD}$

Tứ giác $MESC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MEA}=\widehat{MCS} \Rightarrow \widehat{MCS}=\widehat{MCD} \Rightarrow \overset{\frown}{MS}=\overset{\frown}{MD} \Rightarrow MD=MS$

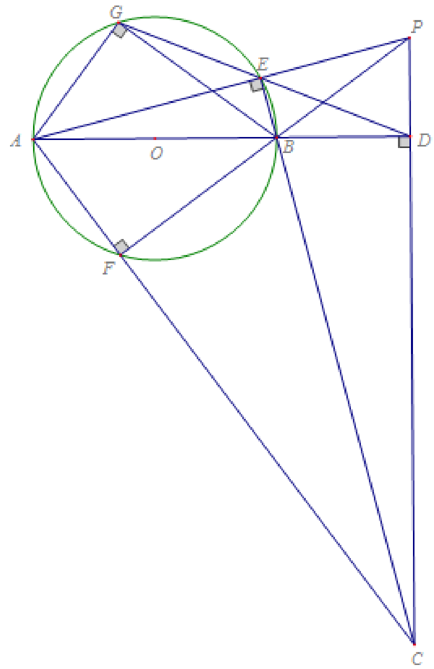
Bài 32: Cho đường tròn tâm O đường kính AB, trên cùng một nửa đường tròn $\left(O\right)$ lấy hai điểm G và E (theo thứ tự A,G,E,B) sao cho tia EG cắt tia BA tại D . Đường thẳng vuông góc với BD tại D cắt BE tại C, đường thẳng CA cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại điểm thứ hai là F .

a) Chứng minh tứ giác $DFBC$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $BF=BG$

c) Chứng minh: $\dfrac{DA}{BA}=\dfrac{DG.DE}{BE.BC}$

Giải



a) Vì $F \in (O)$ đường kính AB $\Rightarrow \widehat{AFB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BFC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BFC} = \widehat{BDC} = 90^0$

$\Rightarrow BDCF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi P là giao điểm của CD và BF.

Ta có A là trực tâm của ΔCPB $\Rightarrow PA \perp CB$

Mà $AE \perp CB$ (vì $\widehat{AEB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow P, A, E$ thẳng hàng

$\Rightarrow D, E$ cùng nhìn đoạn PB cố định dưới 1 góc 90^0

$\Rightarrow$ Tứ giác $PDEB$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{DEP} = \widehat{DBP} = \frac{1}{2} sd\,\overset\frown{PD}$

Mà $\widehat{DEP} = \widehat{GBA} = \frac{1}{2}\text{sd}\overset\frown{GA}$

$\Rightarrow \widehat{DBP} = \widehat{GBA}$

Lại có: $\widehat{AGB} = \widehat{AFB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

AB là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta AGB = \Delta AFB$ (ch - gn)

$\Rightarrow BG = BF$.

c) Ta có: $\widehat{ADC} = 90^0$ (GT)

$\widehat{CEA} = 90^0$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{ADC} + \widehat{CEA} = 180^0$

$\Rightarrow DAEC$ nội tiếp.

$\Rightarrow BE.BC = BA.BD$ (vì $\Delta BED \backsim \Delta BAC$)

$\Rightarrow DA.BE.BC = DA.BA.BD$

$\Rightarrow \dfrac{DA}{BA} = \dfrac{DA.DB}{BE.BC}$

Mà $DA.DB = DG.DE$ (vì $\Delta DGB \backsim \Delta DAE$)

$\Rightarrow \dfrac{DA}{BA} = \dfrac{DG.DE}{BE.BC}$.

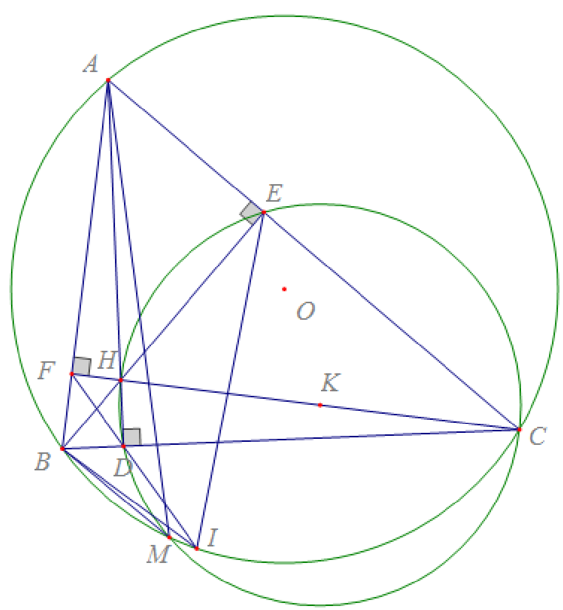
<u>Bài 33:</u> Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) ($AB < BC < AC$). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $BFHD, DHEC$ nội tiếp.

b) Tia FD cắt đường tròn (K) ngoại tiếp tứ giác $DHEC$ tại I. Chứng minh $IE \parallel AB$.

c) Đường tròn (K) cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M. Chứng minh $BF.BA = BI.BM$.

Giải



a) Ta có $\widehat{BFH} = \widehat{BDH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BFH} + \widehat{BDH} = 180^0$

$\Rightarrow BFHD$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $\widehat{HDC} = \widehat{HEC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HDC} + \widehat{HEC} = 180^0$

$\Rightarrow DHEC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{FIE} = \widehat{DCE}$ (cùng chắn $\overparen{DE}$)

Mặt khác $\widehat{AFC} = \widehat{ADC} = 90^0$

$\Rightarrow AFDC$ (2 góc bằng nhau cùng chắn 1 cung)

$\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{ACD}$ (góc ngoài tứ giác)

$\Rightarrow \widehat{FIE} = \widehat{ACD}$ mà 2 góc này ở vị trí so le trong.

$\Rightarrow IE \parallel AB$.

c) Ta có $\widehat{AFC} = \widehat{ADC} = 90^0 \Rightarrow AFDC$ là tứ giác nội tiếp (2 góc bằng nhau cùng chắn 1 cung)

$\Rightarrow \widehat{BFI} = \widehat{ACB}$

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{AMB}$ (góc nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{BFI} = \widehat{AMB}$

Tương tự $\widehat{BIF} = \widehat{BAM}$

$\Rightarrow \Delta BFI \backsim \Delta BMA$

$\Rightarrow \dfrac{BF}{BI} = \dfrac{BM}{BA}$

$\Rightarrow BF.BA = BM.BI$

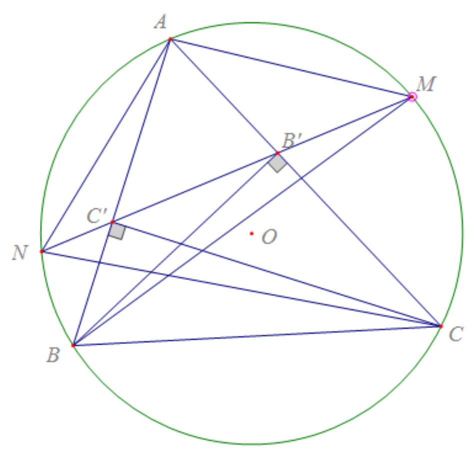
Bài 34: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Kẻ các đường cao BB' và CC' (B' thuộc cạnh AC, C' thuộc cạnh AB). Đường thẳng $B'C'$ cắt đường tròn (O) tại hai điểm M và N (theo thứ tự N, C', B', M).

a) Chứng minh tứ giác $BC'B'C$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AM = AN$.

c) Chứng minh $AM^2 = AC.AB$.

Giải



a) Ta có $\widehat{BC'C} = \widehat{BB'C} = 90^0$

$\Rightarrow BC'B'C$ nội tiếp (2 góc bằng nhau cùng chắn 1 cung).

b) Vì $BC'B'C$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AC'B'} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{NAC'} + \widehat{ANC'} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{NAB} + \widehat{ANM} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{NB} + \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AM} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \dfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AN} + \overset{\frown}{NB}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AM} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AN}$

$\Rightarrow AM = AN$

c) Xét $\Delta AMC'$ và ΔABM có:

$\widehat{A}$ chung

$\widehat{AMC'} = \widehat{ABM}\ \left(= \widehat{ANM}\right)$

$\Rightarrow \Delta AMC' \backsim \Delta ABM$ (g- g)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AC'} = \dfrac{AB}{AM}$

$\Rightarrow AM^2 = AC'.AB.$

Bài 35 Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

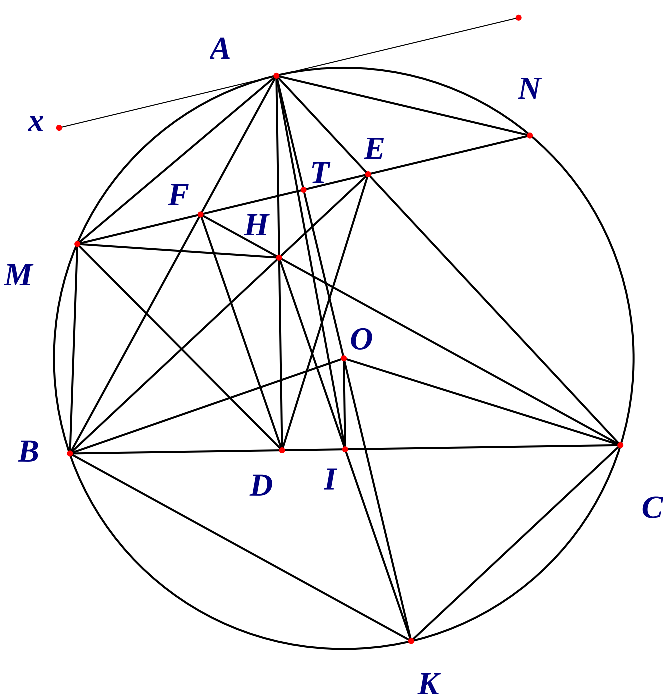
a).Chứng minh $EH.BD = ED.HF$

b).Chứng minh $OA \perp EF$.

c).Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại M và N (F nằm giữa E và M). Chứng minh AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MDH.

d).Giả sử $EF = R$. Tính số đo $\widehat{BAC}$.

Lời giải



a).Chứng minh $EH.BD = ED.HF$.

Có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ \Rightarrow BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC.

$\Rightarrow \widehat{EFH} = \widehat{EBD} = \dfrac{1}{2} sđ\,\widehat{EC}\ (1).$

Tương tự có $CDHF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HED}=\widehat{HCD}=\frac{1}{2}sđ\overset\frown{HD}$, mà $\widehat{FEB}=\widehat{HCD}=\frac{1}{2}sđ\overset\frown{EB}$.

Suy ra $\widehat{HED}=\widehat{FEB}\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta EHF \backsim \Delta EDB \Rightarrow \frac{EH}{ED}=\frac{HF}{DB} \Rightarrow EH.ED=HF.BD$.

Vậy $EH.ED=HF.BD$.

b).Chứng minh $OA\perp EF$.

Vẽ tiếp tuyến Ax tiếp xúc với đường tròn (O) tại A.

Có $\widehat{xAB}=\widehat{ACB}=\frac{1}{2}sđ\overset\frown{AB}$, $\widehat{ACB}=\widehat{AFE}$ (do $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC).

$\Rightarrow \widehat{xAB}=\widehat{AFE}$, chúng lại có vị trí so le.

$\Rightarrow Ax // EF$, mà $Ax\perp OA \Rightarrow EF\perp OA$.

Vậy $EF\perp OA$.

c).Đường thẳng EF ***cắt đường tròn*** (O) ***tại*** M ***và*** N ***(***F ***nằm giữa*** E ***và*** M***). Chứng minh*** AM ***là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác*** MDH.

Có $\widehat{MAF}=\widehat{BAM}$ (góc chung), $\widehat{AMF}=\widehat{ABM}$ (hai góc lần lượt chắn hai cung bằng nhau).

Suy ra $\Delta AMF \backsim \Delta ABM \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AF}{AM} \Rightarrow AM^2=AB.AF\ (3)$.

Ta còn có $\widehat{AFH}=\widehat{ADB}=90^\circ$, $\widehat{FAH}=\widehat{DAB}$ (góc chung) $\Rightarrow \Delta AFH \backsim \Delta ADB$.

$\Rightarrow \frac{AF}{AD}=\frac{AH}{AB} \Rightarrow AF.AB=AH.AD\ (4)$.

Từ (3) và (4) suy ra $AM^2=AH.AD \Rightarrow \frac{AM}{AH}=\frac{AD}{AM}$, có $\widehat{MAH}=\widehat{DAM} \Rightarrow \Delta AMH \backsim \Delta ADM$.

Suy ra $\widehat{AMH}=\widehat{HDM}=\frac{1}{2}sđ\overset\frown{MH}$.

Vậy AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MDH.

d).Giả sử $EF=R$***. Tính số đo*** $\widehat{BAC}$.

Vẽ đường kính AK của đường tròn (O), gọi I là trung điểm BC.

Có $CH // KB$ (do cùng vuông góc AB), $BH // KC$ (do cùng vuông góc AC).

Suy ra $BHCK$ là hình bình hành. Có I là trung điểm đường chéo BC, nên I là trung điểm HK.

Có O là trung điểm AK.

Suy ra OI là đường trung bình ΔAKH, nên $AH=2OI$

Có $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90° \Rightarrow AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH.

Hay ΔAEF nội tiếp đường tròn đường kính AH.

Có ΔABC nội tiếp đường tròn đường kính AK

Có $\Delta AEF \backsim \Delta ACB\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AH}{AK} \Rightarrow BC.AH = 2R^2$,

Mà $AH = 2OI$, $BC = 2\sqrt{OB^2 - OI^2} = 2\sqrt{R^2 - OI^2}$

Ta có phương trình: $2\sqrt{R^2 - OI^2}.2OI = 2R^2 \Rightarrow 4\left(R^2 - OI^2\right).OI^2 = R^4$

$\Rightarrow 4OI^4 - 4R^2.OI^2 + R^4 = 0 \Rightarrow \left(2OI^2 - R^2\right) = 0$

$\Rightarrow OI = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$, có $\cos\widehat{BOI} = \dfrac{OI}{OB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{BOI} = 45°$

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 90°$ (do OI là trung trực của BC)

Vậy $\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = 45°$

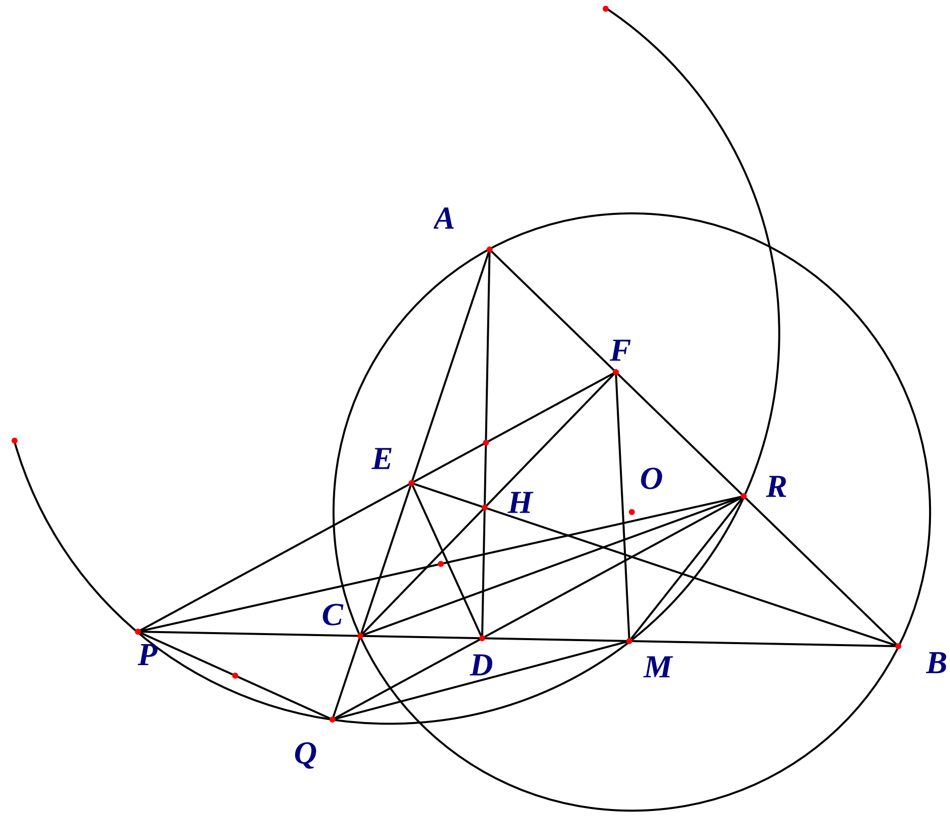
Bài 36 Cho tam giác ABC nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn $(O;R)$, kẻ hai đường cao AD, BE cắt nhau tại H.

a).Chứng minh $CE.CA = CD.CB$ và CH vuông góc AB tại F.

b).Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh tứ giác $EFMD$ nội tiếp.

c).Qua D vẽ đường thẳng song song với EF cắt AB tại R, cắt AC kéo dài tại Q. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR đi qua M.

d).Giả sử diện tích tam giác ABC bằng 1, $\widehat{BAC} = 30°$. Tính diện tích tứ giác $BCEF$.



Lời giải

a).Chứng minh $CE.CA = CD.CB$ ***và*** CH ***vuông góc*** AB ***tại*** F**.**

Có $\widehat{ECD} = \widehat{BCA}$ (góc chung), $\widehat{ADC} = \widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow \Delta ACD \backsim \Delta BCE$.

$\Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{CD}{CE} \Rightarrow CA.CE = CD.CB$

ΔABC có hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Suy ra H là trực tâm ΔABC.

Suy ra $CH \perp AB$ tại F.

b).Gọi M ***là trung điểm*** BC**.** ***Chứng minh tứ giác*** $EFMD$ ***nội tiếp.***

Có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ \Rightarrow BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC

$\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{FCB} = \dfrac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{EB}$.

Tương tự có $CDHE$ nội tiếp đường tròn đường kính $CH \Rightarrow \widehat{FCB} = \widehat{BED} = \dfrac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{HD}$.

Suy ra $\widehat{FEB} = \widehat{BED} = \dfrac{1}{2}\widehat{FED}$, mà $\widehat{FEB} = \dfrac{1}{2}\widehat{FMB} \Rightarrow \widehat{EFD} = \widehat{FMB}$.

Suy ra tứ giác $EFMD$ nội tiếp (do có góc trong bằng góc đối ngoài).

c).Qua D ***vẽ đường thẳng song song với*** EF ***cắt*** AB ***tại*** R**,** ***cắt*** AC ***kéo dài tại*** Q**.** ***Gọi*** P ***là giao điểm của hai đường thẳng*** EF ***và*** BC**.** ***Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác*** PQR ***đi qua*** M**.**

Có $\widehat{QRB}=\widehat{PFB}$ (đồng vị), $\widehat{AFE}=\widehat{ACB}$ (do tứ giác $BCEF$ nội tiếp)

Do đó $\widehat{QCB}=\widehat{QFB}=\widehat{QRB}$ (do lần lượt bù với hai góc bằng nhau).

Mà $\widehat{CDQ}=\widehat{RDB}$ (đối đỉnh)

Suy ra $\Delta CDQ \backsim \Delta RDB \Rightarrow \dfrac{CD}{RD}=\dfrac{DQ}{DB} \Rightarrow CD.DB=RD.DQ\ (1)$

Có EB là tia phân giác của $\widehat{FED}$, $EB\perp EC$, nên EC là tia phân giác của $\widehat{PED}$

$\Rightarrow \dfrac{CD}{CP}=\dfrac{BD}{BP}=\dfrac{ED}{EP}\Rightarrow DB.CP=CD.BP$

Có $\begin{cases} DB.CP=DB.(DP-CD)=DB.DP-DB.CD \\ CD.BP=CD.(DB+DP)=CD.DB+CD.DP \end{cases}$

$\Rightarrow DB.DP-DB.CD=CD.DB+CD.DP \Rightarrow 2DB.CD=DB.DP-CD.DP$

$\Rightarrow 2DB.CD=DP(DB-CD)$, có $DB=CM+DM$, $CD=CD-DM$

$\Rightarrow 2DB.CD=2.DP.DM \Rightarrow DB.CD=DP.DM\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $RD.DQ=DP.DM\Rightarrow \dfrac{RD}{PD}=\dfrac{MD}{QD}$, có $\widehat{RDB}=\widehat{PDQ}$ (đối đỉnh).

$\Rightarrow \Delta RDP \backsim \Delta MDQ \Rightarrow \widehat{QPD}=\widehat{MRD}$.

$\Rightarrow PQMR$ nội tiếp (do có hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh đối diện qua hai góc bằng nhau)

d).Giả sử diện tích tam giác ABC bằng 1, $\widehat{BAC}=30^\circ$. Tính diện tích tứ giác $BCEF$.

Có $\Delta AEF \backsim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\left(\dfrac{AE}{AB}\right)^2=\left(\cos\widehat{BAC}\right)^2=\dfrac{3}{4}$, $S_{ABC}=1$.

$\Rightarrow S_{AEF}=\dfrac{3}{4}$, có $S_{BCEF}=S_{ABC}-S_{AEF}=\dfrac{1}{4}$.

Vậy $S_{BCEF}=\dfrac{1}{4}$.

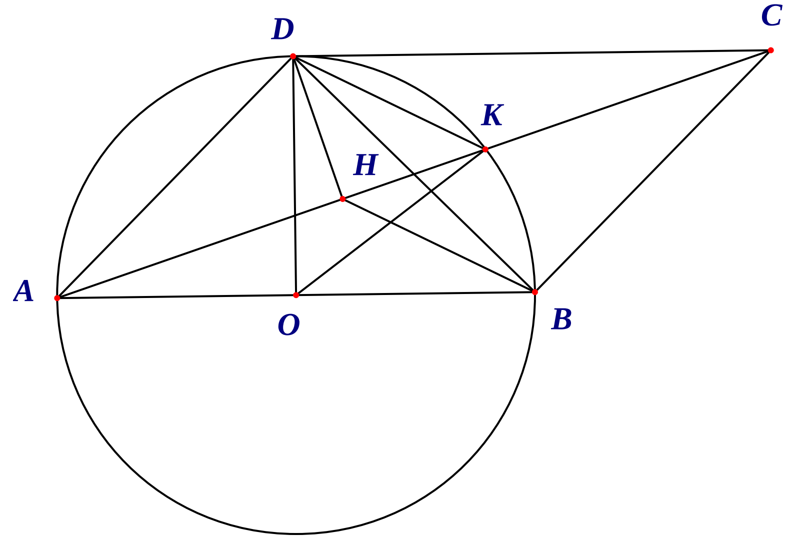
Bài 37 Cho tam giác vuông cân ABD ($DA=DB$) nội tiếp đường tròn (O). Dựng hình bình hành $ABCD$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AC, K là giao điểm của AC với đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a).Tứ giác $HBCD$ nội tiếp.

b). $\widehat{DOK}=2.\widehat{BDH}$.

c). $CK.CA=2.BD^2$.

Lời giải



a).Tứ giác $HBCD$ nội tiếp.

Có $\widehat{DBC}=\widehat{ADB}=90^\circ$ (cặp góc so le), $\widehat{DHC}=90^\circ$ $\Rightarrow HBCD$ nội tiếp đường tròn đường kính CD.

b). $\widehat{DOK}=2.\widehat{BDH}$.

$\widehat{BDH}=\widehat{BCH}=\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{BH}$ ($HBCD$ nội tiếp đường tròn đường kính CD).

Mà $\widehat{BCH}=\widehat{DAK}$ (so le) $\widehat{DAK}=\frac{1}{2}\widehat{DOK}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung).

$\Rightarrow \widehat{DOK}=2.\widehat{BDH}$

c). $CK.CA=2.BD^2$.

Có $CD\perp OD$, OD là bán kính của (O), nên CD tiếp xúc đường tròn (O) tại D.

Có ΔABD nên $CD=BD\sqrt{2}$.

Có $\widehat{CDK}=\widehat{DAK}=\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{DK}$, $\widehat{DCK}=\widehat{ACD}$ (góc chung) $\Rightarrow \Delta CDK \backsim \Delta CAD$.

$\Rightarrow \frac{CD}{CA}=\frac{CK}{CD}\Rightarrow CD^2=CA.CK$, mà $CD=BD\sqrt{2}\Rightarrow CA.CK=2BD^2$

Vậy $CA.CK=2BD^2$.

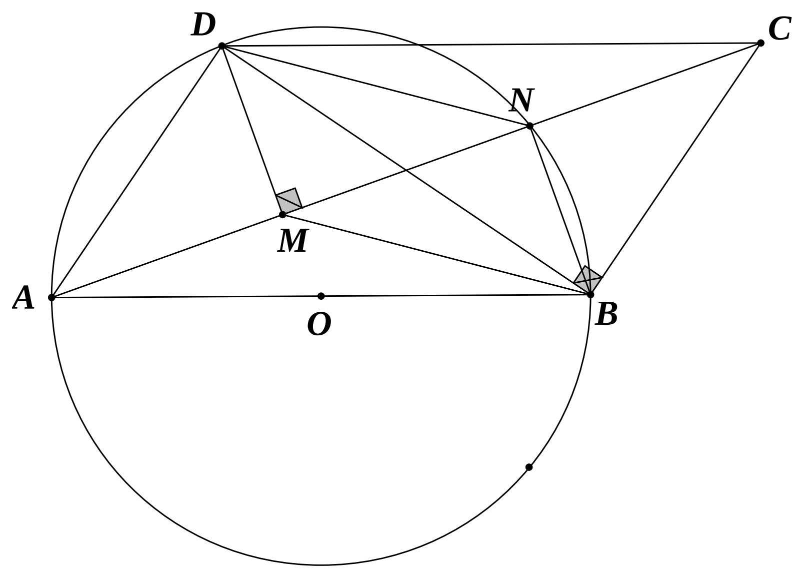
Bài 38: Cho hình bình hành ABCD có đỉnh D nằm trên đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Hạ BN và DM cùng vuông góc với đường chéo AC.

a) Chứng minh tứ giác CBMD nội tiếp.

b) Chứng minh rằng DB.DC = DN.AC

c) Xác định vị trí điểm D để hình bình hành ABCD có diện tích lớn nhất và tính diện tích hình bình hành trong trường hợp này.

Giải:



a) Ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên AD ⊥ DB, mà CB // AD (ABCD là hình bình hành) suy ra CB ⊥ DB nên $\widehat{DBC} = 90^\circ$.

Xét tứ giác DMBC có $\widehat{DMC} = \widehat{DBC} = 90^\circ$ mà hai góc này cùng nhìn cạnh CD nên suy ra BMBC là tứ giác nội tiếp.

b) Vì CD // AB nên $\widehat{DCA} = \widehat{CAB}$ (so le trong)

Ta lại có $\widehat{CAB} = \widehat{NAB} = \widehat{NDB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung NB)

Suy ra $\widehat{DCA} = \widehat{NDB}$.

Xét ΔDAC và ΔNBD có

$\widehat{DCA} = \widehat{NDB}$ (cmt)

$\widehat{DAC} = \widehat{NBD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung ND)

Suy ra $\Delta DAC \# \Delta NBD$ (gg)

Nên ta có $\frac{DB}{DN} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow DB.DC = DN.AC$ (đpcm).

c) Nhận thấy $S_{ABCD} = 2S_{ADB} = 2.\frac{1}{2}.AD.DB$

Theo bất đẳng thức AM – GM thì suy ra

$$AD.DB \le \frac{AD^2 + DB^2}{2} = \frac{AB^2}{2} = \frac{(2R)^2}{2} = 2R^2 .$$

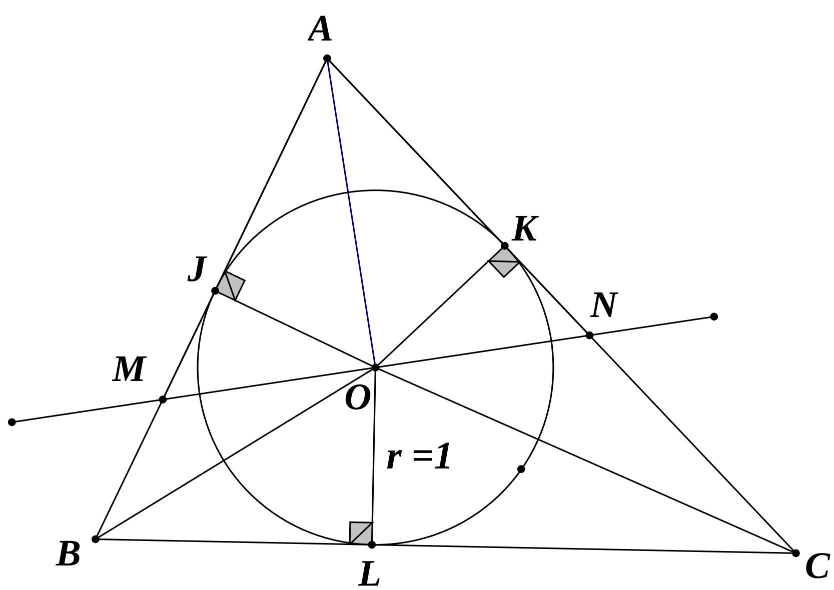
Đẳng thức xảy ra khi AD = DB hay D là điểm chính giữa cung AB.

Khi đó $S_{ABCD}=2S_{ADB}=2.\frac{1}{2}.AD.DB=2R^2$.

Vậy để hình bình hành ABCD có diện tích lớn nhất thì D phải là điểm chính giữa cung AB và khi đó $S_{ABCD}=2R^2$.

Bài 39: Cho đường tròn cố định tâm O, bán kính bằng 1. Tam giác ABC thay đổi và luôn ngoại tiếp đường tròn (O) . Một đường thẳng đi qua tâm O cắt các đoạn AB,AC lần lượt tại M và N . Xác định giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN.

Giải:



Gọi J,K,L lần lượt là các tiếp điểm của (O) với các cạnh AB,AC,BC của tam giác ABC như hình vẽ. Ta có: $S_{AMN}=S_{AMO}+S_{ANO}=\frac{1}{2}AM.OJ+\frac{1}{2}AN.OK=\frac{1}{2}(AM+AN)$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM suy ra :

$S_{AMN}=\frac{1}{2}(AM+AN)\geq\sqrt{AM.AN}$. (1)

Mặt khác ta có : $S_{AMN}=\frac{1}{2}AM.AN.\sin\widehat{MAN}$

$\Rightarrow\ AM.AN=\frac{2S_{AMN}}{\sin\widehat{MAN}}\geq 2S_{AMN}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\ S_{AMN}\geq\sqrt{2S_{AMN}}\ \Leftrightarrow\ S_{AMN}\geq 2$.(dvdt)

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} AM = AN \\ \sin\widehat{MAN} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AM = AN \\ \widehat{MAN} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta AMN$ vuông cân tại A.

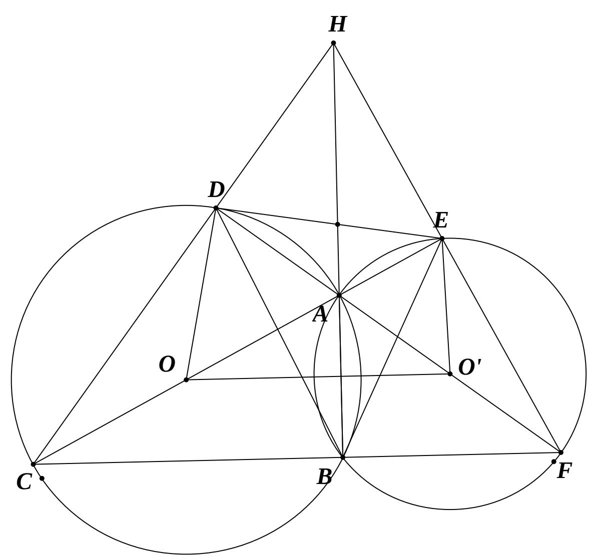
Bài 40: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại A và B (tâm của đường tròn này nằm ngoài đường tròn kia). Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại C và cắt (O') tại E. Đường thẳng AO' cắt (O') tại F và cắt (O) tại D.

a) Chứng minh các tứ giác CDEF, ODEO' nội tiếp.

b) Chứng minh A là tâm đường tròn nội tiếp của ΔBDE .

c) Chứng minh các đường thẳng CD, EF, AB đồng quy.

Giải:



a) *) **Chứng minh CDEF nội tiếp:**

Nhận thấy ΔDOA cân tại O nên $\widehat{ODA} = \widehat{OAD}$

$\Delta AO'E$ cân tại O' nên $\widehat{O'AE} = \widehat{AEO'}$.

Mà $\widehat{DAO} = \widehat{EAO'}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{ODA} = \widehat{AEO'}$.

Từ đó theo tính chất tổng ba góc trong một tam giác ta suy ra $\widehat{DOA} = \widehat{AO'E}$. (1)

Mặt khác $\widehat{DBA} = \frac{1}{2}\widehat{DOA}$ (góc nội tiếp bằng $\frac{1}{2}$ số đo góc ở tâm) (2)

và $\widehat{ABE} = \frac{1}{2}\widehat{AO'E}$ (góc nội tiếp bằng $\frac{1}{2}$ số đo góc ở tâm) (3).

Từ (1),(2) và (3) suy ra $\widehat{DBA} = \widehat{EBA}$. (4)

Lại có tứ giác ADCB nội tiếp (O) nên $\widehat{DBA} = \widehat{DCA}$ (cùng chắn cung DA) (5)

Tứ giác EABF nội tiếp (O') nên $\widehat{ABE} = \widehat{AFE}$ (6)

Từ (4), (5) và (6) suy ra $\widehat{DCE} = \widehat{EFD}$.

Xét tứ giác CDEF có $\widehat{DCE} = \widehat{EFD}$ (cmt) mà hai góc này cùng nhìn đoan DE dưới một cung. Suy ra tứ giác CDEF nội tiếp.

