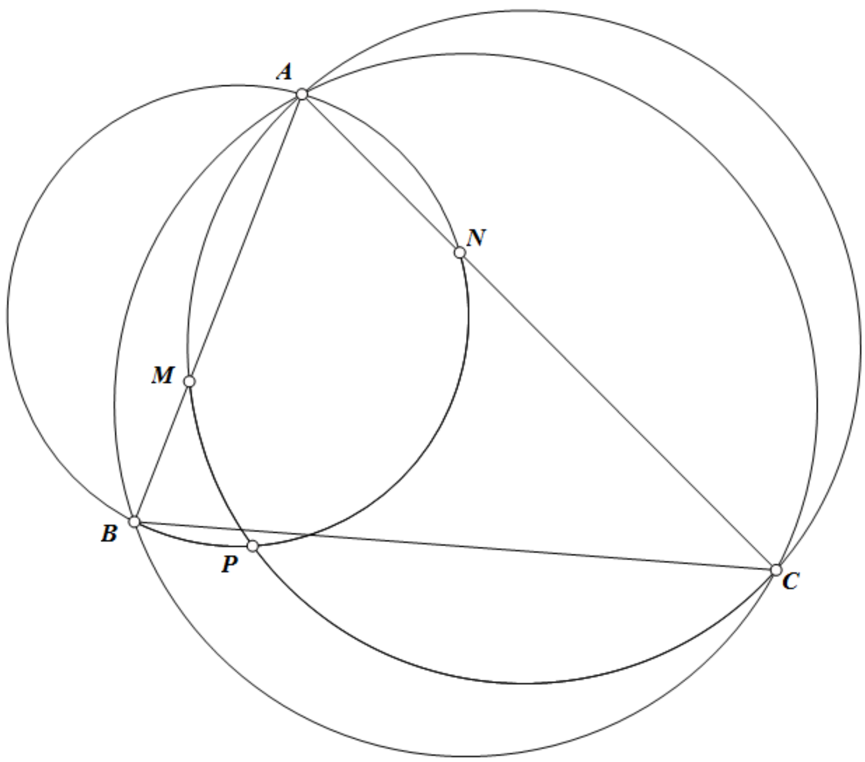
Tìm tòi và phát triển một lớp bài toán hình học có giả thiết hay

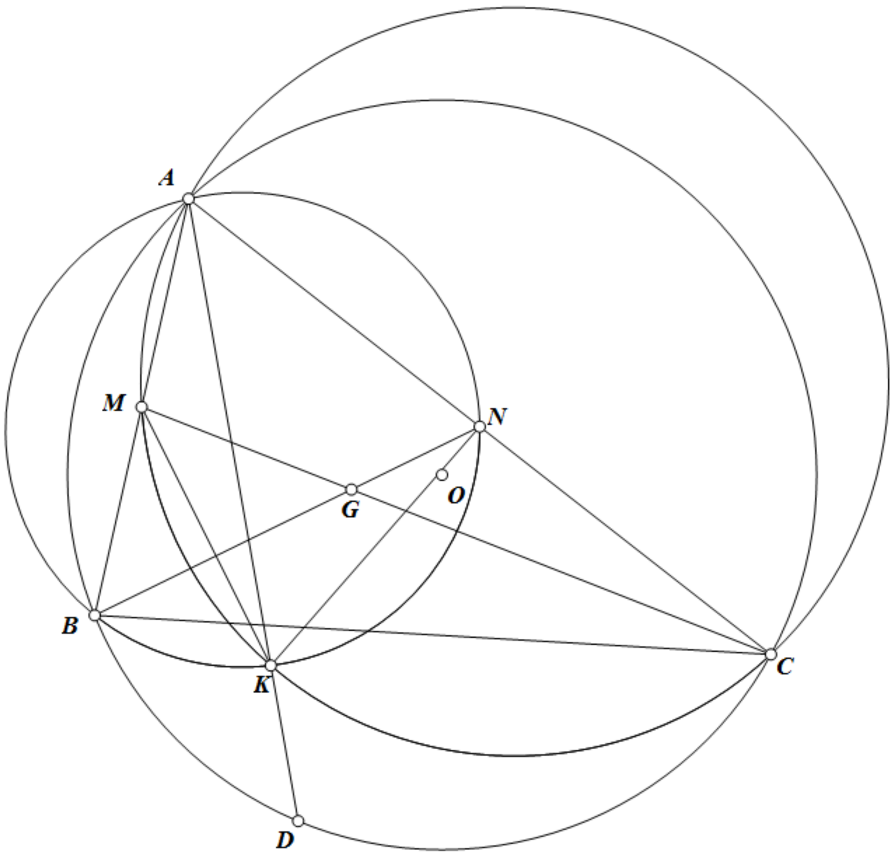
Nguyễn Duy Khương-chuyên Toán khoá 1518-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Lời nói đầu: Trong bài viết này tôi muốn đề cập tới một dạng cấu hình đẹp, nhiều tính chất thú vị: "Cho tam giác ABC và các điểm M, N trên AB, AC. Lấy $(ABN) \cap (ACM) = A, P$". Vấn đề là với các điểm M, N ở các vị trí đặc biệt thì ta có được rất nhiều kết quả thú vị.



Chúng ta sẽ mở đầu bằng bài toán sau:

