Lời giải và bình luận một số bài toán hình học thi vào 10

Nguyễn Duy Khương-chuyên Toán khoá 1518-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Như vậy là kì thi vào 10-năm học 2016-2017 đã gần như đã kết thúc, hầu như các trường chuyên trên cả nước đã hoàn tất khâu tuyển sinh đầu vào. Tôi muốn bình luận một số bài toán hình học hay của các trường chuyên trong kì thi năm nay. Cá nhân tôi thấy có một số bài toán hình học khá sâu sắc và hay. Tuy nhiên có một số lại khá "tệ"-bài toán khó bởi bản chất bài toán không nằm ở bậc học cấp THCS, điều đó đánh đố học sinh và là điều không cần thiết.

Trước khi vào bình luận các đề thi tôi buộc lòng phải trình bày 2 bổ đề sau:

Bổ đề 1: Cho tam giác ABC và các điểm D, E, F lần lượt thuộc BC, CA, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy. Giả sử $EF \cap BC = S$. Chứng minh rằng: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{SB}{SC}$.

Chứng minh(Bạn đọc tự vẽ hình): Áp dụng định lí $Ceva$ cho AD, BE, CF đồng quy thì: $\dfrac{DB}{DC}.\dfrac{EA}{EC}.\dfrac{FB}{FA} = 1$. Áp dụng định lí $Menelaus$ cho cát tuyến S, E, F của tam giác ABC thì: $\dfrac{SC}{SB}.\dfrac{EA}{EC}.\dfrac{FB}{FA} = 1$. Chia vế cho vế dĩ nhiên ta được đpcm.

Bổ đề 2: Cho các điểm I, F, E, K nằm trên 1 đường thẳng theo thứ tự đó sao cho thoả mãn 1 trong ba hệ thức sau đây:

1) $\dfrac{IF}{IK} = \dfrac{FE}{EK}$

2) Gọi M là trung điểm IE. Khi đó: $ME^2 = MI^2 = MF.MK$(Hệ thức $Newton$).

3) Gọi N là trung điểm FK. Khi đó: $EI.EN = EF.EK$(Hệ thức $Maclaurin$). Cũng cần chú ý hệ thức sau cũng gọi là hệ thức $Maclaurin$: $IE.IN = IF.IK$.

Chứng minh: Ta đi chứng minh các hệ thức trên là tương đương nhau. Giả sử ta có hệ thức $Maclaurin$, thế thì: $ME^2 = MF.MK \Leftrightarrow ME^2 = (EF-ME)(EK-ME) \Leftrightarrow ME^2 = EF.EK + ME^2 - ME(EF+EK) \Leftrightarrow EF.EK = \dfrac{EI}{2}(EF+EK) = 2EN.\dfrac{EI}{2} = EN.EI$(đúng). Do đó nếu có hệ thức $Maclaurin$ thì ta có hệ thức $Newton$. Ta quay lại hệ thức thứ nhất, giả sử nếu ta cũng có sẵn hệ thức $Maclaurin$ thế thì: $\dfrac{IF}{IK} =$

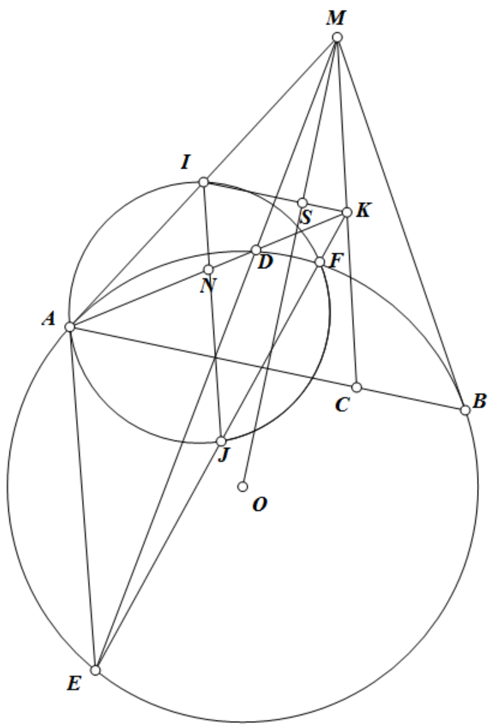
$\dfrac{FE}{EK} \Leftrightarrow IK.EF = EK.IF \Leftrightarrow (EK - EI)EF = (IK + EI)IF \Leftrightarrow EI.EN - EI.EF = EI.IF + IK.IF \Leftrightarrow EI(EN - EF - IF) = IK.IF \Leftrightarrow IE.IN = IF.IK$(đúng theo hệ thức $Maclaurin$). Như vậy là cả ba hệ thức trên tương đương nhau miễn là mình có sẵn một hệ thức đúng.

