HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 1

Bài 1: Tính: $A=\frac{20}{21}+\frac{2020}{2121}+\frac{202020}{212121}+...+\frac{\overbrace{2020...20}^{}_{\text{2020 so}}}{\underbrace{2121...21}_{\text{2020 so}}}$.

Lời giải

$$A=\frac{20}{21}+\frac{2020}{2121}+\frac{202020}{212121}+...+\frac{\underbrace{2020...20}_{\text{2020 so}}}{\underbrace{2121...21}_{\text{2020 so}}}=\frac{20}{21}+\frac{20}{21}+\frac{20}{21}+...+\frac{20}{21}=2020.\frac{20}{21}=\frac{40400}{21}.$$

Bài 2: Cho biết đa thức $P(x)=x^4+mx^3-55x^2+nx-156$ chia hết cho $x-2$ và chia hết cho $x-3$. Hãy tìm giá trị của m, n rồi tìm tất cả các nghiệm của đa thức.

Lời giải

Theo giả thiết P(x) chia hết cho x – 2 và chia hết cho x – 3 khi P(2) và P(3) = 0.

Suy ra: $\begin{cases}P(2)=16+8m-220+2n-156=0\\P(3)=81+27m-495+3n-156=0\end{cases}$

Hay: $\begin{cases}8m+2n=360\\27m+3n=570\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m+n=180\\9m+n=190\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\n=172\end{cases}$

Với $m=2, n=1$ thay vào P(x) ta được $P(x)=x^4+2x^3-55x^2+172x-156$

Sử dụng 580Vn Lời giải phưng trình bậc 4 ta được nghiệm của phương trình là:

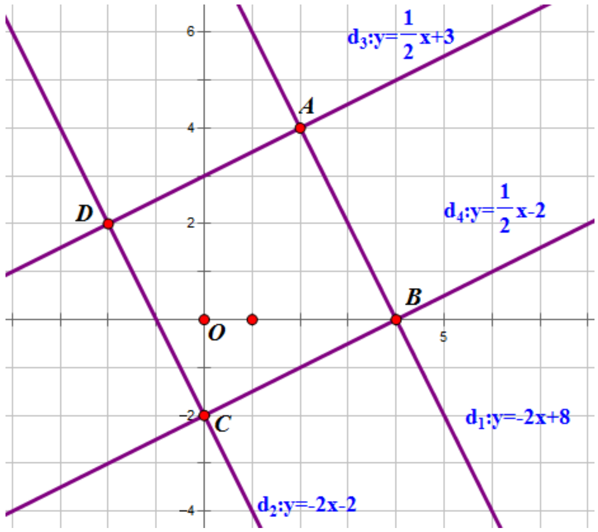
$x_1=2; x_2=3; x_3\approx 2,684658438;\ x_4\approx -9,684658438$

Bài 3: Cho bốn đường thẳng $d_1: y=-2x+8;\ d_2: y=-2x-2;\ d_3: y=\frac{1}{2}x+3;\ \ d_4: y=\frac{1}{2}x-2$. Bốn đường thẳng trên cắt nhau tại bốn điểm A, B, C, D.

a) Tìm tọa độ các điểm A, B, C, D.

b) Tính diện tích tứ giác tạo bởi bốn đường thẳng trên.

Lời giải



$d_1: y=-2x+8;$

$d_2: y=-2x-2;$

$d_3: y=\frac{1}{2}x+3;$

$d_4: y=\frac{1}{2}x-2.$

Gọi $A=d_1\cap d_3$. Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} y=-2x+8 \\ y=\frac{1}{2}x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=8 \\ -\frac{1}{2}x+y=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ hay $A(2;4)$

Gọi $B=d_1\cap d_4$. Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} y=-2x+8 \\ y=\frac{1}{2}x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=8 \\ -\frac{1}{2}x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$ hay $B(4;0)$

Gọi $C=d_2\cap d_4$. Tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} y=-2x-2 \\ y=\frac{1}{2}x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=-2 \\ -\frac{1}{2}x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$ hay $C(0;-2)$

Gọi $d=d_2\cap d_3$. Tọa độ D là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} y=-2x-2 \\ y=\frac{1}{2}x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=-2 \\ -\frac{1}{2}x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ hay $D(-2;2)$

Nhận thấy $AB=BC=CD=DA$ và $AB\perp BC$ nên tứ giác là hình vuông có cạnh $AB=\sqrt{20}$. Do đó, diện tích tứ giác ABCD là $S=20$.

Bài 4: Tìm bốn chữ số cuối cùng của số: $a=5^{2018}$.

Lời giải

Cách 1. Ta có $a=5^{2018}=5^{2016}\times 5^2$

Dùng máy bấm các giá trị sau đây:

$5^2=25$	$5^8=39\mathbf{0625}$	$5^{13}=1220703125$
$5^3=125$	$5^9=1953125$	$5^{14}=6103515625$
$5^4=625$	$5^{10}=9765625$	
$5^5=3125$	$5^{11}=48828125$	
$5^6=15625$	$5^{12}=24414\mathbf{0625}$	
$5^7=78125$		

Nhận xét rằng 5^{4n} với $n>1$ đều có bốn chữ số cuối cùng là 0625, như vậy $5^{2016}=5^{4.504}$ có bốn chữ số cuối cùng là 0625 nên số 5^{2018} có bốn chữ số cuối cùng là 5625.

Cách 2. Ta có tính chất $a \equiv b \pmod{n}$ thì $a^2 \equiv b^2 \left(\bmod n^2\right)(*)$

Nhận xét: $10\,000 = 2^4 \times 5^4 = 16 \times 5^4$

Ta có:

$5 \equiv 1(\bmod 4)$

$\Rightarrow 5^{503} \equiv 1(\bmod 4)$

$\Rightarrow \left(5^{503}\right)^4 \equiv 1^4\left(\bmod 4^2\right)(\text{do}(*))$

$\Rightarrow 5^{2012} \equiv 1(\bmod 16)$

$\Rightarrow 5^{2012} \times 5^4 \equiv 1\left(\bmod 16 \times 5^4\right)$

$\Rightarrow 5^{2016} \equiv 625(\bmod 1000)$

$\Rightarrow 5^{2018} \equiv 625 \times 5^2 \equiv 5625(\bmod 1000)$

Vậy số 5^{2018} có bốn chữ số cuối cùng là 5625.

Bài 5: Cho dãy số (u_n) có các số hạng: $u_1 = 1+\frac{1}{2}; u_2 = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}; u_3 = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}};...$

a. Tính u_{10} (dạng phân số tối giản)

b. Tính gần đúng $S = u_1 + u_2 + ... + u_{20}$

Lời giải

$u_1 = 1+\frac{1}{2}; u_2 = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}; u_3 = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}};...$ ta thấy: $u_{n+1} = 1+\frac{1}{u_n}$

Khai báo ban đầu:

$1 \to D$ {biến đếm}

$\frac{3}{2} \to A$ {giá trị u_1 }

$\frac{3}{2} \to C$ {biến tổng}

Ghi vào màn hình:

$D = D+1 : = 1+\frac{1}{A} : C = C + A$

Ấn CALC và lặp lại phím $\boxed{=}$ ta được: $u_{10} = \frac{233}{144}; S_{20} = 32,27839479$

Bài 6: Tìm tất cả các cặp nghiệm nguyên của phương trình: $(x-2)(y+1) = 8$.

Lời giải

$(x-2)(y+1) = 8 \Leftrightarrow y+1 = \frac{8}{x-2} \Leftrightarrow y = -1+\frac{8}{x-2}$

Do x, y đều là số nguyên nên $8 \vdots (x-2) \Rightarrow x-2$ nhận các giá trị $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 8$

$x-2$	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8

x	-6	-2	0	1	3	4	6	10
y	-2	-3	-5	-9	7	3	1	0

Vậy hệ có 6 nghiệm nguyên.

Bài 7: Lời giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+3\sqrt{xy+x-y^2-y}=5y+4 & (1) \\ \sqrt{4y^2-x-2}+\sqrt{y-1}=x-1 & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Cách 1. Ta dùng "hệ số bất định" để phân tích phương trình (1) như sau:

$(1) \Leftrightarrow x-y+3\sqrt{(x-y)(y+1)}-4(y+1)=0$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x-y}, u\ge 0 \\ v=\sqrt{y+1}, v\ge 0 \end{cases}$. Khi đó phương trình (1) trở thành:

$u^2+3uv-4v^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u=-4v\ (\text{loaïi}) \end{array}\right.$

Với $u=v$ ta có $x=2y+1$ thay vào phương trình (2) ta được:

$\sqrt{4y^2-2y-3}+\sqrt{y-1}=2y$. Dùng MTCT ta đoán được nghiệm $y=2$ do đó ta phân tích phương trình $\sqrt{4y^2-2y-3}+\sqrt{y-1}=2y$ thành

$\Leftrightarrow \sqrt{4y^2-2y-3}-(2y-1)+\left(\sqrt{y-1}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(y-2)}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\dfrac{y-2}{\sqrt{y-1}+1}=0$

$\Leftrightarrow (y-2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow (y-2)\left(\underbrace{\dfrac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+1}}_{>0,\forall y>1}\right)=0 \Leftrightarrow y=2.$

Với $y=2$ thì $x=5$ thỏa (*).

Vậy nghiệm của phương trình là $(x;y)=(2;5)$.

Cách 2. Kĩ thuật MTCT

Định hướng tìm lời Lời giải: Phương trình (1) có một dấu căn nên ta ưu tiên xử lý trước. Chuyển vế phương trình (1) và bình phương để khử dấu căn:

$(1)\Leftrightarrow 3\sqrt{xy+x-y^2-y}=5y+4-x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9\left(xy+x-y^2-y\right)=\left(5y+4-x\right)^2 \\ x\le 5y+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+34y^2-19xy-17x+49y+16=0 \\ x\le 5y+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\left(19y+17\right)x+34y^2+49y+16=0 \ \left(1a\right) \\ x\le 5y+4 \end{cases}$

Cho $y=100$ ta Lời giải phương trình bậc hai theo biến x ta được: $x=1716=17y+16$, $x=201=2y+1$.

Hay $x^2-\left(19y+17\right)x+34y^2+49y+16=0\Leftrightarrow \left(x-17y-16\right)\left(x-2y-1\right)=0$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} xy+x-y^2-y\ge 0 \\ 4y^2-x-2\ge 0 \qquad (*) \\ y\ge 1 \end{cases}$

Ta có:

$(1)\Leftrightarrow 3\sqrt{xy+x-y^2-y}=5y+4-x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9\left(xy+x-y^2-y\right)=\left(5y+4-x\right)^2 \\ x\le 5y+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+34y^2-19xy-17x+49y+16=0 \\ x\le 5y+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-2y-1\right)\left(x-17y-16\right)=0 \\ x\le 5y+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2y+1 \\ x=17y+16 \end{array}\right. \\ x\le 5y+4 \end{cases}$

Vôùi $x=17y+16$ (loaïi) vì $17y+16\le 5y+4\Leftrightarrow y\le -\frac{1}{6}$ maâu thuaãn vôùi (*)

Thay $x=2y+1$ vào phương trình (2) ta được:

$\sqrt{4y^2-2y-3}+\sqrt{y-1}=2y$

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} 4y^2-2y-3+y+1+2\sqrt{\left(4y^2-2y-3\right)\left(y-1\right)}=4y^2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{\left(4y^2-2y-3\right)\left(y-1\right)}=y+4$

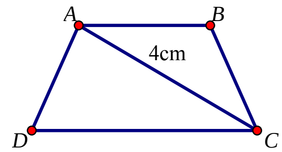
$\Leftrightarrow \begin{cases} 16y^3-25y^2-12y-4=0 \\ y\ge -4 \end{cases} \Leftrightarrow y=2.$

Với $y=2\Rightarrow x=5$ thỏa điều kiện (*).

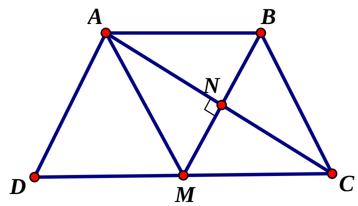
Vậy nghiệm của phương trình là $(x;y)=(2;5)$.

Bài 8:

Hình thang cân ABCD có hai đáy là AB và CD, cho $AB=BC=\frac{1}{2}CD$. Tính gần đúng chu vi và diện tích hình thang biết $AC=4cm$.



Lời giải



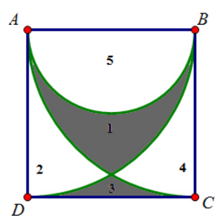
Gọi M là trung điểm của DC.

Dễ thấy hình thang cân có $AB=\frac{1}{2}CD$ nên các tam giác ADM, ABM, BCM là các tam giác đều có đường cao $AN=2cm\Rightarrow AB=AN.\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}cm$.

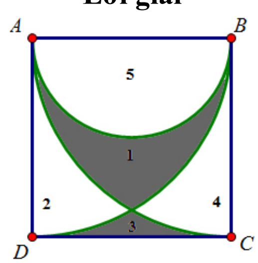
Chu vi hình thang là: $5AB=\frac{20}{\sqrt{3}}cm\approx 11,54700538cm$.

Bài 9:

Cho hình vuông ABCD có cạnh 28cm. Vẽ nửa đường tròn đường kính AB, hai góc phần tư đường tròn tâm A và B bán kính AB nằm trong hình vuông (hình vẽ). Tính hiệu diện tích hai hình 1 và 3.



Lời giải



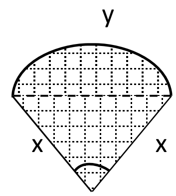
Cạnh hình vuông $a=28cm$, diện tích $\frac{1}{4}$ hình tròn bán kính AB: $S=\frac{1}{4}\pi a^2=S_1+S_4+S_5$, với $S_5=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi a^2}{8}\Rightarrow S_1+S_4=\frac{\pi a^2}{8}$

Mặt khác $S_2+S_3=a^2-S=a^2-\frac{\pi a^2}{4}$ trừ hai đẳng thức ta được.

Vậy $S_1-S_3=\frac{3\pi a^2}{8}-a^2\approx 139,6282402$.