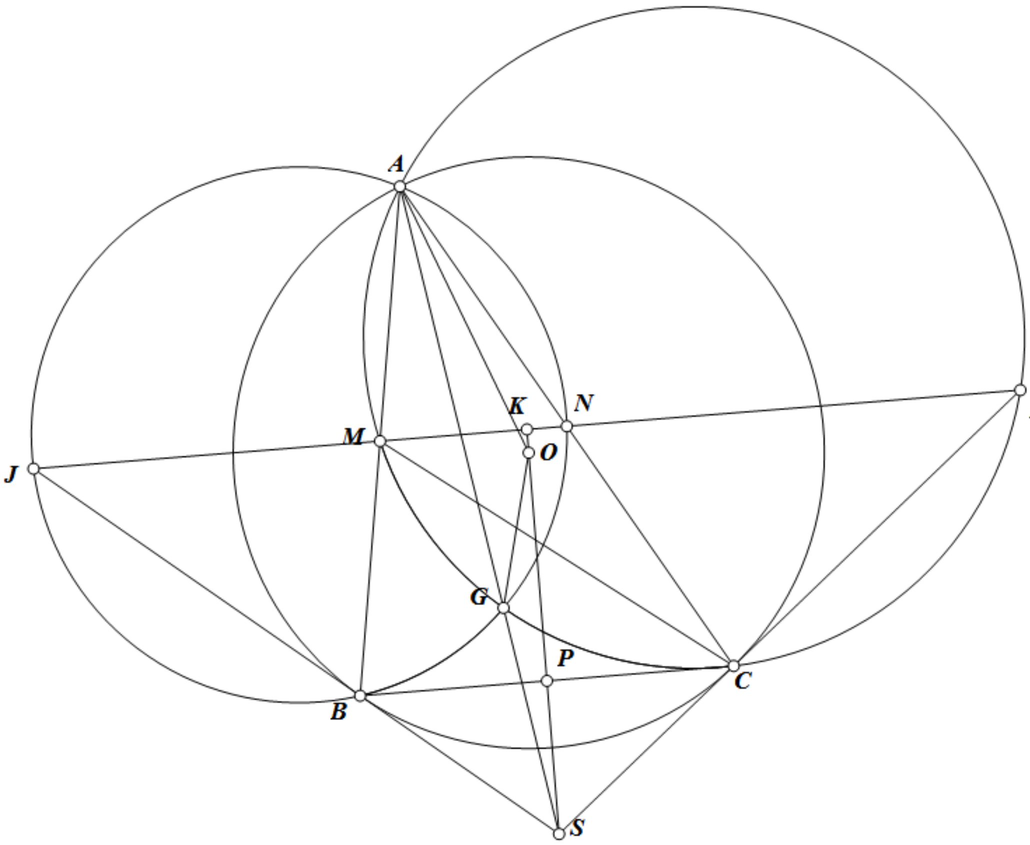
Bài toán 1: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có M, N là trung điểm của AB, AC. Lấy $(AMC) \cap (ANB) = A, K$. Chứng minh rằng: AK là đường đối trung của tam giác ABC.



Lời giải: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Ta thấy rằng: K là điểm $Miquel$ của tứ giác toàn phần (AM, MG, GN, NA) do đó: $K \in (GMB), (GNC)$ hay là: $\angle KMB = \angle KGC = \angle NCK$, đồng thời: $\angle MBK = 180° - \angle ANK = \angle KNC$ do đó: $\triangle MBK \sim \triangle CNK (g.g)$. Gọi $AK \cap (O) = D, A$ ta có: $\angle DCB = \angle DAB = \angle KNB$ đồng thời: $\angle DBC = \angle KAC = \angle KBN$ do đó: $\triangle KBN \sim \triangle DBC (g.g)$ suy ra: $\dfrac{KB}{KN} = \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{MB}{CN} = \dfrac{AB}{AC}$ hay là: $DBAC$ là 1 tứ giác điều hoà do đó: AK là đường đối trung của tam giác ABC(điều phải chứng minh).

Nhận xét: Đây là 1 bổ đề rất hữu dụng trong giải các bài toán liên quan tới cấu hình điểm $Miquel$.

Bài toán 2: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có trung điểm AB, AC là M, N. $(AMC) \cap (ANB) = A, G$ và trung trực BC cắt MN tại K. Chứng minh rằng: A, G, O, K đồng viên.



Lời giải(Nguyễn Duy Khương): Từ **bài toán 1** ta có: AG chính là đường đối trung của tam giác ABC. Gọi tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại S. MN cắt lại (AMC) và (ANB) tại I, J khác M, N. Ta có: $IJ \| BC$ do đó: $\angle KJB = \angle SBC = \angle SOB$(do $OBSC$ nội tiếp) vậy $JKOB$ nội tiếp. Tương tự thì: $OKCI$ nội tiếp vậy OK, CI, JB đồng quy tại S đồng thời: $\overline{SK}.\overline{SO} = \overline{SC}.\overline{SI} = \overline{SJ}.\overline{SB}$ do đó $P_{S/(AMC)} = P_{S/(ANB)}$ hay là: $\overline{SA}.\overline{SG} = \overline{SK}.\overline{SO}$ do đó: A, G, K, O đồng viên ta có điều phải chứng minh.

Phỏng theo cách làm của tôi ở các bài toán trên thì ta có thể mở rộng hơn nữa **bài toán 2** như sau:

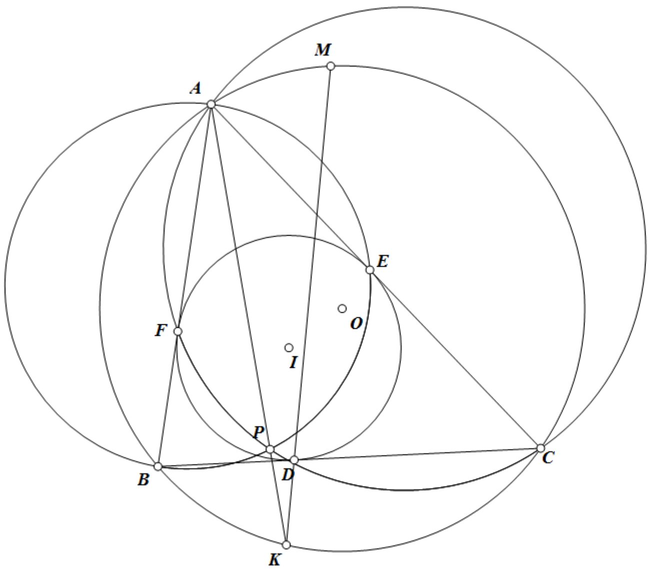
Bài toán mở rộng bài toán 2(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC

nội tiếp (O). Lấy M, N trên các đoạn AB, AC sao cho: $MN \| BC$. Gọi $(AMC) \cap (ANB) = A, G$. Trung trực BC cắt MN ở K. Chứng minh rằng: A, G, O, K đồng viên.

Nhận xét: Dĩ nhiên mấu chốt vẫn là chỉ ra được AG là đường đối trung của tam giác ABC.

Thay đổi các điểm M, N đi ta lại có bài toán thú vị sau:

Bài toán 3(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I và nội tiếp đường tròn (O). (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. M là trung điểm cung BC chứa A. Chứng minh rằng trục đẳng phương của (ABE) và (ACF) cắt MD trên (O).