***) Chứng minh ODEO' nội tiếp:**

Nhận thấy OO' là đường trung bình của tam giác ACF, suy ra OO' // CF nên

$\widehat{AOO'} = \widehat{ACF}$ (đồng vị). Mà $\widehat{FCA} = \widehat{FCE} = \widehat{FDE}$ (CDEF nội tiếp) suy ra

$\widehat{EOO'} = \widehat{O'DE}$, mà hai góc này cùng nhìn đoạn EO' nên suy ra tứ giác ODEO' nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (cùng nhìn cung AB)

mà $\widehat{EDA} = \widehat{ECB}$ (cmt)

nên $\widehat{EDA} = \widehat{BDA}$ suy ra DA là tia phân giác của tam giác EDB tại đỉnh D. Lại có BA là tia phân giác của tam giác EDB tại đỉnh B. Nên A là giao điểm của 3 đường phân giác của tam giác EDB. Từ đó suy ra A là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EDB. (đpcm)

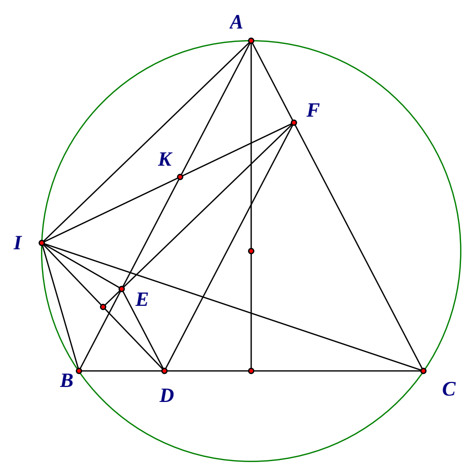
c) Gọi H là giao điểm của CD và EF như hình vẽ. Dễ dàng chứng minh được A là trực tâm của tam giác HCF, suy ra HA ⊥ CF. Lại có AB ⊥ CF ($\widehat{ABC} = 90^\circ$). Suy ra H, A, B thẳng hàng. Từ đó suy ra CD, EF, AB đồng quy.(đpcm)

Bài 41. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D nằm giữa B và C. Qua D lần lượt vẽ các đường thẳng song song với AC cắt AB tại E, song song với AB cắt AC tại F.

a).Chứng minh $DE + DF = AB$.

b).Gọi I là điểm đối xứng của D qua EF. Chứng minh tứ giác $AFEI$ là hình thang cân.

c).Chứng minh I thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Lời giải

a).Chứng minh $DE + DF = AB$**.**

Có $AE // DF$, $DE // AF \Rightarrow AEDF$ là hình bình hành $\Rightarrow AE = DF$.

Có $\widehat{BDE} = \widehat{BCA}$ (đồng vị), $\widehat{BCA} = \widehat{EBD}$ (do ΔABC cân tại A).

$\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{EBD} \Rightarrow \Delta EBD$ cân tại $E \Rightarrow EB = ED$.

Nên $AB = AE + EB = DF + DE$.

Vậy $DE + DF = AB$.

b).Gọi I là điểm đối xứng của D qua EF . Chứng minh tứ giác $AEFI$ là hình thang cân.

Gọi K là giao điểm của AE và IF .

Có FE là trung trực của $ID \Rightarrow FD = FI = AE$, $EI = ED = AE$.

ΔAEI , ΔIFA có AI chung $AE = IF$, $IE = AF$

$\Rightarrow \Delta AEI = \Delta IFA \Rightarrow \widehat{IAE} = \widehat{AIF} \Rightarrow \Delta KAI$ cân tại K

$\Rightarrow KA = KI$, mà $AE = IF \Rightarrow KF = KE \Rightarrow \widehat{KFE} = \widehat{KEF}$

$\Rightarrow \widehat{AIK} = \widehat{EFK} = \dfrac{180° - \widehat{AKI}}{2}$, chúng lại có vị trí so le.

$\Rightarrow AI // FE$, mà $AE = IF \Rightarrow AIEF$ là hình thang cân.

c).Chứng minh I thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

+Chứng minh tứ giác $ACBI$ nội tiếp $\xrightarrow{CM} \widehat{IAC} = \widehat{IBC}$

Có $BE = ED = EI = AF \Rightarrow \Delta IEB$ cân tại E .

Có $FI = FD = FC \Rightarrow \Delta IFC$ cân tại F .

Có $AFEI$ là hình thang cân, nên $\widehat{IEA} = \widehat{IFA}$

$\Rightarrow \widehat{IEB} = \widehat{IFC}$ (hai góc lần lượt bù với hai góc bằng nhau), mà ΔIFC cân tại F , ΔIEB cân tại E .

$\Rightarrow \widehat{IBE} = \widehat{ICE}$ (hai tam giác cân có góc ở đỉnh bằng nhau thì các góc đáy bằng nhau)

$\Rightarrow ACBI$ nội tiếp (do có hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh đối diện qua hai góc bằng nhau).

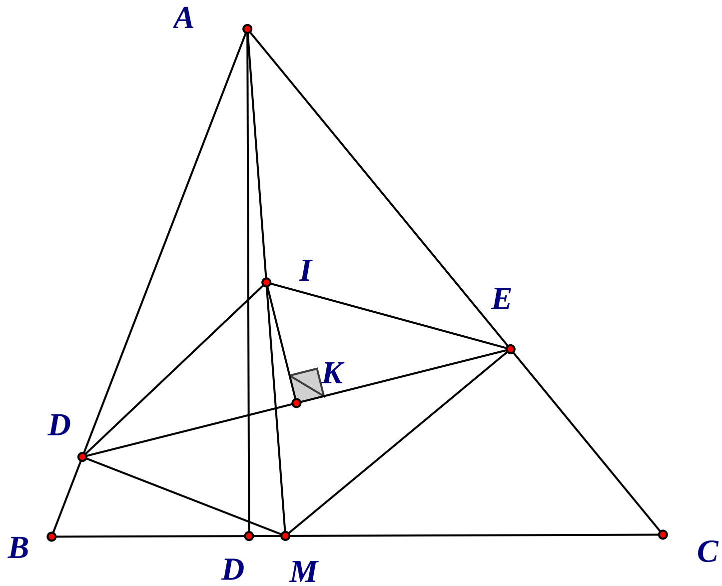
Vậy I thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 42. Cho tam giác ABC có góc A nhọn, M là điểm di động trên BC . Gọi D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB và AC .

a).Chứng minh tứ giác $ADME$ nội tiếp. Xác định tâm I của đường tròn.

b).Kẻ IK vuông góc với DE tại K . Chứng minh $\widehat{DAE} = \widehat{DIK}$.

c).Xác định vị trí điểm M trên BC để độ dài DE ngắn nhất.



Lời giải

a).Chứng minh tứ giác $ADME$ nội tiếp. Xác định tâm I của đường tròn.

Có $\widehat{ADM} = \widehat{AEM} = 90^\circ \Rightarrow ADME$ nội tiếp đường tròn đường kính AM, tâm I là trung điểm AM.

b).Kẻ IK vuông góc với DE tại K. Chứng minh $\widehat{DAE} = \widehat{DIK}$.

Có ΔIDE cân tại I, $IK \perp DE$, nên IK là trung trực của DE.

Có $\widehat{DAE} = \frac{1}{2}\widehat{DIE} = \widehat{DIK}$ (góc nội tiếp bằng $\frac{1}{2}$ góc ở tâm cùng chắn một cung)

Vậy $\widehat{DAE} = \widehat{DIK}$.

c).Xác định vị trí điểm M trên BC để độ dài DE ngắn nhất.

Vẽ $AD \perp BC$ tại D, có AD không đổi và $AM \geq AD$ (đoạn vuông góc là đoạn xiên ngắn nhất)

Có tứ giác $ADME$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AM, có $\widehat{DAE}$ không đổi,

Suy ra $sđ\overset{\frown}{DE}$ không đổi. Do đó dây DE ngắn nhất khi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ADME$ có đường kính nhỏ nhất

$\Leftrightarrow AM = AD \Leftrightarrow M \equiv D$.

Vậy khi M là điểm chiếu vuông góc của A lên BC thì dây DE ngắn nhất.

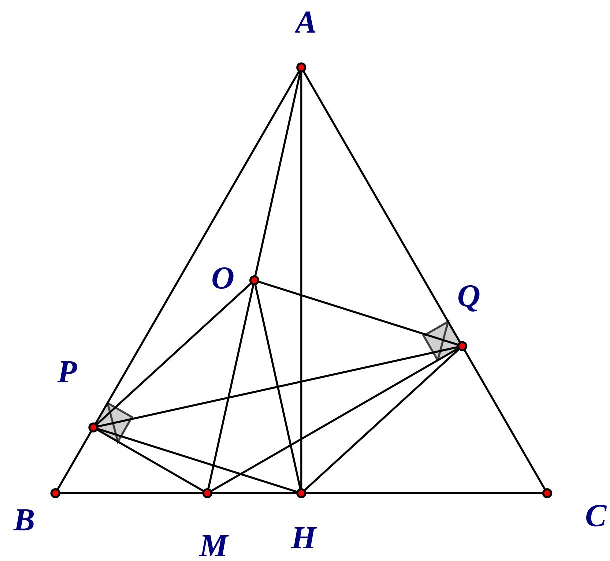
Bài 43. Cho tam giác đều ABC có đường cao AH, M là điểm bất kỳ trên cạnh BC (M không trùng với B và C). Gọi P, Q theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC, O là trung điểm của AM. Chứng minh rằng:

a).Các điểm A, P, M, H, Q cùng nằm trên một đường tròn.

b).Tứ giác $OPHQ$ là hình gì?

c).Xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC để đoạn thẳng PQ có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải



a).Các điểm A, P, M, H, Q ***cùng nằm trên một đường tròn.***

Có $\widehat{APM} = \widehat{AQM} = \widehat{AHM} = 90°$ $\Rightarrow A,P,M,H,Q$ cùng thuộc đường tròn đường kính AM.

b).Tứ giác $OPHQ$ ***là hình gì?***

Có $OP = OH$, $\widehat{POH} = 2.\widehat{BAH} = 60°$ $\Rightarrow \Delta POH$ đều.

Tương tự ΔQOH đều.

$\Rightarrow OP = PH = HQ = QO$ $\Rightarrow OPHQ$ là hình thoi.

c).Xác định vị trí của điểm M ***trên cạnh*** BC ***để đoạn thẳng*** PQ ***có độ dài nhỏ nhất.***

Có $AM \geq AH$ (đoạn vuông góc là đoạn xiên ngắn nhất), AH không đổi.

Có $\widehat{PAQ} = 60°$ $\Rightarrow sđ\,\overset{\frown}{PHQ} = 120°$, ΔAPQ nội tiếp trong đường tròn đường kính AM.

Do đó dây PQ ngắn nhất khi đường tròn ngoại tiếp ΔAPQ có đường kính ngắn nhất.

$\Leftrightarrow AM = AH \Leftrightarrow M \equiv H$.

Vậy PQ ngắn nhất khi M là trung điểm BC.

Bài 44. Cho tam giác đều ABC có đường cao AH. Trên cạnh BC lấy điểm M tùy ý (M không trùng với B, C, H). Gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của M lên AB, AC.

a) Chứng minh tứ giác APMQ nội tiếp được trong đường tròn và xác định tâm O của đường tròn này.
b) Chứng minh $OH \perp PQ$.
c) Chứng minh MP + MQ = AH

Lời giải:

a) Ta có $MQ \perp AC; MP \perp AB \Rightarrow \widehat{MPA} = \widehat{MQA} = 90^0$

Xét tứ giác APMQ có: $\widehat{MPA} + \widehat{MQA} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

suy ra tứ giác APMQ nội tiếp đường tròn

Gọi O là trung điểm AM$\Rightarrow OM = OA = \dfrac{AM}{2}$ (định lý) (1)

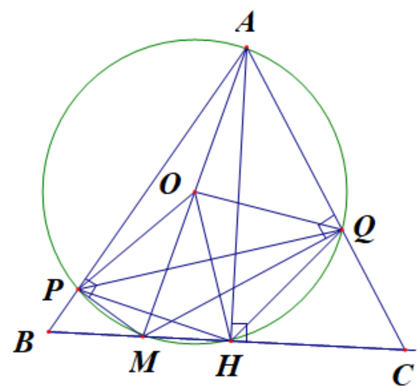
Xét ΔAPM vuông tại P, có PO là đường trung tuyến.

$\Rightarrow PO = \dfrac{AM}{2}$ (2)

Xét ΔAQM vuông tại Q, có QO là đường trung tuyến.

$\Rightarrow QO = \dfrac{AM}{2}$ (3)

Từ (1);(2) và (3) $\Rightarrow QO = PO = OA = OM$



suy ra tứ giác APMQ nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AM.

b) Xét tam giác ABC cân tại A

đường cao AH cũng là đường phân giác

$\widehat{BAH} = \widehat{CAH} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2} = 30^0$

Xét (O) đường tròn ngoại tiếp APMQ có:

$\widehat{HOQ} = 2\widehat{HAQ}$ (góc có đỉnh ở tâm = 2 lần góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{HQ}$)

$\Rightarrow \widehat{HOQ} = 2\widehat{HAC} = 60^0$

Mà OH = OQ (cmt) $\Rightarrow \Delta OHQ$ đều $\Rightarrow OH = OQ = HQ$ (4)

CM tương tự: $\Rightarrow \Delta OHP$ đều $\Rightarrow OH = OP = HP$ (5)

từ (4) và (5) $\Rightarrow OP = PH = OQ = HQ$

suy ra tứ giác OPHQ là hình thoi $\Rightarrow OH \perp PQ$

c) Xét ΔMQC vuông tại Q.

Có $\sin\widehat{QCM} = \dfrac{QM}{CM} \Rightarrow QM = CM.\sin 60^0$ (6)

Xét ΔBPM vuông tại P.

Có $\sin\widehat{BPM} = \dfrac{PM}{BM} \Rightarrow PM = BM.\sin 60^0$ (7)

từ (6) và (7): $\Rightarrow QM + PM = CM.\sin 60^0 + BM.\sin 60^0 = (CM + BM).\sin 60^0$

$\Rightarrow QM + PM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BC$ (8)

Xét ΔAHB vuông tại H.

Có $\sin\widehat{ABH}=\dfrac{AH}{AB}\Rightarrow AH=AB.\sin 60^0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$ (9)

vì ΔABC đều $\Rightarrow BC=AC=AB$ (10)

Từ (8);(9) và (10) $\Rightarrow QM+PM=AH$ (đpcm).

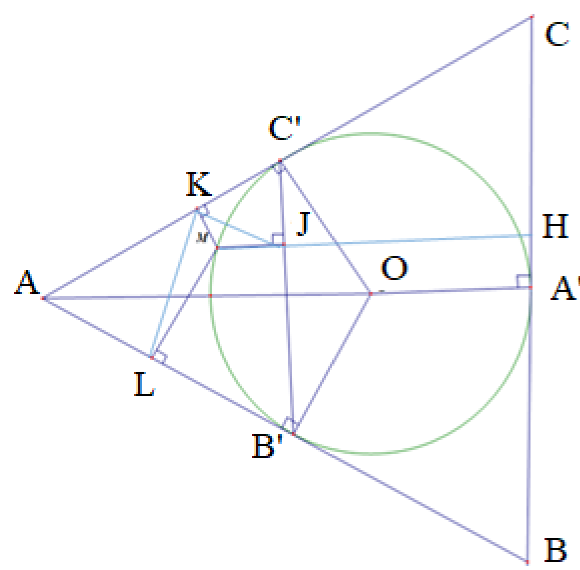
Bài 45. Cho đường tròn (0;R) và điểm A nằm ngoài đường tròn với OA = 2R. Từ A dựng hai tiếp tuyến AB', AC' với đường tròn (0) (B', C' là hai tiếp điểm). Dựng tia đối của tia OA cắt đường tròn (0) tại A'. Tia tiếp tuyến tại A' lần lượt cắ tia AC', AB'tại B và C.

a) Chứng minh tam giác ABC đều và tính $S_{\Delta ABC}$ theo R.

b) Gọi M là điểm bất khì trên cung nhỏ B'C' và H, K, L lần lượt là hình chiếu của M trên cạnh BC, AC, AB. gọi J là giao điểm của MH và B'C'. Chứng minh các thứ giác JMKC', LMJB' nội tiếp đường tròn.

c) Chứng minh $MJ^2=MK.ML$

d) Chứng minh $\sqrt{MH}=\sqrt{MK}+\sqrt{ML}$



Lời giải:

Từ A dựng hai tiếp tuyến AB', AC' (gt)

AO là tia phân giác của $\widehat{C'AB'}$

$\widehat{C'AO}=\widehat{B'AO}=\dfrac{\widehat{C'AB'}}{2}$

Xét ΔABC

có OA là tia phân giác đồng thời là đường cao

suy ra ΔABC là tam giác cân. (1)

Xét $\Delta AOC'$ vuông tai C.

gọi T là trung điểm của AO

$\Rightarrow C'T$ là đường trung tuyến $\Delta AOC'$

$\Rightarrow C'T=TA=TO$

mà $C'O=TO$ (cùng là bán kính)

$\Rightarrow C'T=OC'=TO$

$\Rightarrow \Delta TC'O$ đều

$\Rightarrow \widehat{C'OA}=60^0$

Ta có $\Rightarrow \widehat{C'OA}+\widehat{C'OA'}=180^0$ (hai góc kề bù) thay $\Rightarrow 60^0 + \widehat{C'OA'} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{C'OA'} = 180^0 - 60^0$

$\Rightarrow \widehat{C'OA'} = 120^0$

Xét tứ giác $C'OA'C$ có:

$\widehat{CC'O} + \widehat{CA'O} + \widehat{C'OA'} + \widehat{C'CA'} = 360^0$ (định lý)

thay số: $90^0 + 90^0 + 120^0 + \widehat{C'CA'} = 360^0$

$\Rightarrow \widehat{C'CA'} = 360^0 - 90^0 - 90^0 - 120^0 = 60^0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta ABC$ đều

Ta có $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AA'.BC$

mà $AA' = AO + OA' = 2R + R = 3R$

Xét $\Delta ACA'$ vuông tại A':

$\Rightarrow \tan\widehat{C} = \dfrac{AA'}{CA'} \Rightarrow CA' = \dfrac{AA'}{\tan 60^0} = \dfrac{3R}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}R$

mà $BC = 2CA' = 2.\sqrt{3}R$

vậy $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AA'.BC = 3R.2\sqrt{3}R = 6\sqrt{3}R^2$

b) Xét tứ giác $JMKC'$ có: $\widehat{C'EM} + \widehat{C'JM} = 180^0$ (2 góc đối nhau trong tứ giác)

Do đó tứ giác $JMKC'$ nội tiếp đường tròn.

Xét tứ giác $LMJB'$ có: $\widehat{MHB'} + \widehat{MNB'} = 180^0$ (2 góc đối nhau trong tứ giác)

Do đó tứ giác $LMJB'$ nội tiếp đường tròn.

c) Từ A dựng hai tiếp tuyến AB’, AC’ (gt)

$\Rightarrow AB' = AC'$ (tính chất)

suy ra $\Delta AB'C'$ là tam giác cân, có $\widehat{B'AC'} = 60^0$

suy ra $\Delta AB'C'$ là tam giác đều.

$\Rightarrow AB' = AC' = B'C' = \sqrt{3}R$

Có $MJ.B'C' + ML.AB' + MK.AC' = 2S_{AB'C'} = 2.\dfrac{(R\sqrt{3})^2.\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{2}$

$\Rightarrow MJ + MK + ML = \dfrac{3R}{2}$

mà $JH = AT$ (với T là giao điểm của OA và $B'C'$) do IHA’T là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow AT = OA' + OT = R + \frac{OB'^2}{OA} = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2} \Rightarrow MJ + MK + ML = A'T = JH$$

$$\Rightarrow 2MJ + MK + ML = MJ + JH = MH$$

$$\Rightarrow MK + ML + 2\sqrt{MK.ML} = MH \Rightarrow \sqrt{MH} = \sqrt{MK} + \sqrt{ML}$$

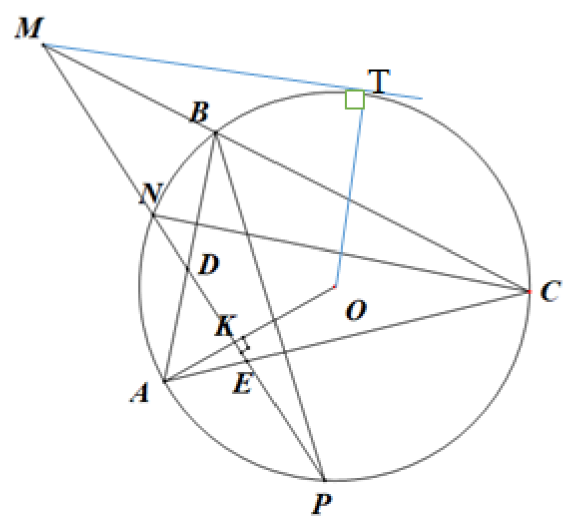
Bài 46. Cho đường tròn tâm (O), vẽ cung BC không đi qua tâm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm M bất kì. Đường thẳng đi qua M cắt đường tròn (O) lần lượt tại hai điểm N và P (N nằm giữa M và P) sao cho O nằm bên trong góc PMC .trên cung nhỏ NP lấy điểm A sao cho cung AN bằng cung AP) hai dây cung AB, AC cắt NP lần lượt tại D và E.

a) Chứng minh tứ giác BDEC nội tiếp.

b) Chứng minh :MB.MC=MN.MP.

c) Bán kính OA cắt NP tại K. Chứng minh $MK^2 > MB.MC$

Lời giải:



a) Vì $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{BA}$

$$\Rightarrow \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{BA} = \frac{1}{2}(\text{sđ } \overset{\frown}{BN} + \text{sđ } \overset{\frown}{NA}) \quad (1)$$

Vì $\widehat{BDN}$ là góc nằm trong đường tròn

$$\Rightarrow \widehat{BDN} = \frac{1}{2}(\text{sđ } \overset{\frown}{BN} + \text{sđ } \overset{\frown}{PA}) \quad (2)$$

Vì sđ $\overset{\frown}{AN}$ = sđ $\overset{\frown}{PA}$ (gt) (3)

Từ (1);(2) và (3) $\Rightarrow \widehat{BDN} = \widehat{ACB}$

vì $\widehat{BDN}, \widehat{BDE}$ là hai góc kề bù.

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \widehat{BDN} + \widehat{BDE} = 180^o \\ \widehat{BDN} = \widehat{ACB}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{BDE} = 180^o$$

$\Rightarrow \widehat{BCE} + \widehat{BDE} = 180^o$ (tổng 2 góc đối nhau trong tứ giác)

Do đó tứ giác BCED nội tiếp đường tròn.

b) Xét ΔMBP và ΔMNC

có: $\widehat{M}$ chung

$\widehat{BPN} = \widehat{NCB}$ (2 góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{BN}$)

Do đó $\Delta MBP \sim \Delta MNC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MB}{MN} = \frac{MP}{MC} \Rightarrow MB.MC = MN.MP \text{ (đpcm)}$$

c) Kẻ MT là tiếp tuyến với đường tròn (O) trong đó là tiếp điểm)

Xét tam giác MKO vuông tại K (Áp dụng định lý Pi-ta-go)

$MK^2 + OK^2 = MO^2$

$\Rightarrow MK^2 = MO^2 - OK^2 > MO^2 - R^2 (do OK < R)$

$MC.MB = MT^2 = MO^2 - R^2$ (vì Mt là tiếp tuyến của đường tròn O)

$\Rightarrow \text{MK}^2 = MC.MB$ (đpcm)

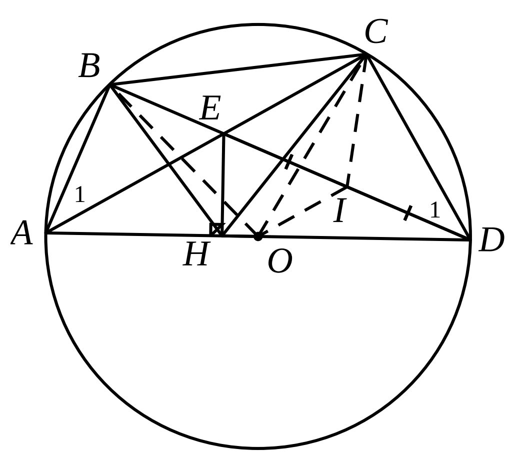
Bài 47. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đỉnh B và C ở trên nửa đường tròn đường kính AD, tâm O. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD và I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng:

a) Các tứ giác $ABEH$; $DCEH$ nội tiếp.

b) E là tâm của đường tròn nội tiếp ΔBCH.

c) Năm điểm B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải:



a)

- $\widehat{ABD} = 90°$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\widehat{ABE} = 90°$

  $\widehat{AHE} = 90°$ (gt)

  Do đó: $\widehat{ABE} + \widehat{AHE} = 180°$

  Vậy tứ giác $ABEH$ nội tiếp đường tròn đường kính KO.

- Tương tự ta cũng chứng minh được tứ giác $DCEH$ nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{BCA} = \widehat{BDA} (= \frac{1}{2} sđ \overset{\frown}{AB})$; $\widehat{ECH} = \widehat{EDH}$ (tứ giác $DCEH$ nội tiếp)

Suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{HCE}$ $\Rightarrow CE$ phân giác của $\widehat{BCH}$

Tương tự ta cũng chứng minh được BE là phân giác của $\widehat{CBH}$

Từ đó suy ra E là tâm của đường tròn nội tiếp ΔBCH.

c) ΔECD vuông tại C có OI là đường trung tuyến nên $\widehat{BIC} = \widehat{EIC} = 2\widehat{D_1} = 2\widehat{A_1}$ (vì $\widehat{D_1}, \widehat{A_1}$ chắn cung BC)

Dựa vào câu b ta có HE là phân giác của góc BHC nên $\widehat{BHC} = 2\widehat{A_1}$ (vì ABEH nội tiếp)

Ta cũng có $\widehat{BOC} = 2\widehat{A_1}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung nhỏ BC)

Vậy $\widehat{BIC} = \widehat{BHC} = \widehat{BOC}\left(= 2\widehat{A_1}\right)$

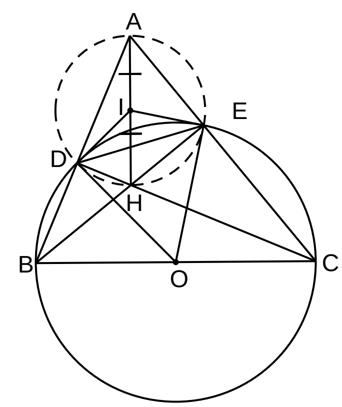
Ba điểm I, H, O cùng nhìn đoạn thẳng BC dưới một góc không đổi. Do đó năm điểm B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

Bài 48. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB, AC theo thứ tự ở D và E. Gọi H là giao điểm của BE và CD.

a) Chứng minh tứ giác ADHE nội tiếp.

b) Gọi I là trung điểm của AH. Chứng minh $IO \perp DE$.

c) Chứng minh AD.AB = AE.AC.



Lời giải:

a) Ta có: $\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^0$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{ADH} + \widehat{AEH} = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác ADHE nội tiếp đường tròn đường kính AH.

b) Vì I là trung điểm của AH nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADHE.

$\Rightarrow ID = IE$.

Lại có: OD = OE (bán kính đường tròn (O))

Do đó: OI là đường trung trực của DE

$\Rightarrow OI \perp DE$.

c) Xét ΔADE và ΔACB, có:

$\widehat{BAC}$: chung; $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ (tứ giác BDEC nội tiếp)

Do đó: $\Delta ADE \backsim \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AE}{AB} \Rightarrow AD.AB = AE.AC$.

Bài 49. Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A và B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B và C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt tia BE tại điểm F.

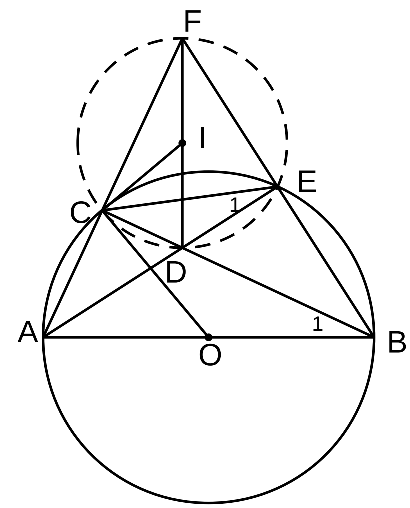
a) Chứng minh FCDE là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh DA.DE = DB.DC.

c) Chứng minh $\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác FCDE, chứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) Cho biết DF = R. Chứng minh rằng: $\tan\widehat{AFB} = 2$

Lời giải:



a) Ta có: $\widehat{ACB} = \widehat{AEB} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \widehat{FCD} = \widehat{FED} = 90^0$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{FCD} + \widehat{FED} = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác FCDE nội tiếp đường tròn đường kính AH.

b) Xét ΔDAC và ΔDBE, có:

$\widehat{CAD} = \widehat{EBD}\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{CE}\right)$; $\widehat{ADC} = \widehat{BDE}$ (đối đỉnh)

Do đó: $\Delta DAC \# \Delta DBE$ (g.g) $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{DC}{DE} \Rightarrow DA.DE = DB.DC$

c) Ta có: $\widehat{CFD} = \widehat{E_1}$ (tứ giác FCDE nội tiếp)

$\widehat{E_1} = \widehat{B_1}$ (tứ giác ACEB nội tiếp); $\widehat{B_1} = \widehat{OCB}$ (ΔOCB cân tại O)

Suy ra: $\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$

* Ta có: $\widehat{C_1} = \widehat{F_1}$ (ΔIFC cân tại I); $\widehat{F_1} = \widehat{B_1}$ $(=\widehat{E_1}) \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{B_1}$

$\widehat{C_2} = \widehat{CAO}$ (ΔOAC cân)

$\Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = \widehat{B_1} + \widehat{CAO} = 90^0$ (ΔACB vuông tại C).

$\Rightarrow \widehat{ICO} = 90^0 \Rightarrow$ IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) Xét ΔAEB và ΔFED, có: $\widehat{EAB} = \widehat{EFD}$ $(=\widehat{ECD})$; $\widehat{AEB} = \widehat{FED}(=90^0)$

Do đó: $\Delta AEB \backsim \Delta FED \Rightarrow \dfrac{AE}{FE} = \dfrac{AB}{FD} \Rightarrow \tan\widehat{AFB} = \dfrac{2R}{R} = 2$.

Bài 50: Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B lấy điểm M sao cho $AB = BM$. Đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại C, gọi I là trung điểm của BM

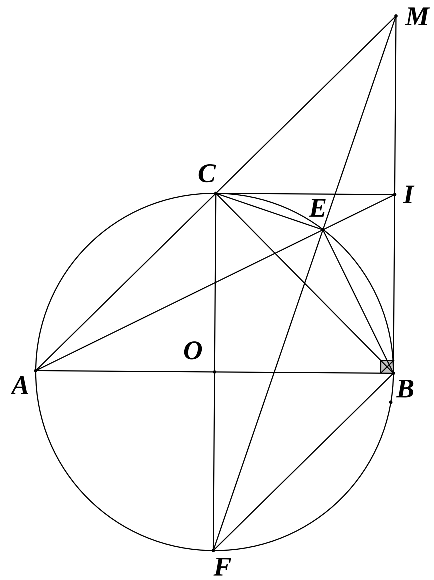
a) Chứng minh C là trung điểm của AM.

b) Chứng minh CI là tiếp tuyến của đường tròn (O)

c) Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại E. Chứng minh tứ giác $MCEI$ nội tiếp.

d) Đường thẳng ME cắt đường tròn tại điểm thứ hai là F. Chứng minh ba điểm C,O,F thẳng hàng. Tính tích $ME.MF$ theo R.

Giải:



a) Ta có $\widehat{ACB}=90^{\circ}$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

ΔABM cân tại B (AB=BM) có BC là đường cao nên là đường trung tuyến

$\Rightarrow$ C là trung điểm của AM .

b) Ta có: $CA=CM$ và $IB=IM$ $\Rightarrow CI$ là đường trung bình của ΔABM .

$\Rightarrow CI//$AB $\quad (1)$

Theo tính chất trung tuyến trong tam giác ΔAMB vuông tại B

$\Rightarrow CA=CB$

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại C mà CO là đường trung tuyến nên CO là đường cao $\Rightarrow CO\perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) $CI\perp CO$

$\Rightarrow CI$ là tiếp tuyến của (O).

c) Ta có: $\widehat{CEA}=\frac{1}{2}\widehat{COA}$ $=$ $\frac{1}{2}.90^{\circ}=45^{\circ}$ (Hệ quả góc nội tiếp)

ΔABM vuông cân tại M $\Rightarrow \widehat{AMB}=45^{\circ}$.

Do đó $\widehat{AMB}=\widehat{CEA}=45^{\circ}$.

Tứ giác $MCEI$ có $\widehat{CMI}+\widehat{CEI}$ $=\widehat{CEA}+\widehat{CEI}$ $=180^{\circ}$ (Kề bù)

$\Rightarrow$ Tứ giác $MCEI$ nội tiếp

d) Ta có $\widehat{EMI}=\widehat{EFC}$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến cùng chắn $\overset{\frown}{EI}$)

$\Rightarrow CF//BM$ (So le trong).

Mặt khác $CO//BM$ (Cùng vuông góc AB)

Qua điểm C có $CF//BM$ và $CO//BM$ nên theo tiên đề Ơclit ta có C,O,F thẳng hàng.

Xét ΔMBE và ΔMFB có

$\widehat{BME}$ chung.

$\widehat{MBE} = \widehat{MFB}$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến cùng chắn $\overset{\frown}{EB}$).

$\Rightarrow \Delta MBE \sim \Delta MFB$ (g.g).

$\Rightarrow \dfrac{MB}{ME} = \dfrac{MF}{MB}$.

$\Rightarrow ME.MF = MB^2 = AB^2 = (2R)^2 = 4R^2$.

Bài 51:

Cho đường tròn $(O;R)$ và dây BC cố định. Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Lấy điểm M bất kì trên cung nhỏ AC, kẻ tia Bx vuông góc với tia MA tại I và cắt tia CM tại D.

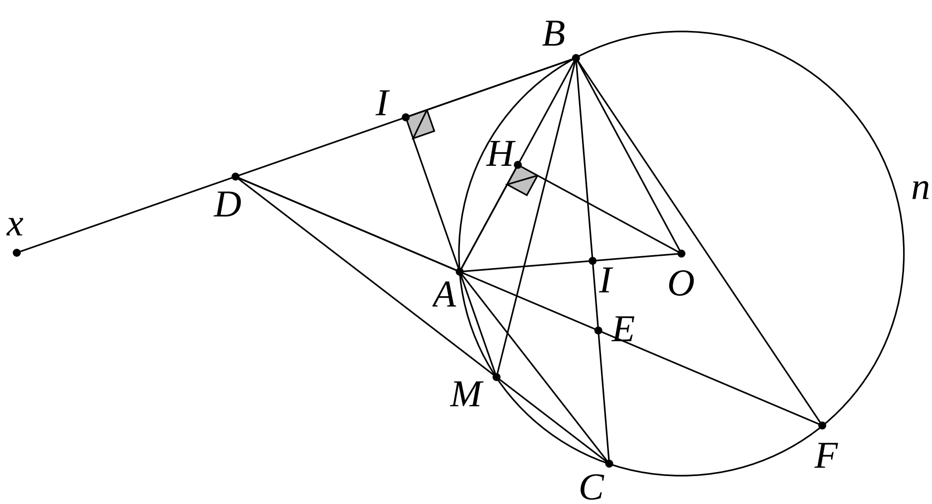
a) Chứng minh MA là tia phân giác của góc BMD.

b) Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và góc BDC có độ lớn không phụ thuộc vị trí điểm M.

c) Tia DA cắt tia BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBEF.

d) Chứng minh tích $P = AE.AF$ không đổi khi điểm M di động. Tính P theo bán kính R và $\widehat{ABC} = \alpha$.

Giải



a) Theo tính chất góc nội tiếp ta có: $\widehat{BMA} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}$ và $\widehat{BMC} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BnC}$.