Bài 10:

Người ta muốn làm một cánh diều hình quạt như hình vẽ với chu vi cho trước là a sao cho diện tích của hình quạt là lớn nhất. Dạng của quạt này phải như thế nào?



Lời giải

Với x là bán kính hình quạt, y là độ dài cung tròn. Ta có chu vi cánh diều là $a = 2x + y$. Ta cần tìm mối liên hệ giữa độ dài cung tròn y và bán kính x sao cho diện tích quạt lớn nhất. Dựa vào công thức tính diện tích hình quạt là $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$ và độ dài cung tròn $\ell = \frac{2\pi R\alpha}{360}$, ta có diện tích hình quạt là: $S = \frac{\ell R}{2}$. Vận dụng trong bài toán này diện tích cánh diều là: $S = \frac{xy}{2} = \frac{x(a-2x)}{2} = \frac{1}{4}2x(a-2x) \le \frac{1}{4}.\left(\frac{2x+a-2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.\frac{a^2}{4}$.

S lớn nhất bằng $\frac{a^2}{16}$ đạt được khi $2x = a - 2x \Leftrightarrow x = \frac{a}{4} \Rightarrow y = \frac{a}{2}$.

Như vậy với chu vi cho trước, diện tích của hình quạt lớn nhất khi bán kính của nó bằng nửa độ dài cung tròn.

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 2

Bài 1: Tính tổng: $S=\frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2020}-\sqrt{2021}}$

Lời Giải

Ta có

$$S=\frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2020}-\sqrt{2021}}$$

$$=\sum_{x=1}^{2021}\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}\approx 121049,864$$

Bài 2:

a) Tìm số dư trong phép chia $\frac{x^5-6,723x^3+1,857x^2-6,458x+4,319}{x+2,318}$.

b) Tìm a để $P(x)=3x^3+17x-625+a^2$ chia hết cho $x+3$.

Lời giải

a) Đặt $P(x)=x^5-6,723x^3+1,857x^2-6,458x+4,319$.

Số dư của $P(x)$ khi chia cho $x+2,318$ là: $r=P(-2,318)=46,0791$.

b) Đặt $Q(x)=3x^3+17x-625\Rightarrow P(x)=Q(x)+a^2$.

$P(x)$ chia hết cho $x+3$ khi $P(-3)=Q(-3)+a^2=0$

$\Rightarrow a=\pm\sqrt{-Q(-3)}\approx\pm 27,5136$.

Bài 3: Để hoàn thành một công trình xây dựng, đội công nhân số I phải làm trong 3600 giờ, đội công nhân số II phải làm trong 4800 giờ. Hai đội cùng làm trong một thời gian thì đội I được điều đi làm công việc khác, đội II tiếp tục làm tổng cộng trong 4320 giờ thì hoàn thành công việc. Tính thời gian mỗi đội đã làm.

Lời giải

Trong một giờ đội I làm được $\frac{1}{3600}$ công việc, đội II làm được $\frac{1}{4800}$ công việc.

Gọi thời gian đội I đã làm là x giờ $(0 < x < 4320)$.

Thời gian đội II đã làm sẽ là $(4320 - x)$ giờ.

Ta có phương trình: $\frac{1}{3600}x + \frac{1}{4800}(4320 - x) = 1$

$x = \left(1 - \frac{4320}{4800}\right) : \left(\frac{1}{3600} - \frac{1}{4800}\right) = 1440$.

Thời gian đội I là 1440 giờ, đội II là 2880 giờ.

Bài 4: Tìm số tự nhiên n $(31258 < n < 49327)$ để $17313596 - 35n$ là lập phương của một số tự nhiên.

Lời giải

Đặt $A = \sqrt[3]{17313596 - 35n}$. Ta có:

$31258 < n < 49327$ suy ra $15587186 < 17313596 - 35n < 16219566$

hay $15587186 < A^3 < 16219566 \Rightarrow 249,7981624 < A < 253,1316265$ hay $250 \le A \le 253$

Vì $A = \sqrt[3]{17313596 - 35n} \Rightarrow n = \frac{17313596 - A^3}{35}$

Cho A chạy từ 250 đến 253 dò tìm được số tự nhiên $n = 42867$ ứng với $A = 251$.

Bài 5: Dãy số $\{u_n\}$ được tính theo công thức $u_1 = 1; u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n}$. Lập quy trình bấm phím để tính u_{n+1} ? Tính giá trị u_{20}.

Lời giải

Ta có: $u_1 = 1; u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n}$.

Khai báo ban đầu:

Đưa $1 \to D$ {biến đếm};

Đưa $1 \to A$ {giá trị u_1 }

Ghi vào màn hình: $D = D + 1 : A = \frac{A^2 + 2}{2A}$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$ ta được $u_{20} \approx 1,414213562$.

Bài 6: Một người sử dụng xe có giá trị ban đầu là 20 triệu. Sau mỗi năm, giá trị xe giảm 10% so với năm trước đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì giá trị xe nhỏ hơn 6 triệu?

Lời giải

Gọi giá trị của xe năm thứ n là x_n . Khi ấy $x_0 = 20000000$

Với hao mòn $r = 10\%$

Sau một năm giá trị của xe còn lại là : $x_1 = x_0 - rx_0 = x_0(1-r)$

Sau hai năm, giá trị của còn lại là: $x_2 = x_1 - rx_1 = x_1(1-r) = x_0(1-r)^2$

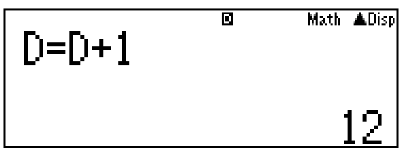
Sau n năm, giá trị của xe còn lại là: $x_n = x_{n-1} - rx_{n-1} = x_{n-1}(1-r) = x_0(1-r)^n$

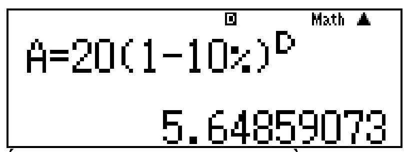
Theo đề: $x_0(1-r)^n < 6 \Leftrightarrow 20(1-10\%)^n < 6$

Khai báo: $0 \to D$ {biến đếm}

Ghi vào màn hình: $D = D+1 : A = 2(1-10\%)^D$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$





Vậy sau 12 năm, giá trị của xe giảm xuống không quá 6 triệu đồng

Bài 7: Giải phương trình: $3x^2 + 6x - 3 = \sqrt{\dfrac{x+7}{3}}$.

Lời giải

Cách 1. Điều kiện: $\dfrac{x+7}{3} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7$. Phương trình đã cho trở thành:

$$9x^2 + 18x - 9 = \sqrt{3x+21}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 18x - 9 + 3x + 21 + \frac{1}{4} = 3x + 21 + \sqrt{3x+21} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 21x + \frac{49}{4} = 3x + 21 + \sqrt{3x+21} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(3x + \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3x+21} + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x+21} + \dfrac{1}{2} = 3x + \dfrac{7}{2} \\ \sqrt{3x+21} + \dfrac{1}{2} = -3x - \dfrac{7}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{3x+21} = 3x + 3 & (1a) \\ \sqrt{3x+21} = -3x - 4 & (1b) \end{array}\right.$$

Giải (1a):

$$\sqrt{3x+21}=3x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3\ge 0 \\ 3x+21=\left(3x+3\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 9x^2+15x-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-5+\sqrt{73}}{6}.$$

Giải (1b):

$$\sqrt{3x+21}=-3x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-4\ge 0 \\ 3x+21=\left(-3x-4\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{4}{3} \\ 9x^2+21x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-7+\sqrt{69}}{6}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{-7-\sqrt{69}}{6}$, $x=\frac{-5+\sqrt{73}}{6}$.

Cách 2. Điều kiện: $\frac{x+7}{3}\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -7$. Phương trình đã cho trở thành viết thành

$9x^2+18x-9=\sqrt{3x+21}$.

Đặt $3t+3=\sqrt{3x+21}\ge 0,\left(t\ge -1\right) \Rightarrow 9t^2+18t+9=3x+21 \Leftrightarrow 9t^2+18t=3x+12$

Từ đó ta có hệ: $\begin{cases} 9x^2+18x-9=3t+3 \\ 9t^2+18t=3x+12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2+18x=3t+12 \ (1) \\ 9t^2+18t=3x+12 \ (2) \end{cases}$

Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2) ta được:

$$9\left(x^2-t^2\right)+18\left(x-t\right)-3\left(t-x\right)=0 \Leftrightarrow 9\left(x-t\right)\left(x+t\right)+21\left(x-t\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-t\right)\left[9\left(x+t\right)+21\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=t \\ x=\frac{7}{3}-t \end{array}\right.$$

Với $x=t\left(x\ge -1\right)$ thay vào (1) ta được:

$$9x^2+18x=3x+12 \Leftrightarrow 9x^2+15x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-5+\sqrt{73}}{6} \\ x=\frac{-5-\sqrt{73}}{6}\ (\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{-5+\sqrt{73}}{6}.$$

Với $x=\frac{7}{3}-t \Leftrightarrow t=\frac{7}{3}-x$ thay vào phương trình (1) ta được $x=\frac{-7+\sqrt{69}}{6}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{-7-\sqrt{69}}{6}$, $x=\frac{-5+\sqrt{73}}{6}$.

Cách 3. Kĩ thuật MTCT

Phân tích: Bình phương hai vế phương trình đưa về phương trình hệ quả {phương trình bậc bốn}

$$\text{pt} \Rightarrow \left(3x^2+6x-3\right)^2=\frac{x+7}{3} \Leftrightarrow 3\left(3x^2+6x-3\right)^2-\left(x+7\right)=0$$

$$\underset{1000}{\overset{\text{CALC}}{\Leftrightarrow}} 27x^4+108x^3+54x^2-109x+20=0 \ \left(*\right)$$

Sử dụng 580 Vn plus ta tìm đươc 4 nghiệm gần đúng như sau:

$x_1=0,5906672909;\ x_2=0,2177706438;\ x_3=-2,237333958;\ x_4=-2,551103977$

Thử lại phương trình ban đầu ta chỉ nhận giá trị $x_4 = -2,551103977;\ \ x_1 = 0,5906672909$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x_4 = -2,551103977;\ \ x_1 = 0,5906672909$.

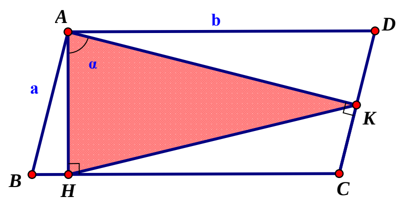
Bài 8: Cho hình bình hành ABCD có góc A tù. Kẻ hai đường cao AH, AK $\left(H \in BC, K \in CD\right)$, biết $\widehat{HAK} = \alpha = 45^\circ 38'$, độ dài $AB = a = 29,1945cm$, $AD = b = 68,2014cm$.

a. Tính AH, AK.

b. Tính diện tích S của phần hình bình hành còn lại khi khoét đi tam giác HAK.

Lời giải

a)



Ta có:

$\hat{B} + \hat{C} = 180^0$.

Tứ giác AHCK nội tiếp được đường tròn $\Rightarrow \alpha + \hat{C} = 180^0$

Suy ra: $\hat{B} = \widehat{HAK} = \alpha$ (cùng bù với $\widehat{BCD}$)

Suy ra

$$AH = AB\sin\alpha = a\sin\alpha = 29,1945\sin 45^\circ 38' = 20,8706\left(cm\right)$$

$$AK = AD\sin\alpha = b\sin\alpha = 68,2014\sin 45^\circ 38' = 48,7558\left(cm\right)$$

b) $S_{ABCD} = BC.AH = ab\sin\alpha$

$$S_{AHK} = \frac{1}{2}AH.AK\sin\alpha = \frac{1}{2}a\sin\alpha.b\sin\alpha.\sin\alpha = \frac{1}{2}ab\sin^3\alpha$$

$$S = S_{ABCD} - S_{AHK} = ab\sin\alpha - \frac{1}{2}ab\sin^3\alpha = ab\sin\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)$$

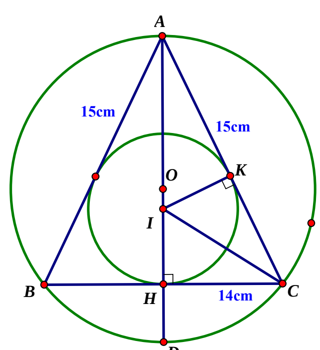
$$= 29,1945.68,2014.\sin 45^\circ 38'\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 45^\circ 38'\right) = 1059,6844cm^2$$

Bài 9: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn $\left(O;R\right)$ và ngoại tiếp đường tròn $\left(I;r\right)$. Biết $AB = AC = 25cm, BC = 14cm$.

a) Tính các bán kính của các đường tròn (O) và (I).

b) Tính khoảng cách giữa hai tâm.

Lời giải



a) Kẻ đường cao AH của tam giác ABC cắt đường tròn (O) tại D.

Ta có A, O, I, H, D thẳng hàng.

Tam giác AHC vuông tại H, theo Py-ta-go ta có:

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24\left(cm\right)$$

Mặt khác $S_{AIC} = \frac{1}{2}IK.AC = \frac{1}{2}CH.AI\ \left(*\right)$, K là hình chiếu của I lên AC

Mà $IH = IK$ nên từ $(*) \Rightarrow \frac{IH}{IA} = \frac{CH}{CA}$ hay

$$\frac{r}{AH - r} = \frac{CH}{CA} \Rightarrow r = \frac{CH.AH}{CA + CH} = \frac{7.24}{25 + 7} = 5,25(cm)$$

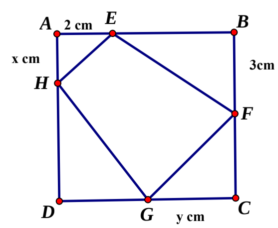
Tam giác ACD vuông tại C có $CH \perp AD$ nên theo hệ thức lượng ta có:

$$AD = \frac{AC^2}{AH} \Rightarrow R = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}.\frac{AC^2}{AH} = 13,0208(cm)$$

b) $OI = AH - IH - AO = 24 - 5,25 - 13,0208 = 5,7292(cm)$

Bài 10:

Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng x + y để diện tích hình thang EFGH đạt giá trị nhỏ nhất.



