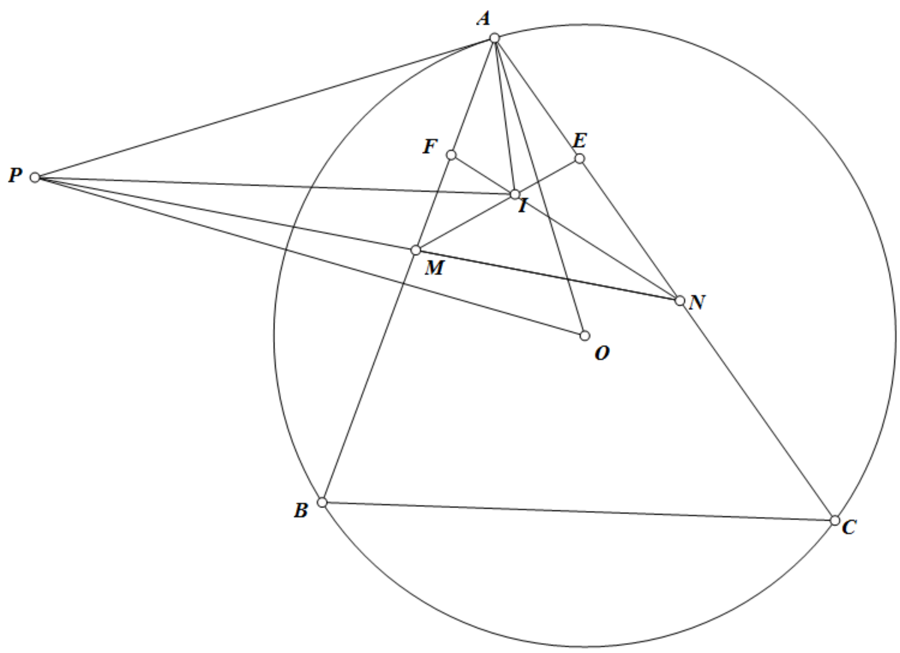
Mở rộng và khai thác một bài toán hay trong đề Brazil TST 2017

Nguyễn Duy Khương-chuyên Toán khoá 1518-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

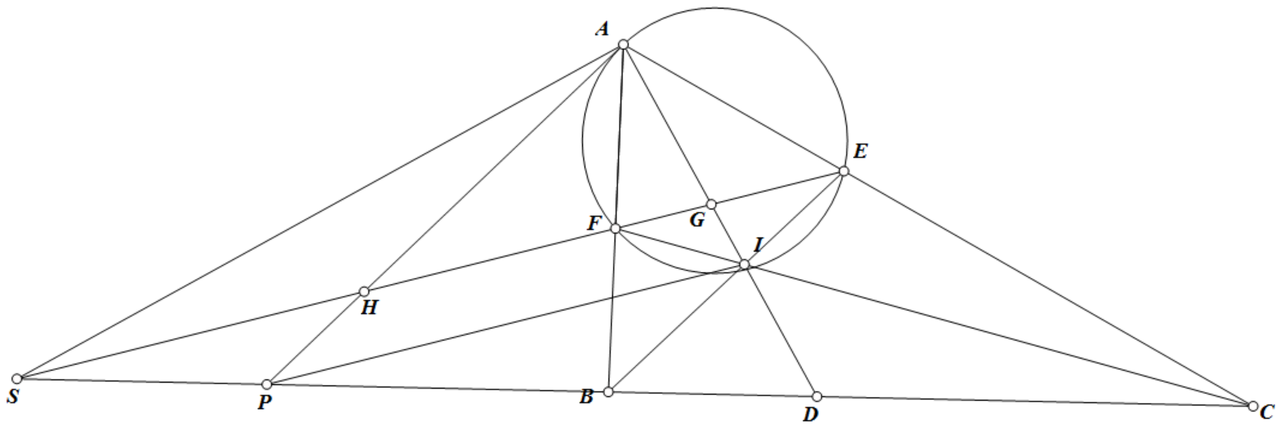
Tóm tắt nội dung: Trong bài viết này, tôi muốn đề cập một số khai thác liên quan đến một bài toán hay trong đề **Brazil TST 2017**. Qua bài viết tôi cũng muốn nhấn mạnh tầm quan trọng của các phép đổi mô hình trong việc giải toán và sáng tạo trong hình học. Bài toán có nội dung như sau:

Bài toán 1(Brazil TST 2017): Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Lấy M, N trên AB, AC sao cho: $BM = MN = CN$. Lấy I là tâm nội tiếp tam giác AMN. Tiếp tuyến (O) tại A cắt MN tại P. Chứng minh rằng: $PA = PI$.



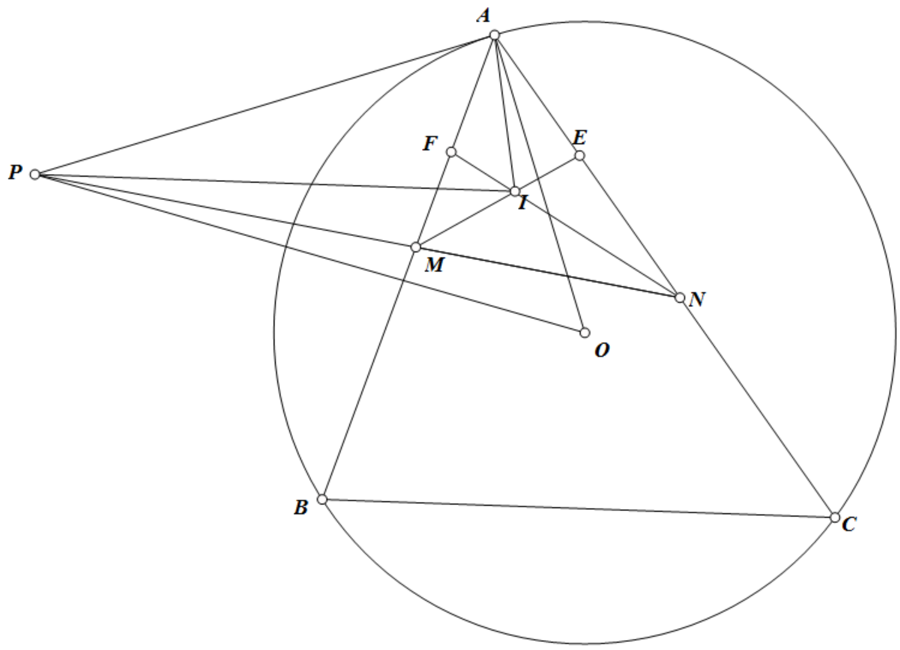
Nhận xét: Tại sao lại xuất hiện giả thiết $BM = CN = MN$ lạ mắt trên? Thay vì giải ngay bài toán này tôi xin mở rộng hơn bài toán này như sau:

Bài toán 2(Mở rộng Brasil TST 2017): Cho tam giác ABC có các đường phân giác BE, CF cắt nhau ở I. Tiếp tuyến tại A của (AEF) cắt BC ở P. Chứng minh rằng: $PI \| EF$ và $PI = PA$.



Lời giải(Nura Rhyon): Gọi S, G, H lần lượt là giao điểm của EF với BC, AD, AP (chú ý $AI \cap BC = D$), theo hàng điểm điều hoà cơ bản thì: $(SD, BC) = -1$ do đó: $\angle SAG = 90°$. Ta có: $\angle HAG = \angle HAF + \angle GAF = \angle GAE + \angle AEF = \angle HGA$ do đó H là trung điểm SG. Áp dụng định lí *Menelaus* cho tam giác SGD với cát tuyến AHP ta thu được: $\dfrac{PS}{PD} = \dfrac{AG}{AD}$ do đó: $\dfrac{AG}{AD} = \dfrac{IG}{ID}$ hay là: $PI \| SG$ do đó $PA = PI$.