$\text{sđ}\overset{\frown}{BnC} = 360^\circ - \text{sđ}\overset{\frown}{BC} = 360^\circ - 2\text{sđ}\overset{\frown}{AB}$ (Vì A là điểm chính giữa cung BC).

$\Rightarrow \widehat{BMC} = \dfrac{1}{2}\left(360^\circ - 2\text{sđ}\overset{\frown}{AB}\right) = 180^\circ - \text{sđ}\overset{\frown}{AB}$.

$\widehat{DMB} = 180^\circ - \widehat{BMC}$ (Kề bù).

$= 180° - \left(180° - sđ\overset{\frown}{AB}\right) = sđ\overset{\frown}{AB}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $\widehat{BMA} = \frac{1}{2}\widehat{DMB} = \widehat{DMA}$ $(= \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{AB})$.

$\Rightarrow$ MA là tia phân giác của góc BMD.

b) Ta có $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$ $\Rightarrow$ $AB = AC$ (Liên hệ dây và cung)

ΔMBD có MI là đường cao và đường phân giác nên ΔMBD cân tại M.

$\Rightarrow MI$ là đường trung trực của BD.

$A \in BD$ $\Rightarrow AD = AB$ (Tính chất đường trung trực)

Do đó $AB = AC = AD$ nên A là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

Theo tính chất góc ngoài ΔBMC ta có: $\widehat{BMC} = \widehat{MBD} + \widehat{MDB}$

$\widehat{BMC} = 2.\widehat{MDB}$ ($\widehat{MBD} = \widehat{MDB}$ do ΔMDB cân tại M).

$\Rightarrow$ $\widehat{MDB} = \frac{1}{2}\widehat{BMC} = \frac{1}{4}sđ\overset{\frown}{BnC}$ (Không đổi do dây BC cố định).

c) Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{BFA}$ (Các góc nội tiếp chắn các cung bằng nhau, $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB}$).

ΔBEF có $\widehat{EFB} = \widehat{EBA}$ và tia BA nằm ngoài ΔBEF nên AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBEF.

d) Xét ΔABE và ΔAFB có:

$\widehat{BAF}$ chung;

$\widehat{ABE} = \widehat{AFB}$ (Chứng minh trên).

$\Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta AFB$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AB}$

$\Rightarrow P = AE.AF = AB^2$ (Không đổi).

Gọi I là giao điểm của BC và AO.

$AB = AC$ và $OB = OC$ nên OA là đường trung trực của $BC \Rightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ$.

Kẻ $OH \perp AB$ tại H.

$\Rightarrow$ $AH = BH = \frac{1}{2}AB$ (Quan hệ vuông góc đường kính và dây).

$\widehat{AOI} = \widehat{AOH}$ (Cùng phụ $\widehat{OAH}$).

$AH = OA.\sin\widehat{AOH} = OA.\sin\widehat{ABI} = R.\sin\alpha$.

$AB = 2AH = 2R.sin\alpha$.

$P = \left(2R\,sin\alpha\right)^2 = 4R^2\,sin\alpha$.

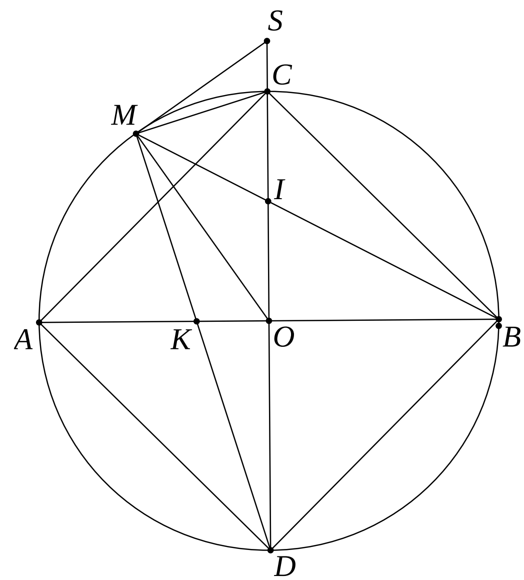
Bài 52: Cho đường tròn (O), hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau, M là một điểm trên cung nhỏ AC. Tiếp tuyến tại S. Gọi I là giao điểm của CD và MB.

a) Chứng minh tứ giác $AMIO$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $\widehat{MIC} = \widehat{MDB}$ và $\widehat{MSD} = 2\widehat{MBA}$.

c) MD cắt AB tại K. Chứng minh $DK.DM$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên cung AC.

Giải:



a) Ta có: $\widehat{AMI} = 90°$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Xét tứ giác $AMIO$ có $\widehat{AMI} + \widehat{AOI} = 90° + 90° = 180°$ mà hai góc này đối nhau nên tứ giác $AMIO$ nội tiếp.

b) Vì hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau nên

$\Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AC}$ = sđ$\overset{\frown}{CB}$ = sđ$\overset{\frown}{BD}$ = sđ$\overset{\frown}{DA}$ $= 90°$. (1)

$\widehat{MIC} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{MC} + \text{sđ}\overset{\frown}{BD}\right)$ (Góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn) (2)

$= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{MC} + \text{sđ}\overset{\frown}{AC}\right)$ (Do sđ$\overset{\frown}{AC}$ = sđ$\overset{\frown}{BD}$).

$= \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{MCB}$

Mặt khác $\widehat{MDB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{MCB}$ (Tính chất góc nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{MIC} = \widehat{MDB}$.

Ta có: $\widehat{MBA} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}$ (Tính chất góc nội tiếp)

$\Rightarrow 2\widehat{MBA} = \text{sđ}\overset{\frown}{AM}$ (3)

$\widehat{MSD}=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{MAD}-\text{sđ}\overset{\frown}{MC}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AM}+\text{sđ}\overset{\frown}{AD}-\text{sđ}\overset{\frown}{MC}\right)=\text{sđ}\overset{\frown}{AM}$ $\quad(4)$

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{MSD}=2\widehat{MBA}$.

c) Ta có: $\Delta DOK\backsim\Delta DMC(g.g)$

$\Rightarrow\frac{DO}{DM}=\frac{DK}{DC}$

$\Rightarrow DK.DM=DO.DC=\frac{1}{2}DC.DC=\frac{DC^2}{2}$ (Không đổi)

Bài 53

Cho đường tròn (O) đường kính AB .Gọi K là điểm chính giữa cung AB; M là điểm lưu động trên cung nhỏ AK (M khác hai điểm $A;K$).Lấy điểm N trên đoạn BM sao cho $BN=AM$

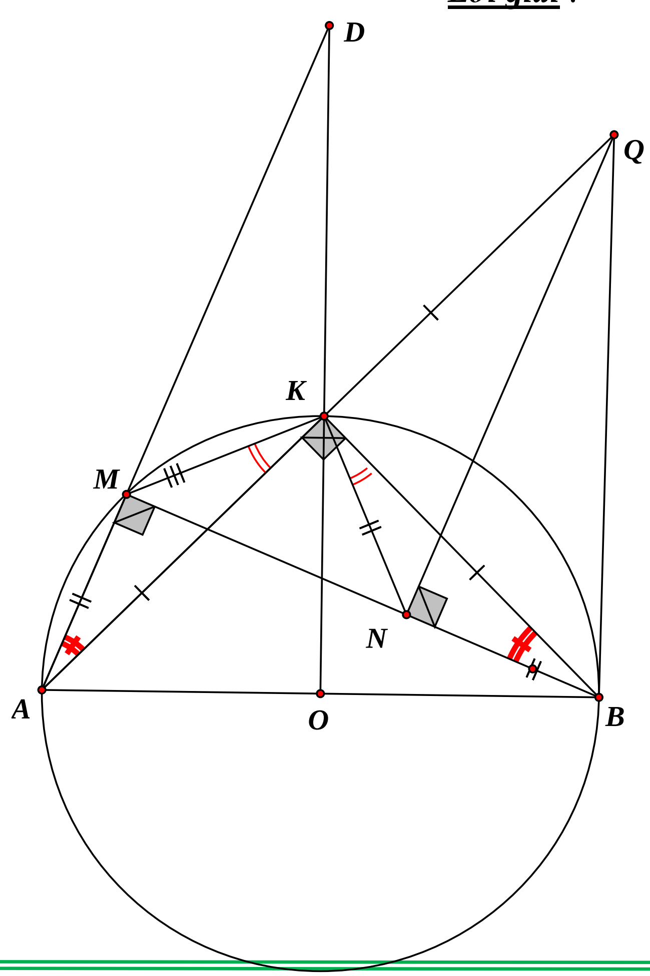
a)Chứng minh $\widehat{AMK}=\widehat{BNK}$

b)Chứng minh : tam giác MKN là tam giác vuông cân

c)Hai đường thẳng AM và OK cắt nhau tại D .Chứng minh MK là đường phân giác góc $\widehat{NMD}$

d)Chứng minh rằng đường thẳng qua N vuông góc BM luôn đi qua một điểm cố định

<u>Lời giải</u> :



a)Ta có $KA = KB$ (K là điểm chính giữa cung AB)

Và có $MA = BN$ (giả thiết) và $\widehat{MAK} = \widehat{NBK}$ (cùng chắn cung MK)

Vậy $\Delta MAK = \Delta NBK(c.g.c) \Rightarrow \widehat{AMK} = \widehat{BNK}$

b)Ta đi chứng minh : $KM = KN$

Do $\Delta MAK = \Delta NBK(c.g.c) \Rightarrow KM = KN$ và $\widehat{MKA} = \widehat{BKN}$

Nên $\widehat{MKA} + \widehat{AKN} = \widehat{AKN} + \widehat{BKN} = \widehat{AKB} = 90°$ (do K thuộc đường tròn đường kính AB)

Hay $\widehat{MKN} = 90°; KM = KN$ suy ra tam giác MKN vuông cân ở K

c)Ta có : tứ giác $MKBA$ nội tiếp$\Rightarrow \widehat{DMK} = \widehat{KBA} = 45°$ (tính chất tứ giác nội tiếp)

Và $\widehat{KMB} = \widehat{KAB} = 45° \Rightarrow \widehat{DMK} = \widehat{KMB} \Rightarrow MK$ là đường phân giác góc $\widehat{NMD}$

d)Dựng tam giác vuông cân ABQ vuông cân tại B như hình vẽ (K là trung điểm AQ) như thế ta có Q là điểm cố định

Ta có $BQ = BA; BN = AM$; $\widehat{QBN} = \widehat{MAB}$ (cùng phụ $\widehat{MBA}$)

Vậy nên $\Delta MAB = \Delta NBQ$ $(c.g.c) \Rightarrow \widehat{BNQ} = \widehat{BMA} = 90° \Rightarrow NQ \perp BM$ hay là đường thẳng qua N và vuông góc BM đi qua điểm cố định Q

Bài 54: Cho nửa đường tròn (O; R) có đường kính AB . Bán kính CO vuông góc với AB , M là một điểm bất kì trên cung nhỏ AC (M khác A và C); BM cắt AC tại H. Gọi K là hình chiếu của H trên AB .

a) Chứng minh $CBHK$ là tứ giác nội tiếp.

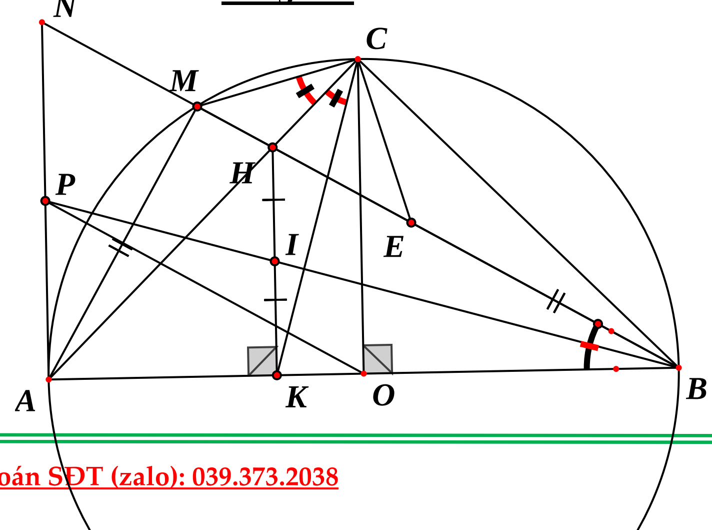
b) Chứng minh $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$

c) Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho $BE = AM$. Chứng minh tam giác ECM là tam giác vuông cân tại C

d) Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại A; cho P là điểm nằm trên d sao cho hai điểm $P; C$ nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và $\frac{AP.MB}{MA} = R$. Chứng minh rằng đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK

(Đề thi vào 10 THPT – TP Hà Nội năm học 2012 – 2013)

Lời giải :



a) Xét tứ giác $CBKH$ có

$\widehat{HCB}=90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{HKB}=90^0$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{HCB}+\widehat{HKB}=90^0+90^0=180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CBKH$ nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)

b) Có tứ giác $CBKH$ nội tiếp (cmt)

$\widehat{HCK}=\widehat{HBK}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung HK)

Xét (O) có $\widehat{HBK}=\widehat{MCA}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

$\Rightarrow \widehat{MCA}=\widehat{HCK}\left(=\widehat{HBK}\right) hay\ \widehat{MCA}=\widehat{ACK}$

c) Có $CO\perp AB; OA=OB$ (gt)

$\Rightarrow \Delta ACB$ cân

Có $\widehat{ACB}=90^0$ nên tam giác ACB vuông cân.

Xét ΔMCA và ΔECB có:

MA = EB (gt);

$\widehat{CBE}=\widehat{MAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

$CA=CB$ (ΔACB cân)

$\Rightarrow \Delta MCA=\Delta ECB(c.g.c)\Rightarrow \begin{cases} MC=EC(1) \\ \widehat{MCA}=\widehat{ECB} \end{cases}$

Có $\widehat{ACB}=90^0\Rightarrow \widehat{HCE}+\widehat{ECB}=90^0\Rightarrow \widehat{HCE}+\widehat{MCA}=90^0\Rightarrow \widehat{MCE}=90^0\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác CME vuông cân tại C

d) Có $\dfrac{AP.MB}{MA}=R$

$\Rightarrow AP.MB=MA.OA\Rightarrow \dfrac{MB}{MA}=\dfrac{OA}{AP}$

Xét ΔAMB và ΔPAO có

$\widehat{AMB}=\widehat{PAO}=90^0$

$\dfrac{MB}{MA}=\dfrac{OA}{AP}$

$\Rightarrow \Delta AMB\sim\Delta PAO(c.g.c)\Rightarrow \widehat{ABM}=\widehat{POA}$ (hai góc tương ứng)

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow PO//BM$

Gọi N là giao điểm của BM và d ; I là giao điểm của HK và PB .

Xét ΔANB có O là trung điểm của AB ; $\Rightarrow P$ là trung điểm của AN $\Rightarrow PA=PN$.

Có $HK//AN$ (cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow \frac{IK}{PA} = \frac{HI}{PN}\left(=\frac{BI}{BP}\right)$ (Hệ quả của định lý Ta lét)

Mà $PA = PN$ suy ra $IH = IK$ $\Rightarrow PB$ đi qua trung điểm của HK .

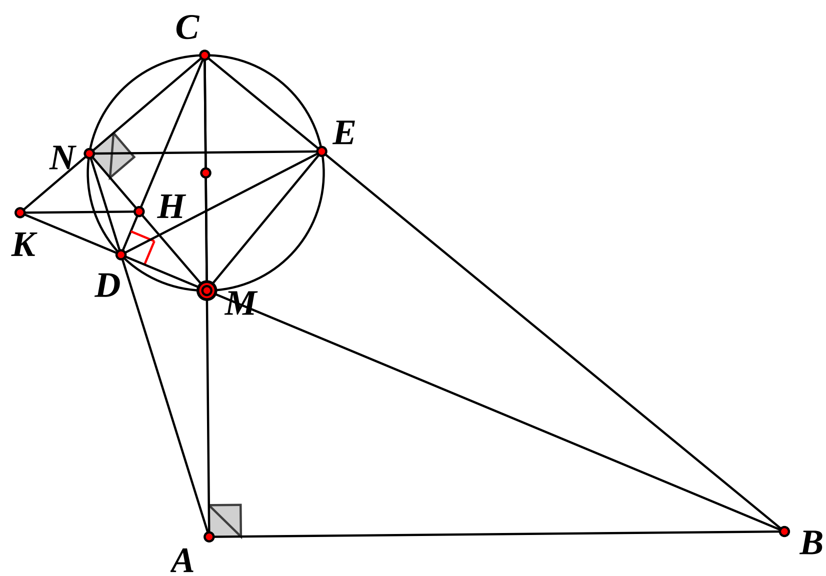
Bài 55:Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB > AC)$.Trên cạnh AC lấy điểm M (M khác A và C).Đường tròn đường kính MC cắt BC tại E và cắt đường thẳng BM tại D ($E \neq C$ và $D \neq M$)

a)Chứng minh $ABCD$ là tứ giác nội tiếp

b)Chứng minh : $\widehat{ABD} = \widehat{MED}$

c) Đường thẳng AD cắt đường tròn đường kính MC tại N $(N \neq D)$.Đường thẳng MD cắt CN tại K ; MN cắt CD tại H .Chứng minh $KH//NE$

<u>*Lời giải*</u> :



a)Ta có $\widehat{CDM} = 90°$ (D thuộc đường tròn đường kính MC) $\Rightarrow \widehat{CDB} = 90°$

Mà tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow \widehat{BAC} = 90°$

Vậy tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp (hai đỉnh liên tiếp $D;A$ nhìn cạnh BC dưới góc bằng nhau)

b)Ta có tứ giác $CEMD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MED} = \widehat{MCD}$

Và tứ giác $ABCD$ nội tiếp (đã chứng minh) $\Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{MBA}$

Vậy nên $\widehat{MED} = \widehat{ABD}$

c)Do N thuộc đường tròn đường kính CM $\Rightarrow \widehat{CNM} = 90° \Rightarrow MN \perp KC$

Mặt khác tương tự ta cũng dễ dàng có $CD \perp KM$ (D thuộc đường tròn đường kính MC)

Vậy H là trực tâm tam giác $MKC \Rightarrow HK \perp MC$ suy ra $HK \perp AC \Rightarrow HK//AB$ (do $AB \perp AC$)

Do đó ta sẽ chứng minh $NE//AB \Leftrightarrow \widehat{ABC} = \widehat{NEC}$

Ta có tứ giác $NCED$ là tứ giác nội tiếp (đường tròn đường kính MC)$\Rightarrow \widehat{NEC} = \widehat{NDC}$ (cùng nhìn cạnh NC dưới góc bằng nhau)

Mà $ABCD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NDC} = \widehat{ABC}$ (góc ngoài bằng góc trong ở đỉnh đối diện)

Vậy $\widehat{NEC} = \widehat{ABC} \Rightarrow NE // AB$ (cặp góc đồng vị bằng nhau)$\Rightarrow NE // HK$ $(dpcm)$

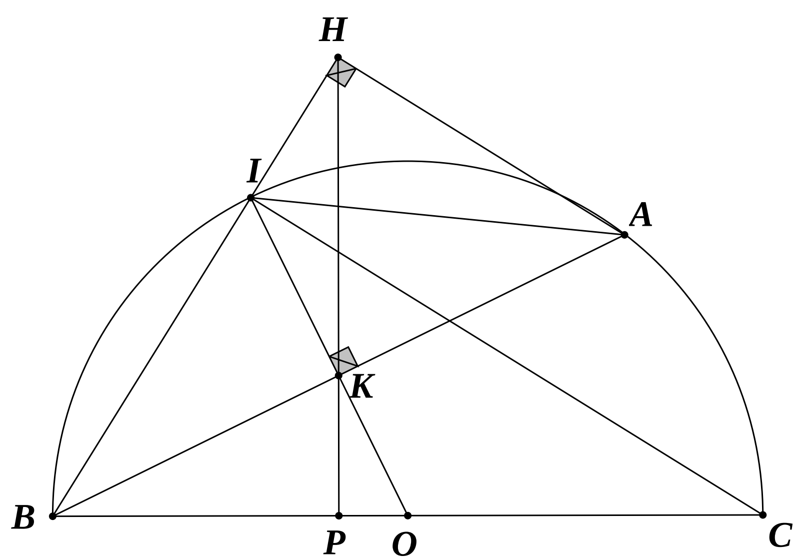
Bài 56: Cho nửa đường tròn (O) đường kính BC. Vẽ dây BA. Gọi I là điểm chính giữa của cung BA, K là giao điểm của OI với BA.

a) Chứng minh $OI // AC$.

b) Từ A vẽ đường thẳng song song với CI cắt đường thẳng BI tại H. Chứng minh tứ giác $IHAK$ nội tiếp.

c) Gọi P là giao điểm của đường thẳng HK với BC. Chứng minh $\Delta BKP \# \Delta BCA$.

Giải:



a) IO đi qua điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AB}$ $\Rightarrow BK = KA$. Mà $BO = OC$.

Suy ra $OK // AC$ (do OK là đường trung bình của ΔABC) hay $OI // AC$.

b) Vì $AB \perp OI$ nên $\widehat{IKA} = 90^\circ$ (1).

Vì $AH // CI$ nên $\widehat{AHI} = \widehat{CIB}$ (hai góc đồng vị), mà $\widehat{CIB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $\widehat{AHI} = 90^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AHI} + \widehat{IKA} = 180^\circ$ $\Rightarrow$ Tứ giác $IHAK$ nội tiếp.

c) Vì tứ giác $IHAK$ nội tiếp nên $\widehat{HIA} = \widehat{HKA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung).

$\Rightarrow \widehat{HIA} = \widehat{BKP}$ (do $\widehat{BKP} = \widehat{HKA}$).

Mặt khác $\widehat{AIC} = \widehat{ABC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Suy ra $\widehat{HIA} + \widehat{AIC} = \widehat{BKP} + \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{BKP} + \widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KBP} = 90^\circ$.

Xét ΔBKP và ΔBCA có: $\widehat{B}$ chung, $\widehat{KBP} = \widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow \Delta BKP \backsim \Delta BCA$ (g.g).

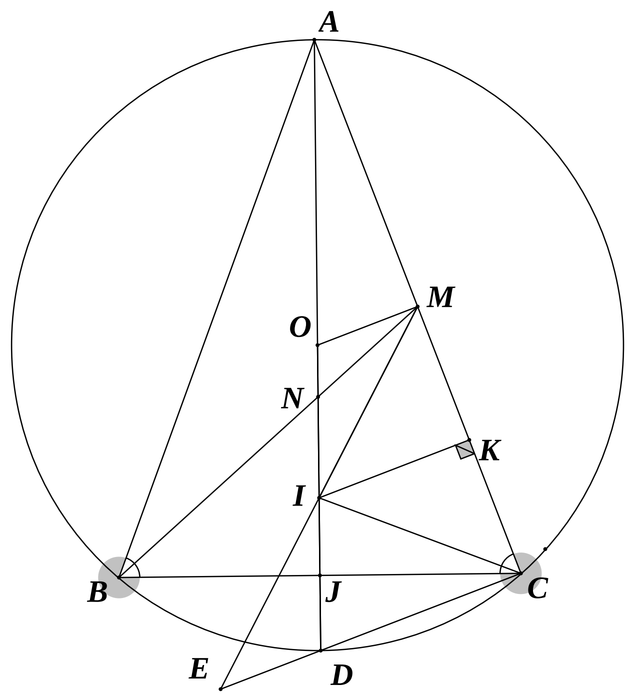
Bài 57: Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường kính AD. Gọi M là trung điểm của AC, I là trung điểm của OD.

a) Chứng minh $OM // DC$.

b) Chứng minh ΔICM cân.

c) BM cắt AD tại N. Chứng minh $IC^2 = IA.IN$.

Giải:



a) Trong ΔADC, OM là đường trung bình. Suy ra $OM // DC$.

b) Kéo dài IM cắt DC tại E. Khi đó $\Delta IDE = \Delta IOM$ (g.c.g) $\Rightarrow IM = IE$.

Xét ΔMCE vuông tại C có CI là đường trung tuyến. Suy ra $IC = \frac{1}{2}ME$.

Vậy $IC = IM$ hay ΔICM cân tại I.

c) Gọi J, K lần lượt là trung điểm của BC, MC. Khi đó tứ giác $IKCJ$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{JIC} = \widehat{JKC}$ (hai góc cùng chắn một cung).

Mặt khác $JK // BM$ (JK là đường trung bình của ΔBCM)$\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{JKC} = \widehat{NMC}$.

Suy ra $\widehat{JIC} = \widehat{NMC}$. Suy ra tứ giác $NMCI$ nội tiếp.

Xét ΔICA và ΔINC có: $\hat{I}$ chung, $\widehat{INC} = \widehat{IMC} = \widehat{ICM}$ (do tứ giác $NMCI$ nội tiếp và $IM = IC$)

$\Rightarrow \Delta ICA \backsim \Delta INC \Rightarrow \frac{IC}{IN} = \frac{IA}{IC} \Rightarrow IC^2 = IA.IN$ (đpcm).

Bài 58: Cho tam giác MNP cân tại M có cạnh đáy nhỏ hơn cạnh bên, nội tiếp đường tròn $(O;\, R)$. Tiếp tuyến tại N và P của đường tròn lần lượt cắt tia MP và tia MN theo thứ tự tại E và D.

a) Chứng minh $EN^2 = EP.EM$.

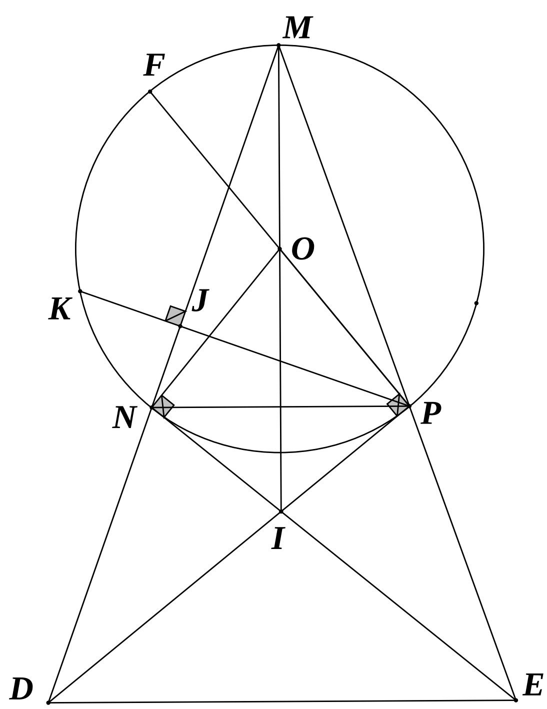
b) Chứng minh tứ giác $DEPN$ nội tiếp.

c) Qua P kẻ đường thẳng vuông góc với MN cắt đường tròn (O) tại K (K không trùng với P). Chứng minh rằng $MN^2 + NK^2 = 4R^2$.

Giải

a) Gọi I là giao điểm của DP và NE.

Vì $IN = IP,\, ON = OP,\, MN = MP$ nên $I,\, O,\, N$ thẳng hàng (cùng nằm trên đường trung trực của NP).



Ta có $\widehat{INP} = \widehat{NMP}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến cùng chắn một cung).

Xét ΔMNE và ΔNPE có: $\widehat{PNE} = \widehat{NME}$, $\widehat{E}$ chung.

Suy ra $\Delta MNE \backsim \Delta NPE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{ME}{NE} = \dfrac{NE}{PE} \Rightarrow EN^2 = EP.EM$.

b) + Ta có $\Delta MIN = \Delta MIP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MIN} = \widehat{MIP} \Rightarrow \widehat{MID} = \widehat{MIE}$.

Xét ΔMID và ΔMIE có: $\widehat{DMI} = \widehat{EMI}$, MI chung, $\widehat{MID} = \widehat{MIE}$

$\Rightarrow \Delta MID = \Delta MIE$ (g.c.g) $\Rightarrow MD = ME$.

Xét ΔMNE và ΔMPD có: $MN = MP$, $\widehat{M}$ chung, $MD = ME$

$\Rightarrow \Delta MNE = \Delta MPD$ (c.g.c) $\Rightarrow NE = PD$ (1).

+ Vì $MN = MP$ và $MD = ME$ nên $\dfrac{MN}{MD} = \dfrac{MP}{ME}$ $\Rightarrow NP // DE$ (định lý Talet).

Suy ra $DEPN$ là hình thang (2).

Từ (1) và (2) suy ra $DEPN$ là hình thang cân $\Rightarrow$ Tứ giác $DEPN$ là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi J là giao điểm của PK và MN. Kéo dài OP cắt (O) tại F.

Ta có $\widehat{JPM} + \widehat{JMP} = 90^\circ$ (1), $\widehat{OPN} = \widehat{ONP}$.

Mà $\widehat{ONP} + \widehat{PNE} = 90^\circ$, $\widehat{PNE} = \widehat{JMP}$ $\Rightarrow \widehat{OPN} + \widehat{JMP} = 90^\circ$ (2).

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \widehat{JPM} = \widehat{OPN}$ $\Rightarrow \widehat{JPN} = \widehat{OPM}$ hay $\widehat{KPN} = \widehat{FPM}$ $\Rightarrow KN = FM$.

Ta có $FM^2 + MP^2 = FP^2 \Leftrightarrow KN^2 + MN^2 = 4R^2$ (đpcm).

Bài 59. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$, các tiếp tuyến tại B, C với đường tròn (O) cắt nhau tại E, AE cắt đường tròn (O) tại D ($D \neq A$).

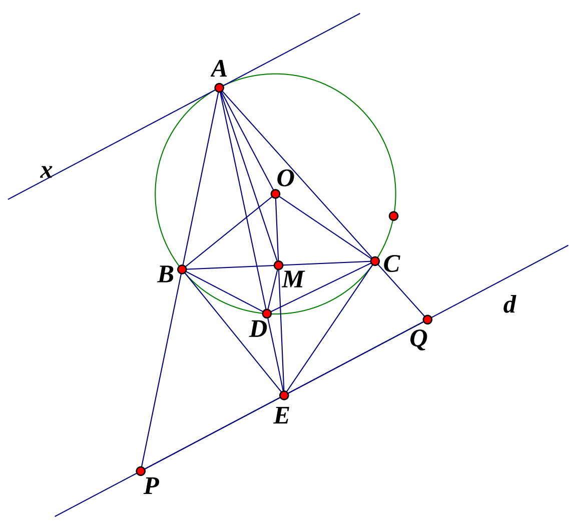
a) Chứng minh tứ giác $OBEC$ nội tiếp.

b) Từ E kẻ đường thẳng (d) song song với tiếp tuyến tại A của đường tròn (O), (d) cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh $AB.AP = AD.AE$.

c) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $EP = EQ$ và $\widehat{PAE} = \widehat{MAC}$.

d) Chứng minh rằng: $AM.MD = \dfrac{BC^2}{4}$.

Giải:



a) Ta có: $\widehat{OBE} = 90^0$ (gt); $\widehat{OCE} = 90^0$ (gt);

Xét tứ giác $OBEC$ có: $\widehat{OBE} + \widehat{OCE} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà $\widehat{OBE};\widehat{OCE}$ là hai góc đối nhau $\Rightarrow$ Tứ giác $OBEC$ nội tiếp (đpcm).

b) Ta có: $\widehat{APE}=\widehat{BAx}$ (hai góc so le); $\widehat{ADB}=\widehat{BAx}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn một cung) $\Rightarrow \widehat{APE}=\widehat{ADB}$

Xét ΔABD và ΔAEP có $\widehat{APE}=\widehat{ADB}$ (c/m trên) ; $\widehat{PAE}$ chung

$\Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta AEP$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AD}{AP}\Rightarrow AB.AP=AD.AE$ (1)

c) Theo b) ta có: $AB.AP=AD.AE$ (1)

Chứng minh tương tự ta có $AC.AQ=AD.AE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta AQP$ $\Rightarrow \widehat{ACB}=\widehat{APQ}\Rightarrow \widehat{APQ}+\widehat{ABC}+\widehat{BAC}=180^0$

Mà $\widehat{PBE}+\widehat{ABC}+\widehat{BAC}=180^0\Rightarrow \widehat{APQ}=\widehat{PBE}\Rightarrow \Delta BEP$ cân tại E nên $EB=EP$.

Tương tự ta cũng có $EC=EQ$ mà $EB=EC$ $\Rightarrow EP=EQ$ (đpcm)

Mặt khác $\Delta ABC \backsim \Delta AQP \Rightarrow \dfrac{AC}{AP}=\dfrac{BC}{PQ}=\dfrac{MC}{PE}$ và $\widehat{ACM}=\widehat{APE}$

$\Rightarrow \Delta ACM \backsim \Delta APE$ (c-g-c) $\widehat{PAE}=\widehat{MAC}$ (đpcm)

d) Tương tự ta có $\widehat{BDA}=\widehat{MDC}$

$\Rightarrow \Delta ACM \backsim \Delta CDM \Rightarrow \dfrac{AM}{MC}=\dfrac{MC}{MD}\Rightarrow AM.MD=MC^2=\dfrac{BC^2}{4}$ (đpcm)

Bài 60. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$, kẻ đường cao AH $(H\in BC)$. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC.

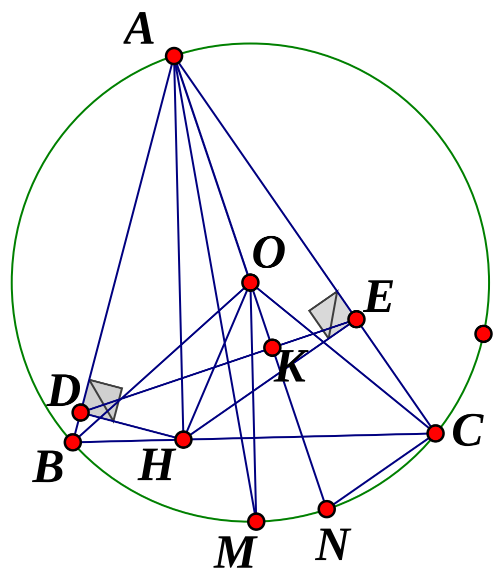
a) Chứng minh các tứ giác $ADHE, BDEC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{BAC}$ và $\widehat{HAO}$ có cùng tia phân giác.

c) Chứng minh $OA\perp DE$

d) Giả sử $AH=R\sqrt{2}$ và $BC=2R$. Chứng minh $S_{ABC}=2S_{ADE}$.

GIẢI



a) Ta có: $\widehat{ADH}=90^0$ (gt); $\widehat{AEH}=90^0$ (gt);

Xét tứ giác OBEC có: $\widehat{ADH}+\widehat{AEH}=90^0+90^0=180^0$

Mà $\widehat{ADH};\widehat{AEH}$ là hai góc đối nhau $\Rightarrow$ Tứ giác $ADHE$ nội tiếp (đpcm).

Dễ thấy $\Delta AED \backsim \Delta ABC$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{AED} \Rightarrow$ Tứ giác $BDEC$ nội tiếp (đpcm).

b) Kẻ tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) tại M $\Rightarrow MB=MC$, lại có $OB=OC$

$\Rightarrow$ OM là trung trực của BC $\Rightarrow OM//AH \Rightarrow \widehat{OMA}=\widehat{HAM}$ (1)

mà $\widehat{OMA}=\widehat{OAM}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AM là tia phân giác của $\widehat{HAO}$.