Bài toán 1(Trích đề thi tuyển sinh vào 10 chuyên Toán ĐHSP-Vòng 2): Cho M nằm ngoài đường tròn $(O;R)$. MA, MB là các tiếp tuyến đến (O). Lấy C là 1 điểm nằm trên AB, I, K là trung điểm MA, MC. $KA \cap (O) = A, D$. Lấy $MD \cap (O) = D, E$ và $KE \cap (O) = E, F$. J là trung điểm FE.

a) Chứng minh rằng: $OK^2 - MK^2 = R^2$.

b) Chứng minh rằng: $MCDB$ là 1 tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh rằng: $IAJF$ là tứ giác nội tiếp.



Lời giải: a) Gọi $OM \cap IK = S$. Chú ý rằng: $OM \perp IK$ nên theo định lí *Pythagoras* ta dễ có: $KO^2 - KM^2 = SO^2 - SM^2 = IO^2 - IM^2 = IA^2 + OA^2 - IM^2 = R^2$(đpcm).

b) $MK^2 = KD.KA$ do đó $\angle KMD = \angle DAM = \angle CBD$ do đó $MDCB$ nội tiếp.

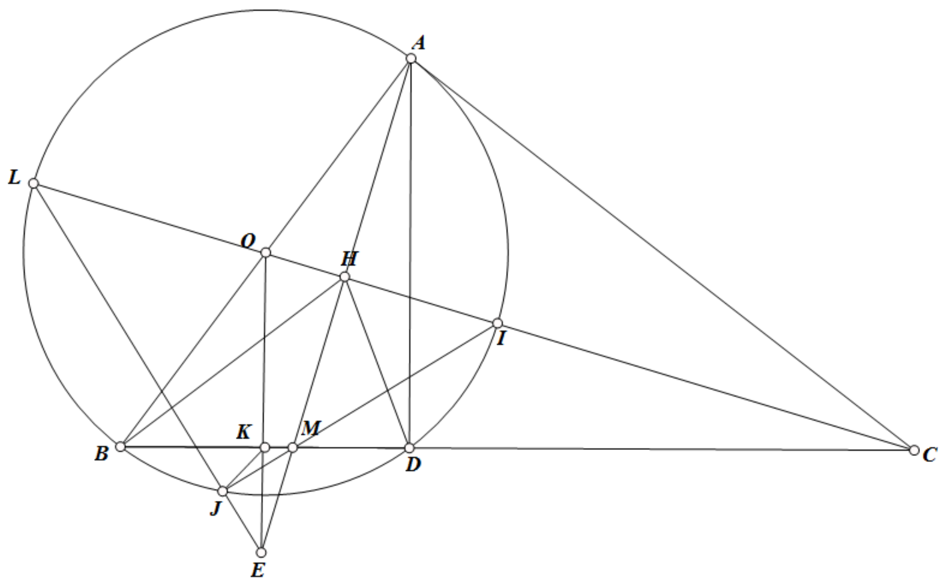
c) Từ b) ta có: $\angle MCA = 180° - \angle MCB = 180° - \angle MDB = \angle BDE = \angle CAE$ suy ra $MC \| AE$. Gọi N là trung điểm KA. Ta thấy I, N, J thẳng hàng do đó $\angle IJF = \angle AEF = \angle IAF$ nên $IAJF$ nội tiếp hay ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét: Bài toán khá đơn giản nếu như nhìn ra cấu hình trục đẳng phương của đường tròn điểm. Cách khai thác câu b) ở c) là rất tự nhiên và tạo ra điểm phụ trung điểm KA.

Bài toán 2(Trích đề thi vào 10 THPT TPHCM): Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AD. Lấy O là trung điểm AB. $CO \cap (O; OA) = I$ sao cho I nằm giữa O, C. Đường thẳng qua A vuông góc CO cắt CO tại H và cắt BC tại M. K là trung điểm BD.

a) Chứng minh rằng: HM là phân giác $\angle BHD$.

b) $OK \cap AM = E, IM \cap (O; OA) = I, J$. Chứng minh rằng: EJ cắt CO trên (O).



Lời giải: a) Ta có: $OA^2 = OB^2 = OH.OC$ suy ra $\triangle OBH \sim \triangle OCB$ suy ra $\angle OHB = \angle OBC$. Lại có tứ giác $DHAC$ nội tiếp thế nên $\angle DAC = \angle DHC = \angle OBC$ do đó MH là phân giác góc $\angle BHD$.