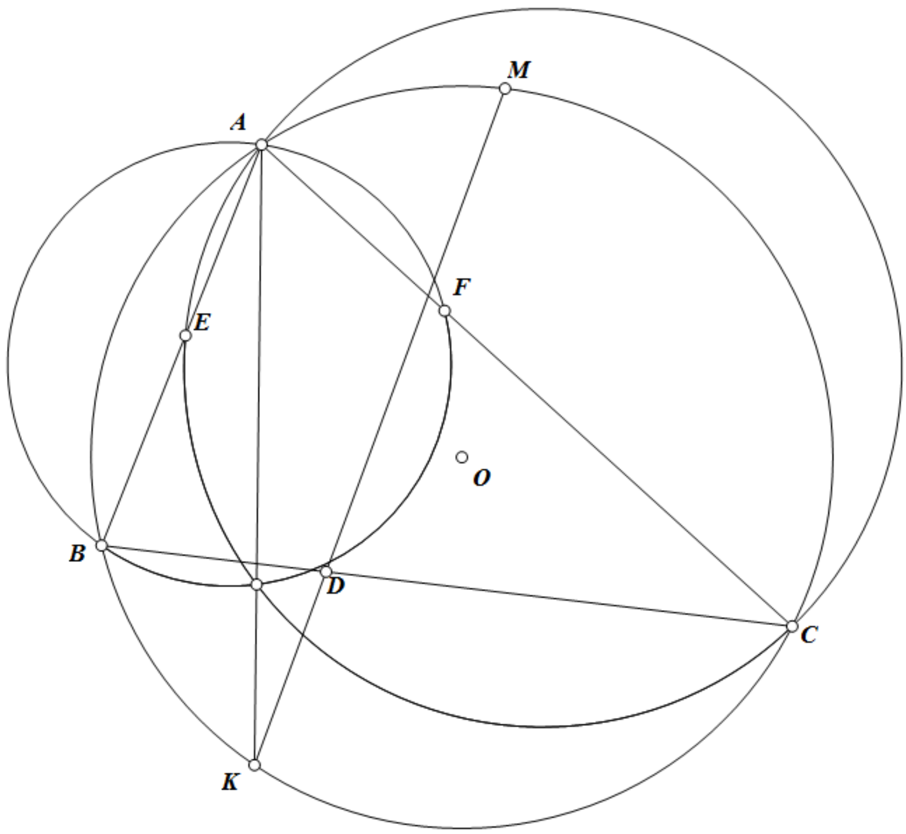


Lời giải: Gọi $(ABE) \cap (ACF) = A, P$. Lấy $AP \cap (O) = K, A$, ta có: $\angle PFB = \angle PCE$ và $\angle PEC = \angle PBF$ do đó: $\triangle PBF \sim \triangle PEC(g.g)$ hay là: $\dfrac{PF}{PC} = \dfrac{BF}{EC} = \dfrac{DB}{DC}$. Lại có: $\angle KBC = \angle PAC = \angle PFC$ và $\angle BKC = 180^\circ - \angle BAC = \angle FPC$ do đó: $\triangle PFC \sim \triangle KBC$ vậy $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{PF}{PC} = \dfrac{DB}{DC}$ nên KD là phân giác $\angle BKC$ do đó: K, D, M thẳng hàng hay là ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét: Lời giải hoàn toàn tương tương tự cho bài tổng quát như sau:

Bài toán 4(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC. Lấy D bất kì trên BC

khác B, C. Lấy E, F trên AB, AC sao cho: $DB = BE$ và $DC = CF$. M là trung điểm cung BC chứa A của (O). Chứng minh rằng: MD cắt trục đẳng phương của (ABF) và (ACE) trên một đường cố định.



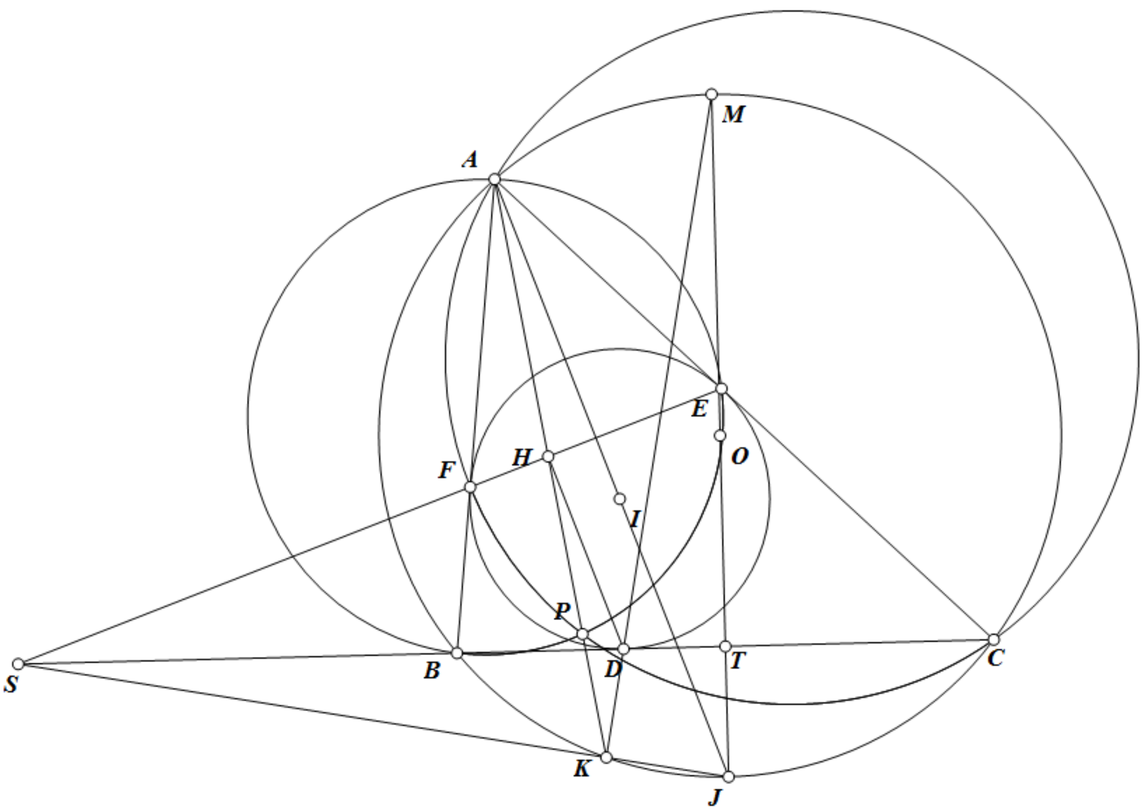
Cùng từ **bài toán 4**, khi nhân ba bài toán này thì theo tính chất tâm đẳng phương ta có bài toán sau:

Bài toán 5: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và ngoại tiếp (I). Lấy M, N, P lần lượt là trung điểm các cung BC, CA, AB chứa A, B, C của (O), tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với BC, CA, AB là D, E, F. Gọi $MD \cap (O) = M, A_1$, $NE \cap (O) = N, B_1$, $PF \cap (O) = P, C_1$. Chứng minh rằng: AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại 1 điểm.