Lời giải

Ta có S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S = S_{AEH} + S_{CGF} + S_{DGH}$ lớn nhất.

Tính được $2S = 2x + 3y + (6 - x)(6 - y) = xy - 4x - 3y + 36$ (1)

Mặt khác ΔAEH đồng dạng ΔCGF nên $\frac{AE}{CG} = \frac{AH}{CF} \Rightarrow xy = 6$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2S = 42 - (4x + \frac{18}{x})$. Ta có 2S lớn nhất khi và chỉ khi $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất.

Biểu thức $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 4x = \frac{18}{x} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$.

Vậy $x + y = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 3

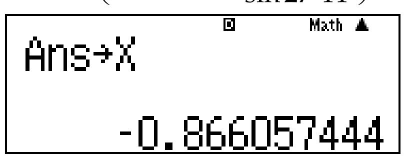
Bài 1. Cho biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}-xy}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}+xy}$.

Tính A với $x=\dfrac{1}{2}\left(\sin 27^\circ 11'-\dfrac{1}{\sin 27^\circ 11'}\right)$ và $y=\dfrac{1}{2}\left(\cos 20^\circ 14'-\dfrac{1}{\cos 20^\circ 14'}\right)$

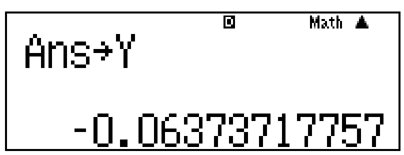
Lời giải

Tính trực tiếp trên máy.

$$x=\frac{1}{2}\left(\sin 27^\circ 11'-\frac{1}{\sin 27^\circ 11'}\right)$$

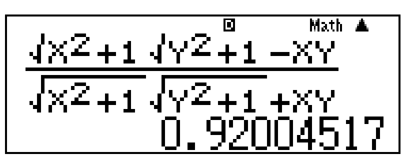


và $y=\dfrac{1}{2}\left(\cos 20^\circ 14'-\dfrac{1}{\cos 20^\circ 14'}\right)$



Nhập vào màn hình $\dfrac{\sqrt{X^2+1}\sqrt{Y^2+1}-XY}{\sqrt{X^2+1}\sqrt{Y^2+1}+XY}$

Ấn $\boxed{\text{CACL}}$ $\boxed{=}\boxed{=}$ ta được kết quả



Vậy $A\approx 0{,}92005$

Bài 2: Tìm số dư dưới dạng phân số trong phép chia đa thức $\left(-\dfrac{1}{3}x^4+\dfrac{3}{5}x^2+1\right):(11x+13)$.

Lời giải

Đặt $P(x) = -\frac{1}{3}x^4 + \frac{3}{5}x^2 + 1$.

Số dư của phép chia $P(x):(11x+13)$ chính là $r = P\left(-\frac{13}{11}\right)$.

Ta có: $11^4 \times r = 11^4 \times P\left(-\frac{13}{11}\right) = \frac{260851}{15}$

Suy ra: $r = \frac{260851}{15 \times 11^4} = \frac{260851}{219615}$

Bài 3: Tìm các số tự nhiên có 12 chữ số, có dạng $\overline{453******987}$ và là lập phương của một số tự nhiên.

Lời giải

Đặt $x = \overline{453******987}$ và $y = \sqrt[3]{x}$ với $y \in \mathbb{N} \Rightarrow 7681 \le y \le 7685$.

Để y^3 có tận cùng là 7 thì y có tận cùng bằng 3.

$\Rightarrow y = 7683$. Thử lại:

$x = y^3 = 7683^3 = 453515880987$

Bài 4: Cho dãy số $\{a_n\}$ với $a_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n + 2$ (với $n \in \mathbb{N}^*$)

a) Tính $a_5, a_{10}, a_{15}, a_{20}$.

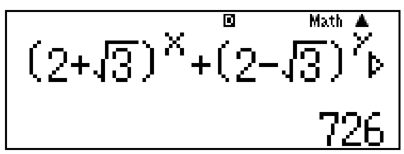
b) Lập công thức truy hồi tính a_n theo a_{n-1} và a_{n-2} $(n \in \mathbb{N}, n > 2)$ và viết quy trình bấm phím liên tục để tính các giá trị của a_n theo công thức truy hồi.

Lời giải

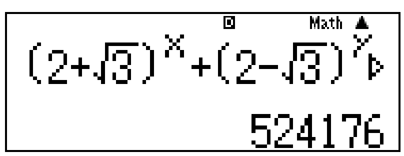
Cho dãy số $\{a_n\}$ với $a_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n + 2$ (với $n \in \mathbb{N}^*$)

a) Tính trực tiếp trên máy đến kết quả:

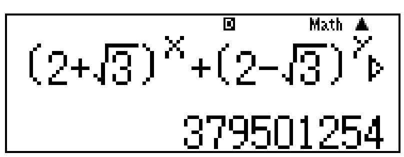
$a_5 = 726$ {ứng với $X = 5$}



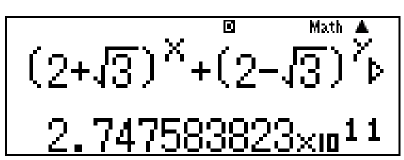
$a_{10} = 524176$ {Ứng với $X = 10$}



$a_{15} = 379501254$



Tính $a_{20} = 274758382276$



Sử dụng VINACAL

Ấn tiếp $\boxed{-}2,747583823\times10^{11}\boxed{=}$ ta được kết quả là -24

Vậy $a_{20}=274758382276$

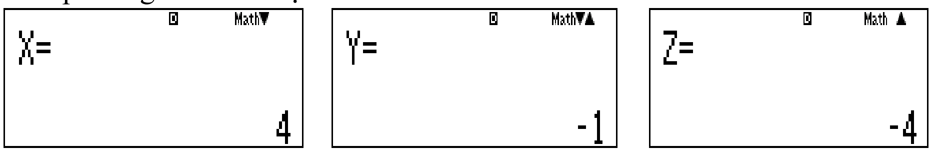
Lời bình: Đối với các bài toán tính tràn màn hình thì Vinacal vẫn chiếm ưu thế hơn.

b) Đặt $a_n=Aa_{n-1}+Ba_{n-2}+C$

Thay a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}16A+6B+C=54\\54A+16B+C=196\\196A+54B+C=726\end{cases}$$

Giải phương trình ta được:



Vậy : $A=4, B=-1, C=-4$.

Công thức truy hồi: $a_1=6; a_2=16; a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}-4$ với $n\in\mathbb{N}, n>2$.

Quy trình bấm phím

$6\boxed{=}16\boxed{=}\ 4\boxed{\text{Ans}}\boxed{-}\boxed{\text{PreAns}}\boxed{-}4\boxed{=}$

Lập lại phím $\boxed{=}$

Bài 5: Ông Bách thanh toán tiền mua xe bằng các kỳ khoản năm: 5.000.000 đồng, 6.000.000 đồng, 10.000.000 đồng và 20.000.000 đồng. Kỳ khoản đầu thanh toán 1 năm sau ngày mua. Với lãi suất áp dụng là 8%. Hỏi giá trị chiếc xe ông Bách mua là bao nhiêu?

Lời giải

Kỳ khoản đầu thanh toán 1 năm sau ngày mua là 5.000.000 đồng, qua năm 2 sẽ thanh toán 6.000.000 đồng, năm 3: 10.000.000 đồng và năm 4:20.000.000 đồng. Các khoản tiền này đã có lãi trong đó. Do đó giá trị chiếc xe phải bằng tổng các khoản tiền lúc chưa có lãi. Gọi V_0 là tiền ban đầu mua chiếc xe. Giá trị của chiếc xe là:

$V_0=5.1,08^{-1}+6.1,08^{-2}+10.1,08^{-3}+20.1,08^{-4}=32.412.582$ đồng

Bài 6: Giải phương trình $\sqrt{3x^2+5x+2}=\sqrt{5x^2-4}+\sqrt{2x^2+3x+2}$**.**

Phân tích: Phương trình này có dạng 3 căn thức và trong 3 căn thức là các đa thức bậc 2 nên hoàn toàn có thể đưa về được phương trình bậc 4 để giải. Nếu dùng tư duy thông thường thì ta sẽ bình phương ngay vì thấy hai vế không âm. Thế nhưng để ý hệ số trước x^2 là $3; 5; 2\to 5=3+2\to$ nếu chuyển vế $\sqrt{2x^2+3x+2}$ rồi bình phương thì lượng x^2 sẽ mất đi, lúc đó việc khai triển của chúng ta sẽ được giảm bớt đi phần nào:

$\sqrt{3x^2+5x+2}-\sqrt{2x^2+3x+2}=\sqrt{5x^2-4}$

$\to 5x^2+8x+4-2\sqrt{\left(3x^2+5x+2\right)\left(2x^2+3x+2\right)}=5x^2-4$

$\to 4x+4=\sqrt{\left(3x^2+5x+2\right)\left(2x^2+3x+2\right)}\to$ tiếp tục bình phương.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases}3x^2+5x+2\ge 0\\5x^2-4\ge 0\end{cases}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$\sqrt{3x^2+5x+2}-\sqrt{2x^2+3x+2}=\sqrt{5x^2-4}$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x^2+5x+2}-\sqrt{2x^2+3x+2}\right)^2=5x^2-4$

$\Leftrightarrow 5x^2+8x+4-2\sqrt{\left(3x^2+5x+2\right)\left(2x^2+3x+2\right)}=5x^2-4$

$\Leftrightarrow 4x+4=\sqrt{\left(3x^2+5x+2\right)\left(2x^2+3x+2\right)}$

$\Rightarrow(4x+4)^2=\left(3x^2+5x+2\right)\left(2x^2+3x+2\right)$

$\Leftrightarrow 6x^4+19x^3+9x^2-16x-12=0$

$\Leftrightarrow x=-2\vee x=-1\vee x=\dfrac{-1\pm\sqrt{145}}{12}$

Thử lại chỉ có $x=\dfrac{\sqrt{145}-1}{12}$ thỏa mãn phương trình ban đầu.

Bài 7: Biết chu vi của một tam giác là 8,164cm và các đường cao của tam giác có chiều dài là: 2,75cm; 3,16cm; 3,12cm. Tính chiều dài mỗi cạnh của tam giác.

Lời giải

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là: a, b, c.

Từ giả thiết ta có

$2{,}75a=3{,}16b=3{,}12c$ và $a+b+c=8{,}164$.

Giải hệ trên ta được:

$a\approx$ 2,966933 cm; $b\approx$ 2,581983 cm; $c\approx$ 2,615085 cm

Vậy: Cạnh thứ nhất: 2,966933 cm; cạnh thứ hai: 2,581983 cm; Cạnh thứ ba: 2,615085 cm.

Bài 8: Cho tam giác ABC nhọn có: $\widehat{A}=60^\circ;\ \widehat{B}>\widehat{C};\ BC=\sqrt{\sqrt{3}-1}\text{cm}$; $S_{ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\text{cm}^2;\ \sin B+\sin C=\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{4}$. Tính các góc B và C.

Lời giải

Ta có

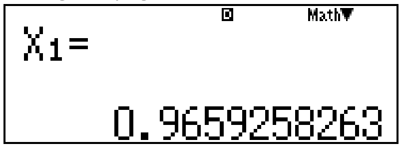
$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}bc.\sin A=\dfrac{1}{2}.\dfrac{a.\sin B}{\sin A}.\dfrac{a\sin C}{\sin A}.\sin A=\dfrac{1}{2}.\dfrac{BC^2\sin B\sin C}{\sin A}$

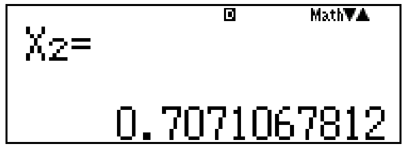
$\Rightarrow\sin B\sin C=\dfrac{2\sin A.S_{ABC}}{BC^2}=\dfrac{2\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2.6.\left(\sqrt{3}-1\right)}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$

Mà $\sin B+\sin C=\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{4}$ nên ta có phương trình:

$$\sin^2 B - \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{4}\sin B + \frac{\sqrt{3}+1}{4} = 0$$

Dùng máy giải tìm được





$\sin B = 0.9695 \to A \underset{\sin}{\overset{\text{SHIFT}}{\Longrightarrow}} \widehat{B} = 75^\circ$, $\sin B = 0.7071 \to B \underset{\sin}{\overset{\text{SHIFT}}{\Longrightarrow}} \widehat{B} = 45^\circ$.

Vì $\widehat{B} > \widehat{C}$ nên $\widehat{B} = 75^\circ, \widehat{C} = 45^\circ$.

Lưu ý: Ta nhắc lại công thức liên qua bài toán trên

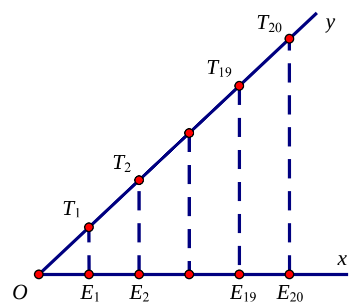
- ✓ Định lý sin trong tam giác thường:

  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

- ✓ $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$

Bài 9: :

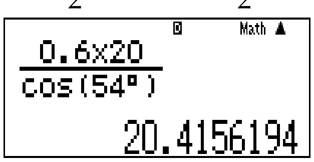
Cho góc $\widehat{xOy} = 54^\circ$. Một con ếch và một con thỏ cùng ngồi ở đỉnh O. Ếch nhảy trên cạnh Ox, thỏ nhảy trên cạnh Oy. Ếch và thỏ cùng nhảy một lúc mỗi lần nhảy một bước. Ếch nhảy đến vị trí E_1 thì thỏ nhảy đến vị trí T_1 sao cho hình chiếu vuông góc của T_1 lên Ox trùng với E_1. Ếch nhảy đến vị trí E_2 thì thỏ nhảy đến vị trí T_2 sao cho hình chiếu vuông góc của T_2 lên Ox trùng với E_2. Tiếp tục như thế đến lần nhảy thứ 20. Vị trí cuối cùng là E_{20} và T_{20} sao cho hình chiếu vuông góc của T_{20} lên Ox trùng với E_{20}. Biết mỗi bước nhảy của ếch dài $0,6\text{m}$. Đặt $S_n = dt(\Delta OE_nT_n)$. Tính OT_{20}, S_{13}, S_{17} và tổng diện tích $S_1 + S_2 + ... + S_{20}$ của 20 tam giác $OE_1T_1, OE_2T_2, \ldots, OE_nT_n$.