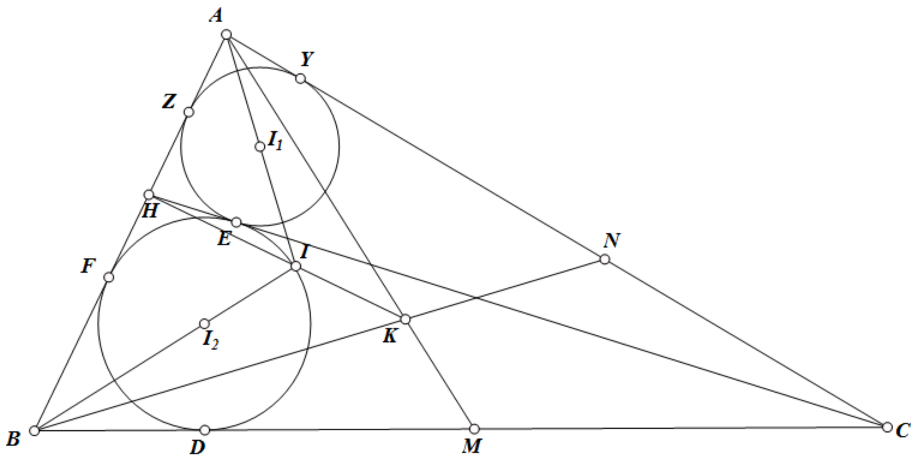
b) Do $HC \perp HM$ nên ta có: HM, HC là phân giác trong và ngoài $\angle BHD$ vậy ta thu được: $\dfrac{MB}{MD} = \dfrac{CB}{CD}$. Do K là trung điểm BD nên theo hệ thức $Maclaurin$(xem *bổ đề 2*) thì: $MJ.MI = MB.MD = MK.MC$ do đó tứ giác $JKIC$ nội tiếp suy ra: $\angle KJM = \angle ICB = \angle HBO$. Ta để ý rằng: $CH.CO = CA^2 = CB.CD$ suy ra $OHDB$ nội tiếp. Do HM là phân giác $\angle BHD$ và OK là trung trực BD nên suy ra E nằm trên $(OHDB)$ vậy: $\angle KEM = \angle OBH = \angle KJM$ suy ra $KMEJ$ nội tiếp do đó $\angle IJE = \angle DKE = 90°$. Gọi CD cắt (O) tại L khác I. Ta thấy: $\angle LJI + \angle IJE = 90° + 90° = 180°$ do đó L, J, E thẳng hàng hay ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét: Đề ban đầu có 4 câu nhưng bản chất là 2 câu như trên. Theo tôi đề bài này để thi là khá tệ, việc sử dụng kiến thức cấp 3 là bản chất của bài toán nên học sinh cấp 2(học sinh không thi chuyên Toán) không xử lí được là điều khá hiển nhiên.

Bài toán 3(Trích đề thi tuyển sinh vào 10-THPT chuyên tại TPHCM): Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$. Lấy các điểm M, N trên BC, CA sao cho $BM = AB = AM$. $BN \cap AM = K$. Kẻ $KH \perp AB (H \in AB)$.

a) Chứng minh rằng: tâm nội tiếp tam giác ABC nằm trên HK.

b) Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp tam giác AHC tiếp xúc BHC.

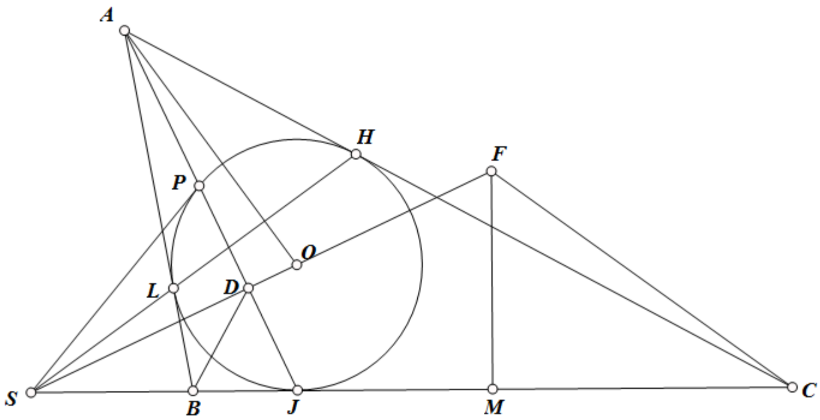


Lời giải: a) Gọi I là trực tâm tam giác AKB. Ta thấy ABN, ABM là các tam giác cân tại A, B nên AI, BI là phân giác các góc A, B hay ta suy ra I là tâm nội tiếp tam giác ABC(đpcm).

b) Gọi $(I_1), (I_2)$ là các đường tròn nội tiếp của hai tam giác AHB, AHC. Lấy (I_1) tiếp xúc CH tại E. Lấy (I_2) tiếp xúc CB, CH tại D, E'. Theo tính chất tiếp điểm đường tròn nội tiếp thì: $2CE' = CA + CH - AH, 2CE = CH - HB + BC$. Điều phải chứng minh tương đương: $CA+HC-AH = CH-HB+BC \Leftrightarrow CA-BC = AH-HB$(đúng bởi H là tiếp điểm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và AB).