Nhận xét: Có lẽ các bạn vẫn chưa nhận ra **bài toán 1** chỉ là bài toán nhỏ hơn **bài toán 2**, sau đây tôi sẽ nói rõ lí do.

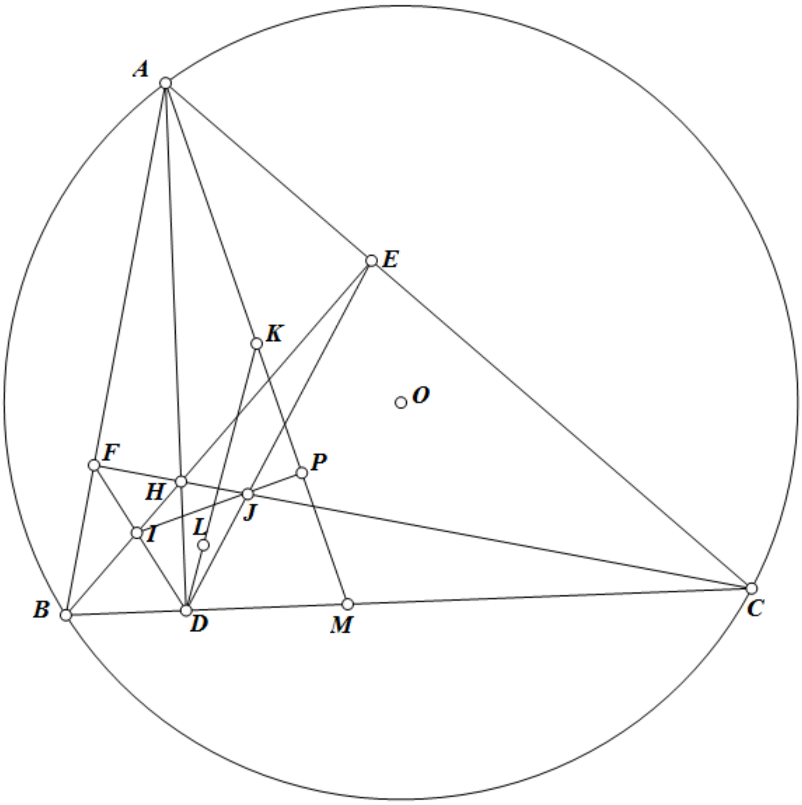


Lời giải bài toán 1: Gọi $NI \cap AM = F, MI \cap AN = E$. Ta có: $\dfrac{FB}{FA} = \dfrac{MN + FM}{FA} = \dfrac{MN}{FA} + \dfrac{MN}{AN}$. Tương tự thì: $\dfrac{EC}{EA} = \dfrac{MN}{EA} + \dfrac{MN}{AM}$. Ta để ý rằng: $\dfrac{1}{EA} - \dfrac{1}{AN} = \dfrac{EN}{EA.AN} = \dfrac{MN}{AM.AN} = \dfrac{FM}{FA.AM} = \dfrac{1}{FA} - \dfrac{1}{AM}$ do đó $\dfrac{FB}{FA} = \dfrac{EC}{EA}$ hay là $EF \| BC$ theo định lí $Thales$ đảo. Vậy (AEF) tiếp xúc (ABC) do đó PA là tiếp tuyến tới (AEF). Vậy áp dụng **bài toán 2** cho tam giác AMN thì: $PI = PA$ hay điều phải chứng minh.

Nhận xét: Nhờ việc sử dụng hợp lí bài toán mở rộng đã cho một lời giải tuyệt đẹp và rất tự nhiên.

Trong quá trình đổi mô hình để giải **bài toán 2**, tôi tìm ra bài toán sau:

Bài toán 3(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. X là tâm đường tròn $Euler$ của tam giác ABC. $AX \cap BC = M$, $I = DF \cap BE, J = DE \cap CF$. Lấy L là tâm DIJ. Chứng minh rằng: DL đi qua trung điểm đoạn AM.