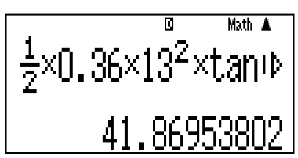


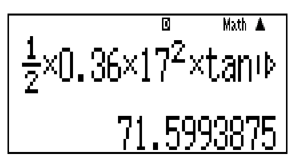
Lời giải

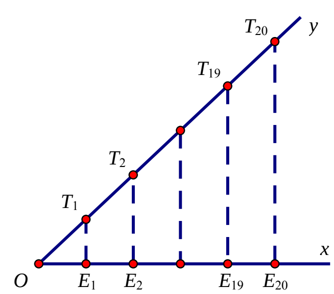
$OE_n = 0,6n;\ T_nE_n = 0,6n.\tan 54^\circ;\ OT_n = \frac{0,6n}{\cos 54^\circ}$.

$S_n = \frac{1}{2}OE_n.T_nE_n = \frac{1}{2}.0,36n^2.\tan 54^\circ$









Vậy $OT_{20} \approx 20,41562\text{m}$ Vậy $S_{13} \approx 41,86954\text{m}^2$ Vậy $S_{17} \approx 71,59939\text{m}^2$

Để tính $S_1 + S_2 + ... + S_{20}$ của 20 tam giác OE_1T_1, OE_2T_2, …, OE_nT_n ta lập quy trình ấn phím như sau:
Khai báo ban đầu:

$0 \to X$ {biến đếm}

$0 \to Y$ {biến tổng}

Ghi vào màn hình: $X = X + 1 : A = \frac{1}{2}.0,36X^2 \tan 54^\circ : Y = Y + A$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$

Vậy $S_1 + S_2 + ... + S_{20} \approx 711,03890m^2$.

Bài 10: Cho 2 số dương a,b thỏa mãn $(a+b)(a+b-1) = a^2 + b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = \frac{1}{a^4 + b^2 + 2ab^2} + \frac{1}{b^4 + a^2 + 2ba^2}$$

Lời giải

Từ điều kiện đề bài suy ra $(a+b)^2 - (a+b) = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2ab - (a+b) = 0 \Leftrightarrow a + b = 2ab$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $a + b = 2ab \le \frac{(a+b)^2}{2} \Rightarrow (a+b)^2 \ge 2(a+b) \Rightarrow a + b \ge 2$

$$a^4 + b^2 \ge 2\sqrt{a^4.b^2} = 2a^2b; b^4 + a^2 \ge 2b^2a$$

$$\Rightarrow Q \le \frac{1}{2a^2b + 2ab^2} + \frac{1}{2b^2a + 2ba^2} = \frac{2}{2ab(a+b)} = \frac{1}{ab(a+b)}$$

Vì $a + b \ge 2; ab = \frac{a+b}{2} \ge 1 \Rightarrow \frac{1}{ab(a+b)} \le \frac{1}{2} \Rightarrow Q \le \frac{1}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 1$

Vậy GTLN của Q là $\frac{1}{2}$.

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 4

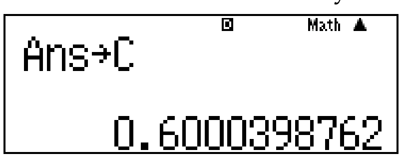
Bài 1: Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\frac{(x+5y)(x-5y)}{x^2+y^2}\left(\frac{5x-y}{x^2+5xy}+\frac{5x+y}{x^2-5xy}\right)$$ với $x=0,98765$; $y=0,12345$.

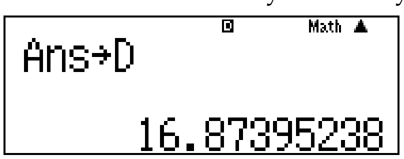
Lời giải

Tính $A=\frac{(x+5y)(x-5y)}{x^2+y^2}\left(\frac{5x-y}{x^2+5xy}+\frac{5x+y}{x^2-5xy}\right)$

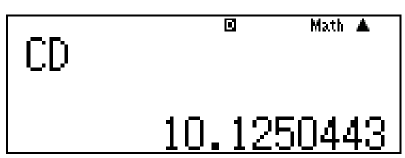
- ***Bước 1:*** Tính $\frac{(x+5y)(x-5y)}{x^2+y^2}$ với $x=0,98765$; $y=0,12345$ và lưu vào ô nhớ C



- ***Bước 2:*** Tính $\frac{5x-y}{x^2+5xy}+\frac{5x+y}{x^2-5xy}$ với $x=0,98765$; $y=0,12345$ và lưu vào ô nhớ D



Lúc đó : $A=CD=10,12504$



Bài 2: Cho đa thức $P(x)=6x^3-7x^2-16x+m$.

a) Tìm m để đa thức $P(x)=6x^3-7x^2-16x+m$ chia hết cho $2x+3$.

b) Với m tìm được hãy phân tích đa thức $P(x)$ thành nhân tử.

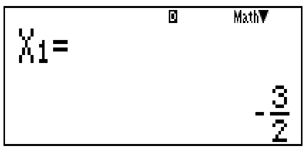
Lời giải

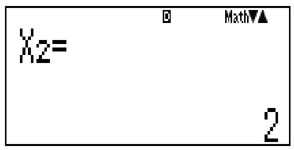
a) Đa thức $P(x)=6x^3-7x^2-16x+m$ chia hết cho $2x+3$ khi

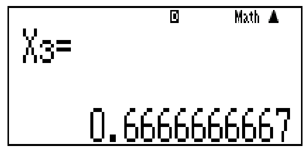
$$P\left(-\frac{3}{2}\right)=0\Leftrightarrow 6.\left(-\frac{3}{2}\right)^3-7.\left(-\frac{3}{2}\right)^2-16.\left(-\frac{3}{2}\right)+m=0\Leftrightarrow m=12.$$

b) Với $m=12$ thì $P(x)=6x^3-7x^2-16x+12$.

Sử dụng chức năng EQN giải phương trình bậc ba ta tìm được 3 nghiệm của phương trình là: $x=2,x=\frac{2}{3},x=-\frac{3}{2}$.







Do đó, ta phân tích P(x) thành

$$P(x)=6x^3-7x^2-16x+12=6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2)=(3x-2)(2x+3)(x-2).$$

Bài 3: Tìm chữ số lẻ thập phân thứ 11^{2014} kể từ dấu phẩy trong dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn của số hữu tỉ $\frac{10000}{29}$.

Lời giải

Ta có

$\frac{10000}{29}\approx 344,(8275862068965517241379310344)$, là số thập phân vô hạn tuần hoàn chu kỳ 28.

Ta có $\left(11^6\right)\equiv 1(\text{mod } 28)$

$11^{2004}=\left(11^6\right)^{335}.11^4\equiv 1^{335}.11^4(\text{mod } 28)\equiv 25(\text{mod } 28)$

Vậy chữ số lẻ thập phân 11^{2014} ứng với chữ số ở vị trí thứ 25 của chu kì nên là chữ số 0.

Bài 4: Một bác nông dân bán 1 con trâu, 5 con dê rồi lấy số tiền đó đi mua 13 con lợn thì còn thừa 5.000.000 đồng. Nếu lấy tiền bán 2 con trâu, 3 con lợn để mua 9 con dê thì vừa đủ. Còn nếu bán 6 con dê, 8 con lợn lấy số tiền đó mua 3 con trâu thì còn thiếu 1.000.000 đồng. Hỏi mỗi con dê, con trâu, con lợn có giá là bao nhiêu? (Biết các con vật cùng loại có giá như nhau).

Lời giải

Gọi số tiền bán một con trâu, con dê, con lợn lần lượt là: $x;y;z$ (đồng) (x, y, z dương).

Ta có: $\begin{cases}x+5y-13z=5000000\\2x-9y+3z=0\\-3x+6y+8z=-1000000\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=17400000\\y=4800000\\z=2800000\end{cases}$

Vậy giá tiền mua một con trâu, một con dê, một con lợn lần lượt là: 17400000 đồng, 4800000 đồng, 2800000 đồng.

Bài 5: Tính tổng P khi $x = 2018$:

$$P = \frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-7x+12} + ... + \frac{1}{x^2-197x+9702} + \frac{1}{x^2-199x+9900}$$

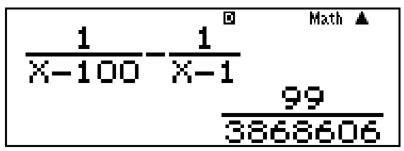
Lời giải

$$P = \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + ...$$

$$+ \frac{1}{(x-98)(x-99)} + \frac{1}{(x-99)(x-100)}$$

$$= -\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} + ... + \frac{1}{x-99} - \frac{1}{x-100}\right] = \frac{1}{x-100} - \frac{1}{x-1}$$

Thay $x = 2018$



Vậy $P = \frac{99}{386806}$

Bài 6: Cho dãy số $u_{1,} u_2, ..., u_n$ thõa mãn : $U_{n+2} = 2U_n - 3$ (nếu n lẻ) và $U_{n+2} = 3U_n - 2$ (nếu n chẳn)

a/ Tìm u_1, u_2 biết $u_{19} = 515$, $u_{20} = 19684$

b/ Tính $S_{54} = u_1 + u_2 + ... + u_{54}$

Lời giải

Ta có: $u_n = \frac{u_{n+2}+3}{2}$ { với n lẻ} .

Ghi vào màn hình: X = X – 2 : $A = \frac{A+3}{2}$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$

Nhập tiếp $19 \to X$; $515 \to A$ Lặp lại phím $\boxed{=}$ Tính được $u_1 = 4$

Tương tự tính được $u_2 = 2$

Quy trình tính tổng :

Nhập $2 \to X$ {biến đếm} ; $4 \to A$ {giá trị u_1 } ; $2 \to B$ {giá trị u_2 }; $6 \to C$ {biến tổng}

Ghi vào màn hình:

X = X + 1 : A = 2A – 3 : C = C + A : X = X + 1 : B = 3B – 2 : C = C + B

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ Lặp lại phím $\boxed{=}$ $u_{54}=3,81293296\times 10^{12}-3,8129329\times 10^{12}=60328$

$S_{54}=u_1+u_2+u_3+...+u_{54}=3\,812\,932\,960\,328$

Bài 7: Tìm nghiệm đúng của phương trình: $2\left(x^2-3x-1\right)-7\sqrt{x^3+1}=0.$

Lời giải

Cách 1.

Phân tích: Ta có $x^3+1=\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$. Ta phân tích $2\left(x^2-3x-1\right)$ theo $\left(x+1\right)$ và $\left(x^2-x+1\right)$ bằng phương pháp hệ số bất định:

$2\left(x^2-3x-1\right)=\alpha\left(x+1\right)+\beta\left(x^2-x+1\right)$

$\Leftrightarrow 2x^2-6x-2=\beta x^2+\left(\alpha-\beta\right)x+\alpha+\beta$

$\Rightarrow \begin{cases}\beta=2\\ \alpha-\beta=-6\\ \alpha+\beta=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-4\\ \beta=2\end{cases}$

Suy ra $2\left(x^2-3x-1\right)=-4\left(x+1\right)+2\left(x^2-x+1\right)$.

Giải

Điều kiện: $x^3+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -1.$ Phương trình đã cho viết thành

$-4\left(x+1\right)+2\left(x^2-x+1\right)=7\sqrt{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$.

Chia hai vế phương trình cho x^2-x+1 ta được:

$-4\dfrac{x+1}{x^2-x+1}-7\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}+2=0\ (*)$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{\left(x^2-x+1\right)}},t\ge 0$. Phương trình (*) trở thành:

$-4t^2-7t+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{4}\\ t=-2\ \left(\text{loại}\right)\end{array}\right.$

Với $t=\dfrac{1}{4}$:

$\sqrt{\dfrac{x+1}{\left(x^2-x+1\right)}}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 16x+16=x^2-x+1=0$

$\Leftrightarrow x^2-17x-15=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{17+\sqrt{349}}{2}\\ x=\dfrac{17-\sqrt{349}}{2}\end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{17+\sqrt{349}}{2}, x=\frac{17-\sqrt{349}}{2}$.

Cách 2.

Phân tích: Chuyển vế phương trình đã cho ta được: $2\left(x^2-3x-1\right)=7\sqrt{x^3+1}$. Bình phương hai vế phương trình ta được phương trình hệ quả:

$$4\left(x^2-3x-1\right)^2-49\left(x^3+1\right)=0 \underset{1000}{\overset{CALC}{\Rightarrow}} 4x^4-73x^3+28x^2+24x-45=0\ (*)$$

Sử dụng chức năng $\boxed{SHIFT}\boxed{SOLVE}$ ta tìm được nghiệm thứ nhất $x_1 \approx -0,840770846 \rightarrow A$ bằng cách ấn $\boxed{SHIFT}\boxed{STO}\boxed{A}$, nghiệm thứ hai là $x_2 \approx 17,84077085 \rightarrow B$ bằng cách ấn $\boxed{SHIFT}\boxed{STO}\boxed{B}$. Nhận thấy $\begin{cases} A+B=17 \\ AB=-15 \end{cases}$, theo định lý Vi-et đảo thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2-17x-15=0$.

Dùng MTCT chia đa thức $4x^4-73x^3+28x^2+24x-45$ cho $x^2-17x-15$ {thủ thuật **CALC 1000**} ta được $4x^2-5x+3$.