Nhận xét: Bài toán này khá hay ở chỗ tận dụng được các biến đổi với đường tròn nội tiếp mà vốn xưa nay khá nhàm chán.

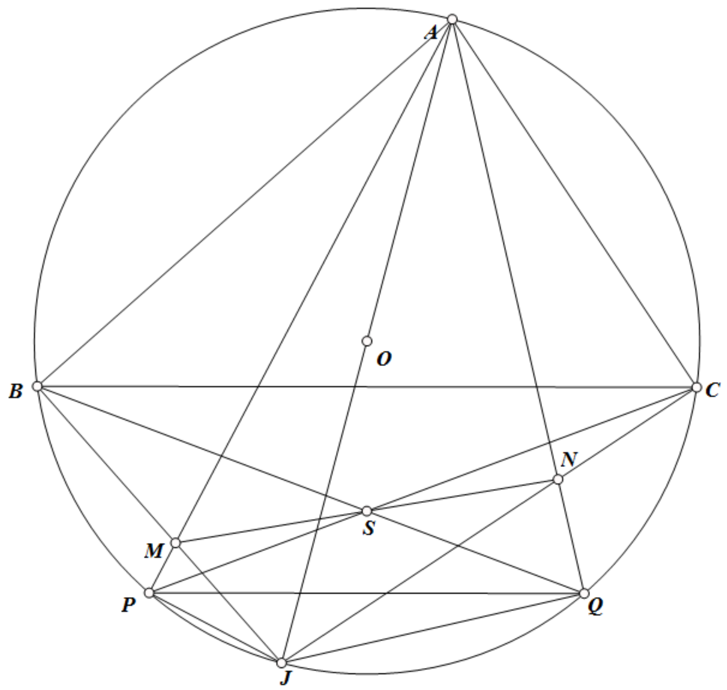
Bài toán 4((Trích đề thi tuyển sinh vào 10-THPT chuyên tại TPHCM): Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O) có góc B tù. (O) tiếp xúc BC, CA, AB tại J, H, L. Đường thẳng qua O vuông góc AJ cắt AJ và trung trực BC lần lượt tại D, F. Chứng minh rằng: $BDFC$ nội tiếp.



Lời giải: Gọi AJ cắt (O) tại P và J. Ta đã biết tính chất khá quen thuộc là tiếp tuyến tại P, J của (O) và LH đồng quy tại 1 điểm là S. Ta lại có: $DJMF$ là tứ giác nội tiếp do đó $SD.SF = SJ.SM$. Để ý rằng AJ, BH, CL đồng quy(theo định lí *Ceva*) do đó ta có theo *bổ đề 1*: $\dfrac{SB}{SC} = \dfrac{JB}{JC}$ suy ra rằng: $SB.SC = SJ.SM$(hệ thức *Maclaurin*) do đó $BCFD$ nội tiếp(đpcm).

Nhận xét: Đề bài này thì theo tôi lại phù hợp với các bạn thi chuyên, chủ đề hàng điểm điều hoà ắt hẳn là đã được dạy ở các lớp Toán đặc biệt cấp 2, việc kiểm tra kiến thức này với các bạn lớp 9 thi chuyên Toán có thể là hợp lí hơn.

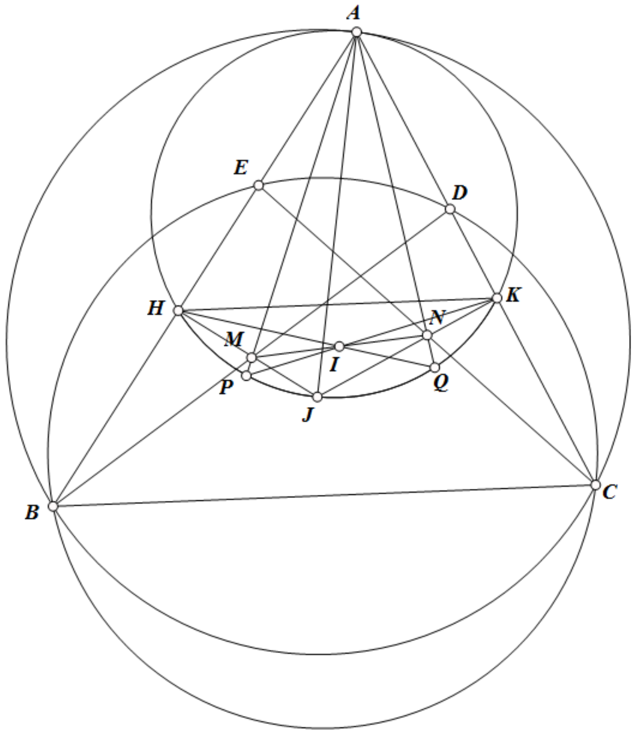
Bài toán 5: Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Lấy P, Q trên cung BC không chứa A sao cho AP, AQ đẳng giác trong góc $\angle BAC$. AJ là đường kính (O). $JB \cap AP = M, JC \cap AQ = N$. Khi đó: CP, BQ cắt nhau tại trung điểm MN.