Vậy $\widehat{BAC}$ và $\widehat{HAO}$ có cùng tia phân giác.

c) Tia OA cắt DE tại K, cắt đường tròn (O) tại N.

Ta có $\widehat{ABC}=\widehat{ANC}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$); $\widehat{ABC}=\widehat{AED}$ (câu a)

$\Rightarrow \widehat{AKE}+\widehat{KAE}=\widehat{NAC}+\widehat{ANC}=90^0 \Rightarrow AO\perp DE$

d) Trước hết ta chứng minh ba điểm D,O,E thẳng hàng với $AH=R\sqrt{2}$

Ta có: $AD.AB=AE.AC=AH^2=2R^2=AO.AN$ (1)

Lại có: $\Delta AKE \backsim \Delta ACN \Rightarrow \dfrac{AK}{AC}=\dfrac{AE}{AN} \Rightarrow AK.AN=AE.AC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AO.AN=AK.AN \Rightarrow AO=AK \Rightarrow K\equiv O$ $\Rightarrow$ ba điểm D,O,E thẳng hàng

Ta có $\Delta AED \backsim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{AK}{AH}\right)^2 = \dfrac{R^2}{2R^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow S_{ABC} = 2S_{ADE}$ (đpcm).

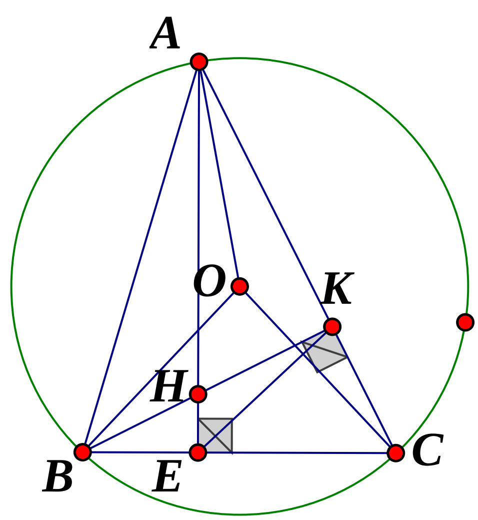
Bài 61. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Hai đường cao AE và BK của tam giác ABC cắt nhau tại H với $(E \in BC, K \in AC)$.

a) Chứng minh tứ giác $ABEK$ nội tiếp.

b) Chứng minh $CE.CB = CK.CA$.

c) Chứng minh $\widehat{OCA} = \widehat{BAE}$.

d) Cho B, C cố định và A di động trên đường tròn (O) nhưng thỏa mãn điều kiện tam giác ABC nhọn, khi đó H thuộc một đường tròn cố định. Xác định tâm I và bán kính r của đường tròn đó, biết $R = 3cm$.



a) Ta có: $\widehat{AEB} = 90^0$ (gt); $\widehat{AKB} = 90^0$ (gt);

Xét tứ giác $ABEK$ có: $\widehat{AEB} = \widehat{AKB} = 90^0$

Tứ giác $ABEK$ có hai đỉnh liền kề cùng nhìn cạnh AB dưới một góc vuông

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABEK$ nội tiếp (đpcm).

b) Xét ΔACE và ΔBCK có $\widehat{AEC} = \widehat{BKC} = 90^0$ (gt); $\widehat{EAC} = \widehat{CBK}$ (cùng phụ $\widehat{ACB}$)

$\Rightarrow \Delta ACE \backsim \Delta BCK \Rightarrow \dfrac{CE}{CK} = \dfrac{CA}{CB} \Rightarrow CE.CB = CK.CA$ (đpcm)

c) Ta có $\widehat{OCA} = 90^0 - \dfrac{1}{2}\widehat{AOC} = 90^0 - \dfrac{1}{2}\text{sd}\overset{\frown}{AC} \Rightarrow \widehat{OCA} + \widehat{ABC} = 90^0$ (1)

Mà $\widehat{ABC} + \widehat{BAE} = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{BAE}$

d) Ta có $\widehat{BHC}=180^0-\frac{1}{2}\widehat{BOC}$ không đổi, BC cố định

$\Rightarrow$ H thuộc cung chứa góc $\widehat{BHC}=180^0-\frac{1}{2}\widehat{BOC}$ dựng trên cạnh BC.

- Dựng đường thẳng (d) trung trực của BC

- Dựng tia Cx tạo với tia CB một góc $\alpha=\widehat{BHC}-90^0$

- Lấy giao điểm I của (d) và Cx ta được I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBHC, bán kính $r=IB=IC=IH$.

Ta có: $\widehat{OCB}=90^0-\frac{1}{2}\widehat{BOC}$ (1)

$\alpha=\widehat{BHC}-90^0=180^0-\frac{1}{2}\widehat{BOC}=90^0-\frac{1}{2}\widehat{BOC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\widehat{OCB}=\alpha=\widehat{ICB}\Rightarrow\Delta IOC$ cân tại C $\Rightarrow IC=OC=R=3cm$. Vậy r = 3cm.

Bài 62. Các đường cao AD, BE của tam giác nhọn ABC cắt nhau tại H và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt tại I và K.

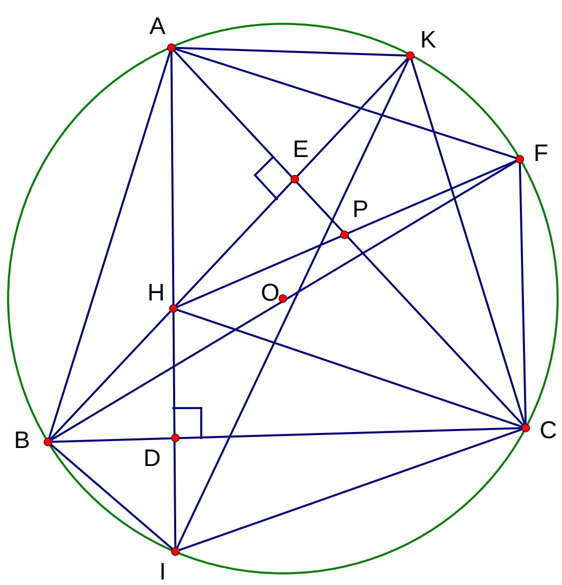
a) Chứng minh tứ giác CDHE nội tiếp.

b) Chứng minh tam giác CKI cân.

c) Chứng minh AH = AK.

d) Kẻ đường kính BOF (O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC). Gọi P là trung điểm của AC. Chứng minh ba điểm H, P, F thẳng hàng.

Giải:



a) $AD\perp BC$ (do AD là đường cao của tam giác ABC) $\Rightarrow\widehat{CDH}=90^0$

$BE \perp AC$ (do BE là đường cao của tam giác ABC) $\Rightarrow \widehat{CEH} = 90^0$

Tứ giác CDHE có $\widehat{CDH} + \widehat{CEH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên tứ giác CDEH nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{CAI} = \widehat{CBK}$ (cùng phụ $\widehat{DCE}$)

Xét (O) có $\widehat{CAI} = \widehat{CBK} \Rightarrow \overset{\frown}{CI} = \overset{\frown}{CK}$ (Hai góc nội tiếp bằng nhau thì chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow CI = CK$.

c) Xét (O) Do $\overset{\frown}{CI} = \overset{\frown}{CK} \Rightarrow \widehat{CAI} = \widehat{CAK}$ (Hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) nên tia AE là phân giác của $\widehat{HAK}$

Xét ΔAHK có AE là phân giác đồng thời là đường cao nên ΔAHK cân tại A $\Rightarrow AK = AH$

d) Ta có $\widehat{BCF} = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow FC \perp BC$ mà $AH \perp BC$

$\Rightarrow$ AH // CF

Chứng minh tương tự AF// CH

Tứ giác AHCF có AH // CF; AF// CH nên tứ giác AHCF là hình bình hành $\Rightarrow$ Hai đường chéo AC và HF cắt nhau tại trung điểm mỗi đường mà P là trung điểm của đường chéo AC nên P cũng là trung điểm của đường chéo HF $\Rightarrow$ ba điểm H, P, F thẳng hàng

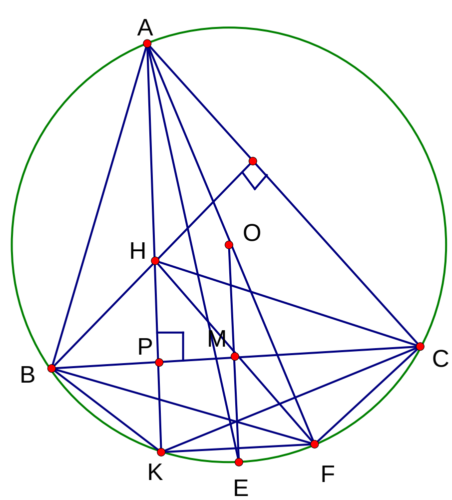
Bài 63. Cho tam giác ABC (AB $\neq$ AC) nội tiếp đường tròn (O), kẻ đường cao AP, tia AP cắt đường tròn tại điểm K, F là đối xứng của A qua O; M là trung điểm của BC; OM cắt đường tròn tại E và H là trực tâm của tam giác.

a) Chứng minh $\widehat{BCK} = \widehat{CBF} = \widehat{BCH}$ và $\widehat{FAE} = \widehat{EAK}$

b) Chứng minh FK=2MP

c) Chứng tỏ F, M, H thẳng hàng

d) So sánh các đoạn thẳng OM và AH



a) $\widehat{AKF} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow KF \perp AK$ mà $BC \perp AK \Rightarrow$ BC//KF

$\Rightarrow \widehat{BCK} = \widehat{CKF}$ (hai góc so le trong)

Ta có $\widehat{CKF} = \widehat{CBF}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung CF)

$\Rightarrow \widehat{BCK} = \widehat{CBF}$ (1)

Ta có $\widehat{ABF} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)$\Rightarrow FB \perp AB$ mà $CH \perp AB$ (do H là trực tâm của tam giác ABC)$\Rightarrow$BF//CH$\Rightarrow \widehat{CBF} = \widehat{BCH}$ (hai góc so le trong) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BCK} = \widehat{CBF} = \widehat{BCH}$

Ta có M là trung điểm của BC nên $OM \perp BC$ hay $OE \perp BC$ mà $AK \perp BC \Rightarrow$ OE//AK

$\Rightarrow \widehat{OEA} = \widehat{EAK}$ (hai góc so le trong) mà $\widehat{OEA} = \widehat{OAE}$ (do tam giác OAE cân tại A)

$\Rightarrow \widehat{OAE} = \widehat{EAK}$ hay $\widehat{FAE} = \widehat{EAK}$

b) Chứng minh tứ giác BHCK là hình bình hành (tứ giac có các cạnh đối song song) mà M là trung điểm của đường chéo BC thì M cũng là trung điểm của đường chéo HF)

Xét ΔHKF có M là trung điểm của HF mà OP//FK (cùng vuông góc với AK) nên P là trung điểm của HK$\Rightarrow$MP là đường trung bình của ΔHKF nên FK=2MP

c) M là trung điểm của FH (cmt) nên ba điểm F, M, H thẳng hàng

d) ΔAHF có O là trung điểm của AF; M là trung điểm của HF nên OM là đường trung bình của tam giác AHF nên $OM = \frac{1}{2}AH$

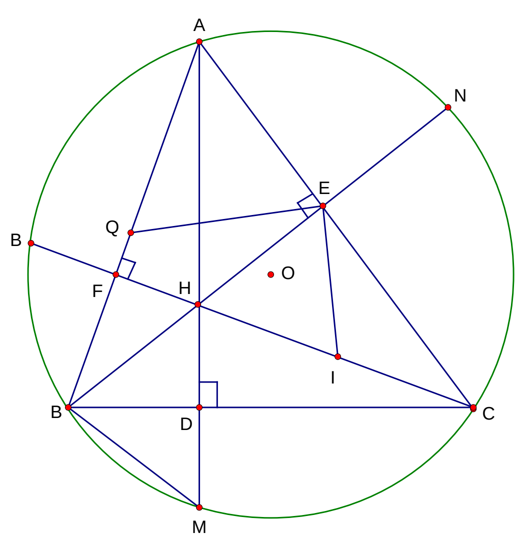
Bài 64:

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là điểm đối xứng với H qua BC.

a) Chứng minh tứ giác ABMC nội tiếp đường tròn (O).

b) Gọi Q là trung điểm của AB. Chứng minh EQ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác EHC.

c) Biết BE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N và CF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P. Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF}$



a) M là đối xứng của H qua BC nên BC là đường trung trực của HM $\Rightarrow BH = BM; CH = CM$

$\Delta BHC = \Delta BMC\,(c.c.c) \Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{BMC}$

mà $\widehat{FHE} = \widehat{BHC}$ (hai góc đối đỉnh); $\widehat{BHC} = \widehat{BMC} \Rightarrow \widehat{FHE} = \widehat{BMC}$

Tứ giác AEHF nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0) $\Rightarrow \widehat{FAE} + \widehat{FHE} = 180^0$ mà $\widehat{FHE} = \widehat{BMC} \Rightarrow \widehat{FAE} + \widehat{BMC} = 180^0$ nên tứ giác ABMC nội tiếp đường tròn (O)

b) Gọi I là trung điểm của HC. Ta có ΔEHC vuông tại E có EI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền HC nên $IE = IH = IC = \dfrac{HC}{2}$ nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔEHC

Ta có $IE = IH \Rightarrow \Delta IEH$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{IEH} = \widehat{IHE}$ mà $\widehat{IHE} = \widehat{BHF}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{IEH} = \widehat{BHF}$

Ta có ΔAEB vuông tại E có EQ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AB

nên $QE = QB = \dfrac{AB}{2} \Rightarrow \Delta QEB$ cân tại Q $\Rightarrow \widehat{QEB} = \widehat{QBE}$

Ta có $\widehat{IEQ} = \widehat{IEH} + \widehat{QEB} = \widehat{BHF} + \widehat{QBE} = 90^0$ (do ΔBFH vuông tại F) $\Rightarrow IE \perp EQ$ nên EQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác EHC.

c)Ta có H và M đối xứng nhau qua BC nên $DH = DM$

Tương tự $EH = EN; FH = FP$

Ta có $\dfrac{HD}{AD} + \dfrac{HE}{BE} + \dfrac{HF}{CF} = \dfrac{S_{BHC}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{AHC}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{AHB}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{BHC} + S_{AHC} + S_{AHB}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{DM}{AD} + \dfrac{EN}{BE} + \dfrac{FP}{CF} == 1$

Ta có $T = \dfrac{AM}{AD} + \dfrac{BN}{BE} + \dfrac{CP}{CF} = \dfrac{AD + DM}{AD} + \dfrac{BE + EN}{BE} + \dfrac{CF + FP}{CF} = 3 + \left(\dfrac{DM}{AD} + \dfrac{EN}{BE} + \dfrac{FP}{CF}\right) = 3 + 1 = 4$

Bài 65. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AM, BN, CP của tam giác ABC đồng quy tại H $(M \in BC, N \in AC, P \in AB)$.

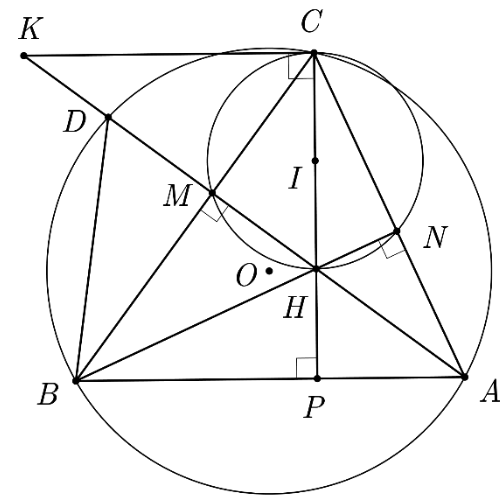
a) Chứng minh tứ giác $MHNC$ nội tiếp đường tròn.

b) Kéo dài AH cắt (O) tại điểm thứ hai là D. Chứng minh $\widehat{DBC} = \widehat{NBC}$.

c) Tiếp tuyến tại C của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MHNC$ cắt đường thẳng AD tại K. Chứng minh rằng $KM.KH + HC^2 = KH^2$.

d) Tính giá trị của biểu thức $S = \dfrac{MH}{AM} + \dfrac{NH}{BN} + \dfrac{PH}{CP}$.

Lời giải



a)

Xét tứ giác $MHNC$ có $\widehat{HMC}+\widehat{HNC}=180^{\circ}$, mà hai góc này đối nhau nên tứ giác $MHNC$ nội tiếp.

b)Ta có $\widehat{DBC}=\widehat{CAD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung CD).

Và $\widehat{NBC}=\widehat{CAD}$ (cùng phụ với góc ACB). Từ đó suy ra $\widehat{DBC}=\widehat{NBC}$.

c) ta có $KM.KH=KC^2$ từ đó suy ra $KM.KH+HC^2=KH^2$ (py ta go)

d)Ta có $\dfrac{S_{BHC}}{S_{ABC}}=\dfrac{HM}{AM};\dfrac{S_{AHB}}{S_{ABC}}=\dfrac{HP}{CP};\dfrac{S_{AHC}}{S_{ABC}}=\dfrac{HN}{BN}$

$$\Rightarrow \frac{MH}{AM}+\frac{NH}{BN}+\frac{PH}{CP}=\frac{S_{BHC}+S_{AHB}+S_{AHB}}{S_{ABC}}=1.$$

Bài 66. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp (O;R). Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H và lần lượt cắt đường tròn (O) tại P và Q.

a) Chứng minh PQ//EF.

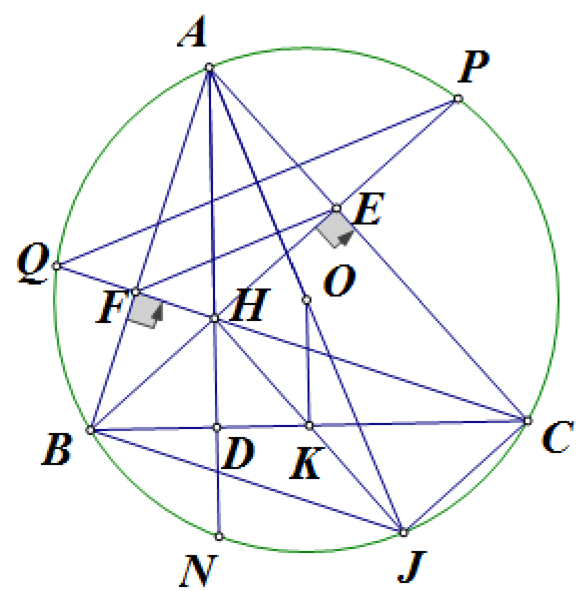
b) Chứng minh OA $\perp$ EF

c) Chứng minh rằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi khi A di động trên cung lớn BC của (O).

d) Tia AH lần lượt cắt BC và đường tròn (O) tại các điểm D và N. Chứng minh rằng

$$\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}\geq 9$$

Lời giải



a) Ta có $\widehat{BEC}=\widehat{BFC}=90^0$ => đỉnh E, F cùng nhìn BC dưới góc vuông nên tứ giác BCEF nội tiếp => $\widehat{EFC}=\widehat{EBC}=\widehat{PQC}$ => EF//BC

b) do tứ giác BCEF nội tiếp => $\widehat{ABE}=\widehat{ACF}\Rightarrow \overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{AQ}\Rightarrow AO\perp PQ$

mà PQ//EF => AO $\perp$ EF

c) Vẽ đường kính AJ của (O) .

Xét tứ giác BJCH có BH //CJ và CH //BJ

=> tứ giác BHCJ là hình bình hành;.

Gọi K là giao điểm của BC => KB = KC; HK = KJ => OK $\perp$ BC.

Mặt khác OA = OJ => OK là đường trung bình của tam giác AHJ => AH = 2OK

Mà BC cố định ; O cố định => OK không đổi => AH không đổi.

Do tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kính AH => AH là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF => bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi

d) ta có $\frac{AD}{HD}=\frac{S_{ABC}}{S_{BHC}};\frac{BE}{HE}=\frac{S_{ABC}}{S_{AHC}};\frac{CF}{HF}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABH}}$

Đặt $S_{ABC}=1;S_{BHC}=a;S_{AHC}=b;S_{AHB}=c\Rightarrow a+b+c=1$

và $\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có

$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc};\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}$

$\Rightarrow(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 9$ hay $\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}\ge 9$.

Dấu = xảy ra khi a = b = c $\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều.

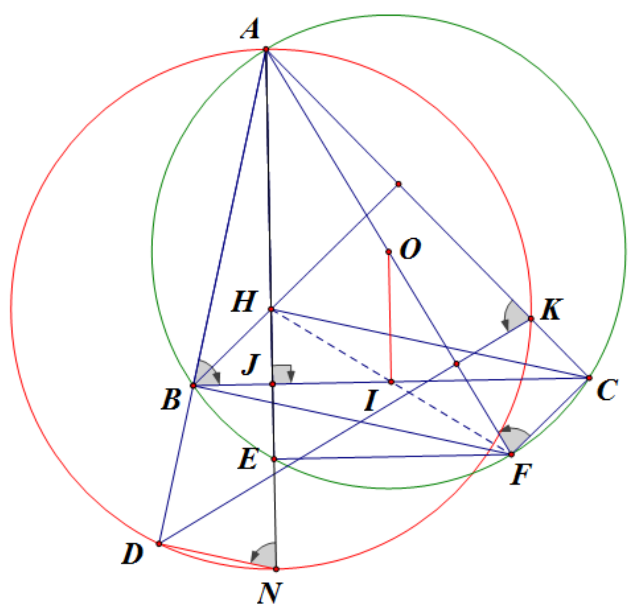
Bài 67. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O;R) có H là trực tâm của tam giác. Tia AH cắt (O) tại E. Kẻ đường kính AOF.

a) Chứng minh BC//EF và $\widehat{BAE}=\widehat{CAF}$

b) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh H, I, F thẳng hàng và AH = 2OI.

c) Vẽ đường tròn tâm H bán kính HA, đường tròn này cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại D và K. Chứng minh AO $\perp$ DK và D, J, K thẳng hàng (J là giao điểm của BC và AE)

d) Chứng minh rằng sinA + sinB + sinC <2(cosA + cosB + cosC)



a) BC//EF và $\widehat{BAE}=\widehat{CAF}$

*) ta có $\widehat{AEF} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => AE $\perp$ EF
mà H là trực tâm nên AE $\perp$BC
suy ra EF//BC (từ vuông góc đến song song).

*) ta có $\widehat{ABC} = \widehat{AFC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

mà $\widehat{ABC} + \widehat{BAE} = 90^0$; $\widehat{AFC} + \widehat{CAF} = 90^0 \left(\widehat{ACF} = 90^0\right)$

suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{CAF}$

b) H, I, F thẳng hàng và AH = 2OI.

*) ta có H là trực tâm tam giác ABC nên CH $\perp$ AB; BH $\perp$ AC

mà $\widehat{ABF} = \widehat{ACF} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> BH//CF và BF//CH => tứ giác BHCF là hình bình hành

=> HF và BC cắt nhau tại trung điểm mỗi đường; do I là trung điểm của BC => HF đi qua I hay H, I, F thẳng hàng.

*) Xét tam giác AHF có OA = OF; IH = IF => OI là đường trung bình của tam giác

=> AH = 2OI

c) AO $\perp$ DK và D, J, K thẳng hàng (J là giao điểm của BC và AE)

*) Gọi giao điểm AH và đường tròn (H) là N

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{AND}$ (tứ giác BDNJ nội tiếp)

$\widehat{ABC} = \widehat{AFC}; \widehat{AND} = \widehat{AKD}$ (các góc nội tiếp cùng chắn một cung)

=> $\widehat{AKD} = \widehat{AFC}$

Mà $\widehat{ACF} = 90^0 \Rightarrow AF \perp DK$ hay AO $\perp$ DK

*) Xem lại đề bài

d) Xét ΔABC ta có

sinA + sinB + sinC <2(cosA + cosB + cosC)

ta có $\widehat{ACB} = \widehat{AFC}$; $\widehat{ABF} = 90^\circ$

=> $BF = AF.cosF = AF.\, cosC = 2R.cosC$ (với R là bán kính (O)

Tương tự $CF = 2R.cosB$; $BC = 2R.sinA$ (vẽ thêm đường kính từ B);

Xét tam giác BCF có $BF + FC > BC \Leftrightarrow 2RcosC + 2RcosB > 2RsinA$

$\Leftrightarrow cosC + cosB > sinA$

Chứng minh tương tự ta có $cosA + cosB > sin\,C$; $cosA + cosC > sinB$

Cộng từng vế ta được $2\left(cosA + cosB + cosC\right) > sinA + sinB + sinC$

hay $sinA + sinB + sinC < 2\left(cosA + cosB + cosC\right)$.

Bài 68. Cho đường tròn $(O;R)$. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn vẽ tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm). Lấy điểm C bất kỳ trên cung nhỏ AB (C khác A và B). Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên AB, AM, BM.

a) Chứng minh tứ giác $AECD$ nội tiếp.

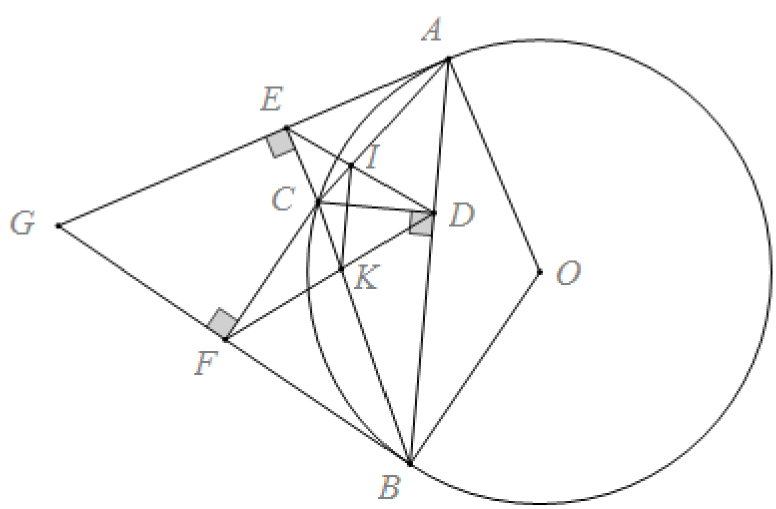
b) Chứng minh $\widehat{CDE} = \widehat{CBA}$.

c) Gọi I là giao điểm của AC và ED, K là giao điểm của CB và DF. Chứng minh $IK \parallel AB$.

d) Xác định vị trí của điểm C trên cung nhỏ AB để $AC^2 + CB^2$ nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó khi $OM = 2R$.

(Đề thi tuyển sinh THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Bình Định, năm học 2017 -2018)

Giải



a) Theo giả thiết ta có: $\widehat{AEC} = \widehat{ADC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AEC} + \widehat{ADC} = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AECD$ nội tiếp.

b) Vì tứ giác $AECD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CAE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{CE}$)

Mà $\widehat{CAE} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn cung AC trong (O))

$\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CBA}$.

c) Theo ý b) ta có: $\widehat{CBD} = \widehat{CDE}$ (1)

Tương tự $\widehat{CAD} = \widehat{CBF} = \widehat{CDF} \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CDF}$ (2)

Mà $\widehat{CBD} + \widehat{CAD} + \widehat{BCA} = 180^0$, từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CDF} + \widehat{CDE} + \widehat{BCA} = 180^0 \Rightarrow \widehat{KDI} + \widehat{KCI} = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $CIDK$ nội tiếp suy ra $\widehat{CKI} = \widehat{CDI}$ (chắn cung CI)

và $\widehat{CDE} = \widehat{CBD}$ (chứng minh trên) nên $\widehat{CKI} = \widehat{CBD}$ (đồng vị) suy ra $IK \parallel AB$.

d) Áp dụng BĐT Cô si ta có $AC^2 + CB^2 \geq 2AC.CB$ nên $AC^2 + CB^2$ nhỏ nhất khi dấu bằng xảy ra khi $AC = CB$ nên nhỏ nhất khi C chính giữa cung BA nhỏ.

Khi $OA = 2R$ suy ra tam giác MAB đều nên $MC = MA = AB = R\sqrt{3}$. Do đó $CA = CB = R$ (do tam giác COB đều) nên $AC^2 + CB^2 = 2R^2$.

Bài 69. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và E là một điểm bất kỳ trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác của góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K.

a) Chứng minh $\Delta KAF \backsim \Delta KEA$.

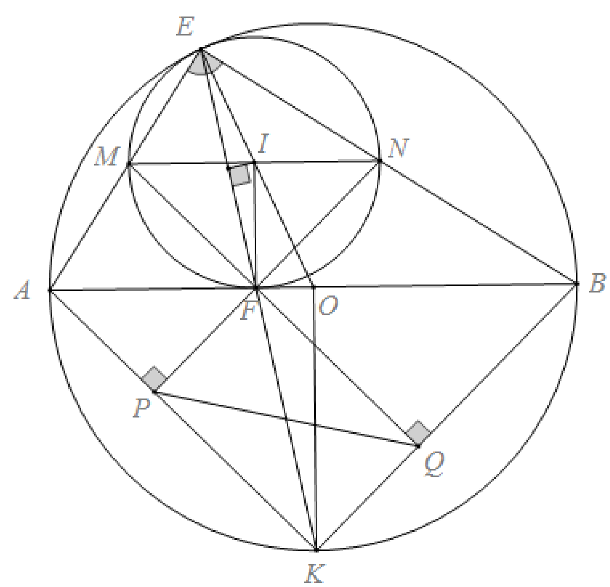
b) Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE. Chứng minh đường tròn (I), bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.

c) Chứng minh $MN \parallel AB$, trong đó M, N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I).

d) Gọi P là giao điểm của NF và AK; Q là giao điểm của MF và BK. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi ΔKPQ theo R khi E chuyển động trên đường tròn (O).

(Đề thi tuyển sinh vào 10 THPT, Tp. Hà Nội, năm học 2008 - 2009)

Giải



a) Xét (O) có $\widehat{AEK} = \widehat{KEB}$ (EK là phân giác $\widehat{E}$)

$\Rightarrow AK = KB$ (hai cung chắn hai góc nội tiếp bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{AEK} = \widehat{BAK}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Xét ΔKAF và ΔKEA:

$\widehat{K}$ chung

$\widehat{AEK} = \widehat{BAK}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta KAF \backsim \Delta KEA$ (g-g)

b) Ta có ΔEIF cân tại I và ΔEOK cân tại O (vì $IE = IF; OE = OK$)

$\Rightarrow \widehat{IFE} = \widehat{OKE}\left(=\widehat{OEK}\right)$

Mà hai góc này bằng nhau ở vị trí đồng vị

$\Rightarrow IF \parallel OK$

Vì $AK = KB$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{AOK} = 90^0 \Rightarrow OK \perp AB$

Ta có $IF \parallel OK; OK \perp AB \Rightarrow IF \perp AB$

Mà IF là một bán kính của $(I; IE)$

$\Rightarrow (I; IE)$ tiếp xúc với AB tại F.

c) Xét (O): $\widehat{AEB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét $(I; IE)$: $\widehat{MEN} = 90^0$ (vì $\widehat{AEB} = 90^0$)

$\Rightarrow MN$ là đường kính của $(I; IE)$

$\Rightarrow \Delta EIN$ cân tại I.

Mà ΔEOB cân tại O $\Rightarrow \widehat{ENI} = \widehat{OBE}\left(=\widehat{IEN}\right)$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow MN \parallel AB$.

d) Dễ thấy tứ giác là $PEQK$ hình chữ nhật; tam giác BFQ là tam giác vuông cân tại Q.

Chu vi $\Delta KPQ = KP + PQ + KQ$

Mà $PK = FQ$ (tứ giác là $PEQK$ là hình chữ nhật)

$FQ = QB$ (tam giác BFQ vuông cân tại Q) $\Rightarrow PK = QB$

$PQ = FK$ (tứ giác là $PEQK$ là hình chữ nhật)

$\Rightarrow$ Chu vi $\Delta KPQ = KP + PQ + KQ = QB + QK + FK = BK + FK$

Vì (O) cố định, K cố định (do K là điểm chính giữa cung AB)

$FK \le FO$ (quan hệ đường vuông góc, đường xiên)

$\Rightarrow$ Chu vi ΔKPQ nhỏ nhất $= BK + FO$ khi E là điểm chính giữa cung AB

Ta có $FO = R$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông cân FOB tính được $BK = R\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Chu vi ΔKPQ nhỏ nhất $= R + R\sqrt{2} = R\left(1+\sqrt{2}\right)$.

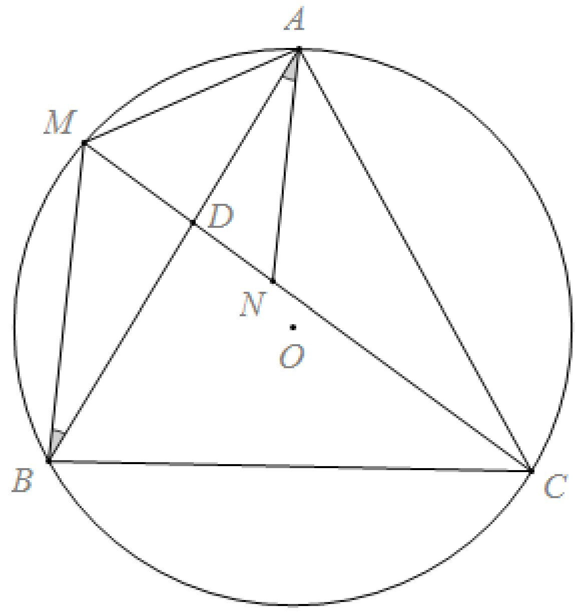
Bài 70. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ AB lấy điểm M. Đường thẳng qua A song song với BM cắt CM tại N.

a) Chứng minh rằng AMN là tam giác đều.

b) Chứng minh $MA + MB = MC$.

c) Gọi D là giao điểm của AB và CM. Chứng minh hệ thức $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}=\frac{1}{MD}$.

Giải



a) Vì ΔABC đều $\Rightarrow \widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}=60^0$

Tứ giác $AMBC$ nội tiếp (O) $\Rightarrow \widehat{AMC}=\widehat{ABC}=60^0$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$)

Vì $AN // BM \Rightarrow \widehat{ANM}=\widehat{BMC}$

Mà $\widehat{BMC}=\widehat{BAC}=60^0$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$)

$\Rightarrow \widehat{ANM}=60^0$

ΔANM có: $\widehat{AMN}=\widehat{ANM}=60^0$ $\Rightarrow \widehat{MAN}=60^0 \Rightarrow \Delta AMN$ đều.

b) Ta có: $\widehat{AMB}=\widehat{ANC}=120^0$; $\widehat{ANM}=\widehat{ABM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$)

$\Rightarrow \widehat{MAB}=\widehat{NAC}$.