Giải

Điều kiện: $x^3+1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1$. Ta có:

$$2\left(x^2-3x-1\right)-7\sqrt{x^3+1}=0 \Leftrightarrow 2\left(x^2-3x-1\right)=7\sqrt{x^3+1}$$

$$\Rightarrow 4\left(x^2-3x-1\right)^2-49\left(x^3+1\right)=0 \Leftrightarrow 4x^4-73x^3+28x^2+24x-45=0$$

Ta sử dụng máy **580VN** giải phương trình bậc 4

$$4x^4-73x^3+28x^2+24x-45=0 \Leftrightarrow x=\frac{17\pm\sqrt{349}}{2}$$

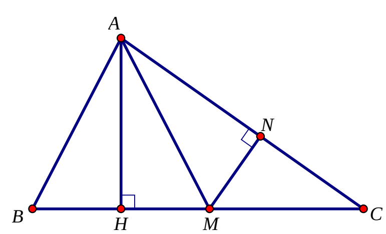
Bài 8: Cho tam giác ABC $(AB<AC)$ có đường cao AH và đường trung tuyến AM chia góc BAC thành ba góc bằng nhau.

a) Tính các góc của tam giác ABC.

b) Hãy tính tỉ số diện tích của hai tam giác ABH và tam giác ABC.

Lời giải

a)



Vẽ $MN \perp AC$.

ΔABM cân tại đỉnh A, nên H là trung điểm của BM.

Nên $\Delta AHM = \Delta ANM \Rightarrow HM = MN$

$$\Rightarrow MN=\frac{1}{2}MC=\frac{1}{4}BC$$

ΔNMC vuông tại N có $MN=\frac{1}{2}MC$, nên $\widehat{MCN}=30^\circ$.

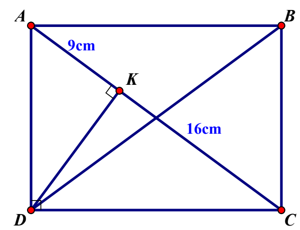
$\Rightarrow \widehat{HAC}=90^\circ-\widehat{ACH}=60^\circ \Rightarrow \widehat{BAH}=30^\circ$. Nên $\widehat{BAC}=90^\circ$.

Vậy $\widehat{BAC}=90^\circ$, $\widehat{ABC}=60^\circ$, $\widehat{ACB}=30^\circ$.

b) $\dfrac{S_{\Delta HBA}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{\frac{1}{2}AH.HB}{\frac{1}{2}AH.BC}=\dfrac{HB}{BC}=\dfrac{1}{4}=0,25$.

Bài 9: Tính các cạnh của hình chữ nhật ABCD biết rằng đường vuông góc kẻ từ đỉnh D đến đường chéo AC chia đường chéo đó thành hai đoạn thẳng có độ dài là $9cm$ và $16cm$.

Lời giải



$AD^2=AK.AC$

$\Rightarrow DA=\sqrt{AK.AC}=\sqrt{9.(9+16)}=15\,(cm)$

$DC^2=KC.AC$

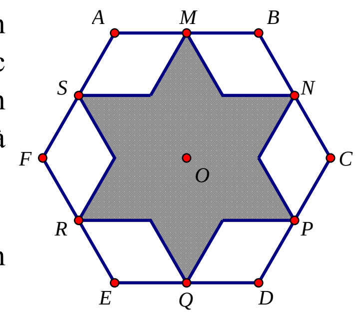
$\Rightarrow DC=\sqrt{KC.AC}=\sqrt{16.(9+16)}=20\,(cm)$

Bài 10:

Viên gạch hình lục giác đều ABCDEF có hoa văn hình sao như hình vẽ, trong đó các đỉnh hình sao M, N, P, Q, R, S là trung điểm các cạnh của lục giác. Viên gạch được tô bằng hai màu (màu của hình sao và màu của phần còn lại). Biết rằng cạnh của viên gạch là $a=16,5cm$.

a) Tính diện tích phần tô màu.

b) Diện tích phần tô màu chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích viên gạch.

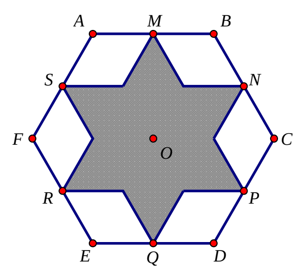


Lời giải

a) Diện tích ba cánh sao là những tam giác đều cạnh $\dfrac{a}{2}$ là:

$S_1=3.\dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{16}$

Diện tích tam giác đều MRP cạnh $\dfrac{3a}{2}$ là:



$S_2=\dfrac{1}{2}.\dfrac{3a}{2}.\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}=\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{16}$

Vậy diện tích phần tô màu là: $S=\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}\approx 353,66312\,(cm^2)$

b) Diện tích hình lục giác đều cạnh a là:

$S'=2.\dfrac{(a+2a).\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Vậy diện tích phần tô màu chiếm 50% diện tích viên gạch.

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 5

Bài 1: Tính chính xác kết quả của phép tính sau: 45612378×87643561

Lời giải

Ta có:

$$45612378 \times 87643561$$
$$= \left(4561 \times 10^4 + 2378\right) \times \left(8764 \times 10^4 + 3561\right)$$
$$= 4561 \times 8764 \times 10^8 + 4561 \times 3561 \times 10^4 + 2378 \times 8764 \times 10^4 + 2378 \times 3561$$

Ghi kết quả theo hàng dọc và cộng trên giấy ta được kết quả là: **3997631233598058.**

Bài 2: Giải phương trình sau:

$$\frac{x}{1992+\cfrac{2012}{1993-\cfrac{2011}{1994+\cfrac{2010}{1995-\cfrac{2009}{1996+\cfrac{2008}{1997-\cfrac{2007}{1998+\cfrac{2006}{1999-\cfrac{2005}{2000+\cfrac{2004}{2001-\cfrac{2003}{2002}}}}}}}}}}} = \cfrac{1}{10+\cfrac{2}{9+\cfrac{3}{8+\cfrac{4}{7+\cfrac{5}{6}}}}}$$

Lời giải

Đặt:

$$M=\cfrac{1}{1992+\cfrac{2012}{1993-\cfrac{2011}{1994+\cfrac{2010}{1995-\cfrac{2009}{1996+\cfrac{2008}{1997-\cfrac{2007}{1998+\cfrac{2006}{1999-\cfrac{2005}{2000+\cfrac{2004}{2001-\cfrac{2003}{2002}}}}}}}}}}}$$

$$N=\cfrac{1}{10+\cfrac{2}{9+\cfrac{3}{8+\cfrac{4}{7+\cfrac{5}{6}}}}}$$

Tính M và N (tính ngược từ dưới lên). Khi đó phương trình có dạng $Mx=N$.
Giải phương trình ta được $x\approx 195,1283$.

Bài 3: Cho đa thức $x^4+4x^3+6px^2+4qx+r$ chia hết cho đa thức x^3+3x^2+9x+3. Tìm giá trị của biểu thức $A=(p+q)r$.

Lời giải

Thực hiện phép chia đa thức ta được thương là $x+1$ và dư là $(6p-12)x^2+(4q-12)x+r-3$. Vì chia hết nên dư là đa thức 0. Suy ra $6p-12=4q-12=r-3=0\Leftrightarrow p=2,\ q=r=3$.

Vậy $(p+q)r=15$.

Bài 4: Tìm một số tự nhiên có 4 chữ số biết rằng nó là một số chính phương và nếu thêm vào mỗi chữ số của nó một đơn vị thì cũng được một số chính phương.

Lời giải

Ta có $\overline{abcd}=x^2;\ \overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}=y^2$

$\Rightarrow y^2-x^2=1111\Rightarrow y=\sqrt{x^2+1111}$

Nhập vào máy biểu thức: $\sqrt{x^2+1111}:x=x+1$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$, máy hỏi X?, ấn 1 $\boxed{=}$

$x=45$. Vậy số cần tìm là 2025.

Bài 5: Cho dãy số $\{a_n\}$ như sau $a_n=\left(5+2\sqrt{6}\right)^n+\left(5-2\sqrt{6}\right)^n$ với $n\in\mathbb{N}^*$

a) Chứng minh $a_{n+2}+a_n=10\,a_{n+1}$.

b) Tính a_{10}, a_{11}, a_{12}.

Lời giải

a) Đặt $a_{n+2}=xa_{n+1}+ya_n$, với $n=1;2;3$ ta có:

$a_1 = 10;\ a_2 = 98;\ a_3 = 970;\ a_4 = 9602;\ a_5 = 95050;\ a_6 = 940898.$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 98x + 10y = 970 \\ 95050x + 9602y = 940898 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy $a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n$ hay $a_{n+2} - a_n = 10a_{n+1}$ (ĐPCM)

b) Đưa $0 \to D$ {biến đếm}

Ghi vào màn hình: $D = D + 1 : A = \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^D + \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^D$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$

$a_{10} = 9\ 034\ 502\ 498;\ a_{11} = 89\ 432\ 354\ 890;\ a_{12} = 885\ 289\ 046\ 402$

Bài 6: Bác An muốn sau 5 năm có 1000000000 (1 tỉ đồng) để mua một căn nhà. Hỏi rằng Bác An phải gửi ngân hàng mỗi tháng (số tiền như nhau) là bao nhiêu? Biết lãi suất mỗi tháng là 0.5%.

Lời giải

Ta xét bài toán tổng quát sau: *Một người, hàng tháng gửi vào ngân hàng số tiền là a (đồng). Biết lãi suất hàng tháng là r%. Hỏi sau n tháng, người ấy có bao nhiêu tiền?*

Thiết lập công thức

Cuối thứ I, người đó có số tiền là: $T_1 = a + a.r = \text{a}\left(1 + r\right)$

Đầu tháng thứ II, người đó có số tiền là:

$$a\left(1+r\right) + a = a\left[\left(1+r\right)+1\right] = \frac{a}{\left[\left(1+r\right)-1\right]}\left[\left(1+r\right)^2 - 1\right] = \frac{a}{r}\left[\left(1+r\right)^2 - 1\right]$$

Cuối tháng thứ II, người đó có số tiền là:

$$T_2 = \frac{a}{r}\left[\left(1+r\right)^2 - 1\right] + \frac{a}{r}\left[\left(1+r\right)^2 - 1\right].r = \frac{a}{r}\left[\left(1+r\right)^2 - 1\right]\left(1+r\right)$$

Cuối tháng thứ n, người đó có số tiền cả gốc lẫn lãi là T_n: $T_n = \frac{a}{r}\left[\left(1+r\right)^n - 1\right]\left(1+r\right)$

Áp dụng:

Áp dụng công thức Lãi kép, gửi hàng tháng: $T_n = \frac{M}{r}\left[\left(1+r\right)^n - 1\right](1+r)$

Thế số $T_{60} = 1.000.000.000, r = 0.5\%$

$$M = \frac{1.000.000.000 \times 0,5\%}{(1+0,5\%)\left[\left(1+0,5\%\right)^{60} - 1\right]} = 14.261.494,06$$

Vậy mỗi tháng thầy Cư phải gửi tiết kiệm khoảng 14 triệu 260 ngàn đồng vào ngân hàng, liên tục trong 5 năm.

Bài 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=2\left(x^2+y^2\right) \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2y}=y^2-x^2 \end{cases}$

Lời giải

HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2+3y^2}{2} \\ \dfrac{1}{y}=3x^2+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+3xy^2=2 \\ 3x^2y+y^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3=3 \\ (x-y)^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt[3]{3}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \end{cases}$

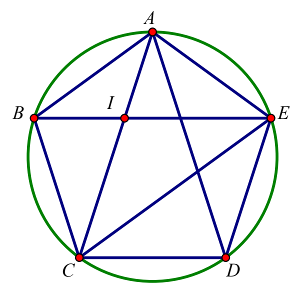
Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt[3]{3}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \end{cases}$

Bài 8: Tính gần đúng độ dài đường chéo của ngũ giác đều có cạnh bằng a $(a \approx 1{,}176\text{cm})$.

Lời giải

Gọi I là giao điểm của AC và BE.

Tứ giác CIED là hình bình hành nên $IE = CD = a \approx 1{,}176\text{cm}$.



$\Delta ABI \backsim \Delta CEI$

$\Rightarrow \dfrac{BI}{IE}=\dfrac{AB}{CE}$

$\Rightarrow \dfrac{BI}{a}=\dfrac{a}{BI+a}$

$\Rightarrow BI^2+aBI-a^2=0$

$\Rightarrow BI=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$

$\Rightarrow BE=BI+a=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+1\right)a \approx \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+1\right).1{,}176 \approx 1{,}9028\text{cm}$

Bài 9: Cho tứ giác ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Biết $BO=4\text{cm}, OD=6\text{cm}, AO=8\text{cm}, OC=3\text{cm}$ và $AB=6\text{cm}$. Tính giá trị gần đúng độ dài của AD.

Lời giải

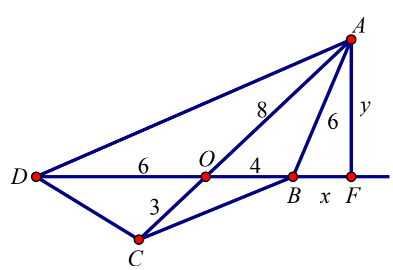
Gọi F là chân đường vuông góc hạ từ A tới đường chéo BD kéo dài.

Đặt $x=BF;\ y=FA$

Ta có: $x^2+y^2=6^2$

Và $(x+4)^2+y^2=8^2$

Giải hệ phương trình



$\begin{cases} x^2+y^2=36 \\ x^2+8x+16+y^2=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y^2=\dfrac{135}{4} \end{cases}$

Do đó $AD^2 = (10+x)^2 + y^2 = 166$.

Vậy $AD \approx 12,8841cm$.

Bài 10: Ông A muốn mua một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích $384m^2$ để xây nhà. Nhưng vợ ông muốn có khuôn viên sân vườn đẹp nên ông mua thêm về hai phía chiều dài mỗi chiều $3m$ và về hai phía chiều rộng mỗi chiều $2m$. Vậy, để ông A mua được mảnh đất có diện tích nhỏ nhất (tiết kiệm chi phí) thì mảnh đất đó chu vi là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi x,y là chiều dài, chiều rộng phần đất xây nhà
Ta có

$$\begin{cases} S = (x+6)(y+4) \\ x.y = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = (x+6)(\dfrac{384}{x} + 4) \\ y = \dfrac{384}{x} \end{cases}$$

Áp dụng BĐT cô-si : $S = \left(4x + \dfrac{2304}{x}\right) + 408 \geq 192 + 408 \Rightarrow S \geq 600$

Dấu ''='' xảy ra khi $4x = \dfrac{2304}{x} \Leftrightarrow x = 24 \Rightarrow y = 16$

Vậy mảnh đất cần mua có chiều dài là: $24 + 6 = 30(m)$

Chiều rộng là: $16 + 4 = 20(m)$

Khi đó chu vi mảnh đất là $100m$.