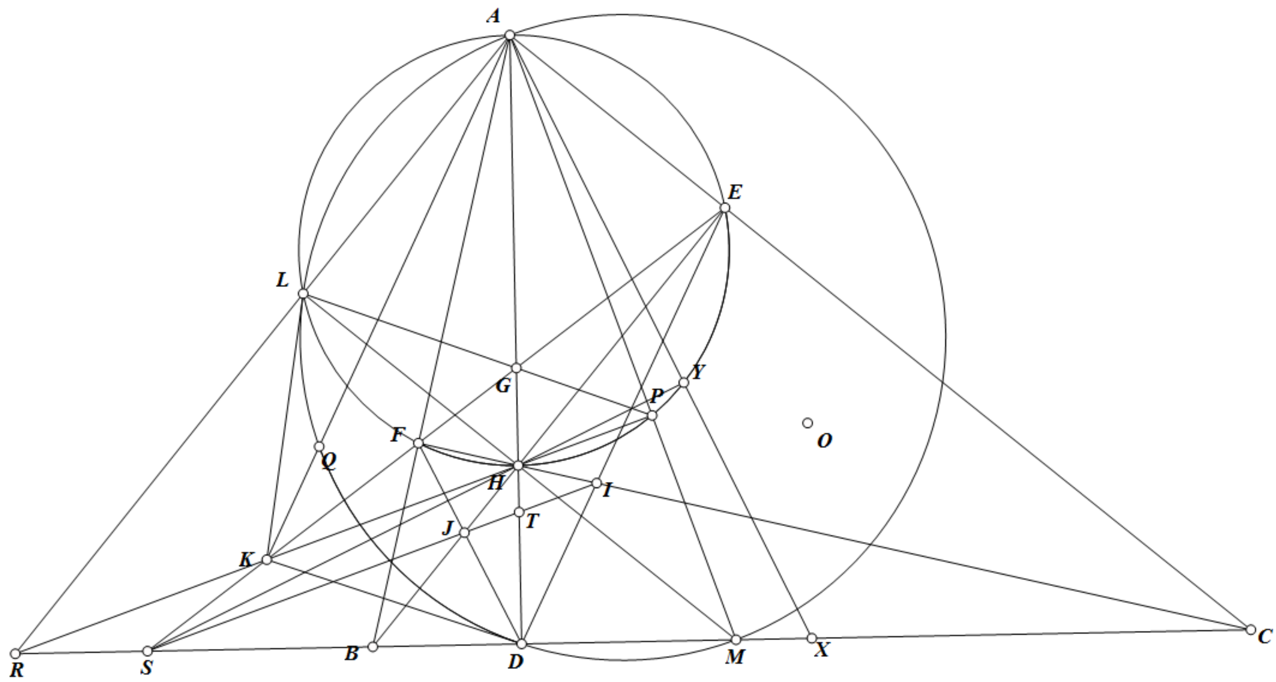
Lời giải: *Bổ đề* : Cho tam giác ABC có trực tâm H và các đường cao AD, BE, CF. Gọi $BH \cap DF = P, CH \cap DE = Q$. Gọi I là tâm $Euler$ của tam giác ABC. Chứng minh rằng: $AI \perp PQ$.

Chứng minh(Bạn đọc tự vẽ hình): Lấy K là tâm (BHC). Ta chỉ cần chứng minh $IK \perp PQ$. Lại có: $\angle HFB = \angle HDB = 90°$ do đó $HFBD$ nội tiếp nên $PH.PB = PF.PD$, chú ý $F, D \in (Euler)$ của tam giác ABC nên $P_{P/(Euler)} = P_{P/(BHC)}$. Chứng minh tương tự thì: $P_{Q/(Euler)} = P_{Q/(BHC)}$ vậy PQ là trục đẳng phương của $(Euler)$ và (BHC) do đó chú ý I, K là tâm $(Euler)$ và (BHC) do đó $IK \perp PQ$ hay là ta có điều phải chứng minh.