Xét ΔAMB và ΔANC có:

$AM=AN$ (vì ΔAMN đều)

$\widehat{MAB}=\widehat{NAC}$ (cmt)

$AB=AC$ (vì ΔABC đều)

$\Rightarrow \Delta AMB=\Delta ANC$ (c-g-c)

$\Rightarrow MB=NC$

Mà $MN+NC=MC$

$\Rightarrow MN+MB=MC$

$\Rightarrow MA+MB=MC$ (do $MA=MN$)

c) Xét ΔMDB và ΔMAC có:

$\widehat{MBD}=\widehat{MCA}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{MA}$)

$\widehat{BMD}=\widehat{CMA}$ (chắn 2 cung bằng nhau)

$\Rightarrow \Delta MDB \backsim \Delta MAC$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{MD}{MB}=\dfrac{MA}{MC}$

$\Rightarrow MA.MB=MC.MD$

Mà $MA+MB=MC$ (cmt)

$\Rightarrow MA.MB=\left(MA+MB\right).MD$

$\Rightarrow \dfrac{MA+MB}{MA.MB}=\dfrac{1}{MD}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{MA}+\dfrac{1}{MB}=\dfrac{1}{MD}$.

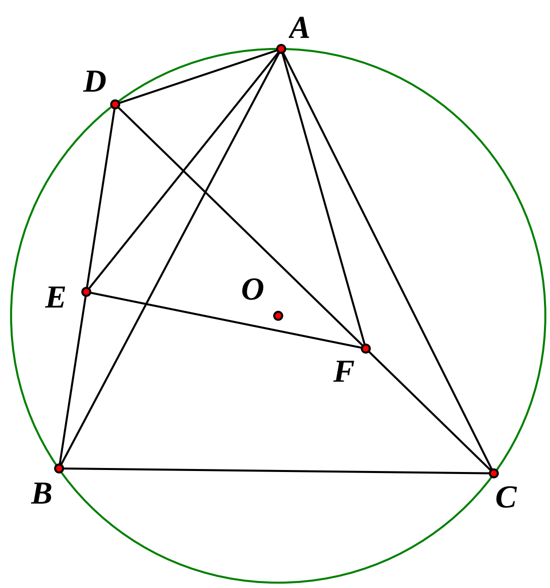
Bài 71: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$ .Trên cung nhỏ AB lấy điểm D .Trên tia DB lấy một điểm E , trên DC lấy điểm F sao cho $BE=CF$ .chứng minh rằng :

a) $DB<DC$

b) Tam giác AEF cân

c) Tứ giác $ADEF$ nội tiếp

Lời giải



a) Ta có : $sd\,\overset{\frown}{DC}>sd\,\overset{\frown}{BD}\Rightarrow \widehat{DBC}>\widehat{DCB}\Rightarrow DC>DB$

b) Vì $\Delta AEB=\Delta AFC(c-g-c)\Rightarrow AE=AF$ suy ra điều phải chứng minh

c) $\Delta AEB=\Delta AFC\Rightarrow \widehat{AFC}=\widehat{AEB}\Rightarrow \widehat{AED}=\widehat{AFD}$ nên tứ giác $ADEF$ nội tiếp

Bài 72: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $\left(O;R\right)$ và M là một điểm của cung nhỏ BC trên MA lấy điểm D sao cho $MD=MB$

a) Chứng minh $\Delta BDA=\Delta BMC$

b) Xác định điểm M trên BC để tổng $MA+MB+MC$ đạt giá trị lớn nhất

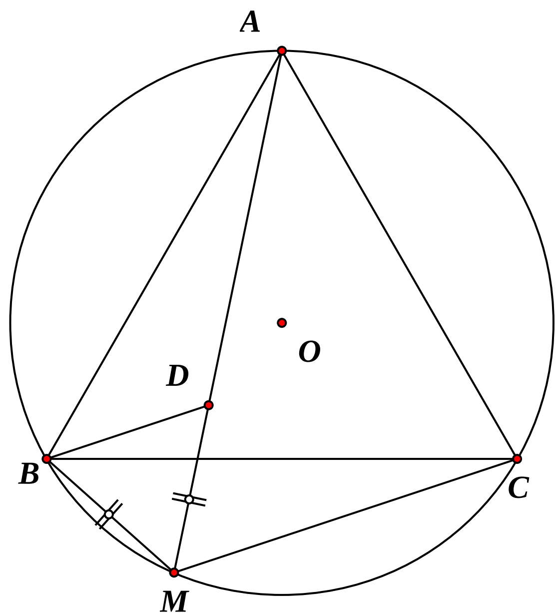
Lời giải

a) Ta có : $\Delta BDA = \Delta BMC(c-g-c)$

b) $\Delta BDA = \Delta BMC \Rightarrow MB = BD; MC = DA$ vậy :

$MA + MB + MC = MA + DB + DA = MA + BD + MA - DM = 2MA \le 4R$

Vậy giá trị lớn nhất là $4R$ khi AM là đường kính của (O)



Bài 73: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ AB lấy điểm M (M khác A và B) trên dây MC lấy điểm N sao cho $CN = BM$ .Kẻ đường kính BD của đường tròn (O)

a) Chứng minh tam giác AMN đều .Xác định vị trí M sao cho $MA + MB$ lớn nhất

b) Chứng minh MD là đường trung trực của AN

c) Từ điểm D kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt các đường BA ,MC lần lượt tại 2 điểm T, K tính số đo tổng $\widehat{NAT} + \widehat{NKT}$

Lời giải

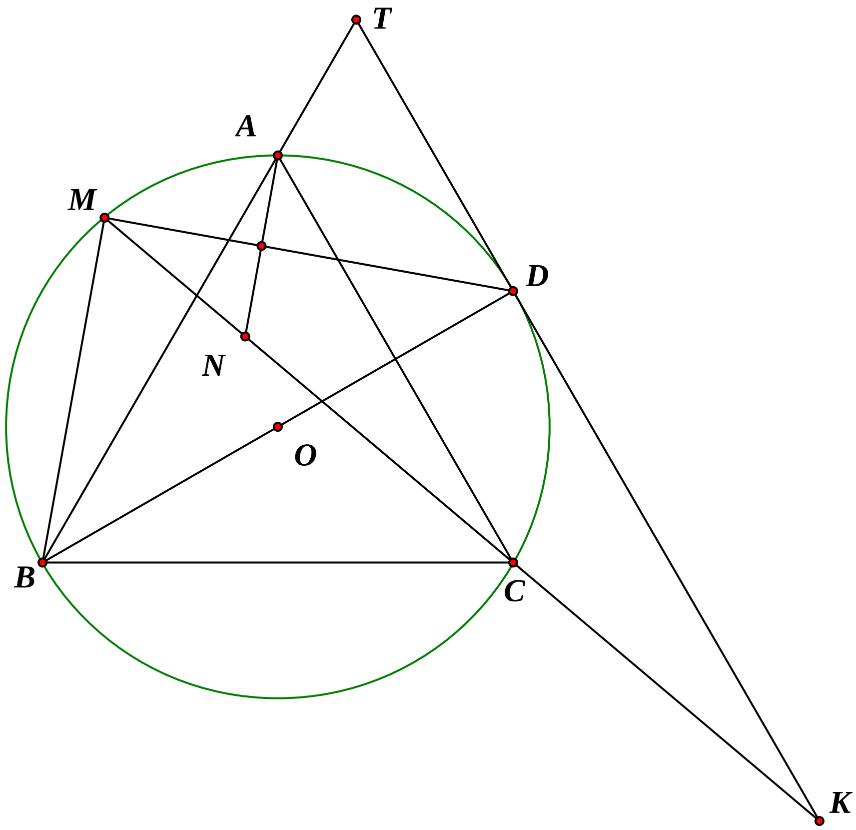
a) $\Delta BMA = \Delta CNA(c-g-c) \Rightarrow AM = AN$ và $\widehat{AMN} = \widehat{ABC} = 60°$ suy ra tam giác AMN đều

b) $MA + MB = CN + MN = CM \le 2R$ vậy $MA + MB$ lớn nhất khi CM là đường kính của (O)

c) Dễ thấy $BD \perp AC \Rightarrow KT // AC \Rightarrow \widehat{KTC} = \widehat{CAB} = 60°$

Mà $\widehat{ANK} = 180° - \widehat{ANM} = 120° \Rightarrow \widehat{ANK} + \widehat{KTA} = 180°$ suy ra tứ giác $NAKT$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{NAT} + \widehat{NKT} = 180°$



Bài 74: Cho đường tròn (O) và đường kính $AB = 2R$. Gọi C là trung điểm của OA và dây MN vuông góc với OA tại C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM, H là giao điểm của AK và MN.

a) Chứng minh $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Tính tích $AH.AK$ theo R.

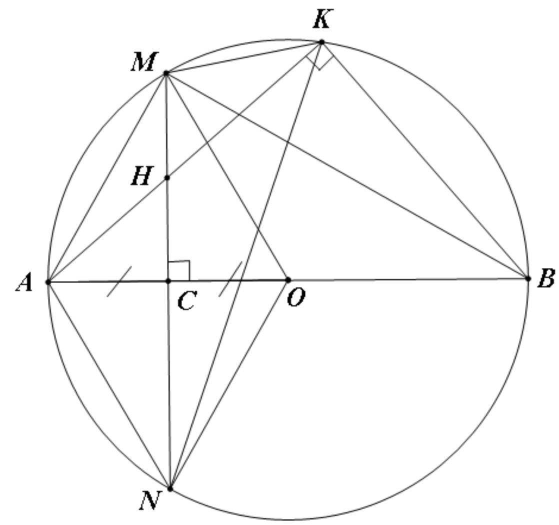
c) Chứng minh tứ giác $AMON$ là hình thoi.

d) Xác định vị trí điểm K để tổng $KM + KN + KB$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

(Đề tuyển sinh 10 THPT – TP. Hà Nội)

Lời giải

a) Chứng minh $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.



Xét tứ giác $BCHK$ ta có:

$\widehat{HCB} = 90^\circ$ (do $MN \perp OA$)

$\widehat{HKB} = \widehat{AKB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra: $\widehat{HCB} + \widehat{HKB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow BCHK$ nội tiếp.

b) Tính tích $AH.AK$ theo R.

Xét ΔACH và ΔAKB, ta có:

$\widehat{ACH} = \widehat{AKB} = 90^\circ$

$\widehat{A}$ chung

Suy ra: $\Delta ACH \backsim \Delta AKB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AC}{AK} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH.AK = AC.AB = \frac{1}{2}OA.AB = \frac{1}{2}.R.2R = R^2$$

Vậy $AH.AK = R^2$.

c) Chứng minh tứ giác $AMON$ là hình thoi.

Xét tứ giác $AMON$ ta có:

$AO \perp MN$ (gt)(1)

$\Rightarrow C$ là trung điểm MN (tính chất đường kính vuông góc với dây cung)

Mà C cũng là trung điểm của OA (gt)

Do đó: $AMON$ là hình bình hành (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AMON$ là hình thoi.

d) Xác định vị trí điểm K để tổng $KM + KN + KB$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski cho 4 số $1, 1, KM, KB$ ta có:

$$1.KM + 1.KB \le \sqrt{\left(1^2 + 1^2\right)\left(KM^2 + KB^2\right)}$$

Đẳng thức xảy ra khi: $KM = KB$.

Do đó: $KM + KB$ đạt giá trị lớn nhất khi $KM = KB$

$\Rightarrow K$ là điểm nằm chính giữa $\overset{\frown}{BM}$.

Mặt khác: Khi K là điểm nằm chính giữa $\overset{\frown}{BM}$ thì $OK \perp BM$ (3)

Mà $ON // AM$ và $AM \perp BM \Rightarrow ON \perp BM$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: NK là đường kính (khi K là trung điểm BM)

Do đó: Khi K là điểm nằm chính giữa $\overset{\frown}{BM}$ thì NK đạt giá trị lớn nhất (đường kính là dây cung lớn nhất)

Vậy $KM + KN + KB$ đạt giá trị lớn nhất khi K là điểm nằm chính giữa.

Khi đó: $KM = KB = AK = AO = R$ (vì $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MK} = \overset{\frown}{KB} = 60^\circ$)

$KM + KN + KB = R + 2\text{R} + R = 4R.$

Bài 75: Chođường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Gọi C là trung điểm của OA, qua C kẻ dây MN vuông góc với OA tại C. Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM, H là giao điểm của AK và MN.

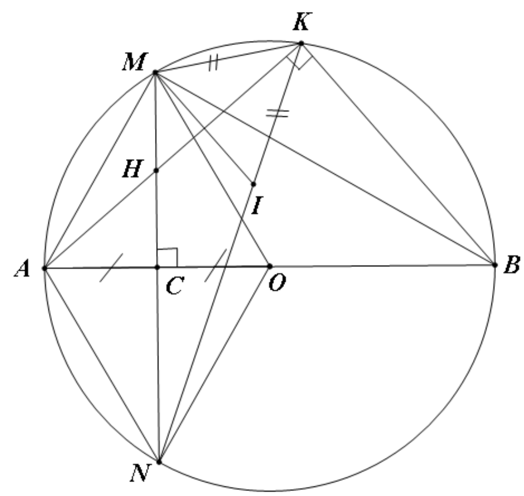
a) Chứng minh $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $AH.AK = R^2$.

c) Trên KN lấy điểm I sao cho $KI = KM$. Chứng minh $NI = KB$.

Lời giải

a) Chứng minh $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.



Xét tứ giác $BCHK$ ta có:

$\widehat{HCB} = 90^\circ$ (do $MN \perp OA$)

$\widehat{HKB} = \widehat{AKB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra: $\widehat{HCB} + \widehat{HKB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow BCHK$ nội tiếp.

b) Tính tích $AH.AK$ theo R.

Xét ΔACH và ΔAKB, ta có:

$\widehat{ACH} = \widehat{AKB} = 90^\circ$

$\widehat{A}$ chung

Suy ra: $\Delta ACH \# \Delta AKB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AC}{AK} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH.AK = AC.AB = \frac{1}{2}OA.AB = \frac{1}{2}.R.2R = R^2$$

Vậy $AH.AK = R^2$.

c) Chứng minh $NI = KB$.

Xét (O) ta có:

$\widehat{MNK} = \widehat{MBK}$ (góc nội tiếp cùng chắn 1 cung) (1)

Xét ΔMKI có:

$KM = KI$ (gt)

$\widehat{MKN} = 60^\circ$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{MN}$ với sđ$\overset{\frown}{MN} =$ sđ$\overset{\frown}{AM} +$ sđ$\overset{\frown}{AN} = 120^\circ$)

Do đó: ΔMKI đều $\Rightarrow MK = MI = KI$ và $\widehat{MIK} = 60^\circ$.

$\widehat{MIK} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{MIN} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ (2)

Mặt khác: $\widehat{MKB} = \widehat{MKA} + \widehat{AKB} = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$ (3)

Xét ΔMIN và ΔMKB ta có:

$\widehat{MNK} = \widehat{MBK}$ (cmt) và $\widehat{MIN} = \widehat{MKB} = 120°$ (do (2) và (3))

$\Rightarrow \widehat{NMI} = \widehat{BMK}$ (theo định lí tổng 3 góc trong 1 tam giác)

Lại có: $MI = MK$ (cmt)

Suy ra: $\Delta MIN = \Delta MKB$ (g.c.g)

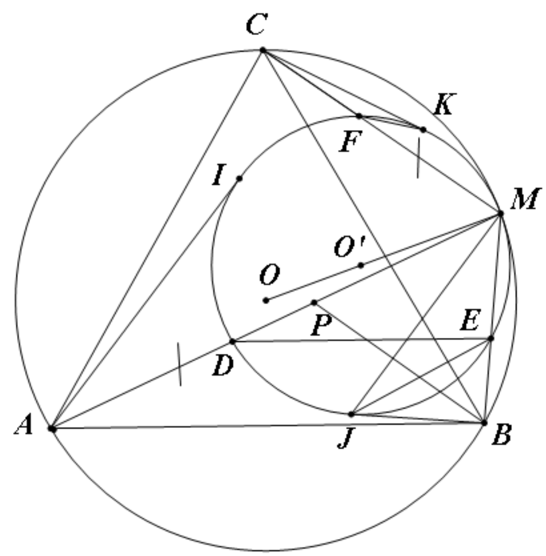
$\Rightarrow NI = KB$ (2 cạnh tương ứng bằng nhau) (đpcm)

Bài 76: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$, M là một điểm bất kì trên cung nhỏ BC (M khác B và C). Đường tròn $(O';R')$ tiếp xúc trong với đường tròn $(O;R)$ tại M (với $R' < R$). Các đoạn thẳng MA, MB, MC lần lượt cắt đường tròn $(O';R')$ tại điểm thứ hai là D, E, F. Từ A, B, C vẽ các tiếp tuyến AI, BJ, CK với đường tròn $(O';R')$ trong đó I, J, K là các tiếp điểm.

Chứng minh $DE // AB$ và $AI = BJ + CK$.

(Đề thi tuyển sinh vào 10 THPT Chuyên Phan Bội Châu – Tỉnh Nghệ An năm học 2010-2011)

Lời giải



*** Chứng minh** $DE // AB$

Kẻ tiếp tuyến xy của (O) tại M.

Khi đó ta có: $\widehat{EDM} = \widehat{EMx} = \widehat{BMx} = \widehat{BAM}$

$\Rightarrow DE // AB$ (2 góc ở vị trí đồng vị bằng nhau).

*** Chứng minh** $AI = BJ + CK$.

Lấy điểm P trên AM sao cho $AP = MC$

Xét ΔBAP và ΔBCM ta có:

$BA = BC$ (ΔABC đều)

$\widehat{BAP} = \widehat{BCM}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BM}$)

$AP = MC$ (cách dựng)

Suy ra: $\Delta BAP = \Delta BCM$ (c.g.c)

$\Rightarrow BP = BM$ (*)

Xét ΔBMP có:

$\widehat{BMP} = \widehat{BMA} = \widehat{BCA} = 60°$

$\widehat{MBP} = \widehat{MBC} + \widehat{CBP} = \widehat{ABP} + \widehat{CBP} = \widehat{ABC} = 60°$

Suy ra: ΔBMP cân tại P.

$\Rightarrow MP = BP$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra: $MP = BM$.

$\Rightarrow AM = BM + MC$

Tương tự cách chứng minh $ED // AB$ ta cũng chứng minh được $EF // BC$.

Theo định lý Talet ta có: $\frac{BE}{BM}=\frac{CF}{CM}$ (1)

Mà $\Delta BEJ \backsim \Delta BJM$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{CF}{CK}=\frac{BJ}{BM}\Rightarrow BE=\frac{BJ^2}{BM}$ (2)

Và $\Delta CFK \backsim \Delta CKM$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{CF}{CK}=\frac{CK}{CM}\Rightarrow CF=\frac{CK^2}{CM}$ (3)

Thay (2) và (3) vào (1) ta có: $\frac{BJ^2}{BM^2}=\frac{CK^2}{CM^2}\Rightarrow \frac{BJ}{BM}=\frac{CK}{CM}$

Tương tự ta cũng chứng minh được: $\frac{AI}{AM}=\frac{BJ}{BM}\Rightarrow \frac{AI}{AM}=\frac{BJ}{BM}=\frac{CK}{CM}$

Áp dụng dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{AI}{AM}=\frac{BJ}{BM}=\frac{CK}{CM}=\frac{BJ+CK}{BM+CM}=\frac{BJ+CK}{AM}$

Vậy $AI=BJ+CK$.

Bài 77.

Cho đường tròn *(O)*, đường kính *AB* cố định, một điểm *I* nằm giữa *A* và *O* sao cho $AI=\frac{2}{3}AO$. Kẻ dây *MN* vuông góc với *AB* tại *I*. Gọi *C* là điểm tùy ý thuộc cung lớn *MN* sao cho *C* không trùng với *M, N* và *B, AC* cắt *MN* tại *E.*

a) Chứng minh tứ giác *IECB* nội tiếp.

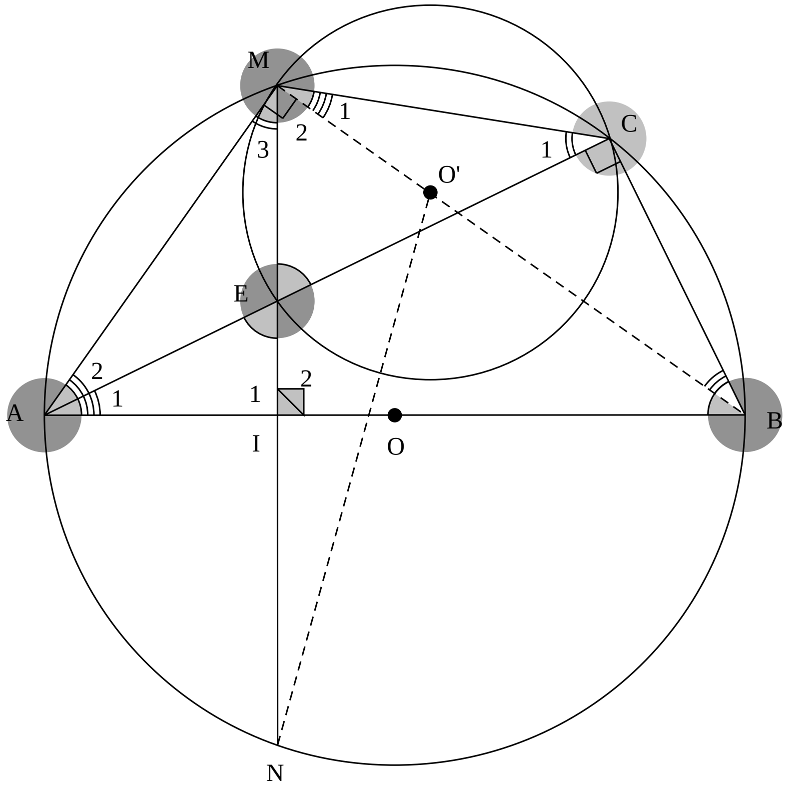
b) Chứng minh $\triangle AME \backsim \triangle ACM$ và $AM^2=AE.AC$.

c) Chứng minh $AE.AC-AI.IB=AI^2$.

d) Gọi *O'* là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle CME$. Chứng minh *M, O', B* thẳng hàng. Hãy xác định vị trí điểm *C* sao cho *NO'* nhỏ nhất.

(Trích đề thi TS vào 10 THPT - TP Hà Nội 2002-2003)

Hướng dẫn giải:



a) Ta có: $AO \perp MN = I$ (gt) $\Rightarrow \widehat{EIB} = 90^\circ$ (Vì: $E \in MN$)

Mà: $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{ECB} = 90^\circ$ (Vì: $E \in AC$) $\Rightarrow \widehat{EIB} + \widehat{ECB} = 180^\circ$

$\Rightarrow \square IECB$ nội tiếp (vì: $\widehat{EIB}; \widehat{ECB}$ đối nhau).

b) Ta có: $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{AMB} + \widehat{M_1} = 90^\circ + \widehat{M_1}$ (1)

Mà: $\widehat{AEM} = \widehat{AIE} + \widehat{A_1} = 90^\circ + \widehat{A_1}$ (2) (góc ngoài $\triangle AIE$)

Mặt khác: $\widehat{A_1} = \widehat{M_1} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{BC}$)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{AMC}$

Xét $\triangle AEM$ và $\triangle AMC$ có: $\begin{cases} \widehat{A}\ chung \\ \widehat{AEM} = \widehat{AMC}\ (cmt) \end{cases} \Rightarrow \triangle AEM \backsim \triangle AMC\ (g.g)$

Vì: $\triangle AEM \backsim \triangle AMC\ (cmt) \Rightarrow \frac{AE}{AM} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow AM^2 = AE.AC$ (đpcm)

c) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle MBI$ có: $\begin{cases} \widehat{I_1} = \widehat{I_2} = 90^\circ \\ \widehat{AMI} = \widehat{MBI}\ (hay\ \widehat{MBA}) \end{cases}$ (Cùng phụ với $\widehat{BAM}$)

$\Rightarrow \triangle AMI \backsim \triangle MBI\ (g.g) \Rightarrow \frac{MI}{BI} = \frac{AI}{MI} \Rightarrow MI^2 = IA.IB$ (3)

Mà: $AM^2 = AE.AC$ (cmt) (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow AE.AC - IA.IB = AM^2 - MI^2 = AI^2$ (đpcm)

d) Ta có: $\widehat{C_1} = \widehat{M_3}$ $\left(Do: \triangle AEM \ \square \ \triangle AMC\ (cmt) \right)$

Mà: $\widehat{C_1} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{ME}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{ME}$) $\Rightarrow \widehat{M_3} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{ME}$

$\Rightarrow MA$ là tiếp tuyến tại M của *(O')* $\Rightarrow MA \perp MO'$ (5)

Mặt khác: $MA \perp MB$ (cmt) (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow M, O', B$ thẳng hàng.

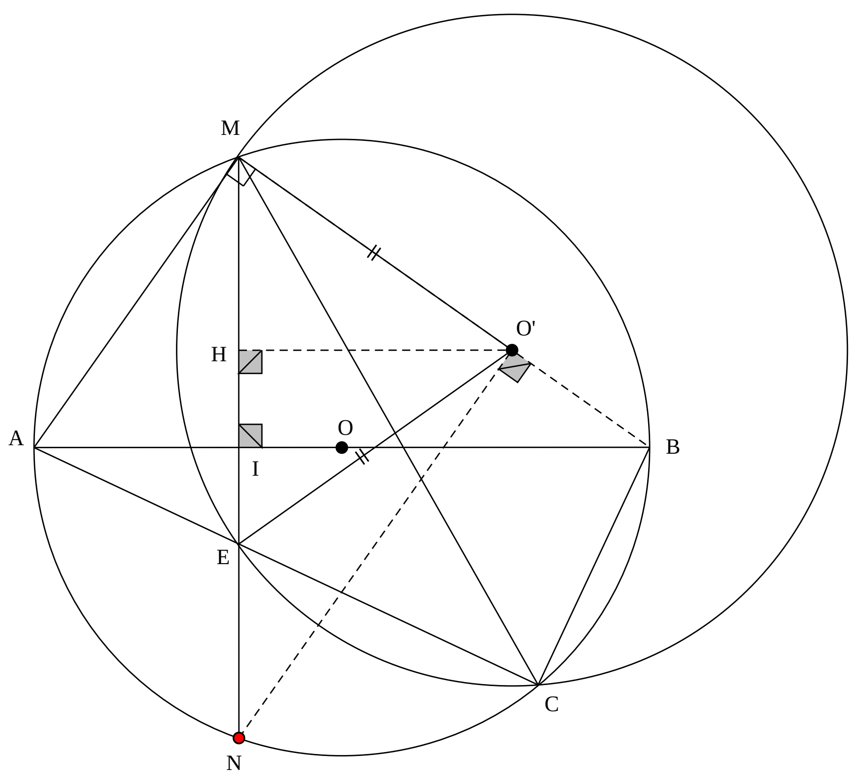
Ta thấy: *NO'* nhỏ nhất khi *O'* là hình chiếu vuông góc của *N* trên *MB*.

Hay: $NO' \perp MB = O'$

Từ O' kẻ đường thẳng vuông góc với MN tại H. Lấy điểm E đối xứng với M qua H $\Rightarrow O'M = O'E \Rightarrow E, M \in (O')$

Vẽ đường tròn *(O')* cắt *(O)* tại *C*.

Vậy *C* thuộc $\overset{\frown}{NB}$ của đường tròn *(O)* sao cho *OC* = *OM* = *OE* thì *NO'* nhỏ nhất.



Bài 78.

Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB* = 2*R*. Gọi *M* là một điểm bất kỳ thuộc *(O)* *(M* khác *A*, *B)*. Các tiếp tuyến của đường tròn *(O)* tại *A* và *M* cắt nhau tại *E*. Vẽ *MP* vuông góc với *AB* tại *P*, vẽ *MQ* vuông góc với *AE* tại *Q*.

a) Chứng minh tứ giác *AEMO* nội tiếp và tứ giác *APMQ* là hình chữ nhật.

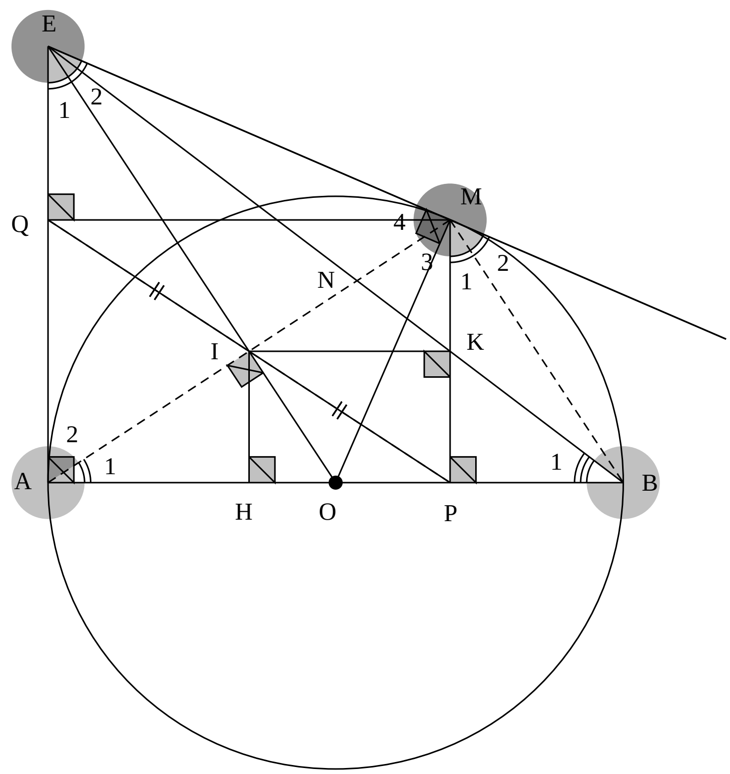
b) Gọi I là trung điểm của PQ. Chứng minh O, I, E thẳng hàng.

c) Gọi K là giao điểm của EB và MP. Chứng minh rằng $\triangle AEO \backsim \triangle PMB$ và $KM = KP$.

d) Đặt $AP = x$. Tính MP theo R và x. Tìm vị trí của điểm M trên đường tròn *(O)* để hình chữ nhật $APMQ$ có diện tích lớn nhất.

(Trích đề thi TS vào 10 THPT - TP Hồ Chí Minh 2010-2011)

Hướng dẫn giải:



a) Ta có: $\widehat{EMO} = \widehat{EAO} = 90^\circ\ (gt) \Rightarrow \widehat{EMO} + \widehat{EAO} = 180^\circ$

$\Rightarrow \square AEMO$ nội tiếp (vì: $\widehat{EAO}; \widehat{EMO}$ đối nhau).

Xét $\Rightarrow \square AQMP$ có: $\widehat{Q} = \widehat{A} = \widehat{P} = 90^\circ\ (gt) \Rightarrow \square AQMP$ là hình chữ nhật.

b) Vì: $IQ = IP$ *(gt)* $\Rightarrow IA = IM$ (T/c của hình chữ nhật)

Mà: $EA = EM$ (T/c 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow EI \perp AM$ (T/c tam giác cân) (1)

Mặt khác: $OI \perp AM$ $(Do: IA = IM)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow E, O, I$ thẳng hàng (đpcm).

c) Ta có: $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$ (T/c 2 tiếp tuyến cắt nhau) và $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$ (cùng phụ với $\widehat{B}$)

Mà: $\widehat{A_1} = \widehat{E_2}$ (Vì: $\square AEMO$ nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{M_1}$

Xét $\triangle AEO$ và $\triangle PMB$ có: $\begin{cases} \widehat{E_1} = \widehat{M_1}\ (cmt) \\ \widehat{A} = \widehat{P} = 90^\circ\ (gt) \end{cases} \Rightarrow \triangle AEO \backsim \triangle PMB\ (g.g)$

Do: $\begin{cases}\widehat{A_1}=\widehat{M_1}\,(cmt)\\ \widehat{A_1}=\widehat{M_2}=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{MB}\end{cases}\Rightarrow \widehat{M_1}=\widehat{M_2}\Rightarrow$ MB là tia phân giác ngoài của $\triangle MKE$

$\Rightarrow \dfrac{BK}{BE}=\dfrac{MK}{ME}(1)$ (T/c đường phân giác trong tam giác)

Mặt khác: $\begin{cases}\widehat{A_2}=\widehat{M_4}\,(cmt)\\ \widehat{A_2}=\widehat{M_3}\,(So\,le\,trong)\end{cases}\Rightarrow \widehat{M_3}=\widehat{M_4}\Rightarrow$ MA là tia phân giác trong của $\triangle MKE$

Gọi N là giao điểm của EB và MA $\Rightarrow \dfrac{KN}{NE}=\dfrac{MK}{ME}(2)$ (T/c đường phân giác trong tam giác)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{KN}{NE}=\dfrac{BK}{BE}\left(=\dfrac{MK}{ME}\right)(3)$

Lại có: $MP//EA$. Theo Ta-Let $\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{MK}{EA}=\dfrac{KN}{NE}\\ \dfrac{KP}{EA}=\dfrac{BK}{BE}\end{cases}\Rightarrow \dfrac{MK}{EA}=\dfrac{KP}{EA}(Theo\,(3))\Rightarrow MK=KP$ (đpcm)

d) Ta có: $\widehat{AMB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại M.

$\Rightarrow PM^2=PA.PB$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Rightarrow PM^2=PA.(OB-OP)=x.(R-(x-R))=x.(2R-x)$

$\Rightarrow PM=\sqrt{x.(2R-x)}$ (đvđd)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB.

$\Rightarrow S_{AQMP}=2S_{AMP}=2.(S_{AIO}+S_{IMP})=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot IH.AP+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot IK.MP$

Mà: $IH=\dfrac{1}{2}MP;IK=\dfrac{1}{2}AP\ (cmt)$

$\Rightarrow S_{AQMP}=\dfrac{1}{2}\cdot MP.AP+\dfrac{1}{2}\cdot AP.MP=AP.MP$

Mặt khác: $AP.MP\overset{\text{Cô-Si}}{\le}\dfrac{AP+MP}{2}$. Dấu "=" xảy ra $AP=MP$.

Hay: $\square AQMP$ là hình vuông (Tức M nằm chính giữa cung AB).

Bài 79.