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 6

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức sau (Tính chính xác đến 5 chữ số thập phân)

$P = \dfrac{3\sin^2 x + \sin 2x - \tan x}{2\cos^3 x - \cot x}$ biết $\sin x = 0,34$ với $0^0 < x < 90^0$.

Lời giải

Ấn $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{MODE}}\boxed{3}$

Từ $\sin x = 0,34 \Rightarrow x = \sin^{-1}(0,34) \to X$. Nhập vào màn hình: $\dfrac{3\sin^2 X + \sin 2X - \tan X}{2\cos^3 X - \cot X}$ và ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả: $-0,56665$.

Bài 2: Cho đa thức $P(x) = x^4 - 8x^3 - 41x^2 + 228x + 260$

a) Hãy tìm số dư trong phép chia P(x) cho đa thức 2x + 5

b) Hãy tìm m để đa thức $P(x) + \dfrac{2}{3}m$ chia hết cho đa thức 2x - 7

c) Hãy tìm các nghiệm của đa thức P(x)

Lời giải

a) Áp dụng định lý Bozu ta có dư của phép chia đa thức P(x) cho 2x + 5 là $P\left(\dfrac{-5}{2}\right)$.

Ấn trên máy ta được số dư bằng: $-402,1875$

b) Để đa thức $P(x) + \dfrac{2}{3}m$ chia hết cho 2x - 7 thì $P(x) + \dfrac{2}{3}m = (2x-7).Q(x)$

$\Rightarrow P\left(\dfrac{7}{2}\right) + \dfrac{2}{3}m = 0 \Rightarrow m = -P\left(\dfrac{7}{2}\right) \div \dfrac{2}{3} = -544,21875$

c) Dễ thấy P(x) có một nghiệm bằng -1 (có thể kiểm tra bằng chức năng của phím $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{SLOVE}}$) nên áp dụng lược đồ Hoocne ta có:

$P(x) = (x+1)(x^3 - 9x^2 - 32x + 260)$.

Dùng máy tính ta tính được các nghiệm còn lại của P(x)

Nghiệm của đa thức là:. $x_1 = -1;\ x_2 = 5,\ x_3 = 9,48331,\ x_4 = -5,48331$

Nhận xét: ta có thể dùng 580 Vn giải trực tiếp nghiệm phương trình bậc 4

$x^4 - 8x^3 - 41x^2 + 228x + 260 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1; x_2 = 5, x_3 = 9,48331, x_4 = -5,48331$

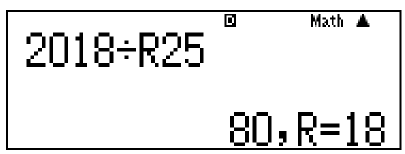
Bài 3:

a) Cho một dãy các chữ **GIAITOANTRENMAYTINHCAMTAY** viết theo luật như sau:
GIAITOANTRENMAYTINHCAMTAYGIAITOANTRENMAYTINHCAMTAY…
Trong dãy trên, chữ ở vị trí thứ 2018 tính từ chữ đầu tiên là chữ gì?

b) Cho số $A = \overline{2014abc}$. Tìm các số $B = \overline{abc}$ sao cho số A đồng thời chia hết cho 20 và 13.

Lời giải

a) Ta có dãy đã cho được tạo thành từ nhóm 25 chữ cái GIAITOANTRENMAYTINHCAMTAY được lặp lại.



Mà $2018 = 25.80 + 18$
Vậy chữ thứ 2018 là chữ thứ 18 trong nhóm. Đó là chữ N.

b) Ta có $(20;13) = 1$ nên A chia hết cho 20 và 13, khi đó A chia hết cho 260.

$A = \overline{2014abc} = 2014000 + \overline{abc} = 260.7746 + 40 + \overline{abc}$

$A \vdots 260 \Leftrightarrow (40 + \overline{abc}) \vdots 260 \Leftrightarrow \overline{abc} = 260.k + 220$

Dùng máy tính thử với $k = 1,2,3,...$ ta được các giá trị thỏa mãn của $\overline{abc}$ là: $\overline{abc} = \{480;740\}$.

Bài 4: Tính gần đúng nghiệm của hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2(x+2014)(y-2013) = 9 \\ x^2 + x + xy = 6 \end{cases}$

Lời giải

Đặt $a = x(x+2014);\ b = x(y-2013)$

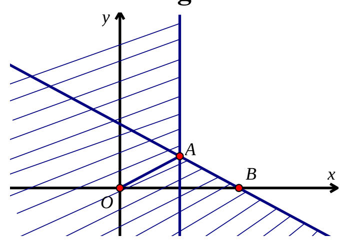
Ta có hệ: $\begin{cases} ab = 9 \\ a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow a = b = 3$

Giải phương trình $x^2 - 2014x - 3 = 0$.

$(x_1 \approx 1,4896; y_1 \approx 2015,0140), (x_2 \approx -2014,0015; y_2 \approx 2012,9985)$

Bài 5: Cho hai số thực x, y thỏa mãn hệ điều kiện: $\begin{cases} x \ge \sqrt{2016}+\sqrt{2017} \\ x+y \ge \sqrt{2016}+\sqrt{2017}+\sqrt{2018} \end{cases}$. Tính gần đúng giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2$.

Lời giải

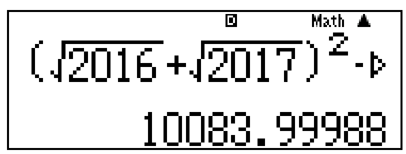


Trong mặt phẳng tọa độ xOy biểu diễn các điểm $M(x;y)$ thỏa mãn hệ điều kiện đã cho.

$A\left(\sqrt{2016}+\sqrt{2017};\sqrt{2018}\right)$; $B\left(\sqrt{2016}+\sqrt{2017}+\sqrt{2018};0\right)$.

Dễ thấy góc OAB tù. Vậy $P = x^2 + y^2 = OM^2$ nhỏ nhất khi $M \equiv A$.

Do đó $P_{min} = \left(\sqrt{2016}+\sqrt{2017}\right)^2 + \left(\sqrt{2018}\right)^2 \approx 10083,99988$



Bài 6: Cho dãy số $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{4x_n^2 - 1}$, (n là số tự nhiên ; $n \ge 1$).

a) Cho $x_1 = \dfrac{1}{3}$; Viết qui trình bấm phím liên tục để tính x_{n+1} .

b) Tính x_{15} ; x_{16} ; x_{17} (chính xác đến 0,00001) .

Lời giải

a) Khai báo: $1 \to D$ {Biến đếm}; $\dfrac{1}{3} \to A$ {giá trị u_1 }

Ghi vào màn hình: $D = D + 1 : A = \dfrac{A}{4A^2 - 1}$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$

b) Thực hiện quy trình ấn phím trên ta được

$x = -0,15062$; $x = 0,16565$; $x = -0,18607$

Bài 7: Bà Hoa gửi 100 triệu vào tài khoản định kỳ tính lãi kép với lãi suất 8%/năm. Sau 5 năm bà rút toàn bộ tiền và dùng một nửa để sửa nhà, số tiền còn lại bà tiếp tục gửi vào ngân hàng. Tính số tiền lãi thu được sau 10 năm.

Lời giải

Sau 5 năm bà Hoa rút được tổng số tiền là: $100\left(1+8\%\right)^5 = 146.932$ triệu

Suy ra số tiền lãi là: $100\left(1+8\%\right)^5 - 100 = L_1$

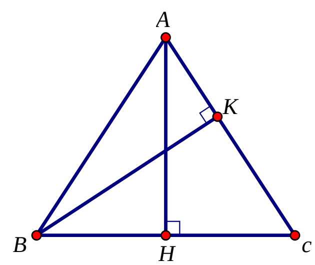
Bà dùng một nửa để sửa nhà, nửa còn lại gửi vào ngân hàng.

Suy ra số tiền bà gửi tiếp vào ngân hàng là: $73.466\left(1+8\%\right)^5 = 107.946$ triệu. Suy ra số tiền lãi là $107.946 - 73.466 = L_2$

Vậy số tiền lãi bà Hoa thu được sao 10 năm là: $\sum L = L_1 + L_2 \approx 81,412tr$.

Bài 8: Cho tam giác ABC cân ở A, đường cao AH bằng 10cm, đường cao BK bằng 12cm. Tính chu vi tam giác ABC

Lời giải



Đặt $AC = AB = x,\ BC = y$.

Ta có: tam giác AHC đồng dạng với tam giác BKC (vì có góc nhọn C chung) nên:

$\frac{AH}{AC} = \frac{BK}{BC}$ hay $AH.BC = BK.AC$.

Vậy $5y = 6x$ (1)

Mặt khác: trong tam giác AHC vuông tại H ta có: $AC^2 = AH^2 + HC^2$

Hay $x^2 = 10^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$ (2)

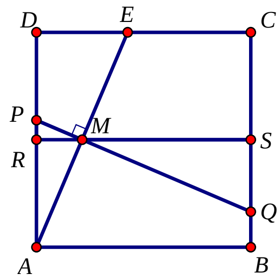
Từ (1) và (2) ta suy ra: $x = \frac{25}{2};\ y = 15$.

Vậy: $AB = AC = \frac{25}{2}cm,\ BC = 15cm$.

Do đó, chu vi tam giác ABC là: $AB + AC + BC = 25 + 15 = 40cm$.

Bài 9: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng 12. Vẽ đoạn AE với E là điểm trên cạnh CD và $DE = 5cm$. Trung trực của AE cắt AE, AD và BC tại M, P và Q. Tính $\frac{MP}{MQ}$.

Lời giải



Vẽ RS qua M song song với cạnh AB, CD.

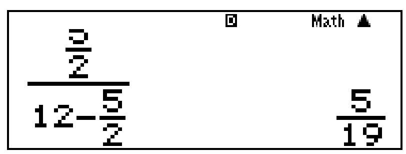
Ta có: $\frac{MP}{MQ}=\frac{MR}{MS}$.

Vì RM là đường trung bình của tam giác ADE nên $MR=\frac{DE}{2}$.

Mà $MS=RS-MR$.

Vậy $\frac{MP}{MQ}=\frac{MR}{MS}=\frac{\frac{DE}{2}}{RS-\frac{DE}{2}}$

Áp dụng bằng số đối với $DE=5cm, RS=12cm$.



Vậy $\frac{MP}{MQ}=\frac{5}{19}$

Bài 10: Một lão nông chia đất cho con trai để người con canh tác riêng, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng $800(m)$. Hỏi anh ta chọn mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để diện tích canh tác lớn nhất?

Lời giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng đất lần lượt là: $x(m)$ và $y(m)$ $(x,y>0)$.

Diện tích miếng đất: $S=xy$

Theo đề bài thì: $2(x+y)=800$ hay $y=400-x$.

Do đó: $S=x\left(400-x\right)\le\left(\frac{x+400-x}{2}\right)^2=40000$

$S_{\max}=40000$ khi $x=200\Rightarrow y=200$.

Vậy kích thước của miếng đất hình chữ nhật là 200×200 (là hình vuông).

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 7

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức sau: $B=\dfrac{14-\left(49\frac{1}{3}:16-14:8\frac{1}{6}\right)\times 7}{1\frac{17}{18}:\left(1\frac{59}{70}+\frac{37}{42}+2\frac{19}{30}\right)}$.

Lời giải

Ta tính:

$14-\left(49\frac{1}{3}:16-14:8\frac{1}{6}\right)\times 7=\frac{53}{12}$; $\quad 1\frac{17}{18}:\left(1\frac{59}{70}+\frac{37}{42}+2\frac{19}{30}\right)=\frac{49}{135}$

Do đó: $B=\dfrac{14-\left(49\frac{1}{3}:16-14:8\frac{1}{6}\right)\times 7}{1\frac{17}{18}:\left(1\frac{59}{70}+\frac{37}{42}+2\frac{19}{30}\right)}=\frac{2385}{196}$.

Bài 2: Cho 3 đường thẳng: $(d_1): y=2x-3$; $(d_2): y=x-2$; $(d_3): y=4x-2$.

Gọi A là giao điểm của (d_1) và (d_2), B là giao điểm của (d_2) và (d_3) và C là giao điểm của (d_1) và (d_3). Tìm tọa độ các điểm A, B, C và tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Lời giải

Ta có: $A=d_1\cap d_2$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} y=2x-3 \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ Vậy $A(1;-1)$

$B=d_2\cap d_3$ nên tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} y=4x-2 \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$ Vậy $B(0;-2)$

$C=d_1\cap d_3$ nên tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -4 \end{cases}$$ Vậy $C\left(-\dfrac{1}{2};-4\right)$

Phương trình đường trung tuyến AE là: $y = \dfrac{8}{5}x - \dfrac{13}{5}$

Phương trình đường trung tuyến BN là: $y = -2x - 2$

$G = AE \cap BN$ nên tọa độ G là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = \dfrac{8}{5}x - \dfrac{13}{5} \\ y = -2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{6} \\ y = -\dfrac{7}{3} \end{cases}$$. Vậ $G = \left(\dfrac{1}{6};-\dfrac{7}{3}\right)$

Lưu ý: Ta có thể dùng công thức sau:

G là trọng tâm của tam giác ABC thì tọa độ G sẽ là $G:\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

Bài 3:

a) Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất, biết a chia cho 2013 dư 2012, chia cho 2012 dư 2011, chia cho 2011 dư 2010.

b) Viết quy trình ấn phím và tìm số tự nhiên x, biết: $1.\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[4]{4}.\sqrt[5]{5}.....\sqrt[x]{x} \approx 398{,}1378503$

Lời giải

a) Theo đề bài ta có: $a+1$ chia hết cho $2013; 2012; 2011$, a là số tự nhiên nhỏ nhất.

Vậy $a + 1 = BCNN(2013;2012;2011) = 8144863716$.