Nhận xét: Bài toán này không mới nhưng ta đã thu được 1 lời giải mới và 1 kết quả khác khá thú vị.

Bài toán 6(Aops): Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I). (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Lấy H là hình chiếu của D lên EF. Chứng minh rằng: H

thuộc trục đẳng phương của $(ABE), (ACF)$.



Lời giải(Nguyễn Duy Khương): Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, M là trung điểm cung BC chứa A. Gọi $(ABE) \cap (ACF) = A, P$. Lấy $AP \cap (O) = K, A$, ta có: $\angle PFB = \angle PCE$ và $\angle PEC = \angle PBF$ do đó: $\triangle PBF \sim \triangle PEC(g.g)$ hay là: $\dfrac{PF}{PC} = \dfrac{BF}{EC} = \dfrac{DB}{DC}$. Lại có: $\angle KBC = \angle PAC = \angle PFC$ và $\angle BKC = 180^\circ - \angle BAC = \angle FPC$ do đó: $\triangle PFC \sim \triangle KBC$ vậy $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{PF}{PC} = \dfrac{DB}{DC}$ nên KD là phân giác $\angle BKC$ do đó: K, D, M thẳng hàng. Gọi $EF \cap BC = S$ thế thì theo hàng điều hoà cơ bản thì: $(SD, BC) = -1$. Lấy J là trung điểm cung BC không chứa A của (O). T là trung điểm BC. Ta có: $DT.DS = DB.DC = DM.DK$(theo hệ thức $Maclaurin$) do đó: $SMTK$ nội tiếp. Lại có: $SHDK$ nội tiếp suy ra $\angle DHK = \angle DSK = \angle KAI$. Mà $DH \| AI$ nên A, H, K thẳng hàng. Do đó: A, H, P, K thẳng hàng hay là: H nằm trên trục đẳng phương của (ABE) và (ACF).

Nhận xét: Bài toán này không mới và đã được tổng quát bởi *Luis Gonzales* trên *Aops*.

Bài toán 7(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Lấy D bất kì trên đoạn BC, P, Q trên AB, AC sao cho: $BD = BP, CQ = CD$. $(APQ) \cap (O) = A, J$ và $JD \cap (O) = T, J$. Lấy M đối xứng T qua O. Chứng minh rằng trục đẳng phương của (ABQ) và (ACP) cắt MD trên (O).

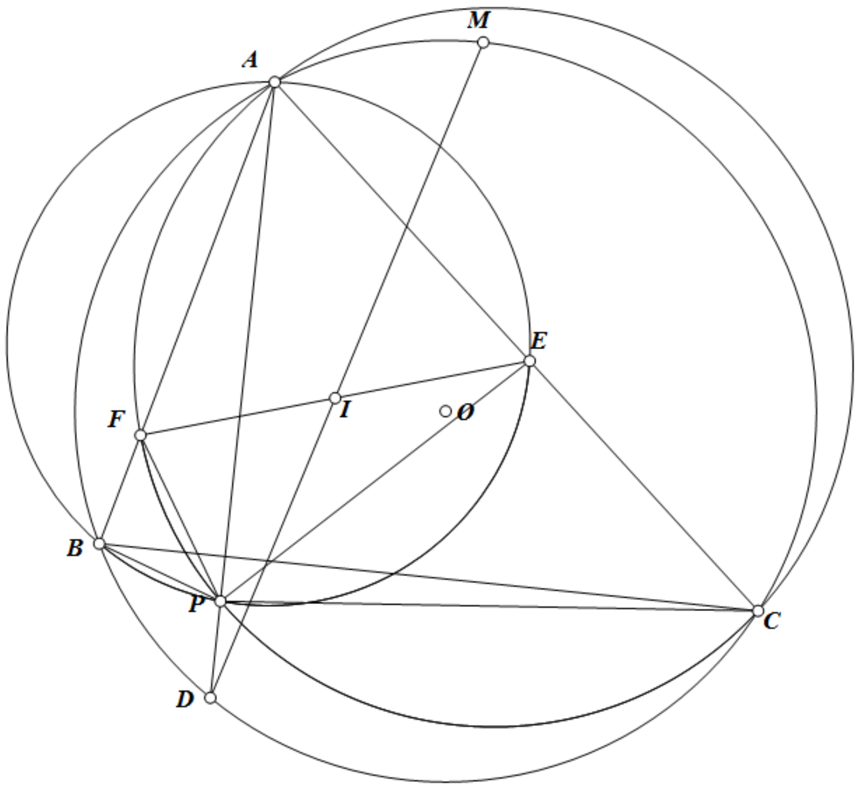
Bài toán 8(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Lấy D bất kì trên đoạn BC, P, Q trên AB, AC sao cho: $BD = BP, CQ = CD$. I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng qua A song song ID cắt (APQ) tại R. Tia RD cắt (O) tại điểm J, kẻ đường kính JM của (O). Chứng minh rằng trục đẳng phương của (ABQ) và (ACP) cắt MD trên (O).

Có thể thấy rằng việc tìm mối liên hệ các điểm E, F trên AB, AC chính là điểm quyết định khi tạo ra những bài toán như kiểu trên.

Bài toán 9(Trần Quân): Cho tam giác ABC nội tiếp $(O; R)$. Lấy D, E trên AB, AC sao cho: $BD = CE$. $(ABE) \cap (ACD) = A, K$. T là tâm ngoại tiếp tam giác ADE. Chứng minh rằng: $TK = R$.

Thay đổi thành tiếp điểm đường tròn $Mixtilinear$ thì ta có bài toán khác như sau. Việc đi tổng quát bài toán theo nhiều góc nhìn chính là điểm thú vị. Điều đó sẽ cho ta rất nhiều bài toán lạ và đẹp.

Bài toán 10(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. Đường thẳng qua I vuông AI cắt AB, AC tại F, E. Chứng minh rằng trục đẳng phương của (ABE) và (ACF) đi qua tiếp điểm đường tròn $A - Mixtilinear$ nội.