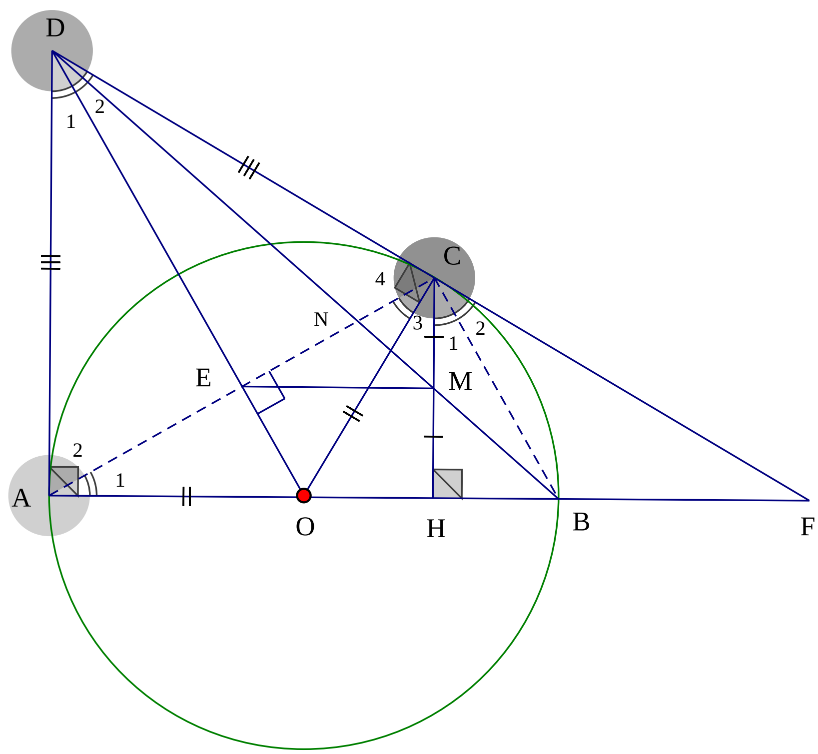
Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB*. Trên đường tròn *(O)* lấy điểm *C (C* khác *A, B* và *CA > CB).* Các tiếp tuyến của đường tròn *(O)* tại *A* và *C* cắt nhau tại *D*. Kẻ *CH* vuông góc với *AB* ($H\in AB$), *DO* cắt *AC* tại *E*.

a) Chứng minh tứ giác *OECH* nội tiếp.

b) Đường thẳng *CD* cắt đường thẳng *AB* tại *F*. Chứng minh rằng $2\widehat{BCF}+\widehat{CFB}=90^\circ$.

c) *BD* cắt *CH* tại *M*. Chứng minh *EM // AB*.

Hướng dẫn giải:



a) Ta có: $\widehat{OEC}=\widehat{OHC}=90^{\circ}\ (gt)\Rightarrow \widehat{OEC}+\widehat{OHC}=180^{\circ}$

Mà: $\widehat{OEC};\widehat{OHC}$ đối nhau $\Rightarrow \square CEOH$ nội tiếp.

b) Ta có: $\widehat{C_1}=\widehat{A_1}$ (Cùng phụ với $\widehat{B}$)

Mà: $\widehat{C_2}=\widehat{A_1}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CB}$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{CB}$)

$\Rightarrow \widehat{C_1}=\widehat{C_2}\left(=\widehat{A_1}\right)$

Mặt khác: $\widehat{C_1}+\widehat{C_2}+\widehat{F}=90^{\circ}$ (Vì: $\triangle HCF$ vuông tại H)

$\Rightarrow 2\widehat{C_2}+\widehat{F}=90^{\circ}\Rightarrow$ đpcm.

c) Ta có: $\widehat{C_1}=\widehat{C_2}\,(cmt)\Rightarrow$ CB là tia phân giác ngoài của $\triangle CDM$ tại C.

$\Rightarrow \frac{BM}{MD}=\frac{MC}{CD}$ (1)

Mà: $\widehat{ACB}=90^{\circ}$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AC\perp CB=C$

$\Rightarrow AC$ là tia phân giác trong của $\triangle CDM$ tại C.

Gọi N là giao điểm của DC và AC.

$\Rightarrow \frac{MN}{ND}=\frac{MC}{CD}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{BM}{MD} = \dfrac{MN}{ND}\left(= \dfrac{MC}{CD}\right)(3)$

Mặt khác: $AD // CH \ (gt) \Rightarrow CM,\ MH // AD \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{CM}{AD} = \dfrac{MN}{ND} \\ \dfrac{MH}{AD} = \dfrac{BM}{MD} \end{cases}$ (Theo Ta-Let)

$\Rightarrow \dfrac{CM}{AD} = \dfrac{MH}{AD} \Rightarrow CM = MH$ (4)

Lại có: $\begin{cases} DA = DC \\ \widehat{D_1} = \widehat{D_2} \end{cases}$ (T/c 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow EA = EC$ (Vì: $\triangle CDA$ cân tại D) (5)

Từ (4) và (5) $EM // = \dfrac{1}{2}AH$ (Đường TB trong tam giác) $\Rightarrow EM // AB$ (Vì: $H \in AB$)

Bài 80:

Cho đường trong (O) đường kính $AB = 6cm$ .Gọi H là điểm nằm giữa A và B sao cho $AH = 1cm$ .Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với AB , đường thẳng này cắt đường tròn (O) tại C và D . Hai đường thẳng BC và DA cắt nhau tại M . Từ M hạ đường vuông góc MN với đường thẳng AB (N thuộc đường thẳng AB).

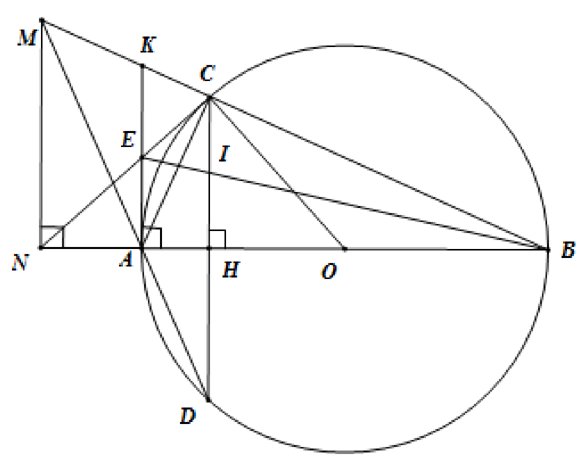
a)Chứng minh $MNAC$ là tứ giác nội tiếp.

b)Tính độ dài CH và tính $\tan\widehat{ABC}$.

c) Chứng minh NC là tiếp tuyến của đường trong (O)

d)Tiếp tuyến tại A của (O) cắt NC ở E . Chứng minh đường thẳng EB đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH .

LỜI GIẢI



Xét tứ giác $MNAC$ có: $\widehat{MNA} = 90^0$ (Theo giả thiết)

$\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{ACM} = 90^0$

Nên $\widehat{MNA} + \widehat{ACB} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Vì 2 góc ở vị trí đối nhau nên $MNAC$ là tứ giác nội tiếp.

b)+)Theo giả thiết: $AH = 1cm$ mà $AB = 6cm \Rightarrow HB = 5cm$

Áp dụng hệ thức lượng vào ΔACB vuông tại A Ta có:

$$CH^2 = AH.HB = 1.5 = 5 \Rightarrow CH = \sqrt{5}\,(\text{cm})$$

+)Xét ΔACB vuông tại A có:

$$\tan\widehat{ACB}=\tan\widehat{CBH}=\frac{CH}{HB}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

c)Ta có: $MN//CD$ (vì cùng vuông góc với AB) nên: $\widehat{NMD}=\widehat{MDC}$ (2 góc so le trong)

Mà $\widehat{ADC}=\widehat{ABC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{AC}$)

Lại có: $OB=OC=R\Rightarrow\widehat{OBC}=\widehat{OCB}$;

Tứ giác $MNAC$ nội tiếp $\widehat{AMN}=\widehat{ACN}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{AN}$)

Do đó: $\widehat{ACN}=\widehat{OBC}$

Mà $\widehat{OCB}+\widehat{OCA}=\widehat{ACB}=90^0$ $\Rightarrow\widehat{ACN}+\widehat{ACO}=90^0$ hay $\widehat{NCO}=90^0\Rightarrow CN\perp CO$

Từ đó: NC là tiếp tuyến của đường trong (O).

d) Gọi K là giao điểm của AE và BC , I là giao điểm của CH và EB Ta có: $KE//CD$ (vì cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow\widehat{AKB}=\widehat{DCB}$ (hai góc đồng vị)

Mà $\widehat{DAB}=\widehat{DCB}$ (cùng chắn cung BD); $\widehat{DAB}=\widehat{MAN}$ (đối đỉnh); $\widehat{MAN}=\widehat{MCN}$ (cùng chắn $\overset\frown{MN}$).

Suy ra: $\widehat{EKC}=\widehat{ECK}\Rightarrow\Delta KEC$ cân ở E

Do đó: $EK=EC$. Mà $EC=EA$ (Tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) nên $EK=EA$.

ΔKBE có: $CI//KE\Rightarrow\frac{CI}{KE}=\frac{BI}{BE}$ và ΔABE có $IH//AE\Rightarrow\frac{IH}{AE}=\frac{BI}{BE}$

Vậy $\frac{CI}{KE}=\frac{IH}{AE}$ mà $KE=AE$ nên $IC=IH$ (đpcm).

Bài 81:

Cho đường tròn (O) đường kính $AB=2R$ .Gọi d_1,d_2 là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại hai điểm A và B .Gọi I là trung điểm của OA và E là điểm thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Đường thẳng d đi qua E và vuông góc với EI cắt hai đường thẳng d_1,d_2 lần lượt tại M và N .

a)Chứng minh tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

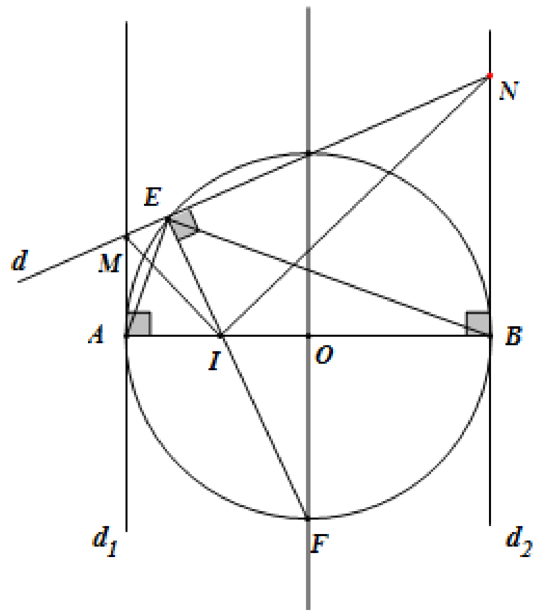
b)Chứng minh $\widehat{ENI}=\widehat{EBI}$ và $\widehat{MIN}=90^0$

c) Chứng minh: $AM.BN=AI.BI$

d) Gọi F là điểm chính giữa cung AB không chứa điểm E của đường tròn (O) . Hãy tính diện tích của tam giác MIN theo R khi ba điểm E,I,F thẳng hàng.

LỜI GIẢI

a) Chứng minh tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.



Xét tứ giác $AMEI$ có: $\widehat{MAI} = 90^0$ (vì d1 là tiếp tuyến)

$\widehat{IEM} = 90^0$ (Theo giả thiết)

Suy ra $\widehat{MAI} + \widehat{IEM} = 180^0$

Vậy Tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp

b)Chứng minh $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ và $\widehat{MIN} = 90^0$

+)Xét tứ giác $BIEN$ có: $\widehat{NBI} = 90^0$ (vì d2 là tiếp tuyến)

$\widehat{NEI} = 90^0$ (Theo giả thiết)

Suy ra $\widehat{NBI} + \widehat{NEI} = 180^0$

Vậy Tứ giác $BIEN$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EI).

+)Xét ΔMIN và ΔAEB có: $\widehat{EMI} = \widehat{EAI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EI)

$\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EI)

Nên $\Delta MIN \sim \Delta AEB(g.g) \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{MIN}$

Mà $\widehat{AEB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Vậy $\widehat{MIN} = 90^0$.

c) Chứng minh: $AM.BN = AI.BI$

Xét ΔAMI và ΔBIN có: $\widehat{MAI} = \widehat{NBI} = 90^0$

$\widehat{AMI} = \widehat{BIN}$ (Vì cùng phụ với $\widehat{AIM}$)

Nên $\Delta AMI \sim \Delta BIN(g.g) \Rightarrow \dfrac{AM}{BI} = \dfrac{AI}{BN} \Rightarrow AM.BN = AI.BI$

d) Khi $E;I;F$ thẳng hàng mà F là điểm chính giữa cung AB nên sđ $\overset{\frown}{AF} = 90^0$

Mà Tứ giác $AMEI$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AMI} = \widehat{AEF} = 45^0 \Rightarrow \Delta AMI$ vuông cân tại A .

Chứng minh tương tự : ΔBNI vuông cân tại B

Áp dụng định lý Py-ta-go vào ΔAMI và ΔBNI ta có:

$$MI^2 = AM^2 + AI^2 = \left(\frac{1}{2}R\right)^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 = \frac{1}{2}R^2 \Rightarrow MI = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$NI^2 = BN^2 + BI^2 = \left(R + \frac{1}{2}R\right)^2 + \left(R + \frac{1}{2}R\right)^2 = \frac{9}{2}R^2 \Rightarrow IN = \frac{3R\sqrt{2}}{2}$$

Mà ΔMIN vuông tại I nên $S_{MIN} = \dfrac{1}{2}MI.IN = \dfrac{1}{2}.\dfrac{R\sqrt{2}}{2}.\dfrac{3R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3R^2}{4}$ (đvdt)

Bài 82: Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB . Gọi C là điểm chính giữa cung AB . Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD=CB$, OD cắt AC tại M . Từ A kẻ AH vuông góc với OD tại H , AH cắt DB tại N và cắt nửa đường tròn (O) tại E .

a)Chứng minh $MCNH$ là tứ giác nội tiếp, $OD // EB$

b)Gọi K là giao điểm EC và OD . Chứng minh rằng $\Delta CKD=\Delta CEB$. Suy ra C là trung điểm của KE

c)Chứng minh ΔEHK vuông cân, $MN // AB$

d)Tính theo R diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác $MHNC$.

LỜI GIẢI

a)Chứng minh $MCNH$ là tứ giác nội tiếp, $OD//EB$

+)Xét tứ giác $MCNH$ có: $\widehat{MHN}=90^0$(Theo giả thiết)

$\widehat{MCN}=90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

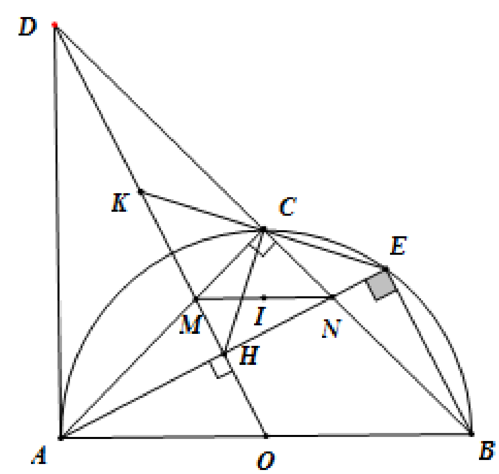
Suy ra $\widehat{MHN}+\widehat{MCN}=180^0$

Vậy Tứ giác $MCNH$ là tứ giác nội tiếp.

+)Ta có: $\widehat{AEB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)$\Rightarrow AE\perp BE$ (1)

Theo giả thiết: $AH\perp OD\Rightarrow AE\perp OD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $OD//EB$.



b) Chứng minh rằng $\Delta CKD=\Delta CEB$.

Xét ΔCKD và ΔCEB có:

$\widehat{KCD}=\widehat{ECB}$ (đối đỉnh)

$CD=CB$(giả thiết)

$\widehat{EBC}=\widehat{KDC}$ (so le trong)

$\Rightarrow \Delta CKD=\Delta CEB(g.c.g)\Rightarrow EC=KC$.

Vậy Suy ra C là trung điểm của KE .

c) Chứng minh ΔEHK vuông cân, $MN//AB$

Vì C là điểm chính giữa cung AB nên

$$sđ\,\overset{\frown}{AC}=sđ\,\overset{\frown}{CB}=90^0$$

$$\Rightarrow \widehat{AEC}=\frac{1}{2}sđ\,\overset{\frown}{AC}=45^0$$

Mà $AE\perp OD\Rightarrow \Delta EHK$ vuông cân tại H

+)Vì ΔEHK vuông cân tại H có C là trung điểm của KE .nên HC là đường trung tuyến đồng thời là đường cao$\Rightarrow HC\perp EK\Rightarrow \widehat{HCE}=90^0$

Ta có: $\widehat{ECB}=\widehat{HCM}$ (vì cùng phụ với $\widehat{HCN}$)

Mà $MCNH$ là tứ giác nội tiếp $\widehat{MHN} = \widehat{MCH}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MH)

Lại có: $\widehat{ECB} = \widehat{EAB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EB)

Do đó $\widehat{MNH} = \widehat{EAB}$. Mà 2 góc này ở vị trí so le trong nên $MN // AB$.

d)Tính theo R diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác $MHNC$ .Theo giả thiết: $CD = CB \Rightarrow C$ là trung điểm của BD

Mà $OA = OB = R \Rightarrow O$ là trung điểm của AB

Do đó: AC và DO là trung tuyến của ΔADB

AC và DO cắt nhau tại M nên M là trọng tâm ΔADB. Theo tính chất trọng tâm ta có:

$$\frac{MC}{AC} = \frac{1}{3}$$

Mặt khác: $MN // AB \Rightarrow \Delta CMN \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CA} = \frac{1}{3}$

Ta có: $\Rightarrow MN = \frac{1}{3} AB = \frac{2R}{3}$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MCNH \Rightarrow I$ là trung điểm của MN do

$\widehat{MHN} = 90^0 \Rightarrow IM = \frac{MN}{2} = \frac{R}{3}$

Vậy diện tích đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MCNH$ là

$$S = \pi . IM^2 = \frac{\pi R^2}{9} \text{ (đvdt).}$$

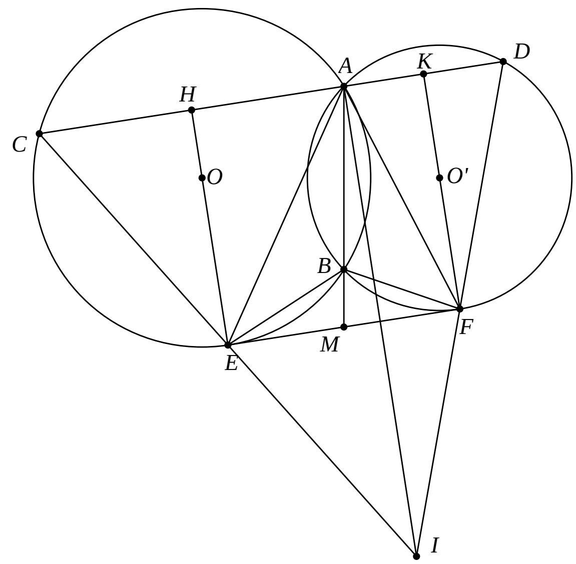
Bài 83: Cho đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B, tiếp tuyến chung với hai đường tròn (O) và (O') về phía mặt phẳng bờ OO' chứa điểm B, có tiếp điểm theo thứ tự là E và F. Qua A kẻ cát tuyến song song với EF cắt đường tròn (O) và (O') theo thứ tự tại C và D. Đường thẳng CE và đường thẳng DF cắt nhau tại I.

a) Chứng minh $IA \perp CD$.

b) Chứng minh tứ giác $IEBF$ là tứ giác nội tiếp

c) Chứng minh đường thẳng AB đi qua trung điểm của EF.

Giải



a)Kẻ OE cắt AC tại H, OF cắt AD tại K

Vì $CD//EF \Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{AEF}$ (sltr)

mà $\widehat{ACE} = \widehat{AEF} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AE}$

$\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{CAE} \Rightarrow \Delta AEC$ cân E $\Rightarrow EC = EA$ (1)

Mặt khác $CD//EF \Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{FEI}$ (đồng vị); $\widehat{CEH} + \widehat{FEI} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{CEH} + \widehat{ACE} = 90° \Rightarrow \widehat{CHE} = 90° \Rightarrow HC = HA$

Tương tự: $KA = KD$

Tứ giác $HEFK$ là hình chữ nhật $\Rightarrow EF = HK \Rightarrow EF = \frac{1}{2}CD$

Vì $CD//EF$ nên $\frac{IE}{IC} = \frac{EF}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow IE = EC = \frac{1}{2}IC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EC = EA = IE$ $\Rightarrow \Delta AIC$ vuông tại I $\Rightarrow IA \perp CD$

b) Tứ giác $CABE$ và tứ giác $ADFB$ nội tiếp đường tròn (O) và (O')

$\Rightarrow \widehat{ACE} + \widehat{ABE} = 180°; \widehat{ADF} + \widehat{ABF} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{ABE} + \widehat{ABF} = 360° - \left(\widehat{ACE} + \widehat{ADE}\right) = 360° - \left(180° - \widehat{DIC}\right) = 180° + \widehat{DIC}$

Mặt khác $\widehat{ABE} + \widehat{ABF} + \widehat{FBE} = 360°$

$\Rightarrow 180° + \widehat{DIC} + \widehat{FBE} = 360° \Rightarrow \widehat{DIC} + \widehat{FBE} = 180°$

Mà $\widehat{DIC}, \widehat{FBE}$ là hai góc đối nhau

Vậy tứ giác $IEBF$ là tứ giác nội tiếp.

c) Kẻ AB cắt EF tại M.

Xét ΔMEB và ΔMAE có $\widehat{AME}$ chung; $\widehat{BEM} = \widehat{EAM} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EB}$

$\Rightarrow \Delta MEB \backsim \Delta MAE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{ME}{MA} = \dfrac{MB}{ME} \Rightarrow ME^2 = MA.MB$

Tương tự: $MF^2 = MA.MB$

Do đó $ME^2 = MF^2 \Rightarrow ME = MF$

Vậy đường thẳng AB đi qua trung điểm M của EF.

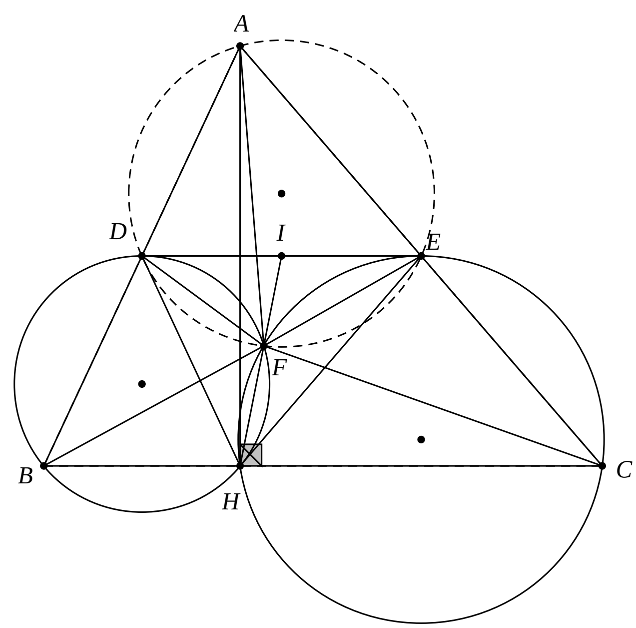
Bài 84: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$ có đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là trung điểm của AB và AC.

a) Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác DBH và ECH.

b) Gọi F là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác DBH và ECH. Chứng minh HF đi qua trung điểm của DE.

c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE đi qua điểm F.

Giải



a) ΔABC có $DA = DB; EA = EC$ (gt) $\Rightarrow DE$ là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow DE // BC$

$\Rightarrow \widehat{EDH} = \widehat{DHB}$ (slt) (1)

Ta lại có: ΔAHB vuông ở H có HD là đường trung tuyến $\Rightarrow DB = HD = DA$

$\Rightarrow \Delta DHB$ cân ở D $\Rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{DHB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EDH} = \widehat{DBH}$.

Do đó DE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔDBH tại D.

Tương tự, DE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔEHC tại E.

b) Kẻ HF cắt DE tại I.

Ta có $\widehat{IDF} = \widehat{IHD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DF}$

Xét ΔIDF và ΔIHD có $\widehat{DIH}$ chung, $\widehat{IDF} = \widehat{IHD}$

$\Rightarrow \Delta IDF \backsim \Delta IHD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{ID}{IH} = \frac{IF}{ID} \Rightarrow ID^2 = IF.IH$

Tương tự: $IE^2 = IF.IH$

Khi đó $ID^2 = IE^2 \Rightarrow ID = IE$

Vậy HF đi qua trung điểm của DE.

c) Xét ΔABC có $\widehat{BAC} + \widehat{DBH} + \widehat{ECH} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DBH} + \widehat{ECH} = 180^\circ - \widehat{BAC}$

Tứ giác $BDFH$ và tứ giác $CEFH$ nội tiếp đường tròn (O) và (O')

$\Rightarrow \widehat{DFH} + \widehat{DBH} = 180^\circ; \widehat{EFH} + \widehat{ECH} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DFH} + \widehat{EFH} = 360^\circ - \left(\widehat{DBH} + \widehat{ECH}\right) = 360^\circ - \left(180^\circ - \widehat{BAC}\right) = 180^\circ + \widehat{BAC}$

Mặt khác $\widehat{DFH} + \widehat{EFH} + \widehat{EFD} = 360^\circ \Rightarrow 180^\circ + \widehat{BAC} + \widehat{EFD} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{EFD} = 180^\circ$

hay $\widehat{DAE} + \widehat{EFD} = 180^\circ$

mà $\widehat{DAE}, \widehat{EFD}$ là hai góc đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADFE$ nội tiếp đường tròn hay đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE đi qua điểm F.

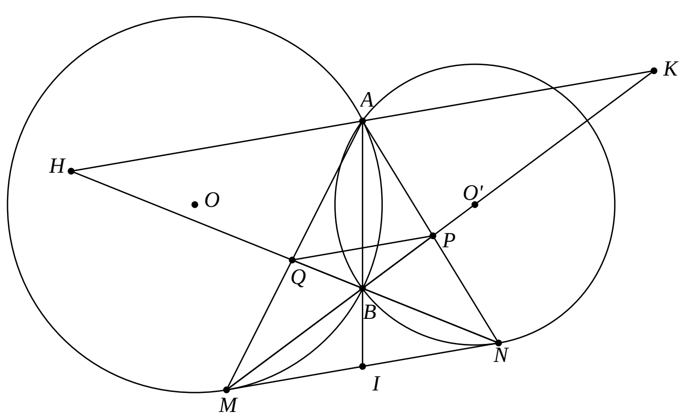
Bài 85: Cho hai đường tròn (O) và (O'), $R > R'$ cắt nhau tại hai điểm A và B. Vẽ tiếp tuyến chung MN của hai đường tròn, (M thuộc đường tròn (O), N thuộc đường tròn (O')). Đường thẳng AB cắt MN tại I (B nằm giữa A và I).

a) Chứng minh $IN^2 = IA.IB$.

b) Chứng minh $IM = IN$.

c) Đường thẳng MA cắt đường thẳng NB tại Q, đường thẳng NA cắt đường thẳng MB tại P. Chứng minh $MN // PQ$.

Giải



a) Xét ΔINB và ΔIAN có $\widehat{AIN}$ chung; $\widehat{BNI} = \widehat{IAN} = \frac{1}{2}\widehat{BN}$

$\Rightarrow \Delta INB \backsim \Delta IAN$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IN}{IA} = \frac{IB}{IN} \Rightarrow IN^2 = IA.IB$

b) Tương tự: $IM^2 = IA.IB$

Do đó $IM^2 = IN^2 \Rightarrow IM = IN$.

c) Qua A kẻ đường thẳng song song với MN cắt NQ tại H và cắt MP tại K.

Ta có $AK//MI \Rightarrow \frac{AB}{BI} = \frac{AK}{MI}$ (Ta-let)

$AH//IN \Rightarrow \frac{AB}{AI} = \frac{AH}{NI}$(Ta-let)

Do đó $\frac{AK}{MI} = \frac{AH}{NI}$

Mà $MI = NI \Rightarrow AK = AH$

Ta lại có $\frac{AH}{MN} = \frac{QA}{QM}$; $\frac{AK}{MN} = \frac{PA}{PN} \Rightarrow \frac{QA}{QM} = \frac{PA}{PN} \Rightarrow PQ//MN$ (Ta – let đảo)

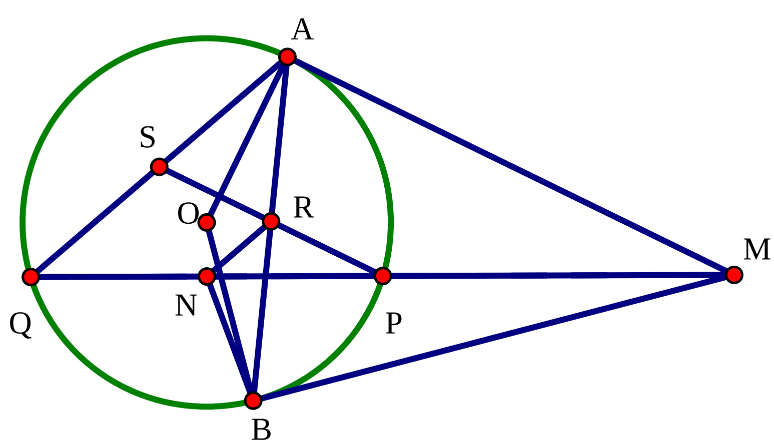
Bài 86: Cho đường tròn (O), M là một điểm nằm ngoài đường tròn (O). Qua M vẽ hai tiếp tuyến với đường tròn (O), (A, B là tiếp điểm). MPQ là một cát tuyến không đi qua tâm của đường tròn (P nằm giữa M và Q). Qua P vẽ đường thẳng vuông góc với OA cắt AB, AQ lần lượt tại R và S. Gọi N là trung điểm của PQ.

a)Chứng minh năm điểm M,A, N, O, B cùng thuộc một đường tròn. Chỉ ra bán kính của đường tròn đó.

b) Chứng minh tứ giác PRNB nội tiếp.

c) Chứng minh RP = RS

Giải:



a/ Chứng minh: năm điểm M,A, N, O, B cùng thuộc một đường tròn

Xét (O) có : ON là 1 phần đường kính

PQ là dây không đi qua tâm

$ON \cap PQ = \{N\}$

N là trung điểm PQ

$\Rightarrow PQ \perp ON$ tại N $\Rightarrow \widehat{ONM} = 90^0$

Xét (O) có MA, MB lần lượt là tiếp tuyến tại A và B

$\Rightarrow MA \perp OA, MA \perp OB$

$\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^0$

Có : $\widehat{ONM} = 90^0 \Rightarrow$ N thuộc đường tròn đường kính OM (1)

$\widehat{OAM} = 90^0 \Rightarrow$ A thuộc đường tròn đường kính OM (2)

$\widehat{OBM} = 90^0 \Rightarrow$ B thuộc đường tròn đường kính OM (3)

Từ (1) (2) và (3) có N ,A, B, C, M thuộc cùng một đường tròn đường kính OM , bán kính $\frac{OM}{2}$

b/ Chứng minh: Tứ giác PRNB nội tiếp

Xét đường tròn đường kính OM:

$\widehat{NBA} = \widehat{NMA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{NA}$)

Mà $\widehat{NMA} = \widehat{NPS}$ (đồng vị do PS//MA)

$\Rightarrow \widehat{NBA} = \widehat{NPS}$

Xét tứ giác PRNB:

$\widehat{NBA} = \widehat{NPS}$ (cmt)

Mà B, P là hai đỉnh kề nhau

$\Rightarrow$ PRNB là tứ giác nội tiếp

c/ Chứng minh: RP = RS

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác PRNB, có:

$\widehat{PBR} = \widehat{PNR}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{PR}$)

Xét đường tròn (O) có $\widehat{PBA} = \widehat{PQA}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{PA}$)

$\Rightarrow \widehat{PNR} = \widehat{PQA}$

$\Rightarrow NR // QA$

Mà M là trung điểm PQ

$\Rightarrow$ R là trung điểm PS

$\Rightarrow$ RP = RS

Bài 87: Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O; R) vẽ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (O), (A, B là các tiếp điểm). Gọi C là một điểm trên cung lớn AB của đường tròn (O). Vẽ AH vuông góc với BC tại H.Gọi I là trung điểm của AH, CI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E, ME cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F, MO cắt AB tại K.

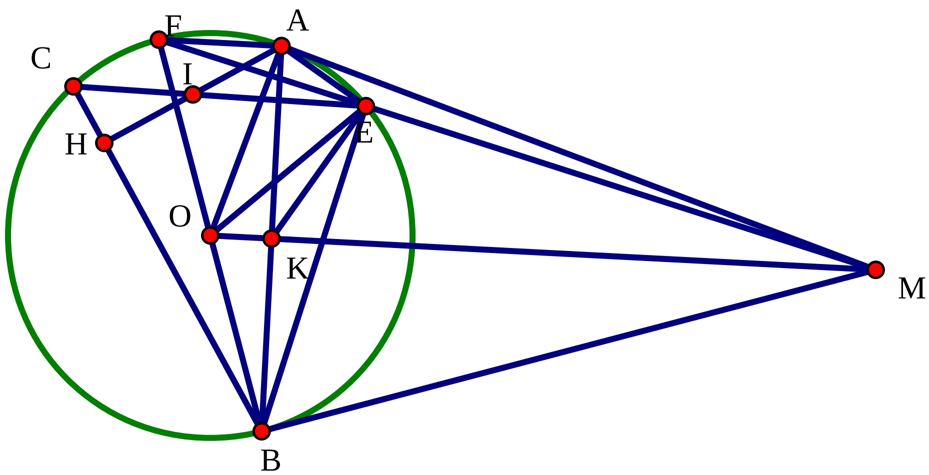
a) Chứng minh $MO \perp AB$ tại K

b) Chứng minh : $MA^2 = ME.MF$

c) Chứng minh : $\widehat{AEK} = 90^0$

d) Chứng minh tứ giác MEKB nội tiếp, OM tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MEA

Giải:



a)Chứng minh $MO \perp AB$ tại K

Xét đường tròn (O) có MA, MB lần lượt là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại M

$\Rightarrow$ MA = MB

Mà OA = OB (= R)

$\Rightarrow$ MO là đường trung trực của AB

$\Rightarrow MO \perp AB$ tại K

b) Chứng minh : $MA^2 = ME.MF$

Xét đường tròn (O) có $\widehat{MAE}$ là góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung AE, chắn $\overset{\frown}{AE}$

$\widehat{AFE}$ là góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AE}$

$\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{AFE}$

$\Rightarrow \Delta MAE \sim \Delta MFA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MA}{MF} = \frac{ME}{MA} \Rightarrow MA^2 = ME.MF$$

c/ Chứng minh : $\widehat{AEK} = 90^0$

Có MO là đường trung trực của AB

$MO \cap AB = \{K\}$

$\Rightarrow$ K là trung điểm AB

$\Rightarrow$ IK là đường trung bình của tam giác AHB

$\Rightarrow IK \perp AH$

Mà $CB \perp AH$

$\Rightarrow$ IK // CB

$\Rightarrow \widehat{EIK} = \widehat{ECB}$ (đồng vị) (1)

Xét đường tròn (O) có $\widehat{EAB} = \widehat{ECB}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{EB}$) (2)

Từ (1)(2) suy ra $\widehat{EIK} = \widehat{EAB}$

Xét tứ giác EAIK có: $\widehat{EIK} = \widehat{EAB}$ (cmt)

Mà A, I là hai đỉnh kề nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác EAIK nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AEK} + \widehat{AIK} = 180^0$

Mà $\widehat{AIK} = 90^0$ (IK $\perp$ AH)

$\Rightarrow \widehat{AEK} = 90^0$

d) Chứng minh tứ giác MEKB nội tiếp, OM tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MEA

Xét ΔABF có AO là đường trung tuyến và $AO = \frac{1}{2}FB (= R)$

$\Rightarrow \Delta ABF$ vuông tại E

$\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{MEB} = 90^0$

Xét tứ giác MEKB có :

$\widehat{FEB} = \widehat{MEB} = 90^0$

Mà E, K là hai đỉnh kề nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác MEKB nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{OME} = \widehat{EBA}$

Mà $\widehat{MAE} = \widehat{EBA}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{EA}$)

$\Rightarrow \widehat{OME} = \widehat{MAE}$

$\Rightarrow$ OM là tiếp tuyến tại M của đường tròn ngoại tiếp ΔMEA

Bài 88: Cho đường tròn (O; R) và điểm S sao cho SO = 2R. Vẽ các tiếp tuyến SA, SB với đường tròn (O), (A, B là tiếp điểm) và cát tuyến SMN không đi qua tâm O. Gọi I là trung điểm của MN.