Chứng minh: Ta chứng minh theo một trường hợp hình vẽ trên các trường hợp khác ta chứng minh tương tự. Theo định lí *Pascal* thì CP, BQ, MN đồng quy tại điểm S. Theo định lí hàm số *sin* thì: $\dfrac{BM}{\sin\angle BSM} = \dfrac{SM}{\sin\angle JBQ}$ đồng thời $\dfrac{SN}{\sin\angle BQA} = \dfrac{NQ}{\sin\angle NSQ}$. Ta có: $\angle MJP = \angle NJQ$ nên $\triangle MJP \sim \triangle NJQ(g.g)$ suy ra $\triangle ABM \sim \triangle JQN(g.g)$ vậy $\dfrac{AB}{JQ} = \dfrac{BM}{NQ}$ hay tương đương $\dfrac{BM}{\sin\angle AQB} = \dfrac{CN}{\sin\angle JBQ}$. Vậy từ đó chú ý $\angle BSM = \angle QSN$ ta thu được: $SM = SN$(điều phải chứng minh).

Nhận xét: Đây là 1 bổ đề đẹp mà tôi vô tình tìm ra khi giải một bài toán thi vào 10 khá lạ. Chứng minh định lí *Pascal*(bằng kiến thức THCS) không khó, bạn đọc có thể tìm đọc rất nhiều tài liệu.

Bài toán 6(Trích đề thi vào 10 chuyên Toán Quảng Ngãi): Cho tam giác ABC nhọn, một đường tròn qua B, C cắt AB, AC tại E, D. Lấy M, N lần lượt là trung điểm BD, CE. Kẻ $MH \perp AB(H \in AB), MK \perp AC(K \in AC)$. Lấy I là trung điểm MN. Chứng minh rằng: $IH = IK$.



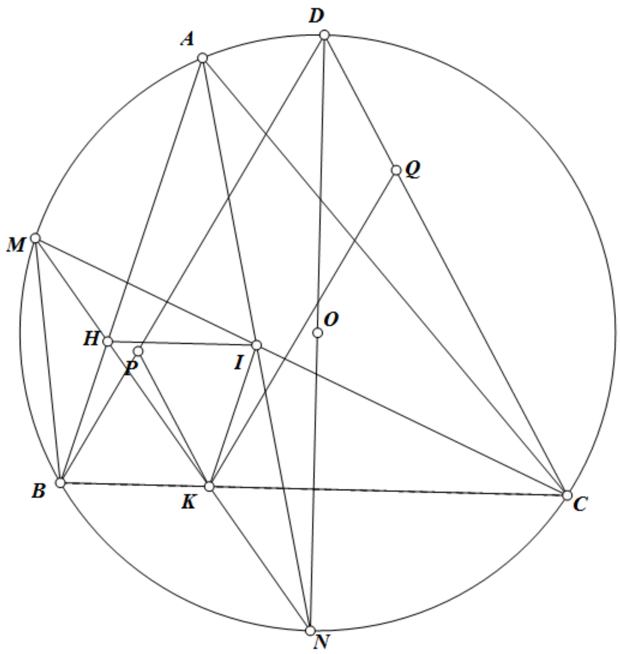
Lời giải: Quay trở lại bài toán, ta có: $\angle ADB = 180^\circ - \angle BDC = \angle AEC$ do đó $\triangle ADB \sim \triangle AEC(g.g)$ suy ra $\triangle ABM \sim \triangle ACN(c.g.c)$ hay là $\angle MAB = \angle NAC$ do đó $\triangle AMH \sim \triangle ANK(g.g)$ suy ra $\angle MAH = \angle NAK$. Gọi $AM \cap (AHK) = A, P$ và $AN \cap (AHK) = A, Q$. Do $\angle MHA = \angle NKA = 90^\circ$ nên HM cắt NK trên (AHK) tại điểm J. Theo định lí *Pascal* cho 6 điểm A, H, P, J, Q, K thì HQ, PK, MN đồng quy tại I'. Do AJ là đường kính của (AKH) nên suy ra theo **bài toán 5** thì I' là trung điểm MN. Do đó ta thu được $I \equiv I'$ do đó chú ý $HKQP$ là hình thang cân nên ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét: Ta có thể tổng quát bài toán như sau: "Cho tam giác ABC, lấy hai điểm P, Q trong tam giác ABC sao cho AP, AQ đẳng giác trong góc $\angle BAC$. Kẻ $PM \perp AB(M \in AB), PN \perp AC(N \in AC)$. Gọi I là trung điểm PQ. Chứng minh rằng: $IM = IN$".