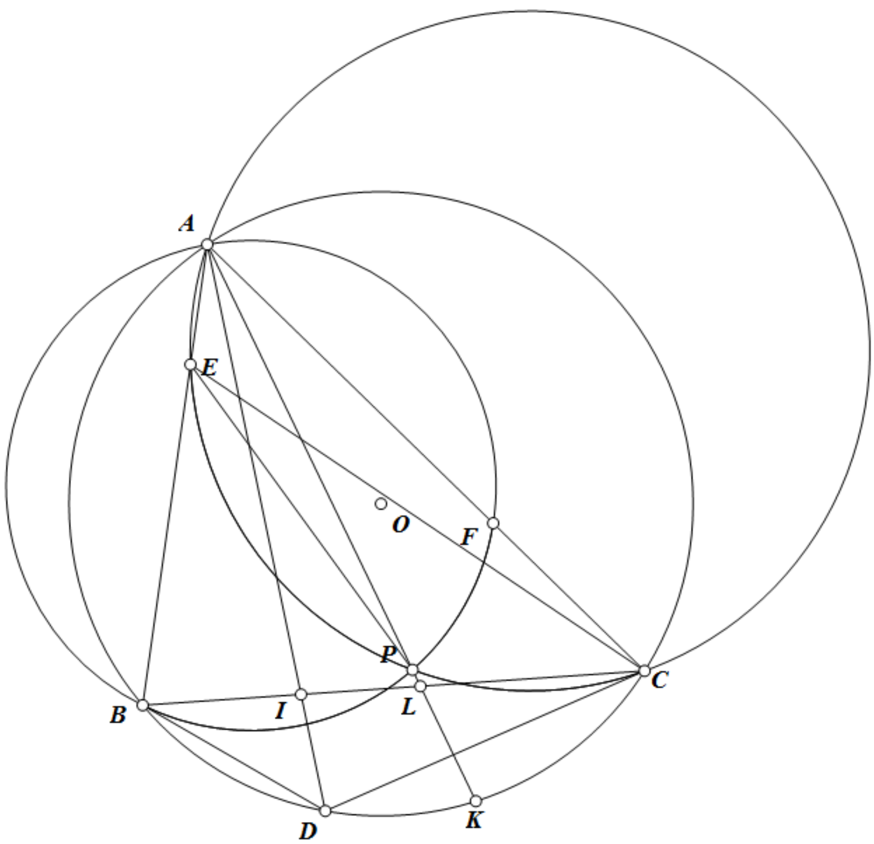
Lời giải 1(Nguyễn Duy Khương): Ta dễ thấy theo định lí đảo *Shawayama* rằng: E, F là tiếp điểm đường tròn $A-Mixtilinear$ nội. Gọi D là tiếp điểm của đường tròn $A-Mixtilinear$ nội, ta có: DF, DE lần lượt là phân giác các góc $\angle ADB, \angle ADC$. Vậy: $\dfrac{FB}{FA} = \dfrac{DB}{DA}$ tương tự: $\dfrac{EC}{EA} = \dfrac{DC}{DA}$ vậy: $\dfrac{FB}{EC} = \dfrac{DB}{DC}$. Ta có: $\angle PFB = \angle PCA$ và $\angle PEC = \angle PBF$ do đó: $\triangle PBF \sim \triangle PEC(g.g)$ hay là: $\dfrac{FB}{EC} = \dfrac{PB}{PE}$. Gọi $AP \cap (O) = D', A$ ta có: $\triangle PBE \sim \triangle D'BC(g.g)$ thế nên: $\dfrac{D'B}{D'C} = \dfrac{PB}{PE} = \dfrac{DB}{DC}$ Do đó: $D \equiv D'$. Ta có điều phải chứng minh.

Lời giải 2: Sử dụng phép nghịch đảo đối xứng cực I phương tích $AB.AC$ trục đối xứng là phân giác $\angle BAC$, ta thấy ngay rằng: tiếp điểm đường tròn $A-Mixtilinear$ nội biến thành tiếp điểm đường tròn bàng tiếp góc $\angle BAC$ với BC, E, F biến thành tiếp điểm đường tròn bàng tiếp góc BAC với AB, AC. Ta quy về bài toán quen thuộc sau: Cho tam giác ABC có đường tròn bàng tiếp (J). (J) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. $EF \cap BC = K$. Chứng minh rằng: $(BC, DK) = -1$.

Tiếp tục, ta thu được bài toán thú vị như sau:

Bài toán 11(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. Đường thẳng qua I vuông góc AI cắt AB, AC tại F, E. Hạ $BP \perp AI (P \in AI)$. Lấy $EP \cap BC = D$. Chứng minh rằng: trục đẳng phương của $(ABE), (ACF)$ cắt ID trên (ABC).

Bài toán 12(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Lấy D thay đổi trên cung BC không chứa A. Giả sử các điểm E, F trên AB, AC sao cho: $BD = CF$ và $CD = BE$. Lấy $(ABF) \cap (ACE) = A, P$. Chứng minh rằng: $\angle DAB = \angle PAC$.