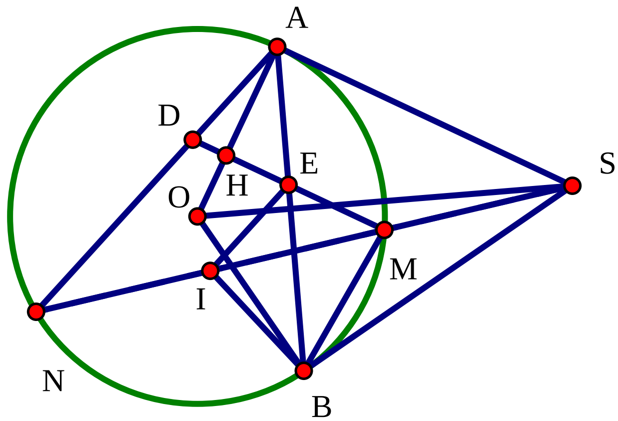
a)Chứng tỏ năm điểm S, A, O, I, B cùng thuộc một đường tròn. SAB là tam giác gì?

b) Chứng minh: $SA^2 = SM.SN$

c) Kẻ MH vuông góc với OA tại H và cắt AN, AB tại D và E. Chứng minh tứ giác IEMB nội tiếp.

d) Chứng minh ED = EM.

Giải:



a/ Chứng tỏ năm điểm S, A, O, I, B cùng thuộc một đường tròn. SAB là tam giác gì?

Xét đường tròn (O) có : SA, SB lần lượt là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại S (A, B là 2 tiếp điểm)

$\Rightarrow OA \perp SA, OB \perp SB$

$\Rightarrow \widehat{SAO} = \widehat{SBO} = 90^0$

Lại có, OI là 1 phần đường kính, MN là dây không đi qua tâm

Mà I là trung điểm MN

$\Rightarrow IO \perp MN$ tại I $\Rightarrow \widehat{OIS} = 90^0$

$\Rightarrow$ A, B, O, I, S cùng thuộc một đường tròn đường kính OS

Xét đường tròn (O) có SA, SB là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại S $\Rightarrow$ SA = SB

$\Rightarrow \Delta SAB$ cân tại S

b/ Chứng minh: $SA^2 = SM.SN$

Xét đường tròn (O) có $\widehat{SAM}$ là góc tạo bởi tiếp tuyến SA và dây AM, chắn $\overset{\frown}{AM}$

$\widehat{ANM}$ là góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AM}$

$\Rightarrow \widehat{SAM} = \widehat{ANM}$

$\Rightarrow \Delta SAM \sim \Delta SNA$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{SA}{SN} = \frac{SM}{SA} \Rightarrow SA^2 = SM.SN$

c/ Chứng minh tứ giác IEMB nội tiếp.

Ta có: S, A ,O, B, I cùng thuộc 1 đường tròn (cma)

$\Rightarrow$ tứ giác AOIB nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{IBA} + \widehat{IOA} = 180^0$ (1)

Xét tứ giác OIHM :

$\widehat{OIM} = 90^0$ (OI $\perp$ MN)

$\widehat{OHM} = 90^0$ (MH $\perp$ OA)

$\Rightarrow \widehat{OIM} + \widehat{OHM} = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác IOHM nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{IMH} + \widehat{IOH} = 180^0$ (2)

Từ (1)(2) có $\widehat{IBA} = \widehat{IMH} \Rightarrow \widehat{IBE} = \widehat{IME}$

Xét tứ giác IEMB có $\widehat{IBE} = \widehat{IME}$ (cmt)

B, M là 2 đỉnh kề nhau

$\Rightarrow$ tứ giác IEMB nội tiếp

d/ Chứng minh ED = EM.

tứ giác IEMB nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{EBM} = \widehat{EIM}$ (3)

Xét đường tròn (O) có : (2 góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AM}$) (4)

Từ (3) (4) có :

$\widehat{EIM} = \widehat{ANM}$

$\Rightarrow IE // AM$

Mà I là trung điểm MN

$\Rightarrow$ E là trung điểm DM

$\Rightarrow$ ED = EM

Bài 89. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN đến đường tròn (O). Gọi E là trung điểm của MN. Đường thẳng CE cắt đường tròn (O) tại I.

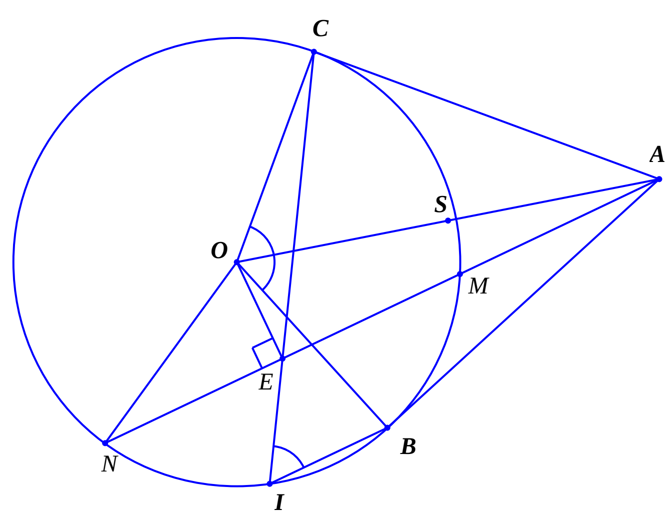
a) Chứng minh năm điểm A, B, C, O, E cùng thuộc đường tròn có tâm S.

b) Chứng minh $\widehat{AOC} = \widehat{BIC}$.

c) Chứng minh $BI // MN$.

d) Xác định vị trí của cát tuyến AMN sao cho tổng AM+AN đạt giá trị lớn nhất.

Bài giải



a) Từ tính chất tiếp tuyến đường tròn ta có:

$AB \perp OB$

$AC \perp OC$

$\Rightarrow ABOC$ tứ giác nội tiếp đường tròn hay A, B, O, C cùng thuộc đường tròn. (1)

Dây cung MN của đường tròn (O) có E là trung điểm của MN

$\Rightarrow OE \perp MN$ (tính chất đường kính và dây cung)

$\Rightarrow \widehat{ACO}, \widehat{AEO}$ cùng nhìn dây AO dưới một góc 90^0

$\Rightarrow ACEO$ tứ giác nội tiếp đường tròn hay A, C, E, O cùng thuộc đường tròn. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $\mathrm{A}, \mathrm{B}, C, O, E$ cùng thuộc một đường tròn tâm S là trung điểm của AO.

b) xét (O) ta có:

sđ $\widehat{CMB} = \widehat{COM} = 2.\widehat{COA}$ (góc ở tâm ,tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau của (O))

mà: sđ $\widehat{CMB} = 2.\widehat{CIB}$

$\Rightarrow \widehat{COA} = \widehat{CIB}$ (đpcm). (3)

c) Theo chứng minh câu a tao có tứ giác $ACOE$ nội tiếp đường tròn với tâm S là trung điểm AO

$\Rightarrow \widehat{CEA} = \widehat{COA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC) (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{CEA} = \widehat{CIB}$

Ta lại có hai góc này đồng vị

$\Rightarrow MN // BI$ (đpcm).

d) Ta có: $OE \perp AN$ (vì $OE \perp MN$)

ta thấy cát tuyến AMN duy chuyển thì

$AE \le AO$

$NE \le NO = R$

AO cố định

$\Rightarrow MN = NE + AE \le AO + R$

Vậy để MN lớn nhất là $MN = AO + R$ thì $E \equiv O$ hay cát tuyên AMN qua (O)

Bài 90. Cho đường tròn $(O;R)$ đường thẳng d không đi qua O và cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Từ một điểm C trên đường thẳng d (C nằm ngoài đường tròn (O)) kẻ tiếp tuyến CM và CN (M, N là tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của AB, đường thẳng OH cắt tia CN tại K.

a) Chứng minh bốn điểm C, O, H, N cùng nằm trên một đường tròn.

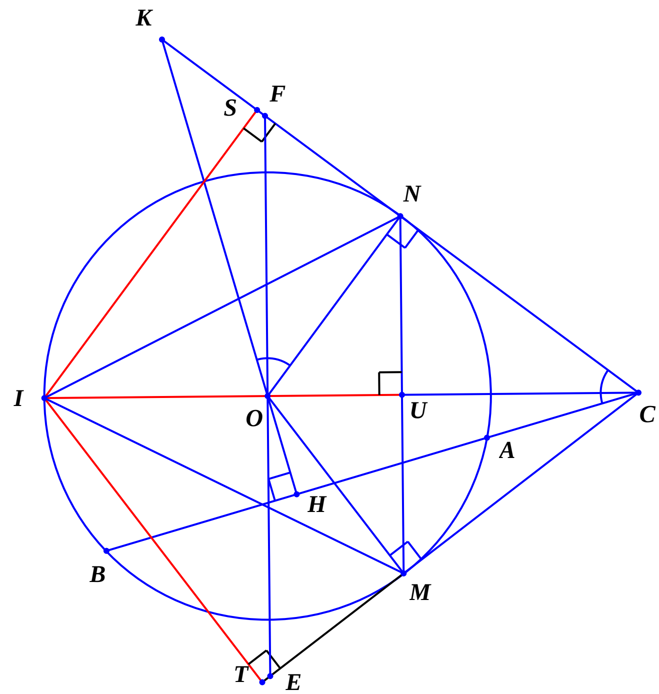
b) Chứng minh KN.KC=KH.KO.

c) Đoạn thẳng CO cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh I cách đều CM, CN, MN.

d) Một đường thẳng đi qua O và song song với MN cắt các tia CM, CN lần lượt tại E, F. Xác định vị trí của C trên d sao cho diện tích của tam giác CEF là nhỏ nhất.

(đề tuyển sinh vào THPT-Tp. Hà Nội năm học 2003-2004)

Bài giải



a) xét tứ giác $CHON$ có:

$\widehat{CNO}=90^0$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\widehat{COH}=90^0$ (đường kính vuông góc với dây cung AB)

$\Rightarrow \widehat{CNO}+\widehat{COH}=180^0$ (tổng hai góc đối trong tứ giác)

$\Rightarrow CHON$ là tứ giác nội tiếp đường tròn hay C,O,H,N cùng thuộc một đường tròn.

b) tứ giác $CHON$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{KON}=\widehat{KCH}$ (1)

Mà $\widehat{KNO}=\widehat{KHC}=90^0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta KHC\sim\Delta KNO$ $(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{KH}{KN}=\dfrac{KC}{KO}\Leftrightarrow KH.KO=KN.KC$ (đpcm).

c) Ta có CM,CN là tiếp tuyến nên CO là phân giác của góc NCM. Mà $I\in$ tia kéo dài CO.

$\Rightarrow I$ cách đều CM,CN.

Từ I hạ vuông góc xuống CN,CM chân đường vuông góc lần lượt là S,T

$\Rightarrow IS=IT$ (*)

$MN\perp CI$ tại U và IC là trung trực của MN $\Rightarrow IN=IM$

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{IN}$ =sđ $\overset{\frown}{IM}$ (3)

Ta có : $\widehat{KNI} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{IN}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung) (4)

$\widehat{INU} = \widehat{INM} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{IM}$ (góc nội tiếp) (5)

Từ (3); (4) và (5) $\Rightarrow \widehat{KNI} = \widehat{INU} = \widehat{SNI}$ (6)

Ta lại có IC chung và $\widehat{ISN} = \widehat{IUN} = 90^0$ (7)

Từ (6) và (7) $\Rightarrow$ $\Delta ISN = \Delta IUN$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow IS = IU$ (2*)

Từ (*) và (2*)$\Rightarrow IS = IU = IT$ hay I cách đều CN, CM, NM .

d) $S_{\Delta CEF} = 2.S_{\Delta COF} = OC.OF$

mà ΔCOF vuông tại O $\Rightarrow OC.OF = ON.FC$

$\Rightarrow S_{\Delta CEF} = ON.FC = R.FC = R(FN + NC)$ (3*)

Để ΔCEF có diện tích nhỏ nhất thì $FN + NC$ ngắn nhất

Áp dụng BĐT cô si ta có: $FN + NC \geq 2\sqrt{FN.NC} = 2\sqrt{(ON)^2} = 2.ON = 2R$ (4*)

$FN + NC = 2R$ ngắn nhất khi dấu "=" xảy ra: $FN = NC$

$\Rightarrow N$ là trung điểm của FC

$\Rightarrow OC^2 = NC.FC = 2.ON^2 = 2.R^2$

$\Leftrightarrow OC = R\sqrt{2}$

Từ (3*) và (4*)$\Rightarrow$ diện tích ΔCEF nhỏ nhất: $S_{\Delta CEF} = 2R^2$

Vậy vị trí của C cần tìm là C cách O một khoảng : $OC = R\sqrt{2}$.

Bài 91. Cho AB, AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O), (B, C là hai tiếp điểm). Vẽ CH vuôn góc với AB tại H, CH cắt đường tròn (O) tại E và cắt OA tại D.

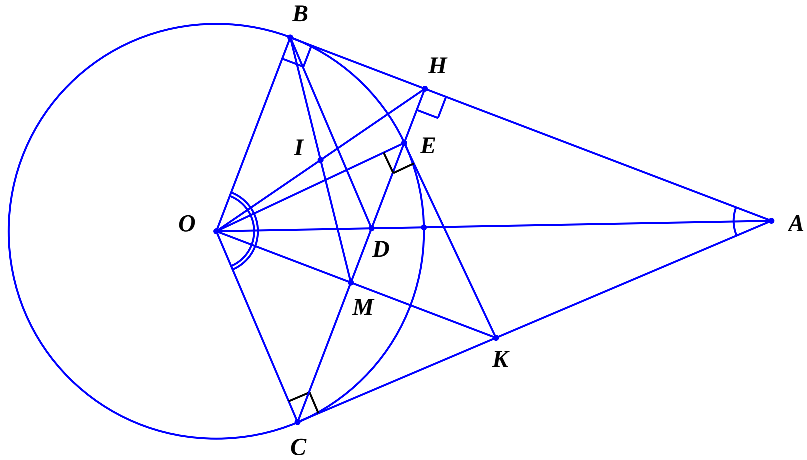
a) Chứng minh CO=CD.

b) Chứng minh tứ giác OBCD là hình thoi.

c) Gọi M là trung điểm của CE, BM cắt OH tại I. Chứng minh I là trung điểm của OH.

d) Tiếp tuyến tại E của đường tròn (O) cắt AC tại K. Chứng minh rằng ba điểm O, M, K thẳng hàng.

Bài giải



a) $CD//OB$ (cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow \widehat{BOD}=\widehat{ODC}$ (sole trong) (1)

Mà $\widehat{BOD}=\widehat{DOC}$ (tính chất hai đường tiếp tuyến cắt nhau) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{DOC}=\widehat{ODC}$

$\Rightarrow \Delta OCD$ cân tại C

$\Rightarrow CO=CD$ (đpcm)

b) AB, AC là hai tiếp tuyến với các tiếp điểm B,C

$\Rightarrow OA$ là trung trực của BC

$\Rightarrow DB=DC$ (3)

Mà $DC=OC=OB=R$ (chứng minh câu a) (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ $DC=OC=OB=DB=R$

$\Rightarrow OBDC$ là hình thoi (đpcm)

c) $OM \perp CE$ (tính chất đường kính và dây cung)

$\Rightarrow \widehat{OBH}=\widehat{BHM}=\widehat{HMO}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{BOM}=90^0$

$\Rightarrow OBHM$ là hình chữ nhật (định nghĩa hình chữ nhật)

$\Rightarrow BM, OH$ là hai đường chéo hình chữ nhật $OBHM$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của BM (đpcm)

d) EK, AC là hai tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow EKC$ cân tại K

M là trung điểm của CE (gt)

$MK \perp CE$ (trong tam giác cân trung tuyến đồng thời là đường cao hay có thể dùng tc hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \widehat{EMK}=90^0$ (5)

$\widehat{EMO}=90^0$ (dựa theo chứng minh câu c) (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow \widehat{OMK}=\widehat{EMO}+\widehat{EMK}=180^0$ là góc bẹt

$\Rightarrow O,M,K$ thẳng hàng (đpcm)

Bài 92. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E. Từ E vẽ tiếp tuyến EM với (O) (M là tiếp điểm). EM cắt các tiếp tuyến của (O) tại A,B lần lượt tại C,D.

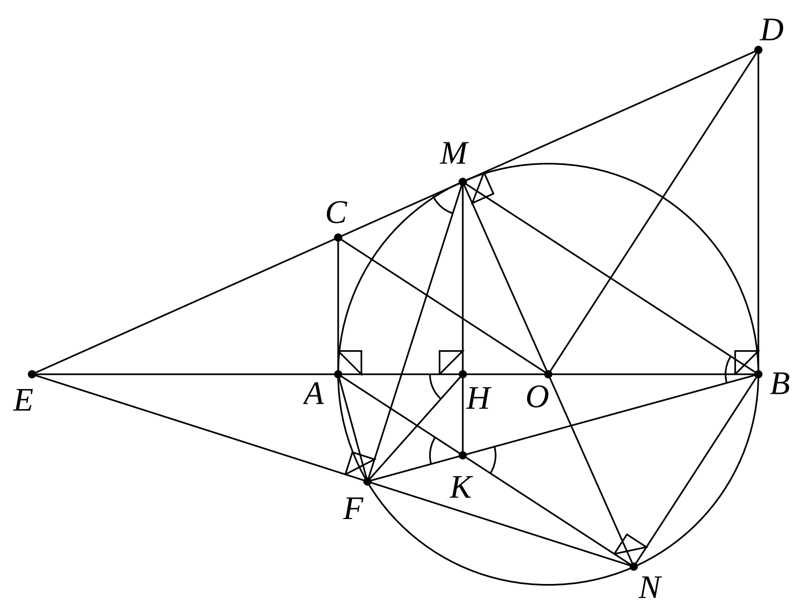
a) Chứng minh: $AC+BD=CD$ và $\widehat{COD}=90^0$

b) Chứng minh: $AC.DB=R^2$

c) Vẽ MH vuông góc với AB. Vẽ đường kính MON của (O). EN cắt (O) tại F (F khác N). Chứng minh tứ giác $MHFE$ nội tiếp.

d) AN cắt BF tại K. Tính $AK.AN+BK.BF$ theo R.

Giải:



a) Ta có: CA,CM là tiếp tuyến của (O) (gt)

$\Rightarrow CA=CM$ và $\widehat{AOC}=\widehat{COM}=\frac{1}{2}\widehat{AOM}$ (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau)

Ta có: DB,DM là tiếp tuyến của (O) (gt)

$\Rightarrow DB=DM$ và $\widehat{MOD}=\widehat{DOB}=\frac{1}{2}\widehat{MOB}$ (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau)

Vì $CM+MD=CD$, $CA=CM$, $DB=DM$ (cmt) $\Rightarrow AC+BD=CD$

Ta có: $\widehat{AOM}+\widehat{MOB}=180^0$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow 2\widehat{OCM}+2\widehat{MOD}=180^0$

$\Rightarrow \widehat{OCM}+\widehat{MOD}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{COD}=90^0$.

b) Do EM là tiếp tuyến của (O) (gt)

$\Rightarrow EM\perp OM$ (t/c) $\Rightarrow \widehat{EMO}=\widehat{OMD}=90^0$

Xét ΔCOD vuông tại O, đường cao OM, ta có:

$CM.MD=OM^2$ (HTL trong tam giác vuông) (1)

Mà $CA=CM$, $DB=DM$ (cmt), $OM=R$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow AC.DB=R^2$ (đpcm)

c) Xét (O) có MN là đường kính.

$\Rightarrow \widehat{MFN}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{MFE}=90^0$ (kề bù với $\widehat{MFN}$)

Vì $MH\perp AB$ (gt) $\Rightarrow \widehat{MHE}=90^0$.

Xét tứ giác $MHFE$ có $\widehat{MHE}=\widehat{MFE}=90^0$.

Mà hai đỉnh H,F kề nhau cùng nhìn cạnh EM dưới cùng một góc 90^0.

Nên tứ giác $MHFE$ nội tiếp (dhnb).

d) (O) có $\widehat{MBN}=90^0, \widehat{ANB}=90^0, \widehat{AFB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\widehat{MBF}=\widehat{EMF}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cùng chắn $\overset\frown{MF}$)

Xét ΔKNB vuông tại N có: $\widehat{KBN}+\widehat{BKN}=90^0$ (t/c)

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{MBF}=\widehat{EMF}\,(cmt)\\ \widehat{KBN}+\widehat{BKN}=90^0\,(cmt)\\ \widehat{AKF}=\widehat{BKN}\,(\text{dd})\\ \widehat{MBK}+\widehat{KBN}=\widehat{MBN}=90^0\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{EMF}=\widehat{AKF}\quad(3)$$

Lại có tứ giác $MHFE$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{EMF}=\widehat{EHF}$ (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow \widehat{AKF}=\widehat{EHF}$ hay $\widehat{AKF}=\widehat{AHF}$

Xét tứ giác $AHKF$ có: $\widehat{AKF}=\widehat{AHF}$ (cmt)

Mà hai đỉnh H,K kề nhau cùng nhìn cạnh AF dưới cùng một góc 90^0.

Nên tứ giác $AHKF$ nội tiếp (dhnb) $\Rightarrow \widehat{AHK}+\widehat{AFK}=180^0$.

$\Rightarrow \widehat{AHK}+90^0=180^0 \Rightarrow \widehat{AHK}=90^0$.

Xét ΔAHK và ΔANB có:

$\widehat{A}$ chung

$\widehat{AHK}=\widehat{ANB}=90^0$

$\Rightarrow \Delta AHK \backsim \Delta ANB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AK}{AB}=\dfrac{AH}{AN}(t/c)\Rightarrow AK.AN=AH.AB$(t/c TLT) (5)

Xét ΔBHK và ΔBFA có:

$\widehat{B}$ chung

$\widehat{BHK}=\widehat{BFA}=90°$

$\Rightarrow \Delta BHK \backsim \Delta BFA$ (g.g)

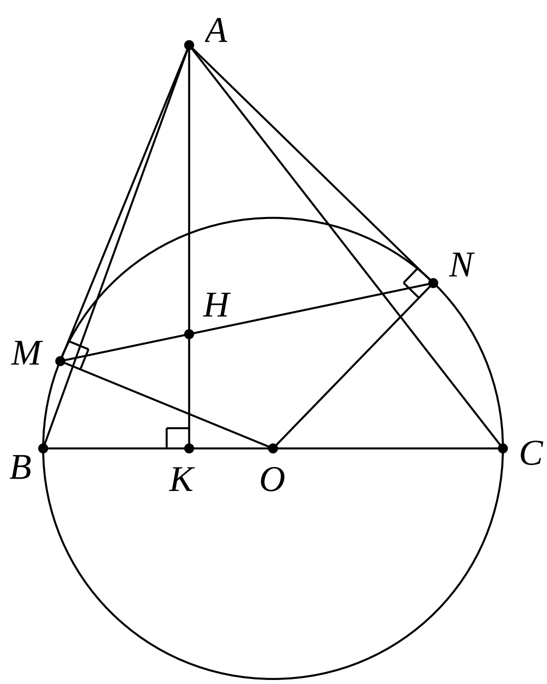
$\Rightarrow \dfrac{BK}{BA}=\dfrac{BH}{BF}(t/c)\Rightarrow BK.BF=BH.AB$(t/c TLT) (6)

Từ (5), (6) $\Rightarrow AK.AN+BK.BF=AH.AB+BH.AB$

$=(AH+BH).AB=AB.AB=2R.2R=4R^2$

Bài 93: Cho tam giác nhọn ABC. Gọi O là trung điểm của BC, dựng đường tròn (O), đường kính BC. Vẽ đường cao AK của tam giác ABC và các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O), (M, N là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của MN với AK. Chứng minh rằng: $AH.AK=AM^2$.

Giải:



Do AM là tiếp tuyến đường tròn (O) nên $\widehat{AMO}=90^0$

Do AN là tiếp tuyến đường tròn (O) nên $\widehat{ANO}=90^0$

Do AK là đường cao ΔABC nên $\widehat{AKO}=90^0$

Suy ra: M, N, K thuộc đường tròn đường kính AO .

$\Rightarrow$ năm điểm A, M, K, O, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

$AM = AN$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Xét đường tròn $(AMKON)$ có $AM = AN \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$

Suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{AKM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).

Xét ΔAMH và ΔAKM có:

$\widehat{AMN} = \widehat{AKM}$

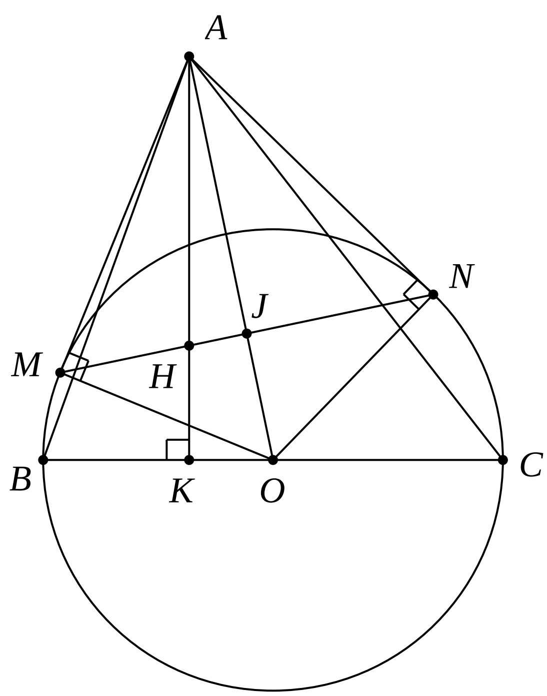
$\widehat{MAK}$ chung

Suy ra: $\Delta AMH \backsim \Delta AKM$ (g.g)

Suy ra: $\dfrac{AM}{AK}=\dfrac{AH}{AM}\Rightarrow AM^2 = AH.AK$.

Bài 94: Tam giác ABC nhọn. O là trung điểm BC. Vẽ đường tròn tâm O đường kính BC. Vẽ đường cao AK của tam giác ABC, và vẽ các tiếp tuyến AM, AN với (O) tại M, N. MN cắt AH tại K. Chứng minh H là trực tâm của tam giác ABC.

Giải:



Gọi H_1 là trực tâm của tam giác ABC.

Chứng minh 5 điểm $A,\ M,\ K,\ O,\ N$ cùng thuộc một đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{AKN} = \widehat{ANM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AN)

Lại có $AM,\ AN$ là tiếp tuyến của đường tròn tâm O nên $AM = AN$

$\Rightarrow \Delta ANM$ cân $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM}$

$\Rightarrow \widehat{AKN} = \widehat{ANM}$ (1)

Ta có: OA là đường trung trực của MN.

Gọi $OA \perp MN \equiv I$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ANO, đường cao NI ta có:

$AN^2 = AI.AO$

$\Delta AH_1I \backsim \Delta AOK$ (g.g) $\Rightarrow AI.AO = AH_1.AK$

$\Rightarrow AN^2 = AH_1.AK$

$\Rightarrow \Delta ANH_1 \sim \Delta AKN$ (c.g.c)

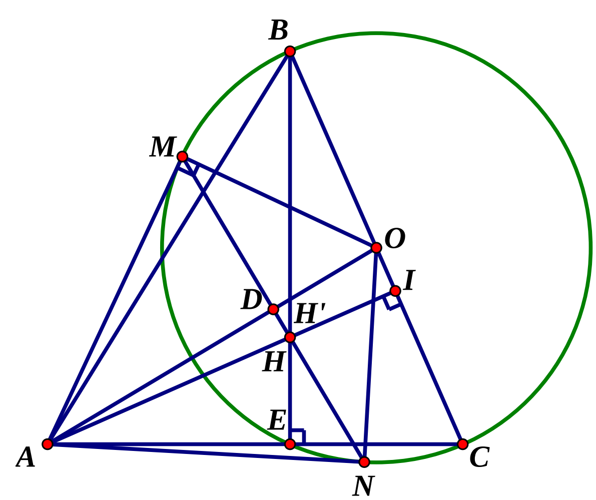
$\Rightarrow \widehat{ANH_1} = \widehat{AKN}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{ANH_1} = \widehat{ANM}$

Ta có: $M,\ H,\ N$ thẳng hàng $\Rightarrow \widehat{ANH} = \widehat{ANM} \Rightarrow \widehat{ANH_1} = \widehat{ANH} \Rightarrow H \equiv H_1$.

Vậy H là trực tâm của tam giác ABC.

Bài 95: Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Từ A vẽ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) đường kính BC (M, N là các tiếp điểm). Chứng minh rằng M, H, N thẳng hàng.



Gọi H’, D lần lượt là giao của MN với AI và AO

Do $AM = AN, OM = ON \Rightarrow AO$ là trung trực của MN

$\Rightarrow \widehat{H'DO} = 90^0 \Rightarrow$ D thuộc đường tròn đường kính OH’ (1)

Mà $\widehat{H'IO} = 90^0 \Rightarrow$ I thuộc đường tròn đường kính OH’ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow DH'IO$ nội tiếp đường tròn đường kính OH’.

Xét ΔADI và $\Delta AH'O$ có $\widehat{DAH'}$ chung,

$\widehat{DIA} = \widehat{H'OA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DH’)

$\Delta ADI \backsim \Delta AH'O$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AH'} = \dfrac{AI}{AO} \Rightarrow AH'.AI = AD.AO$ (1)

Do AN là tiếp tuyến $\Rightarrow AN \perp ON \Rightarrow \Delta ANO$ vuông tại N

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông có: $AD.AO = AN^2$ (2)

Xét ΔANE và ΔACN có: $\widehat{A}$ chung, $\widehat{ANE} = \widehat{ACN}$ (tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây)

$\Rightarrow \Delta ANE \backsim \Delta ACN$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AE}{AN} \Rightarrow AN^2 = AC.AE$ (3)

Ta có: $CIHE$ là tứ giác nội tiếp (vì tổng hai góc đối bằng 180^0)

$\Rightarrow AE.AC = AH.AI$ (4) (hệ thức lượng trong đường tròn)

Từ (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow AH.AI = AH'.AI \Rightarrow H \equiv H'$

Vậy ba điểm M, H, N thẳng hàng.

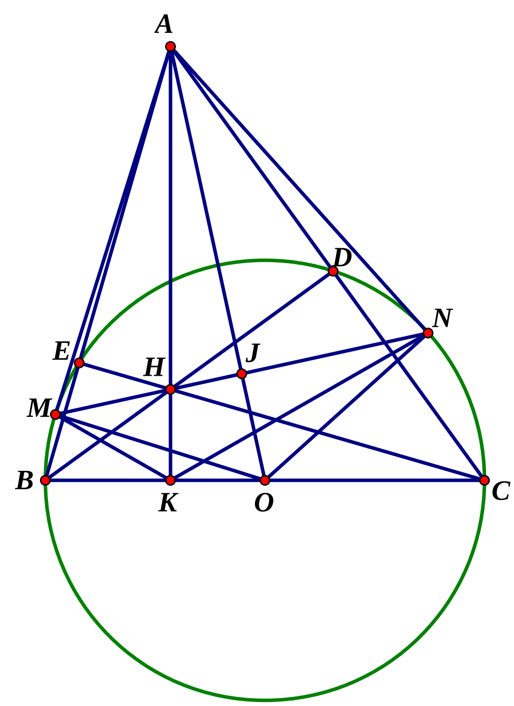
Bài 96: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (AB<AC). Đường tròn (O) đường kính BC cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại E và D.

a) Chứng minh AD.AC=AE.AB.

b) Gọi H là giao điểm của BD và CE, gọi K là giao điểm của AH và BC. Chứng minh AH vuông góc với BC.

c) Từ A kẻ tiếp tuyến AM và AN đến đường tròn (O), (M, N là các tiếp điểm). Chứng minh $\widehat{ANM} = \widehat{AKN}$.

d) Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.



a) Xét ΔABD và ΔACE có: $\widehat{A}$ chung,

$\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta ACE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AD}{AE} \Rightarrow AD.AC = AB.AE$

b) Do BD, CE là các đường cao của ΔABC $\Rightarrow H$ là trực tâm $\Rightarrow AH \perp BC$ tại K.

c) Có $OM \perp AM, ON \perp AN$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^0$ mà $\widehat{AKO} = 90^0$

$\Rightarrow M, N, K$ cùng thuộc đường tròn đường kính AO

$\Rightarrow A, M, K, N, O$ cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

$\Rightarrow \widehat{AKN} = \widehat{AMN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AN)

Lại có: $AM = AN \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM}$

Suy ra: $\widehat{AKN}=\widehat{ANM}$

d) Gọi J là giao của MN và AO.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông đối với ΔANO vuông tại N ta có:

$AJ.AO=AN^2$ (1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau suy ra AO là trung trực của MN $\Rightarrow AO\perp MN$ tại J

Xét ΔAHJ và ΔAOK có $\widehat{A}$ chung, $\widehat{AJH}=\widehat{AKO}=90^0$

$\Rightarrow \Delta AHJ \backsim \Delta AOK$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AH}{AO}=\dfrac{AJ}{AK}\Rightarrow AJ.AO=AH.AK$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow AN^2=AH.AK\Rightarrow \dfrac{AH}{AN}=\dfrac{AN}{AK}$

Xét ΔAHN và ΔANK có: $\dfrac{AH}{AN}=\dfrac{AN}{AK}$, $\widehat{A}$ chung

$\Rightarrow \Delta AHN \backsim \Delta ANK$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ANH}=\widehat{AKN}$

Mà $\widehat{AKN}=\widehat{ANM}\Rightarrow \widehat{ANH}=\widehat{ANM}$

$\Rightarrow A, M, N$ thẳng hàng

Bài 97: Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O và hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (O), (A, B là các tiếp điểm).

a) Chứng minh $MA^2=MC.MD$

b) Gọi I là trung điểm của CD. Chứng minh rằng 5 điểm M, A, O, I, B cùng thuộc một đường tròn.

c) Gọi H là giao điểm của AB và MO. Chứng minh tứ giác CHOD nội tiếp được đường tròn. Suy ra AB là phân giác của góc CHD.

d) Gọi K là giao điểm của tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O). Chứng minh A, B, K thẳng hàng.

a) Xét ΔAMC và ΔDMA có:

$\widehat{M}$ chung, $\widehat{CAM} = \widehat{ADM}$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây)

$\Rightarrow \Delta AMC \backsim \Delta DMA$ (g.g)

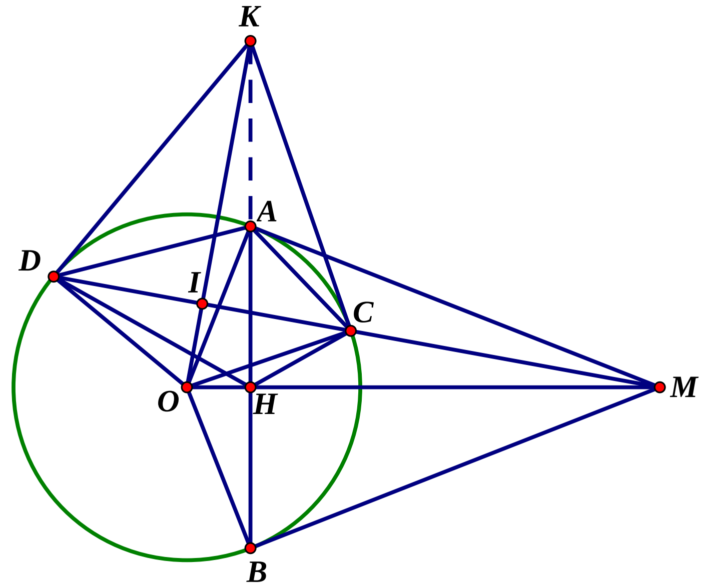
$\Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC.MD$

b) Do I là trung điểm dây CD nên $OI \perp CD$ (quan hệ đường kính – dây cung)

$\Rightarrow \widehat{OIM} = 90^0$

Vì MA, MB là hai tiếp tuyến

$\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^0$



$\Rightarrow A, B, I$ thuộc đường tròn đường kính MO

Hay năm điểm A, M, B, O, I cùng thuộc đường tròn đường kính MO.

c) Từ tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau suy ra: MO là trung trực của AB

$\Rightarrow MO \perp AB$ tại H

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông đối với ΔAMO vuông tại M suy ra:

$AM^2 = MH.MO$

Mà $MA^2 = MC.MD$ (ý a)

$\Rightarrow MC.MD = MH.MO \Rightarrow \dfrac{MC}{MO} = \dfrac{MH}{MD}$

Xét ΔMCH và ΔMOD có: $\dfrac{MC}{MO} = \dfrac{MH}{MD}$, $\widehat{M}$ chung

$\Rightarrow \Delta MCH \backsim \Delta MOD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO}$ (3)

$\Rightarrow CHOD$ nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180^0)

Do ΔOCD cân tại O nên $\widehat{ODM} = \widehat{OCD}$ (4) mà $\widehat{OCD} = \widehat{OHD}$ (5)(hai góc nội tiếp cùng chắn OD)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO} = \widehat{OCD} = \widehat{OHD}$

Mà $\widehat{CHM} + \widehat{CHA} = \widehat{OHD} + \widehat{DHA} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{CHA} = \widehat{DHA} \Rightarrow$ HA là phân giác của $\widehat{CHD}$

d) Do KD, KC là tiếp tuyến nên $KD \perp OD, KC \perp OC \Rightarrow \widehat{KDO} = \widehat{KCO} = 90^0$.