Bài toán 7(Trích đề thi vào 10 Hà Nội): Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC. AI, CI cắt (O) tại các điểm thứ hai là N, M. Lấy $MN \cap AB, BC = H, K$.

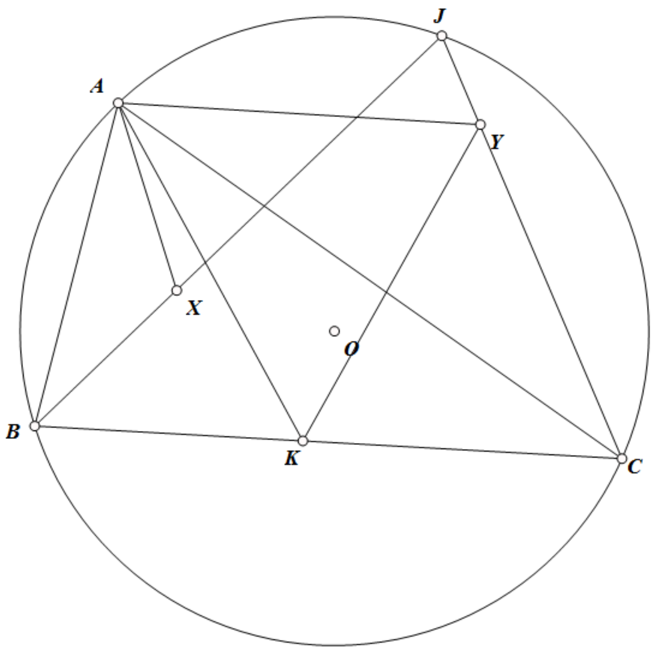
a) Chứng minh rằng: $HIBK$ là hình thoi.

b) P, Q là tâm của $(MBK), (MKC)$. Chứng minh rằng: PQ chia đôi DK.



a) Dễ chứng minh tứ giác $KICN$ nội tiếp do đó: $\angle HKI = \angle MCN = \dfrac{1}{2}(\widehat{NB}+\widehat{MA}) = \angle KHB$ do đó $BH \| KI$. Tương tự thì: $HI \| BK$. Chú ý HK là phân giác góc $\angle BHI$ nên $HIKB$ là hình thoi.

Trước khi giải câu b) ta chứng minh một bổ đề: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có K thuộc đoạn BC. X, Y là tâm ngoại tiếp các tam giác KAB, KAC. Chứng minh rằng: BX cắt CY trên (O).

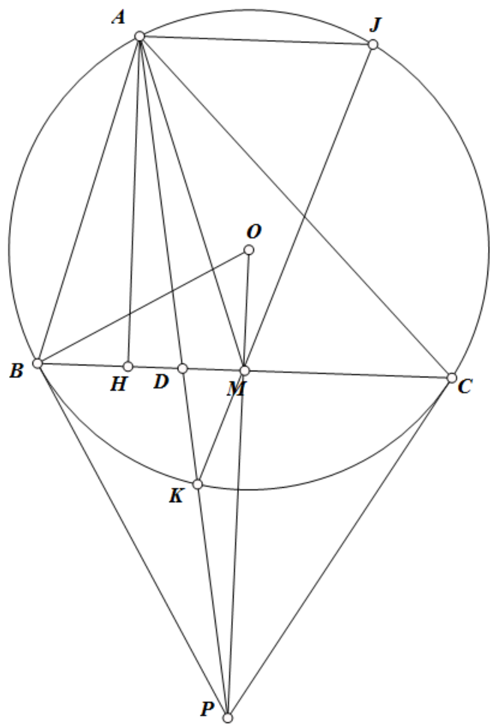


Chứng minh: Ta chứng minh trong trường hợp hình vẽ này, các trường hợp khác ta chứng minh tương tự. Gọi $CY \cap (O) = J, C$. Ta có: $\angle JBA = \angle JCA = 90^\circ - \dfrac{\angle AYC}{2} = \dfrac{180^\circ - (360^\circ - 2\angle AKC)}{2} = \angle AKC - 90^\circ = 90^\circ - \angle AKB = \angle XBA$ do đó B, X, J thẳng hàng hay bổ đề được chứng minh.

b) Ta quy bài toán về chứng minh $DPKQ$ là hình bình hành. Áp dụng bổ đề trên thì BP cắt CQ tại D' trên (O), mà $\angle D'BC = 90^\circ - \dfrac{\angle BPK}{2} = 90^\circ - \angle KMB = 90^\circ - \angle KMC = \angle D'CB$ do đó $D \equiv D'$. Thế nên: $\angle DPK = \angle DQK$. Vậy mà: $\angle PKQ = 180^\circ - \angle PKB - \angle QKC = 180^\circ - 2(90^\circ - \angle KMC) = \angle BMC = \angle BDC$ do đó $DPKQ$ là 1 hình bình hành nên DK đi qua trung điểm của PQ(điều phải chứng minh).