Quay trở lại bài toán ban đầu, theo *bổ đề* thì: $IJ \perp AM$, lấy $P = AM \cap IJ$ thì $PAFJ$ nội tiếp. Gọi K là trung điểm đoạn AM. Ta có: $\angle LDA = \angle LDI - \angle EBA = 90° - \angle IJD - 90° + \angle A = \angle A - (\angle HJD - \angle HJI) = \angle A + \angle MAB - (180° - \angle B - \angle ACF) = \angle A + \angle MAB - (\angle A + \angle C - \angle ACF) = \angle A + \angle MAB - (\angle A + \angle DAB) = \angle MAB - \angle DAB = \angle MAD = \angle KDA$. Vậy D, L, K thẳng hàng.

Nhận xét: Lời giải trên khai thác tính chất thú vị và nhiều ứng dụng của tâm *Euler*. Từ đó cho ta một lời giải thuần cộng góc. Viết lại **bài toán 2** dưới mô hình trực tâm, ta có bài toán sau:

Bài toán 4: Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Lấy $I = DF \cap BE, J = DE \cap CF$. Tiếp tuyến tại D của (DIJ) cắt EF ở K. Chứng minh rằng: $KH = KD$ và $KH \| IJ$.



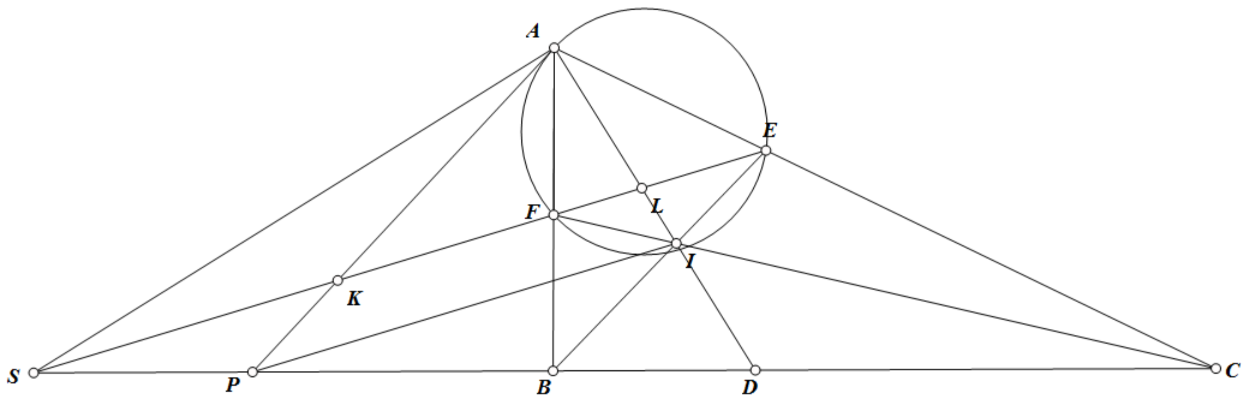
Lời giải(Nguyễn Duy Khương): Đường thẳng qua A vuông góc IJ cắt BC tại M. $HM \cap (AEF) = L, H$, lấy $LA \cap BC = R$. Do $\angle ADM = \angle MLA = 90°$ do đó H là trực tâm tam giác ARM. Theo **bài toán 3** ta có: DS đi qua tâm (ADM) do đó: (DIJ) tiếp xúc (ADM). Gọi $EF \cap BC = S$, $DA \cap IJ = T$. Ta lấy trung điểm BC là X, ta có SH vuông góc AX tại Y do đó: $SH.SY = SD.SM = SE.SF$ hay là S thuộc trục đẳng phương của $(Euler)$ và (HBC) do đó S thuộc IJ. Gọi $LP \cap AH = G, EF \cap AH = G'$, theo phép chiếu xuyên tâm của hàng điều hoà cơ bản ta dễ dàng chứng minh được: $(AH, G'D) = (AH, GD) = -1$ do đó: $G \equiv G'$. Do đó chú ý rằng: FI, EJ, DG đồng quy tại H do đó theo hàng chùm điểm điều hoà cơ bản thì $S(GT, HD) = -1 = S(ET, HR)$ do đó chú ý $ST \| HR$ nên SE đi qua trung điểm HR. Gọi $EF \cap HR = K'$, ta dễ dàng chứng minh được: $K'D$ là tiếp tuyến tới