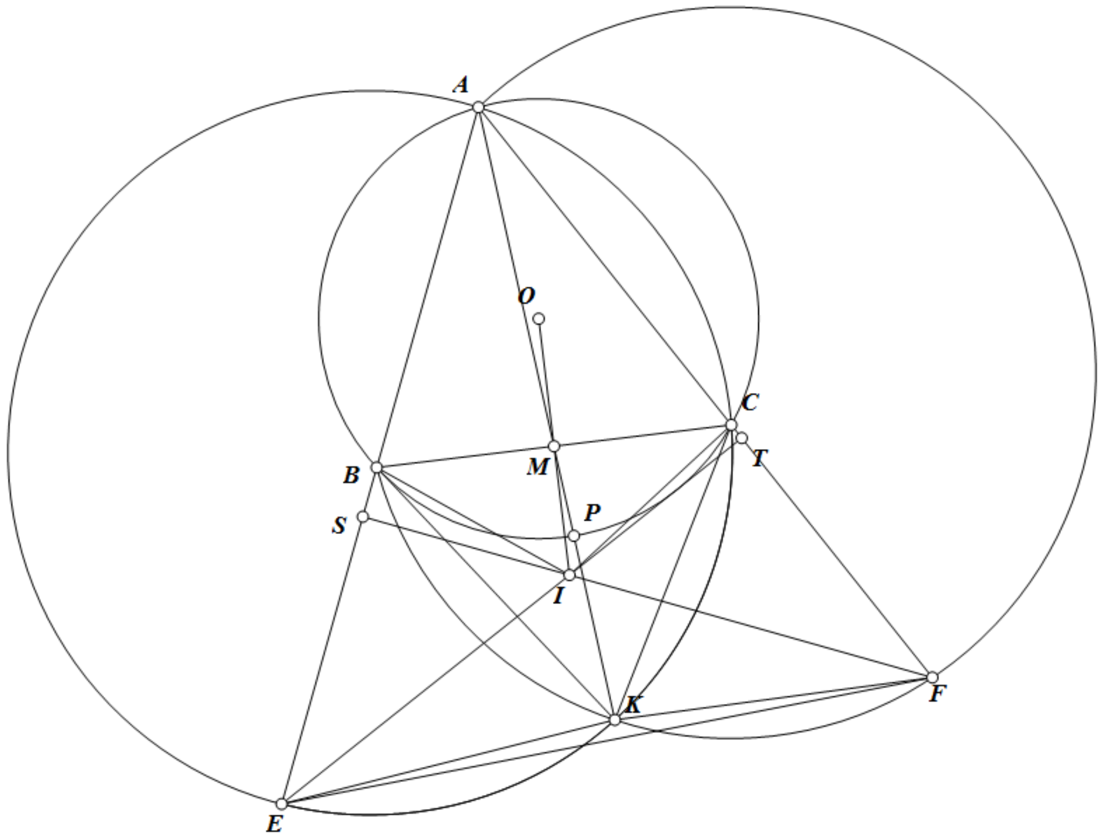


Lời giải: Ta có: $\angle PEB = \angle PCF$ và $\angle PFC = \angle PBE$ do đó: $\triangle PBE \sim \triangle PFC (g.g)$ suy ra $\dfrac{PB}{PF} = \dfrac{BE}{FC} = \dfrac{DC}{DB}$. Gọi $AP \cap (O) = A, K$ ta có: $\triangle BKC \sim \triangle BPF (g.g)$ nên $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{DC}{DB}$. Gọi $AD \cap BC = I, AK \cap BC = L$. Theo *bổ đề cát tuyến* thì:

$\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{DB}{DC}$ và $\dfrac{LB}{LC} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{KB}{KC}$ do đó: $\dfrac{IB}{IC}.\dfrac{LB}{LC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$, vậy AI, AL đẳng giác trong $\angle BAC$. Vậy ta thu được: $\angle DAB = \angle PAC$(điều phải chứng minh).

Nhận xét: Dĩ nhiên khi đã quen với cách làm từ các bài toán trước đó thì bài này cũng sẽ có tư tưởng tương tự. Tuy nhiên việc xử lí đoạn sau bài toán không hề đơn giản như tôi nghĩ, cũng không đơn giản khi nghĩ ra lời giải trên và một lần nữa việc sử dụng *bổ đề cát tuyến* thực sự rất thú vị.

Bài toán 13(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi tâm (BHC) là I. Lấy các điểm E, F trên AB, AC sao cho $IE \perp AC$ và $IF \perp AB$. Gọi $(ABF) \cap (ACE) = A, K$. Chứng minh rằng: AK chia đôi BC.

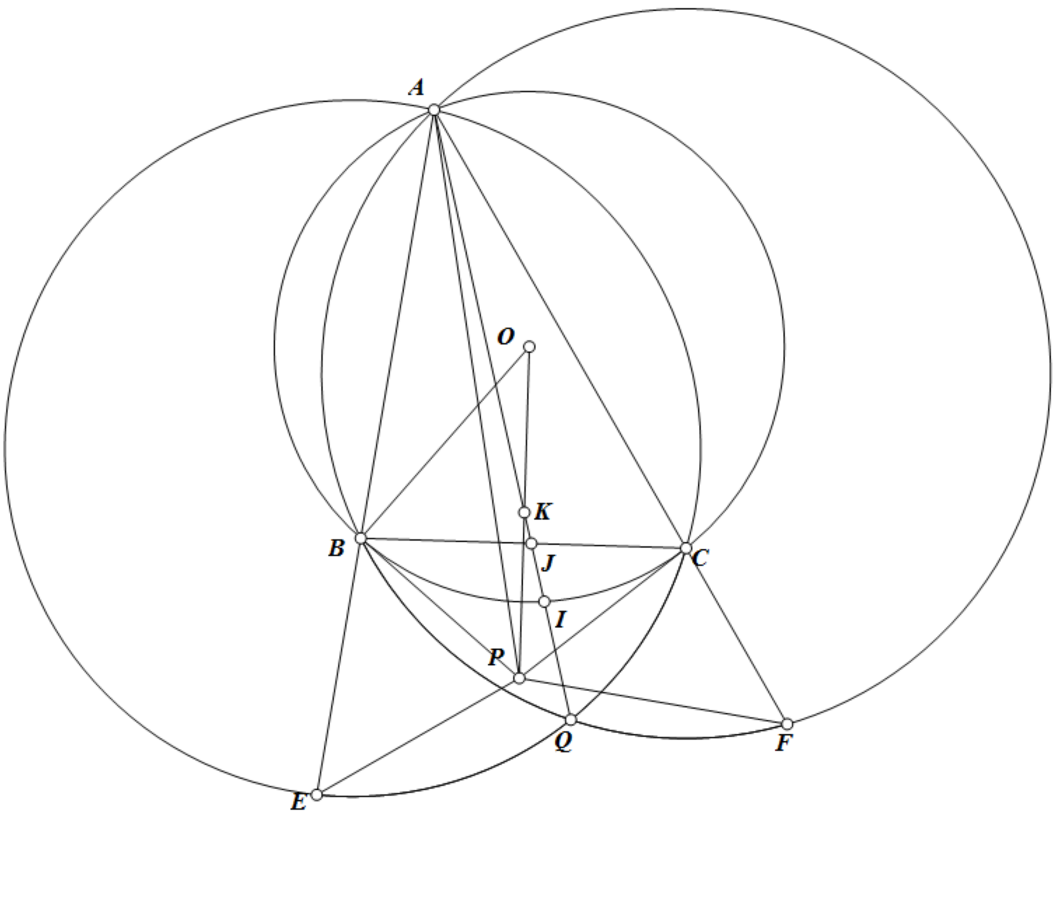


Lời giải: Ta biết kết quả quen thuộc đó là I đối xứng O qua trung điểm BC. Gọi FI, EI cắt AB, AC tại S, T. Ta có: $\angle BIS = 90^\circ - \angle IBC = 90^\circ - \angle OBC$ do đó: $\angle BIT = 2\angle BAC + 90^\circ - \angle ICT = 2\angle A + 90^\circ - (180^\circ - \angle C - \angle OCB) =$

$\angle A + \angle C = 180^\circ - \angle B$. Tương tự thì: $\angle CIS = 180^\circ - \angle C$. Theo định lí hàm số *sin* ta có: $\dfrac{IB}{\sin \angle BEI} = \dfrac{BE}{\sin \angle BIE} = \dfrac{BE}{\sin \angle BIT} = \dfrac{BE}{\sin \angle B}$. Tương tự thì: $\dfrac{CF}{\sin \angle FIC} = \dfrac{IC}{\sin \angle IFC} = \dfrac{CF}{\sin \angle C}$. Do đó chú ý $IB = IC$ nên: $\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{\sin \angle B}{\sin \angle C} = \dfrac{AC}{AB}$. Gọi $AK \cap (O) = A, P$ thì ta dễ chứng minh được: $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{BE}{FC} = \dfrac{AC}{AB}$ nên theo bổ đề cát tuyến ta có: AP đi qua trung điểm BC(điều phải chứng minh).