Nhận xét: Câu hình này vừa phải tôi đã lược đi câu a) b) bởi chúng không phải ý chứng minh khó. Câu d) bài toán về bản chất chỉ là trường hợp đặc biệt của bổ đề nêu trên.

Bài toán 8: Cho tam giác ABC nội tiếp (O), tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại P. Kẻ AJ song song BC(J thuộc (O)). M là trung điểm BC. $AP \cap (O) = A, K$. Chứng minh rằng: J, K, M thẳng hàng



Bổ đề cát tuyến: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) có giao 2 đường chéo là I. Khi đó: $\dfrac{IA}{IC} = \dfrac{BA}{BC}.\dfrac{DA}{DC}$.

Chứng minh: Ta có: $\dfrac{IA}{IC} = \dfrac{S_{IAD}}{S_{ICD}} = \dfrac{\dfrac{1}{2}.AD.ID.sin\angle ADB}{\dfrac{1}{2}.CD.ID.sin\angle CDB} = \dfrac{AD.\sin\angle ADB}{CD.\sin\angle CDB} = \dfrac{AD.AB}{CD.BC}$ hay đpcm.

Quay trở lại bài toán, gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Ta có tính chất quen thuộc là: $\angle HAB = \angle OAC$. Theo tính chất hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $OA^2 = OC^2 = OM.OP$ do đó $\triangle OAM \sim \triangle OPA(c.g.c)$ suy ra $\angle OPM = \angle OAM = \angle DAH$ suy ra $\angle PAB = \angle MAC$ hay $\angle KAB = \angle MAC$. Gọi $JM \cap (O) = J, K'$. Gọi $D' = AK \cap BC$. Theo *bổ đề cát tuyến* thì: $\dfrac{D'B}{D'C} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{K'B}{K'C}$. Mà cũng theo *bổ đề cát tuyến* thì: $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{JB}{JC}.\dfrac{K'B}{K'C} = 1$. Suy ra: $\dfrac{K'B}{K'C} = \dfrac{JC}{JB} = \dfrac{AB}{AC}$ suy ra $\dfrac{D'B}{D'C} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Gọi $AP \cap BC = D$ ta cũng dễ chứng minh được: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$ nên $D \equiv D'$ hay là ta thu được $K \equiv K'$ dẫn tới J, M, K thẳng hàng(điều phải chứng minh).

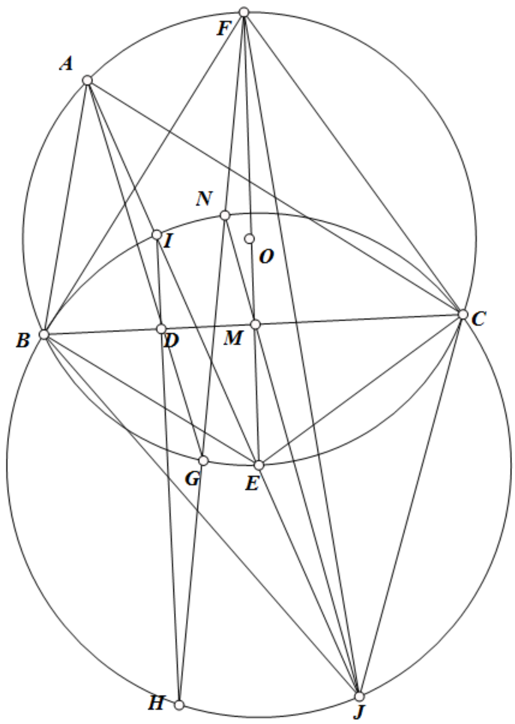
Nhận xét: *Bổ đề cát tuyến* đã cho thấy ứng dụng tuyệt vời của nó trong các bài toán liên quan tới chia tỉ lệ đoạn thẳng. Các bạn có thể tham khảo bài viết của tôi trên blog của mình về bổ đề này.

Bài toán 9: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) nhọn($AB < AC$). I là tâm nội tiếp (O). D là hình chiếu của I lên BC. $AD \cap (O) = G, A$, lấy F là trung điểm cung lớn BC của (O). Gọi $ID \cap FG = H$

a) Chứng minh rằng: $H \in (IBC)$.

b) Gọi $AI \cap (BIC) = I, J$. Chứng minh rằng: $BH = CJ$.

c) $HF \cap (BIC) = N$. Chứng minh rằng: NJ chia đôi BC.