(ADM) do đó $K'D$ tiếp xúc (DIJ) hay là ta có: $K \equiv K'$. Vậy $KD = KH$ đồng thời $KH \| IJ$(điều phải chứng minh).

Nhận xét: Bài toán này có lời giải và ý tưởng khá phức tạp. Đây cũng là 1 lời giải khá *ảo diệu* cho **bài toán 2**, khác hẳn cách khai thác giả thiết trực tiếp ban đầu.

Quay trở lại mô hình **bài toán 2**, bài toán vẫn tiếp tục được mở rộng hơn nữa khi thay I bởi một điểm bất kì trên phân giác góc $\angle BAC$.

Bài toán 5(Nguyễn Trần Hữu Thỉnh): Cho tam giác ABC. Lấy I là 1 điểm nằm trên phân giác góc $\angle BAC$. BI, CI cắt AC, AB tại E, F. Tiếp tuyến tại A của (AEF) cắt BC tại điểm P. Chứng minh rằng: $PI \| EF$ và $PI = PA$.

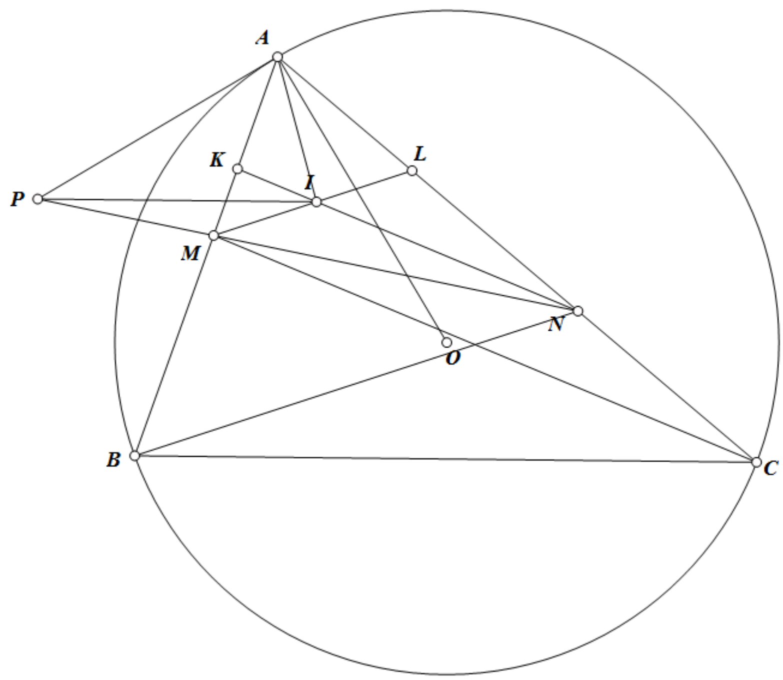


Lời giải: Lấy $S = EF \cap BC$, $AP \cap EF = K, AI \cap EF, BC = L, D$. Theo hàng điểm điều hoà cơ bản thì: $(SD, BC) = -1$ do đó $\angle SAL = 90°$. Ta có: $\angle KAL = \angle FAK + \angle BAD = \angle KLA$ do đó $KA = KL = KS$ vậy K là trung điểm SL. Áp dụng định lí $Menelaus$ cho tam giác SLD với cát tuyến APK thì: $\dfrac{SP}{PD} = \dfrac{AL}{AD} = \dfrac{IL}{ID}$ do đó: $PI \| EF$. Do đó: $\angle PIA = \angle ALK = \angle KAI$ do đó $PA = PI$ hay ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét: Bài toán này vẫn sử dụng ý tưởng giống lời giải **bài toán 2**.