Tương tự ta có rất nhiều bài toán thú vị khác. Bạn đọc tự thử sức:

Bài toán 14(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Tiếp tuyến tại B, C cắt nhau ở P. Lấy E, F trên AB, AC sao cho: $PE \perp AC$ và $PF \perp AB$. Chứng minh rằng tâm (BOC) nằm trên trục đẳng phương của (ABF) và (ACE).



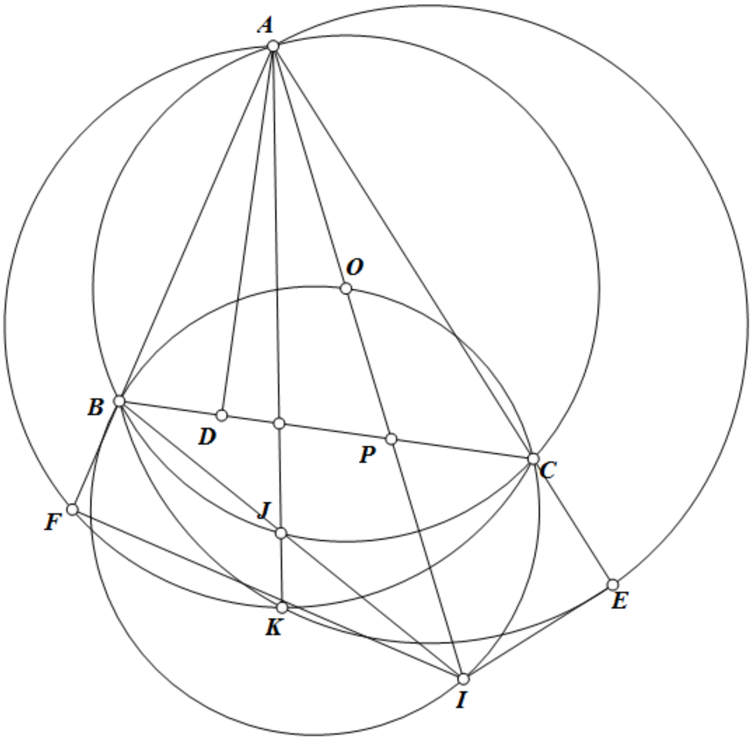
Lời giải 1: Ta đã biết rằng: B, O, C, P đồng viên đường tròn (K). Lấy $(ACE) \cap (ABF) = A, Q$. Lấy $AQ \cap (O) = A, I$, từ các bài toán trên thì ta dễ dàng có: $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{BE}{CF}$. Ta có: $\dfrac{PB}{\sin\angle BEP} = \dfrac{BE}{\sin\angle EPB} = \dfrac{PC}{\sin\angle PFC} = \dfrac{CF}{\sin\angle FPC}$. Vậy hay là: $\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{\sin\angle BPE}{\sin\angle CPF} = \dfrac{\cos(C-A)}{\cos(B-A)}$. Ta gọi $AK \cap BC = J$, ta có: $\dfrac{JB}{JC} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{\sin\angle KAB}{\sin\angle KAC}$. Lại có: $\dfrac{\sin\angle KAB}{KB} = \dfrac{\sin\angle ABK}{AK}$ và $\dfrac{\sin\angle KAC}{KC} = \dfrac{\sin\angle ACK}{AK}$ do đó: $\dfrac{\sin\angle KAB}{\sin\angle KAC} = \dfrac{\sin\angle ABK}{\sin\angle ACK} = \dfrac{\sin(90^\circ - \angle C + \angle A)}{\sin(90^\circ - \angle B + \angle A)} = \dfrac{\cos(C-A)}{\cos(B-A)}$. Do đó: $\dfrac{JB}{JC} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{IB}{IC}$ nên theo *bổ đề cát tuyến đảo* thì: A, J, I, K thẳng hàng(điều phải chứng minh).

Lời giải 2(Huỳnh Bách Khoa)(Bạn đọc tự vẽ hình): Lấy $T = (ABF) \cap (ACE)$. O' đối xứng O qua BC. Ta có: $\triangle TBE \sim \triangle TFC$ do đó: $\dfrac{d_{T/AB}}{d_{T/AC}} = \dfrac{BE}{CF}$. Lấy $CO \cap AB = X, BO \cap AC = Y$, ta có: $\triangle BCX \sim \triangle CFP$ và $\triangle CBY \sim \triangle BEP$ suy ra: $\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{BE}{BP}.\dfrac{PC}{CF} = \dfrac{BC}{CY}.\dfrac{BX}{BC} = \dfrac{BX}{CY}$. Ta có: $S_{O'BX} = S_{O'BO} = S_{O'YC}$ do đó: $\dfrac{BX}{XY} = \dfrac{d_{O'/AC}}{d_{O'/AB}}$ hay là: AT, AO' đẳng giác nên AT đi qua tâm (BOC)(điều phải chứng minh).

Nhận xét: Rõ ràng lời giải 2 ngắn hơn lời giải gốc của tôi bởi nó khá tự nhiên khi chỉ ra 2 đường đẳng giác bằng phương pháp tỉ lệ khoảng cách.

Bài toán 15(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC nội tiếp (O), có trực tâm H. Lấy M là trung điểm cung BC không chứa H của (BHC). Lấy E, F trên AB, AC sao cho $ME \perp AC, MF \perp AB$. Chứng minh rằng trục đẳng phương của (ABF) và (ACE) chia đôi góc BAC.

Bài toán 16(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC nội tiếp (O). $AO \cap (BOC) = A, I$ và E, F là các hình chiếu của I lên AC, AB. Chứng minh rằng trục đẳng phương của (ABE) và (ACF) là đường đối trung của tam giác ABC.