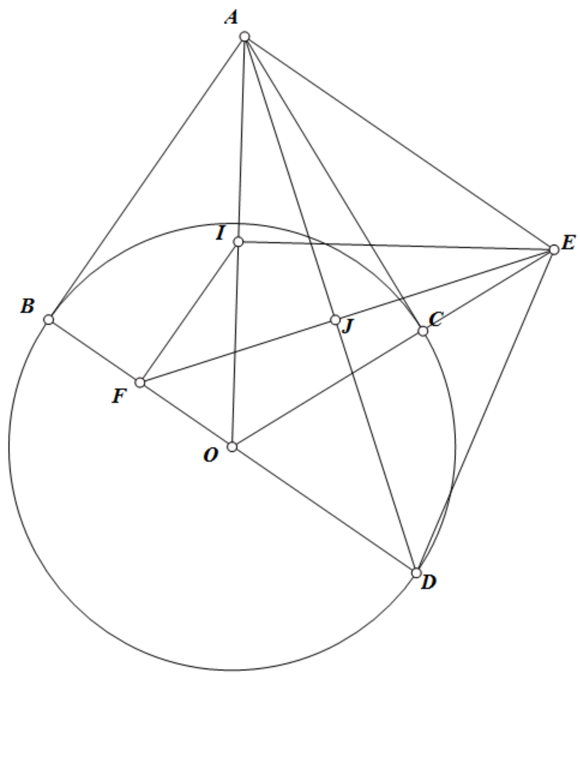
Lời giải: a) Ta có: $ID \| FE$ do đó $\angle IHG = \angle GFE = \angle EAF$ do đó $IAHG$ nội tiếp do đó $DA.DG = DI.DH = DB.DC$ suy ra $IBHC$ nội tiếp.

b) Gọi AI cắt (O) tại điểm thứ hai E. Ta có tính chất quen thuộc là: E là tâm (BIC) do đó IJ là đường kính của (BIC) do đó $HJ \perp ID$ nên $HJ \| BC$ suy ra $BCJH$ là hình thang cân nên $BH = CJ$.

c) Do EF là đường kính của (O) nên $FB \perp BE$, $FC \perp CE$ do đó FB, FC là các tiếp tuyến đến (BIC). Ta quy câu c) về bài toán nhỏ như sau: "Cho tam giác ABC nội tiếp (O), tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại P. Kẻ AJ song song BC(J thuộc (O)). M là trung điểm BC. $AP \cap (O) = A, K$. Chứng minh rằng: J, K, M thẳng hàng". Đây chính là nội dung của **bài toán 8** vậy ta thu được điều phải chứng minh.

Nhận xét: Bài toán trên là bài toán thi vào 10 chuyên Toán của thành phố **Hà Nội**. Đề bài không khó xong cách diễn đạt và ý tưởng theo cấp THCS là khá khó khăn.

Bài toán 10(Thi vào 10 chuyên Toán Hoàng Văn Thụ-Hoà Bình): Cho A nằm ngoài (O). Kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến (O), BD là đường kính của (O). Đường thẳng qua A vuông AB cắt OC tại E, F là trung điểm OB. Chứng minh rằng: $EF \perp AD$.



Lời giải: Ta có: $AE \| BD$ do đó $\angle EAO = \angle AOB = \angle AOE$ suy ra AEO cân tại E. Gọi I là trung điểm OA, $J = EF \cap AD$. Ta có: $\dfrac{IE}{OA} = \dfrac{IE}{2IO}$. Do $\angle EOI =$

$\angle IOF$ suy ra $\triangle EIO \sim \triangle IFO(g.g)$ suy ra $\dfrac{IE}{IO} = \dfrac{IF}{OF}$. Vậy $\dfrac{IE}{IF} = \dfrac{OA}{OD}$. Lại có: $\angle AOD = 90^\circ + \angle OAD = 90^\circ + \angle FIO = \angle EIF$ do đó $\triangle EIF \sim \triangle AOD(c.g.c)$ suy ra $\angle JEI = \angle JAI$ nên tứ giác $AIJE$ nội tiếp nên $FE \perp AD$.

Nhận xét: Ý tưởng chứng minh tam giác đồng dạng thật là tự nhiên cùng các biến đổi góc hết sức tinh tế. Điểm đáng chú ý là bài toán này đã xuất hiện trong đề thi chọn HSG quân Ba Đình, Hà Nội năm học 2016-2017.

Như vậy thông qua các bài toán trên ta thấy xu hướng ra đề thi chuyên Toán vẫn hướng tới các kì thi lớn hơn như **VMO,IMO**. Các cấu hình xuất hiện cũng đa dạng và dẫu cho có những bài toán chưa thật sự phù hợp với học sinh cấp THCS thì chúng đều là các bài toán đẹp mắt và có các phát biểu khá ngắn gọn. Ở trên đây đều là các lời giải của tôi, chúng không phải lời giải ngắn nhất xong phần nào chỉ rõ bản chất các bài toán, do đó việc trình bày các bổ đề là điều bắt buộc, mong các bạn thông cảm.