Cũng mở rộng **bài toán 1**, nhưng theo ý tưởng khai thác điều kiện các điểm M, N. Tác giả **Trần Quốc Thịnh** đề nghị bài toán sau(hiển nhiên nó vẫn là hệ quả **bài toán 5**).

Bài toán 6(Trần Quốc Thịnh): Cho tam giác ABC không cân nội tiếp (O). Trên AB, AC lấy các điểm M, N sao cho $BM = CN$. Đường thẳng qua M song song BN cắt đường thẳng qua N song song CM tại điểm I. Tiếp tuyến (O) tại A cắt MN tại P. Chứng minh rằng: AI là phân giác góc $\angle BAC$ đồng thời $PA = PI$.



Lời giải: Rõ ràng ta chỉ cần chứng minh AI là phân giác góc $\angle BAC$ là có ngay tất cả các điều phải cần phải chứng minh theo **bài toán 5**. Gọi MI, NI cắt AC, AB lần lượt tại L, K. Theo định lí **Ceva sin** thì: $\dfrac{\sin\angle IAB}{\sin\angle IAC}.\dfrac{\sin\angle LMN}{\sin\angle LMA}.\dfrac{\sin\angle KNA}{\sin\angle KNM} = 1$. Do đó chú ý rằng: $\dfrac{\sin\angle LMN}{\sin\angle LMA} = \dfrac{\sin\angle MNB}{\sin\angle MBN} = \dfrac{MB}{MN}$. Tương tự: $\dfrac{\sin\angle KNA}{\sin\angle KNM} = \dfrac{MN}{NC}$. Do đó: $\dfrac{\sin\angle IAB}{\sin\angle IAC} = 1$ hay là: $\angle IAB = \angle IAC$ tức là AI là phân giác góc $\angle BAC$.

Nhận xét: Bài toán này hay và rất thú vị dù không quá khó khi đã chứng minh được các kết luận của **bài toán 5**. Lời giải ở trên là phỏng theo ý tưởng của bạn **Trần Anh Quân**.

Bài toán còn ẩn chứa nhiều điều thú vị, các bạn hãy tìm tòi và khai thác thêm nữa. Bạn đọc hãy thử chứng minh các bài toán dưới đây xem như các bài tập luyện tập.

Bài toán 7(Nguyễn Trần Hữu Thỉnh): Cho tam giác ABC. Lấy E, F trên AC, AB và $BE \cap CF = X$. Tiếp tuyến tại A của (AEF) cắt BC tại P. Đường thẳng qua P song song EF cắt phân giác góc $\angle BAC$ tại I. Chứng minh rằng: $PI = PA$.

Bài toán 8(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Lấy $I = DF \cap BE, J = DE \cap CF$. Giao điểm thứ hai của (FIB) và (HID) là P và giao điểm thứ hai của (HJD) cùng (CEJ) là Q. Gọi tâm (APQ) là T. Chứng minh rằng: AT đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC.

Bài toán 9(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Lấy $I = DF \cap BE, J = DE \cap CF$. Tiếp tuyến tại D của (DIJ) cắt EF ở K. Gọi $AK \cap (O) = X, K$. Giao điểm thứ hai của (FIB) và (HID) là P và giao điểm thứ hai của (HJD) cùng (CEJ) là Q. Chứng minh rằng: (AXH) tiếp xúc (HPQ).

Tài liệu tham khảo

1. diendantoanhoc.net

2. Group facebook Bài Toán Hay-Lời Giải Đẹp-Đam Mê Toán Học.

3. Một số bài toán liên quan tới đường thẳng Euler và đường tròn Euler-Nguyễn Duy Khương, Trương Tuấn Nghĩa.