Suy ra $a = 8144863715$.

b) $1.\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[4]{4}.\sqrt[5]{5}.....\sqrt[x]{x} \approx 398{,}1378503$

Khai báo ban đầu: $0 \to X;\ 1 \to C$

Nhập vào màn hình: $X = X + 1 : A = \sqrt[x]{X} : C = C \times A$

Ấn phím CALC nhập $\boxed{=}\boxed{=}$ liên tục khi $C \approx 398{,}1378503$ ta dừng lại được $X = 32$.

Bài 4: Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (với a, b, c, d là các hằng số). Biết $P(1) = 10; P(2) = 20$ và $P(3) = 30$. Tính giá trị của biểu thức: $\dfrac{P(12) + P(-8)}{10} + 29$

Lời giải

Vì đa thức $P(x)$ bậc 4 và hệ số của bậc cao nhất là 1 nên $P(x)$ viết được dưới dạng:

$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-q) + mx^2 + nx + p\ \ (p,m,n,q \in \mathbb{R})$

$P(1) = m + n + p \qquad (1)$

$P(2) = 4m + 2n + p \qquad (2)$

$P(3) = 9m + 3n + p \qquad (3)$

Từ (1); (2) và (3) suy ra: $m = 0;\ n = 10;\ p = 0$

Suy ra: $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-q)+10x$

$$P(12)+P(-8)=\left[11.10.9.(12-q)+10.12\right]-\left[(-9).(-10).(-11).(-8-q)+10.(-8)\right]$$ Vậy
$$=11880-990q+120+7920+990q-80=19840$$

$\dfrac{P(12)+P(-8)}{10}+29=2013$.

Bài 5: Cho dãy số $u_n=n+\dfrac{2018}{n^3}$ (với $n\in\mathbb{N}^*$)Tìm số hạng nhỏ nhất trong tất cả các số hạng của dãy số đó.

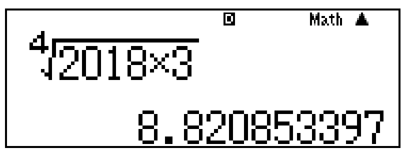
Lời giải

$u_n=n+\dfrac{2018}{n^3}=\dfrac{n}{3}+\dfrac{n}{3}+\dfrac{n}{3}+\dfrac{2018}{n^3}$

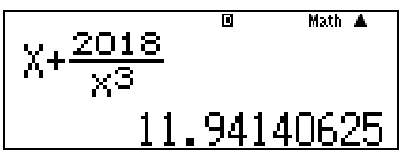
Theo BĐT Cô-si: $u_n\ge 4.\sqrt[4]{\dfrac{n}{3}.\dfrac{n}{3}.\dfrac{n}{3}.\dfrac{2018}{n^3}}=4.\sqrt[4]{\dfrac{2018}{27}}$

Giá trị nhỏ nhất của u_n là $4.\sqrt[4]{\dfrac{2018}{27}}$.

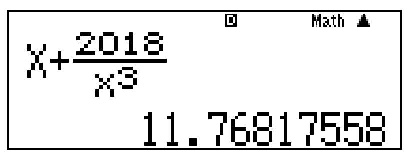
Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{n}{3}=\dfrac{n}{3}=\dfrac{n}{3}=\dfrac{2018}{n^3}\Leftrightarrow n=\sqrt[4]{2018.3}\approx 8,82085$



Vì $n\in\mathbb{N}^*$ nên suy ra $n=8$ hoặc $n=9$ thì u_n đạt giá trị nhỏ nhất.



$u_8=11,9414$



$u_9\approx 11,7682$

Vậy số hạng nhỏ nhất là $u_9\approx 11,7682$.

Bài 6: Bố bạn An tặng cho bạn ấy một máy tính Laptop trị giá 14000000 đồng (mười bốn triệu đồng) bằng cách cho bạn tiền hàng tháng với phương thức sau: Tháng đầu tiên bạn An nhận được 200 000 đồng (hai trăm nghìn đồng), các tháng từ tháng thứ hai trở đi, mỗi tháng nhận được số tiền hơn tháng trước 50 000 đồng (năm mươi nghìn đồng).

a) Nếu chọn cách gửi tiết kiệm số tiền nhận được hàng tháng với lãi suất $0,65\%$ /tháng, thì bạn An phải gửi bao nhiêu tháng mới đủ tiền mua máy vi tính?

b) Nếu bạn An muốn có ngay máy tính bằng cách chọn phương thức mua trả góp hàng tháng bằng số tiền bố cho với lãi suất $0,8\%$ /tháng, thì bạn An phải trả góp bao nhiêu tháng mới trả hết nợ?

Lời giải

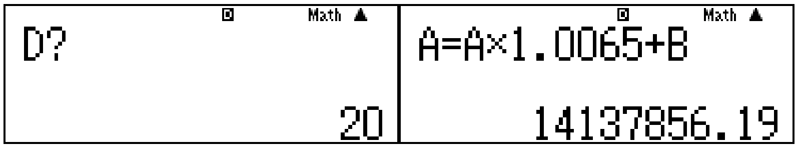
a) Gán: $200000\to A$ (A: số tiền góp được ở tháng thứ D)

$200000 \to B$ (B: số tiền góp hàng tháng)

$1 \to D$ (D: biến đếm)

Nhập trên máy: $D = D + 1 : B = B + 50000 : A = A \times 1,0065 + B$

Bấm "=" liên tiếp cho đến khi A vượt quá 14 000 000 thì D là số tháng phải gửi tiết kiệm.



Số tháng cần gửi: 20 tháng.

b) Tháng thứ nhất, sau khi góp còn nợ: 13 800 000 đồng.

Gán: $13800000 \to A$, $200000 \to B$, $1 \to D$.

Tháng sau góp: $B = B + 50000$, còn nợ: $A = A \times 1,008 - B$.

Nhập trên máy: $D = D + 1 : B = B + 50000 : A = A \times 1,008 - B$

Bấm "=" liên tiếp khi $D = 21$ (ứng với tháng thứ 21 phải trả góp xong còn nợ 813 358 đồng).

Bấm tiếp "=" thì $D = 22 \Leftrightarrow A$ âm.

Như vậy, chỉ cần góp trong 22 tháng thì hết nợ. Tháng cuối chỉ cần góp $813358.1,008 = 819865$ (đồng)

Số tháng cần trả góp: 22 tháng, tháng cuối chỉ cần góp 819 865 đồng.

Bài 7: Giải phương trình $3\left(x^2 - x + 1\right) = 8\sqrt{x\left(x^2+1\right)}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 0$

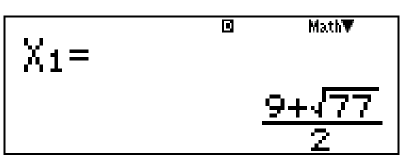
Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho x ta được:

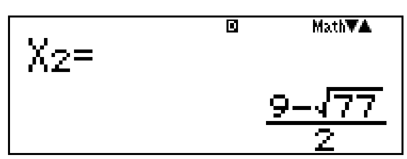
$$3.\frac{x^2+1}{x} - 8\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} - 3 = 0 \ (1)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} \ge 0$, phương trình (1) trở thành

$$3t^2 - 8t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -\frac{1}{3}(\text{loai}) \end{array}\right.$$

Với $t = 3 \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 1 = 0$





Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{9\pm\sqrt{77}}{2}$.

Bài 8: Một người cần thanh toán các khoản nợ sau:

- 30 triệu đồng thanh toán sau 1 năm (khoản nợ 1).
- 40 triệu đồng thanh toán sau 1 năm 6 tháng (khoản nợ 2).
- 20 triệu đồng thanh toán sau 3 năm 3 tháng (khoản nợ 3).

Chủ nợ của người này đồng ý cho thanh toán một lần duy nhất A triệu đồng sau 3 năm (khoản nợ này có tiền nợ ban đầu bằng tổng tiền nợ ban đầu của ba khoản nợ trên). Biết rằng lãi suất 4%/năm. Tìm giá trị của A

Lời giải

Gọi V_1,V_2,V_3 lần lượt là tiền nợ ban đầu của các khoản nợ 1, 2, 3 và X là tiền nợ ban đầu nếu thanh toán một lần duy nhất A triệu đồng sau 3 năm.

$30=V_1.1,04^1\Rightarrow V_1=30.1,04^{-1}$

$40=V_2.1,04^{1,5}\Rightarrow V_2=40.1,04^{-1,5}$

$20=V_3.1,04^{3,25}\Rightarrow V_3=20.1,04^{-3,25}$

$A=X.1,04^3\Rightarrow X=A.1,04^{-3}$

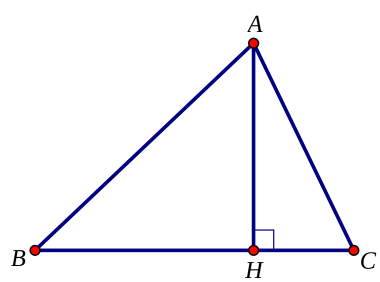
Mà:

$V_1+V_2+V_3=X\Leftrightarrow 30.1,04^{-1}+40.1,04^{-1,5}+20.1,04^{-3,25}=A.1,04^{-3}$ (đồng)

$\Leftrightarrow A=94676700\approx 95$ (triệu đồng)

Bài 9: Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC}=37^\circ$, $\widehat{ACB}=69^\circ$, cạnh $BC=1703,1975\text{cm}$ Tính diện tích của tam giác ABC (kết quả lấy hết các chữ số trên màn hình).

Lời giải



Kẻ đường cao AH $(H\in BC)$

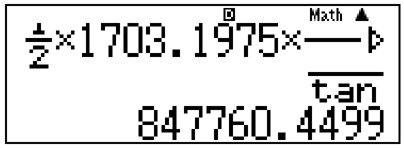
Ta có: $BH=AH.\cot B;\ CH=AH.\cot C$

Suy ra: $BH+CH=AH(\cot B+\cot C)$

$\Rightarrow AH=\frac{BH+CH}{\cot B+\cot C}=\frac{BC}{\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C}}$

Vậy:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.AH=\frac{1}{2}.1703,1975.\frac{1703,1975}{\frac{1}{\tan 37^\circ}+\frac{1}{\tan 69^\circ}}$$



Kết quả: $S_{ABC}\approx 847760,4499\left(cm^2\right)$

Bài 10: Cho tam giác ABC có $BC=a;\ CA=b;\ BA=c$. Từ một điểm M tùy ý trong tam giác, hạ các đường vuông góc MD, ME và MF lần lượt xuống các đường thẳng BC, CA và AB ($D\in BC,\ E\in AC,\ F\in AB$). Xác định vị trí của điểm M để biểu thức $P=\frac{a}{MD}+\frac{b}{ME}+\frac{c}{MF}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó trong trường hợp: $a=\sqrt{13}cm,\ b=\sqrt{12}cm,\ c=\sqrt{11}cm$.

Lời giải

Đặt $MD=x;ME=y;MF=z$

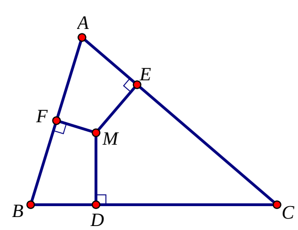
Ta có: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left(ax+by+cz\right)\Rightarrow ax+by+cz=2S_{ABC}$

(Trong đó: $S_{ABC}=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$, với $\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$)

Mặt khác: $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right).\left(ax+by+cz\right)$

$=a^2+b^2+c^2+ab\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+bc\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+ac\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$

$\geq a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=\left(a+b+c\right)^2$



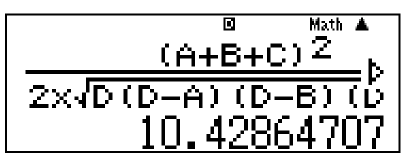
Suy ra: $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\geq\frac{\left(a+b+c\right)^2}{ax+by+cz}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z\Leftrightarrow M$ trùng với tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Vậy $P=\frac{a}{MD}+\frac{b}{ME}+\frac{c}{MF}\geq\frac{\left(a+b+c\right)^2}{2S_{ABC}}$

Vị trí của điểm M: M trùng với tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Áp dụng: $a=\sqrt{13}cm,\ b=\sqrt{12}cm,\ c=\sqrt{11}cm$.



Giá trị nhỏ nhất của $P\approx 10,42865$.

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 8

Bài 1: Tính giá trị biểu thức:

$C=\sqrt[10]{123}+\sqrt[10]{123123}+\sqrt[10]{123123123}+...+\sqrt[10]{\underbrace{123123...123123}_{\text{gồm 30 nhóm số 123}}}$ (kết quả lấy hết trên màn hình).

Lời giải

$C=\sqrt[10]{123}+\sqrt[10]{123123}+\sqrt[10]{123123123}+...+\sqrt[10]{\underbrace{123123...123123}_{\text{gồm 30 nhóm số 123}}}$

Quy trình ấn phím:

Gán $A=1;\ B=123;\ C=\sqrt[10]{123}$

$A=A+1:B=1000\times B+123:C=C+\sqrt[10]{B}$

Khi $A=30,\ C=1625909624$

Bài 2: Cho $a^{10}+b^{10}=273,4717;\ a^{20}+b^{20}=58777,4319$. Tính $Q=a^{30}+b^{30}$.

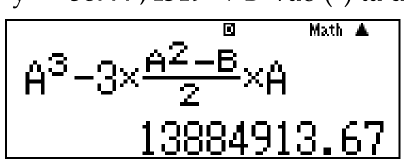
Lời giải

Đặt $x=a^{10};\ y=b^{10}$. Ta có: $x+y=273,4717;\ x^2+y^2=58777,4319$.

Khi đó: $Q=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$$=(x+y)^3-3.\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}.(x+y)\ (*)$$

Thay $x+y=273,4717\to A;\quad x^2+y^2=58777,4319\to B$ vào (*) ta được



$Q=13884913,67$.

Bài 3: Cho $P(x)=x^{11}+ax^{10}+bx^{9}+cx^{8}+...+mx+n$ và $P(1)=3; P(2)=7$; $P(3)=13; P(4)=21; P(5)=31; P(6)=43; P(7)=57; P(8)=73; P(9)=91$; $P(10)=111$; $P(11)=133$. Tính $P(12)$.

Lời giải

Xét $f(x)=x^2+x+1$. Đặt $Q(x)=P(x)-f(x)$.