$\Rightarrow C, D$ thuộc đường tròn đường kính KO

Hay tứ giác $KDOC$ nội tiếp đường tròn đường kính KO.

Lại có: $CHOD$ nội tiếp (ý c)

Qua ba điểm C, O, D xác định duy nhất 1 đường tròn nên 5 điểm K, D, O, H, C cùng thuộc đường tròn đường kính KO

$\Rightarrow \widehat{KHO} = 90^0$ mà $\widehat{OHA} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{KHO} = \widehat{OHA} \Rightarrow K, A, H$ thẳng hàng

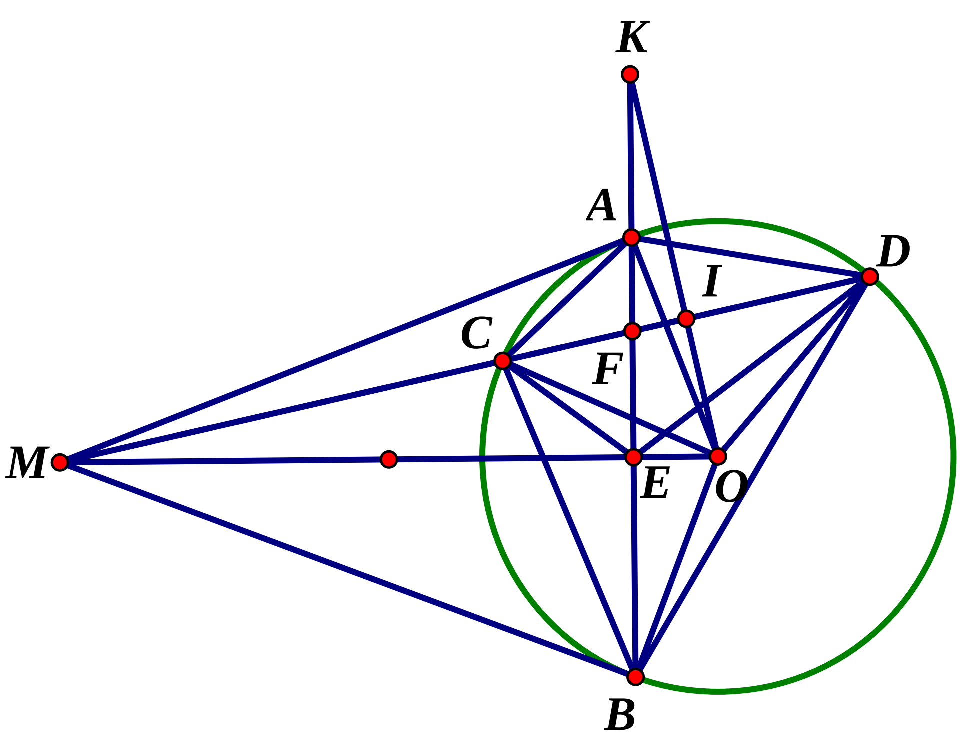
Mà $B \in AH \Rightarrow K, A, B$ thẳng hàng.

Bài 98. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến MA; MB và cát tuyến MCD. Gọi I là trung điểm của CD. Gọi E, F, K lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với MO, MD, OI.

a) Chứng minh $R^2 = OE.OM = OI.OK$.

b) Chứng minh M, A, B, O, I cùng nằm trên một đường tròn.

c) Khi cung CAD nhỏ hơn cung CBD hãy chứng minh $\widehat{DEC} = 2\widehat{DBC}$.



Giải:

a) Ta có $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau); $OA = OB = R$ $\Rightarrow MO$ là trung trực của AB $\Rightarrow MO \perp AB$ tại trung điểm E của AB.

Mặt khác vì I là trung điểm của CD nên $OI \perp CD$ $\Rightarrow \Delta MIO \backsim \Delta KEO$ (hai tam giác vuông có góc nhọn O chung) $\Rightarrow \dfrac{OM}{OK} = \dfrac{OI}{OE} \Leftrightarrow OE.OM = OI.OK$.

Mặt khác trong tam giác MAO vuông tại A có AE là đường cao, ta có $OA^2 = OE.OM$ hay $R^2 = OE.OM$. Vậy $R^2 = OE.OM = OI.OK$.

b) Ta có $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = \widehat{MIO} = 90°$ (theo tính chất của tiếp tuyến và quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) nên năm điểm M, A, B, O, I cùng nằm trên đường tròn đường kính OM.

c) Xét tam giác MAC và tam giác MDA có $\widehat{M}$ chung, $\widehat{MAC} = \widehat{MDA}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$) $\Delta MAC \backsim \Delta MDA(g.g)$ $\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC.MD$.

Mặt khác trong tam giác MAO vuông tại A có AE là đường cao, ta có $MA^2 = ME.MO$ $\Rightarrow MC.MD = ME.MO\left(= MA^2\right) \Rightarrow \dfrac{MC}{MO} = \dfrac{ME}{MD}$ lại có $\widehat{M}$ chung nên $\Delta MCE \backsim \Delta MOD(c.g.c)$ $\Rightarrow \widehat{MCE} = \widehat{MOD}$. Tứ giác $CEOD$ có góc ngoài một đỉnh bằng góc trong đỉnh đối diện nên là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{DOC}$ mà $\widehat{DOC} = 2\widehat{DBC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$) nên ta có $\widehat{DEC} = 2\widehat{DBC}$.

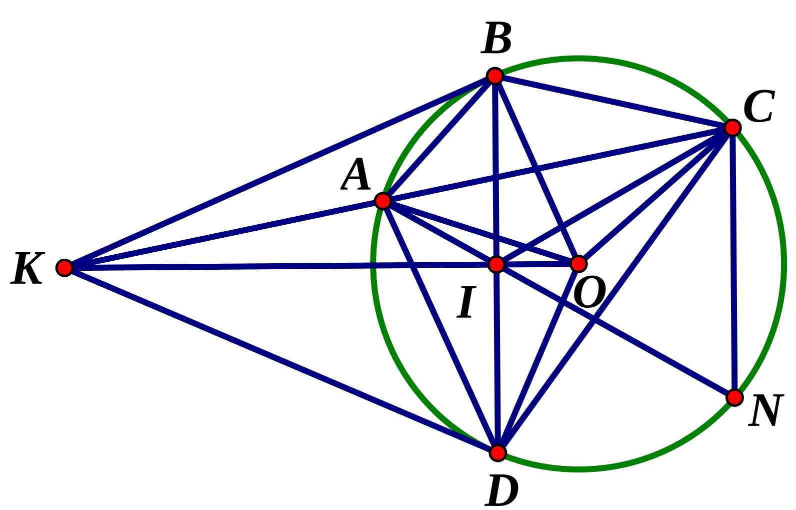
Bài 99. Cho đường tròn $(O;R)$, qua điểm K ở bên ngoài đường tròn kẻ các tiếp tuyến KB, KD (B, D là các tiếp điểm), kẻ cát tuyến KAC (A nằm giữa K và C).

a) Chứng minh rằng $\Delta KDA \backsim \Delta KCD$.

b) Chứng minh rằng: $AB.CD = AD.BC$.

c) Gọi I là trung điểm của BD. Chứng minh tứ giác $AIOC$ nội tiếp.

d) Kẻ dây CN song song với BD. Chứng minh ba điểm A, I, N thẳng hàng.



Giải:

a) Xét tam giác KDA và tam giác KCD có $\widehat{ADK}$ chung; $\widehat{KDA} = \widehat{KCD}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$) $\Rightarrow \Delta KDA \backsim \Delta KCD(g.g)$.

b) $\Delta KDA \backsim \Delta KCD$ (ý a) $\Rightarrow \dfrac{KD}{KC} = \dfrac{AD}{CD}$ (1)

Chứng minh tương tự ý a) ta có $\Delta KAB \backsim \Delta KBC\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{KB}{KC} = \dfrac{AB}{BC}$ (2)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta lại có $KB = KD$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{AB}{BC} \Leftrightarrow AB.CD = AD.BC$.

c) Ta có $KB = KD$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau); $OB = OD = R \Rightarrow KO$ là trung trực của $BD \Rightarrow KO \perp BD$ tại trung điểm I của BD. Trong tam giác KBO vuông tại B có BI là đường cao, ta có $KB^2 = KI.KO$. Lại có $\Delta KAB \backsim \Delta KBC\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{KA}{KB} = \dfrac{KB}{KC} \Rightarrow KB^2 = KA.KC$

$\Rightarrow KI.KO = KA.KC\left(= KB^2\right) \Rightarrow \dfrac{KI}{KA} = \dfrac{KC}{KO}$ lại có $\widehat{K}$ chung nên $\Delta KAI \backsim \Delta KOC\left(c.g.c\right)$

$\Rightarrow \widehat{KAI} = \widehat{KOC}$. Tứ giác $AIOC$ có góc ngoài một đỉnh bằng góc trong đỉnh đối diện nên là tứ giác nội tiếp.

d) Dây $CN // BD$ mà $OK \perp BD$ (ý c) $\Rightarrow OK \perp CN$ hay OK là trung trực của CN (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) $\Rightarrow \widehat{OIN} = \widehat{OIC}$

Tứ giác $AIOC$ nội tiếp nên $\widehat{OIC} = \widehat{OAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{OC}$)

Tam giác OAC cân tại O nên $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$.

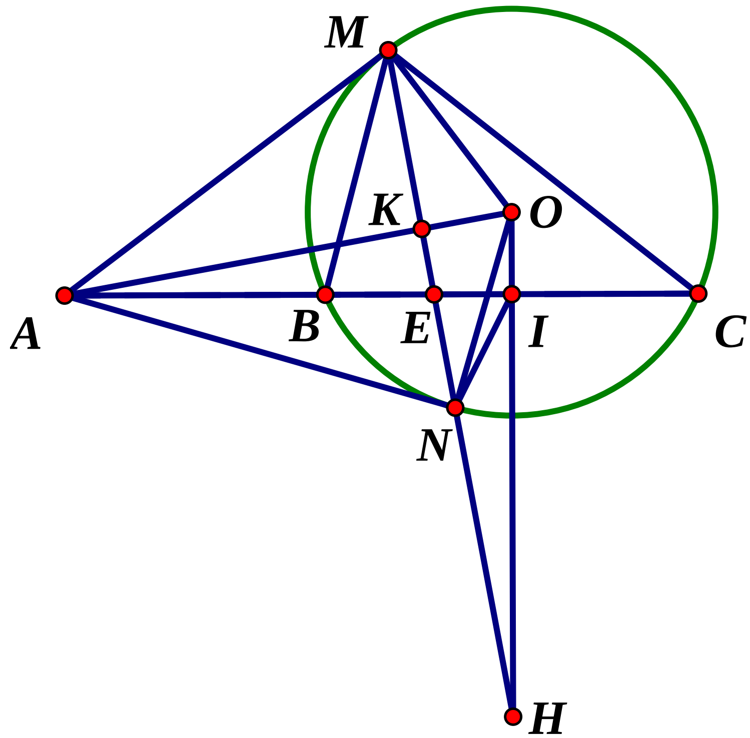
Mà $\widehat{OCA} + \widehat{OIA} = 180°$ (hai góc đối của tứ giác $AIOC$ nội tiếp) nên $\widehat{OIN} + \widehat{OIA} = 180°$ suy ra $\widehat{AIN} = 180°$ hay ba điểm A, I, N thẳng hàng.

Bài 100. Cho ba điểm A, B, C cố định và thẳng hàng theo thứ tự đó. Đường tròn $\left(O; R\right)$ thay đổi đi qua B và C sao cho O không thuộc BC. Từ điểm A vẽ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn $\left(O\right)$. Gọi I là trung điểm BC, E là giao điểm của MN và BC, H là giao điểm của đường thẳng OI và đường thẳng MN.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, O, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $OI.OH = R^2$.

c) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.



a) Theo tính chất của tiếp tuyến, ta có $\widehat{AMO}=\widehat{ANO}=90°$. Lại có I là trung điểm của dây BC nên $\widehat{AIO}=90°$ (Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) nên M,N,O,I cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

b) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có $AM=AN$ mà $OM=ON$ (bán kính của (O)) nên AO là trung trực của $MN \Rightarrow AO\perp MN$ tại trung điểm K của MN. $\Rightarrow \Delta AIO \backsim \Delta HKO$ (hai tam giác vuông có góc nhọn O chung)

$$\Rightarrow \frac{OA}{OI}=\frac{OH}{OK}\Rightarrow OI.OH=AO.OK \ (1)$$

Lại có trong tam giác AMO vuông tại M có MK là đường cao nên $OK^2=AO.KO \Leftrightarrow AO.KO=R^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OI.OH=R^2$.

c) Gọi E là giao điểm của MN và AC ta có $\Delta AEK \backsim \Delta AOI$ (hai tam giác vuông có góc nhọn A chung) $\Rightarrow \frac{AE}{AO}=\frac{AK}{AI}\Leftrightarrow AE=\frac{AO.AK}{AI}$ (3).

Trong tam giác AMO vuông tại M có MK là đường cao nên $AM^2=AO.AK$ (4)

Mặt khác $\Delta AMB \backsim \Delta ACM$ ($\widehat{MAB}$ chung; $\widehat{AMB}=\widehat{ACM}$ góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BM}$) $\Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AC}{AM}\Leftrightarrow AM^2=AB.AC$ (5)

Từ (3), (4), (5) ta có $AE=\frac{AB.AC}{AI}$

Vì A,B,C cố đinh, I là trung điểm của BC cố định nên AE không đổi suy ra E cố định.

Vậy đường thẳng MN luôn đi qua điểm E cố định

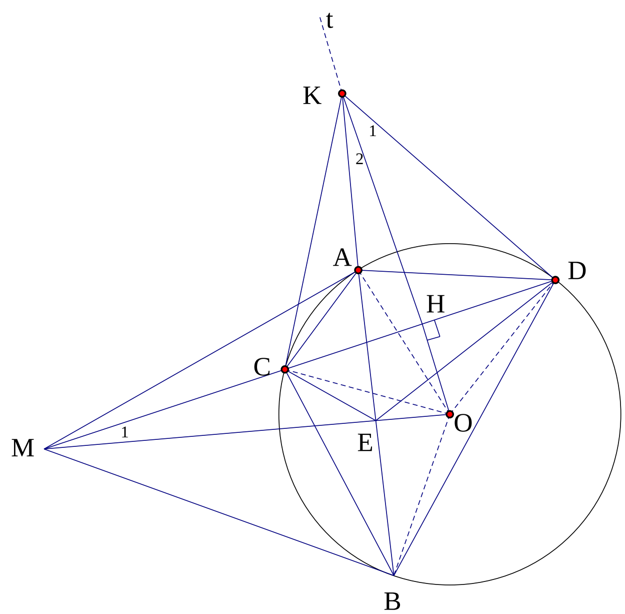
Bài 101. Cho đường tròn (O; R), từ điểm M ở ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là tiếp điểm) và cát tuyến đi qua M cắt đường tròn tại C và D (C nằm giữa M và D) cung CAD nhỏ hơn cung CBD. Gọi E là giao điểm của AB và OM.

a) Chứng minh $\widehat{DEC} = 2\widehat{DBC}$

b) Từ O kẻ Ot vuông góc với CD cắt tia BA tại K. Chứng minh KC và KD là hai tiếp tuyến của đường tròn (O).

(Đề thi chọn hsg toán 9, Tỉnh Nghệ An,năm học 2013 – 2014)

Giải:



a) Vì MA và MB là hai tiếp tuyến của (O) => MA = MB; OA=OB

=> OM là trung trực của AB hay OM ⊥ AB

Tam giác MAO vuông tại A, đường cao AE, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: MA^2 = ME.MO (1)

Xét ΔMAC và ΔMDA có:

$\widehat{AMC}$ chung

$\widehat{MAC} = \widehat{MDA}$ (cùng chắn cung AC)

=> ΔMAC ~ ΔMDA (g.g)

=> $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA}$ hay MA^2 = MC.MD (2)

Từ (1) và (2) => ME.MO = MC.MD

Hay $\frac{ME}{MD} = \frac{MC}{MO}$.

Xét ΔMCE và ΔMOD có: $\widehat{M_1}$ chung; $\frac{ME}{MD} = \frac{MC}{MO}$ => ΔMCE ~ ΔMOD (c.g.c)

=> $\widehat{MEC} = \widehat{MDO}$ => Tứ giác DOEC nội tiếp được đường tròn

=> $\widehat{DOC} = \widehat{DEC}$ (cùng chắn cung DC)

Mà $\widehat{DOC} = 2\widehat{DBC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung DC)

=> $\widehat{DEC} = 2\widehat{DBC}$ (đpcm)

b) Gọi H là giao điểm của OK và CD

Xét ΔOHM và ΔOEK có: Ô là góc chung; $\widehat{OHM} = \widehat{OEK} (= 90°)$

=> ΔOHM ~ ΔOEK (g.g)

=> $\frac{OH}{OE} = \frac{OM}{OK}$ hay OE.OM = OH.OK

Mà OE.OM = OA^2 => OH.OK = $OA^2 = OC^2 = OD^2$ => $\frac{OH}{OD} = \frac{OD}{OK}$

Xét ΔOHD và ΔODK có: Ô chung; $\frac{OH}{OD} = \frac{OD}{OK}$ => ΔOHD ~ ΔODK (c.g.c)

=> $\widehat{ODK} = \widehat{OHD} = 90°$ =>OK⊥OD tại D hay KD là tiếp tuyến của (O) (3)

Theo chứng minh trên: OH.OK=OC^2 => $\frac{OH}{OC} = \frac{OC}{OK}$

Xét ΔOHC và ΔOCK có: Ô chung; $\frac{OH}{OC} = \frac{OC}{OK}$ => ΔOHC ~ ΔOCK (c.g.c)

=> $\widehat{OCK} = \widehat{OHC} = 90°$

=> KC ⊥ OC tại K hay KC là tiếp tuyến của (O) (4)

Từ (3) và (4) => KC và KD là 2 tiếp tuyến của (O). (đpcm)

Bài 102. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O), (B, C là các tiếp điểm). Vẽ đường kính BD của đường tròn(O), AD cắt đường tròn (O) tại E.

a) Chứng minh AB^2 = AE.AD

b) Kẻ đường kính EK của đường tròn (O), CK cắt DE tại I. Chứng minh I là trung điểm của DE.

c) Gọi H là giao điểm của OA với BC. Chứng minh HC là tia phân giác của góc DHE.

d) Gọi S là giao điểm của hai tia OI và BC. Chứng minh SD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Giải

a) Ta có: $\widehat{ACE}=\widehat{ADC}$ (cùng chắn cung EC)

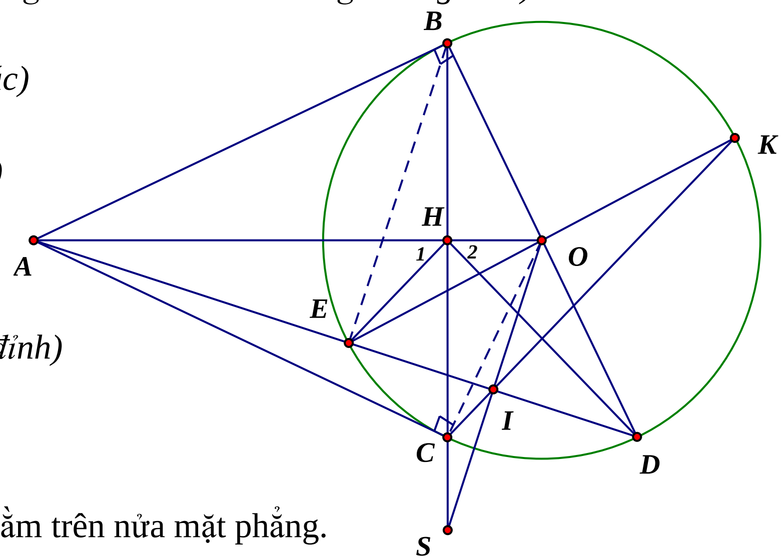
Xét ΔACD và ΔAEC có:

Â chung, $\widehat{ACE}=\widehat{ADC}$ (cmt) => ΔACD ~ ΔAEC (g.g)

=> $\frac{AC}{AE}=\frac{AD}{AC}$ => AC^2 = AE.AD

Mà AB = AC (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)=> AB^2 = AE.AD (*đpcm*)

b) Ta có: $sđ\widehat{CIA}=\frac{1}{2}sđ\left(\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{DK}\right)$ *(tính chất góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)*



Mà $sđ\widehat{COA}=\frac{1}{2}sđ\widehat{COB}$ *(do OA là phân giác)*

thì $sđ\widehat{COA}=\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{CEB}$ *(tính chất góc ở tâm)*

$\Rightarrow sđ\widehat{COA}=\frac{1}{2}sđ\left(\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{EB}\right)$

Lại có: $BD\cap EK\equiv O\Rightarrow \widehat{DOK}=\widehat{BOE}$ *(đối đỉnh)*

Thì $\overset{\frown}{DK}=\overset{\frown}{EB}$

Do đó $\widehat{CIA}=\widehat{COA}$

Xét tứ giác *AOIC* có $\widehat{CIA}=\widehat{COA}$ và cùng nằm trên nửa mặt phẳng.

Nên tứ giác *AOIC* nội tiếp được một đường tròn.

Suy ra $\widehat{ACO}=\widehat{AIO}$ *(cùng chắn* $\overset{\frown}{AO}$ *)*

Hơn nữa *AC* là tiếp tuyến thì $\widehat{ACO}=90^0\Rightarrow\widehat{AIO}=90^0$ hay $AI\perp OI\equiv I$

Hay $ED\perp OI\equiv I$

Vậy *I* là trung điểm của *ED (tính chất của đường kính và dây cung)*

c) Vì $AB=AC$ *(tính chất của tiếp tuyến)* $\Rightarrow$ *A* thuộc đường trung trực của *BC*.

$OB=OC\left(=R\right)$ $\Rightarrow$ *O* thuộc đường trung trực của *BC*.

Do đó *OA* là đường trung trực của *BC* hay $OA\perp BC$ (1)

Xét ΔABO vuông tại *B*, đường cao *BH* có: $AB^2=AH.AO$

Mà $AB^2=AE.AD$ *(chứng minh phần a)*

Nên $AH.AO=AE.AD\Rightarrow\frac{AH}{AD}=\frac{AE}{AO}$

Xét ΔAEH và ΔAOD có: $\frac{AH}{AD}=\frac{AE}{AO}$ và $\widehat{A}$ chung

Nên $\Delta AEH\backsim\Delta AOD$

Do đó $\widehat{H_1}=\widehat{ADO}$

Xét tứ giác $OHED$ có $\widehat{H_1} = \widehat{ADO} \Rightarrow$ tứ giác $OHED$ nội tiếp được một đường tròn *(tính chất đảo góc ngoài của của tứ giác nội tiếp).*

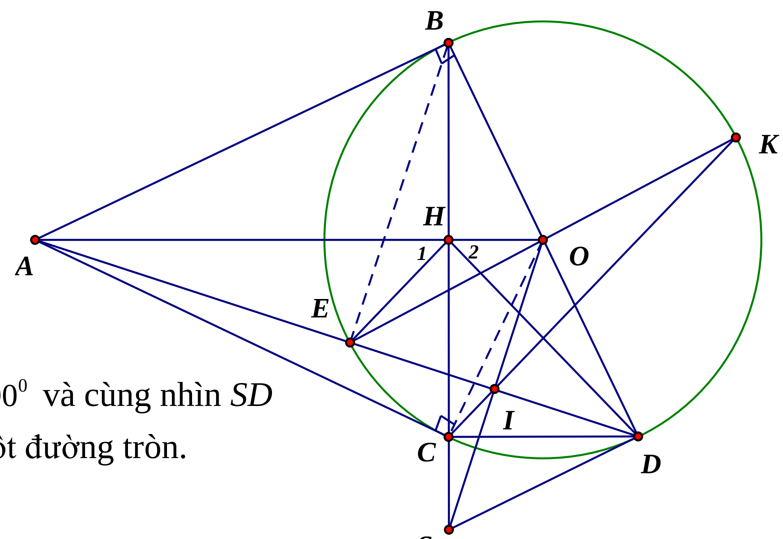
Suy ra $\widehat{H_2} = \widehat{DEO}$ *(cùng chắn cung OD)*

Hơn nữa ΔOED cân tại *O(do* $OE = OD = R) \Rightarrow \widehat{DEO} = \widehat{ADO}$

Nên $\widehat{H_1} = \widehat{H_2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EHC} = \widehat{DHC}$ hay HC là tia phân giác của góc DHE

d) Gọi S là giao điểm của hai tia OI và BC. Chứng minh SD là tiếp tuyến của đường tròn (O).



Vì $\widehat{AIO} = 90^0$ *(chứng minh trên)*

$\Rightarrow \widehat{SID} = 90^0$ *(đối đỉnh với* $\widehat{AIO}$*)*

Lại có $\widehat{BCD} = 90^0$ *(góc chắn nửa đường tròn)*

$\Rightarrow \widehat{SCD} = 90^0$ *(kề bù với* $\widehat{BCD}$*)*

Nên $\widehat{SID} = \widehat{SCD} = 90^0$

Xét tứ giác $DICS$ có $\widehat{SID} = \widehat{SCD} = 90^0$ và cùng nhìn SD

Nên tứ giác $DICS$ nội tiếp được một đường tròn.

Suy ra $\widehat{SDC} = \widehat{SIC}$ *(cùng chắn* $\overset{\frown}{CS}$ *)*

Lại có 5 điểm *A, B, O, I, C* cùng thuộc đường tròn đường kính *OA*.

Nên tứ giác *BOIC* cùng thuộc một đường tròn

Do đó $\widehat{OBC} = \widehat{SIC}$ *(tính chất góc ngoài của tứ giác nội tiếp)*

Hay $\widehat{DBS} = \widehat{SIC}$

Suy ra $\widehat{SDC} = \widehat{DBS}$

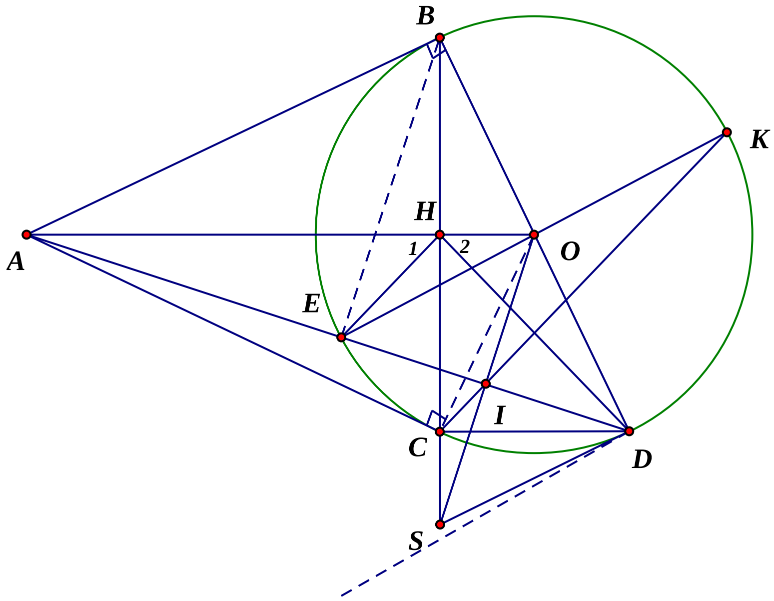
Cho nên $\widehat{SDC} + \widehat{BDC} = \widehat{SDB} = \widehat{BDC} + \widehat{DBC} = 90^0$ *(hệ quả trong tam giác vuông)*

Suy ra $SD \perp BD$

Hơn nữa *BD* là đường kính của đường tròn *(O)* nên *SD* là tiếp tuyến của đường tròn tâm *(O).*

Chú ý: Ta cũng có thể chứng minh câu d) như sau:

Trên cùng một nửa mặt phẳng chứa điểm S, có bờ là đường thẳng chứa tia DC, vẽ tiếp tuyến Dx của đường tròn (O), ta đi chứng minh $\widehat{SDC} = \widehat{xDC} = \widehat{DBS}$ *thì suy ra được hai tia* Dx DS *trùng nhau. Từ đó, suy ra được DS là tiếp tuyến.*



Bài 103. Cho đường trong (O) và hai đường kính AB và CD không vuông góc với nhau. Gọi M là giao điểm của AC và tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, MO cắt BC tại N. Đường thẳng MD cắt (O) tại điểm thứ hai P. Chứng minh A, N, P thẳng hàng.

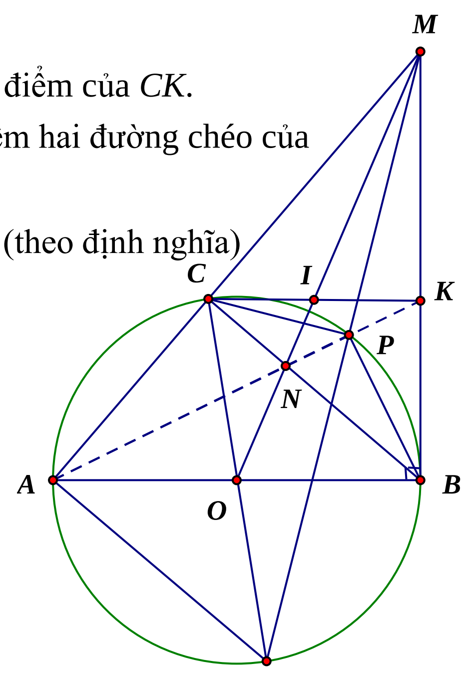
Giải

Gọi $K \equiv AP \cap MB$ (1)

$I \equiv CK \cap MO$

Ta đi chứng minh tứ giác *ACKB* là hình thang và *I* là trung điểm của *CK*.

Từ đó, theo bổ đề hình thang ta sẽ chỉ ra được *N* là giao điểm hai đường chéo của hình thang *ACKB*.



Thật vậy, vì tứ giác *ACKB* nội tiếp đường tròn (O), (theo định nghĩa)

Nên $\widehat{MCP} = \widehat{ABP}$ *(tính chất góc ngoài của tứ giác nội tiếp)*

Lại có:

$AB \perp BM$ *(do BM là tiếp tuyến)* $\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^0$

$\widehat{APB} = 90^0$ *(góc chắn nửa đường tròn)* $\Rightarrow \widehat{BPK} = 90^0$

Nên $\widehat{ABP} = \widehat{BKA}$ *(cùng phụ với* $\widehat{KBP}$ *)*

Do đó, ta có: $\widehat{MCP} = \widehat{BKA}$

Xét tứ giác *MCPK* có $\widehat{MCP} = \widehat{BKA}$

Nên tứ giác *MCPK* nội tiếp được một đường tròn *(tính chất đảo góc ngoài của của tứ giác nội tiếp).*

Suy ra $\widehat{CPM} = \widehat{CKM}$ *(cùng chắn* $\overset{\frown}{CM}$ *)*

Hơn nữa, $\widehat{CPD} = 90^0$ *(góc chắn nửa đường tròn)* thì $\widehat{CPM} = 90^0$ *(hai góc kề bù)*

Do đó: $\widehat{CKM} = 90^0$

Hay $CK \perp BM$

Ta lại có $AB \perp MB$

Nên $CK // AB$

Suy ra $\frac{CI}{IK} = \frac{AO}{OB}$ *(tính chất chùm đường thẳng đồng quy)* hay $\frac{CI}{IK} = 1$ do $AO = OB = R$

Nên $CI = IK$ hay I là trung điểm của CK.

Hơn nữa, tứ giác $ACKB$ có $CK // AB \Rightarrow$ tứ giác $ACKB$ là hình thang.

Theo bổ đề hình thang thì N là giao điểm của hai đường chéo AK, BC

Do đó $N \in AK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm A, N, P thẳng hàng.

Chú ý: Có thể dựa và Talet cũng chứng minh được $\Delta NIK \backsim \Delta NOA$ *(c.g.c) suy ra được* $\widehat{INK} = \widehat{ONA}$ *thì* A, N, P *thẳng hàng.*