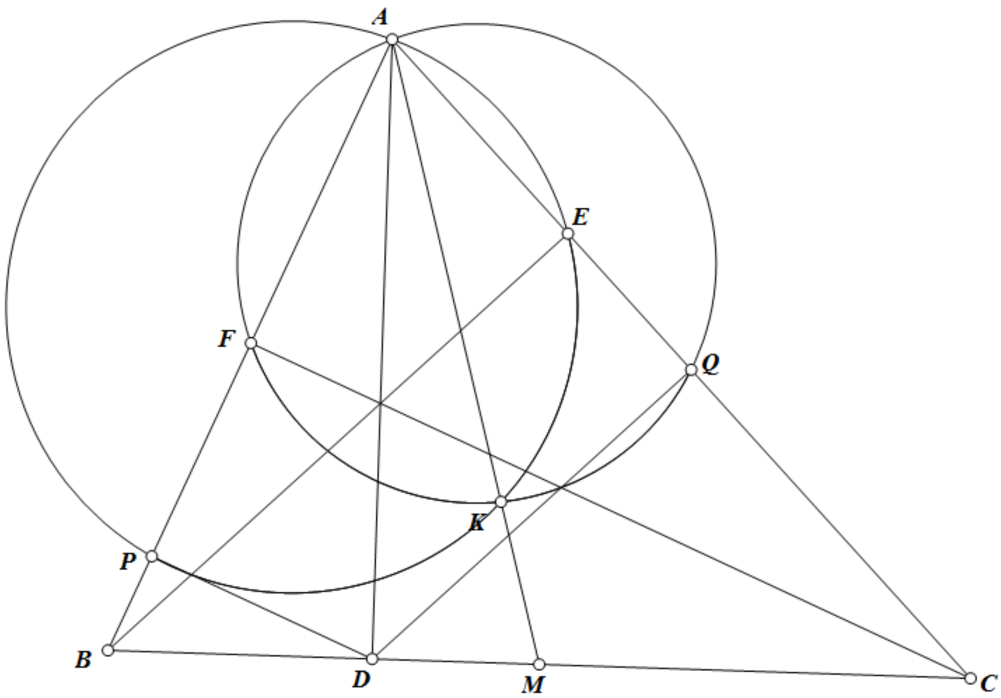


Lời giải: Gọi $AK \cap (O) = A, J$ và D là hình chiếu của A lên BC, $AO \cap BC = P$. Từ các bài toán trước đó ta có: $\dfrac{JB}{JC} = \dfrac{KF}{KC} = \dfrac{BF}{CE}$. Ta có: $\dfrac{BF}{IB} = \cos\angle IBF = -\cos(\angle B + 2\angle OAB) = -\cos(90^\circ + \angle OAB) = \sin\angle DAC$. Tương tự thì: $\dfrac{CE}{IC} = \sin\angle DAB$ do đó: $\dfrac{BF}{CE} = \dfrac{DC.IB}{AC}.\dfrac{AB}{DB.IC} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{DB}{DC}.\dfrac{PC}{PB} = \dfrac{AB}{AC}$(do AD, AP đẳng giác). Lấy $AJ \cap BC = Q$ ta có: $\dfrac{QB}{QC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$ do đó: AK là đường đối trung của tam giác ABC(điều phải chứng minh).

Bài toán 17(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có tâm bàng tiếp góc A là J. Hình chiếu của A lên JB, JC lần lượt là E, F. Chứng minh rằng trục đẳng phương của (JBF) và (JCE) cắt trung trực BC trên (ABC).

Nhận xét: Ứng dụng của phép đổi mô hình là rất quan trọng. Việc đổi góc nhìn là cách hay nhất để khiến 1 bài toán cũ(hoặc có ý tưởng cũ) trở nên mới mẻ.

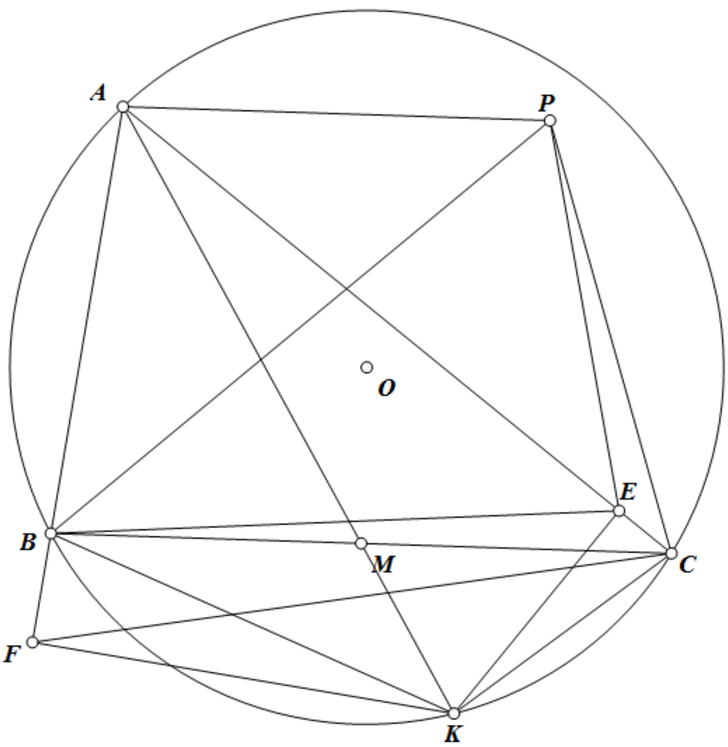
Bài toán 18(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF. P, Q là hình chiếu của D lên AB, AC. Chứng minh rằng trục đẳng phương của (AEP) và (AFQ) chia đôi BC.



Nhận xét: Để ý sẽ thấy nó chính là **bài toán 382**. Vấn đề là nhận ra vai trò điểm A là gì mà thôi.

Bài toán 19(Tổng quát bài toán 384): Cho tam giác ABC. Một đường tròn (K) qua B, C cắt AC, AB tại E, F. P là 1 điểm nằm trên AB. Qua P kẻ đường thẳng song song EF cắt AC tại Q. Chứng minh rằng trục đẳng phương của (AEP) và (AFQ) chia đôi BC.

Bài toán 20(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC nội tiếp (O). M là trung điểm BC. $AM \cap (O) = K$, lấy E, F là hình chiếu của K lên AC, AB. Gọi tâm (ABE) là I và tâm (ACF) là J. Chứng minh rằng: $IJ \perp BC$.



Lời giải: Lấy $(ABE) \cap (ACF) = A, P$. Từ giả thiết ta có $\triangle PBF \sim \triangle PEC(g.g)$ do đó: $\dfrac{PB}{PE} = \dfrac{BF}{EC} = \dfrac{KB}{KC} = \dfrac{AC}{AB}$(bổ đề cát tuyến). Do đó: $\triangle PBE \sim \triangle ACB(c.g.c)$ do đó: $\angle PBE = \angle PAC = \angle ACB$ do đó: $AP \| BC$ nên ta có: $IJ \perp BC$(điều phải chứng minh).