$Q(1)=P(1)-f(1)=0$

$Q(2)=P(2)-f(2)=0$

$Q(3)=P(3)-f(3)=0$

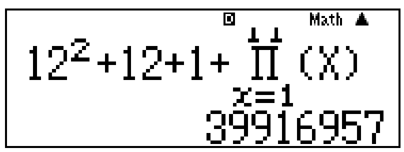
....

$Q(11)=P(11)-f(11)=0$

Suy ra 1, 2, 3, 4,…, 11 đều là nghiệm của $Q(x)$.

Do đó $Q(x)=(x-1)(x-2)(x-3)...(x-11)$

Nên $P(x)=Q(x)+f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)...(x-11)+x^2+x+1$.



$P(12)=39916957$.

Bài 4: Cho dãy số $\{U_n\}$ được xác định bởi công thức

$$U_n=\frac{\left(3+\sqrt{2}\right)^n-\left(3-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$$ (với $n\ge 1$).

a) Tìm công thức U_{n+2} theo U_{n+1} và U_n.

b) Tính tổng 20 số hạng đầu của dãy số trên.

Lời giải

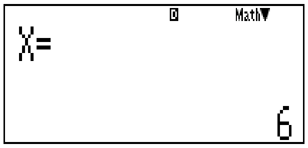
a) Công thức: $U_1=1; U_2=6; U_3=29; U_4=132; U_5=589$.

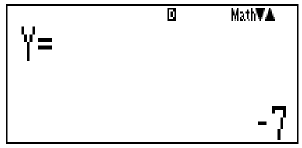
Công thức tổng quát $U_{n+2}=aU_{n+1}+bU_n+c$.

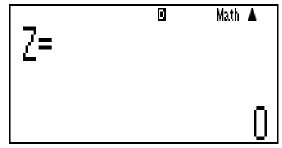
Giải hệ phương trình sau tìm a, b, c.

$$\begin{cases}29=a.6+b.1+c\\132=a.29+b.6+c\\589=a.132+b.29+c\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}6a+b+c=29\\29a+6b+c=132\\132a+29b+c=589\end{cases}$$

Giải hệ phương trình







Suy ra: $a = 6; b = -7; c = 0$.

Vậy công thức: $U_{n+2} = 6U_{n+1} - 7U_n$.

b) $S_{20} = 3606487890600$.

Cách 1. Lập công thức tính tổng trên máy:

$$\sum_{1}^{20} \frac{\left(3+\sqrt{2}\right)^x - \left(3-\sqrt{2}\right)^x}{2\sqrt{2}} = 3,606487891.10^{12}.$$

Cách 2. Theo công thức truy hồi:

Gán $A = 1, B = 6, C = 7$ (tổng), $D = 1$ (biến đếm).

Lập biểu thức trên máy:

$D = D + 1 : A = 6B - 7A : B = 6A - 7B : C = C + A + B$

Khi $D = D + 1 = 10$ thì $C = C + A + B = 3,606487891.10^{12}$.

Lưu ý lấy thêm các chữ số đúng cuối.

$\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{-}$ 3606487890000 $\boxed{=}$ 600

Vậy $S_{20} = 3606487890600$.

Bài 5: Tìm các số nguyên dương x, y $\left(x > y\right)$ sao cho: $x^2 + y^2 = 2025$.

Lời giải

Ta có: $x^2 + y^2 = 2025$ và $x > y$ nên

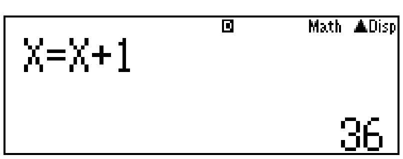
$$\begin{cases} x^2 + x^2 > 2025 \\ x^2 < 2025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > \dfrac{2025}{2} \\ x^2 < 2015 \end{cases} \Leftrightarrow 32 \le x \le 45.$$

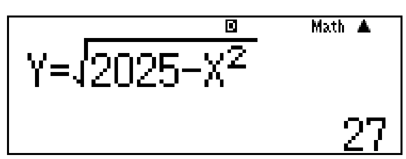
Mặt khác: $x^2 + y^2 = 2015 \Leftrightarrow y = \sqrt{2015 - x^2}$

Khai báo: $31 \to X$.

Ghi vào màn hình: $X = X + 1 : Y = \sqrt{2025 - X^2}$.

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$





Đáp số: $x = 36, y = 27$.

Bài 6: Tìm số tự nhiên n $\left(31258 < n < 49327\right)$ để $17313596-35n$ là lập phương của một số tự nhiên.

Lời giải

Đặt $A=\sqrt[3]{17313596-35n}$. Ta có:

$31258 < n < 49327$ suy ra 15587186 < 17313596- 35n< 16219566 hay

$15587186 < A^3 < 16219566 \Rightarrow 249,7981624 < A < 253,1316265$ hay $250 \le A \le 253$ Vì

$A=\sqrt[3]{17313596-35n} \Rightarrow n=\dfrac{17313596-A^3}{35}$

Cho A chạy từ 250 đến 253 dò tìm được số tự nhiên $n=42867$ ứng với A=251

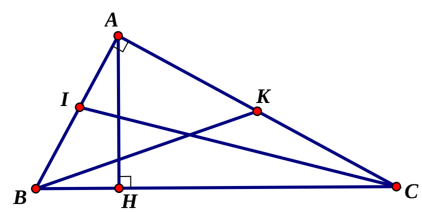
Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $AB=6$ cm, $AC=8$ cm, góc B bằng $53^{0}7'48"$.

a) Tính đường cao AH.

b) Tính độ dài đường phân giác trong CI

c) Tính độ dài đường trung tuyến BK.

Giải



a) Ta có:

$\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{25}{576} \Rightarrow AH=\dfrac{24}{5}.$

b) Ta có:

$CI=\dfrac{CA}{\cos\dfrac{C}{2}}=\dfrac{CA}{\cos\dfrac{90^0-B}{2}}=8,432742938.$

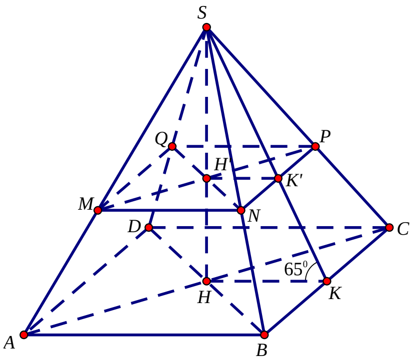
c) Ta có: $BK=\sqrt{AK^2+AB^2}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}.$

Bài 8: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có $BC=20,14cm$, góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy của hình chóp là 65°.

a) Tính diện tích xung quanh của hình chóp S.ABCD.

b) Người ta cắt hình chóp S.ABCD bằng mặt phẳng song song với đáy ABCD sao cho thể tích của hình chóp S.MNPQ (M thuộc SA, N thuộc SB, P thuộc SC, Q thuộc SD) được cắt ra bằng thể tích của hình chóp cụt đều MNPQ.ABCD. Xác định vị trí điểm M trên SA.

Lời giải

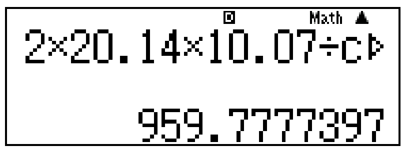


a) Diện tích xung quanh:

$$HK = \frac{BC}{2} = \frac{20,14}{2} = 10,07$$

$$SK = \frac{HK}{\cos 65^\circ} = \frac{10,07}{\cos 65^\circ}$$

$$S_{xq} = 2BC.SK = 959,7777397\,cm^2$$



b) Xác định vị trí điểm M trên SA.

$$SA = SB = \sqrt{SK^2 + BK^2}$$

$$V_{S.MNPQ} = \frac{1}{3}MN.NP.SH'$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}AB.BC.SH$$

$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}MN.NP.SH'}{\frac{1}{3}AB.BC.SH} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{MN}{AB}.\frac{NP}{BC}.\frac{SH'}{SH} = k.k.k = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Do: $\frac{SM}{SA} = k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Suy ra $SM = k.SA = 20,531573732cm$.

Bài 9: Anh Hòa đem gửi tiết kiệm ở một ngân hàng với lãi suất là 12% năm. Biết rằng cứ sau mỗi một quý (3 tháng) thì lãi sẽ được cộng dồn vào vốn gốc. Hỏi sau tối thiểu bao nhiêu năm thì anh Hòa nhận lại được số tiền, bao gồm cả vốn lẫn lãi gấp ba lần số tiền ban đầu.

Lời giải

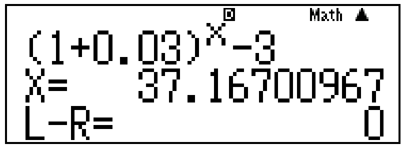
Gọi số tiền anh Hòa gửi là A, lãi suất mỗi quý là 0,03

Sau n quý, tiền anh Hòa nhận được là: $A(1+0,03)^n$

Theo đề ta có:

$A(1+0,03)^n = 3A \Leftrightarrow (1+0,03)^n = 3$

Sử dụng chức năng $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{SOLVE}}$ ta tìm được $n \approx 37,16$



Vậy số năm tối thiểu là xấp xỉ 9,29 năm.

Câu 10: Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}} + \frac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}} + \frac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^2+14zx}}$$

Lời giải

Với x, y, z dương, ta có:

$$8x^2+3y^2+14xy = (9x^2+12xy+4y^2)-(x^2-2xy+y^2)$$
$$= (3x+2y)^2-(x-y)^2 \le (3x+2y)^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{8x^2+3y^2+14xy} \le 3x+2y$$

Tương tự ta có:

$$\sqrt{8y^2+3z^2+14yz} \le 3y+2z$$
$$\sqrt{8z^2+3x^2+14zx} \le 3z+2x$$

Suy ra

$$P = \frac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}} + \frac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}} + \frac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^3+14zx}}$$
$$\ge \frac{x^2}{3x+2y} + \frac{y^2}{3y+2z} + \frac{z^2}{3z+2x} (*)$$

Áp dụng BĐT Cô–si cho hai số không âm, ta có:

$$\frac{x^2}{3x+2y} + \frac{3x+2y}{25} \ge 2\sqrt{\frac{x^2}{3x+2y}.\frac{3x+2y}{25}} = \frac{2x}{5} \Rightarrow \frac{x^2}{3x+2y} \ge \frac{7x-2y}{25}$$

Ta có 2 BĐT tương tự

$$\frac{y^2}{3y+2z} \ge \frac{7y-2z}{25}$$
$$\frac{z^2}{3z+2x} \ge \frac{7z-2x}{25}$$

Cộng từng vế của 3 BĐT trên, ta có

$$\frac{x^2}{3x+2y}+\frac{y^2}{3y+2z}+\frac{z^2}{3z+2x}\geq\frac{x+y+z}{5} \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \dfrac{x^2}{\sqrt{8x^2+3y^2+14xy}}+\dfrac{y^2}{\sqrt{8y^2+3z^2+14yz}}+\dfrac{z^2}{\sqrt{8z^2+3x^2+14zx}}\geq\dfrac{3}{5}$

Do đó: $\text{MinP}=\dfrac{3}{5}$. Dấu bằng xảy ra khi x = y = z = 1.

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 9

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức:

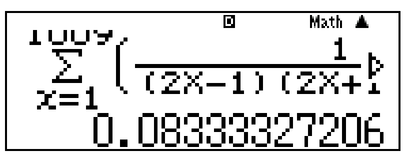
a) $S=\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{5.7.9}+...+\frac{1}{2017.2018.2019}$

b) Tính $T=\frac{2\tan x-3\cot x}{4\tan x+5\cot x}+6\sin^2 x-7\cos^3 x$ biết $\cos x=\frac{3}{4}$.

Lời giải

a) $S=\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{5.7.9}+...+\frac{1}{2017.2018.2019}$

Nhập $\sum_{x=1}^{1006}\frac{1}{(2x-1)(2x+1)(2x+3)}$



Kết quả: $S=0,0833$.

b) Tính $T=\frac{2\tan x-3\cot x}{4\tan x+5\cot x}+6\sin^2 x-7\cos^3 x$ biết $\cos x=\frac{3}{4}$.

Ta có:

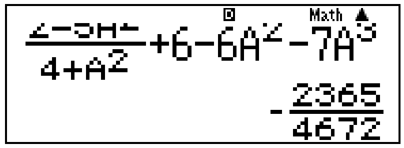
$$T=\frac{2\tan x-3.\frac{1}{\tan x}}{4\tan x+5.\frac{1}{\tan x}}+6\sin^2 x-7\cos^3 x=\frac{2\tan^2 x-3}{4\tan^2 x+5}+6\left(1-\cos^2 x\right)-7\cos^3 x$$

$$=\frac{2\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)-3}{4\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)+5}+6\left(1-\cos^2 x\right)-7\cos^3 x$$

$$=\frac{2-5\cos^2 x}{4+\cos^2 x}+6-6\cos^2 x-7\cos^3 x$$

Từ $\cos x=\frac{3}{4}\to A$

Nhập vào màn hình: $\dfrac{2-5A^2}{4+A^2}+6-6A^2-7A^3$



Kết quả: $T=-\dfrac{2365}{4672}\approx -0,5062$.

Bài 2: Cho tích $M=55..55\times 99..99$ (mỗi thừa số có 12112010 chữ số)

a) M có bao nhiêu chữ số ?

b) Tìm 20 chữ số cuối cùng của hiệu $M-111111111^2$.

Lời giải

Ta có

a)

$$M=\underbrace{55...55}_{12112010\ chu\ so}\times\underbrace{99...99}_{12112010\ chu\ so}=\underbrace{55...55}_{12112010\ chu\ so}\times(\underbrace{1000.....0}_{12112011 chu\ so}-1)$$

$$=\underbrace{55...55}_{12112010\ chu\ so}\ \underbrace{000.....0}_{12112010 chu\ so}-\underbrace{55...55}_{12112010\ chu\ so}$$

$$=\underbrace{55....55}_{12112009\ chu\ so}\ \underbrace{44...44}_{12112010\ chu\ so}\ 5$$ (có **24224020 chữ số**)

b) Có $111111111^2=12345678987654321$

$M-111111111^2=55\ldots5544\ldots44444444444444444445-12345678987654321$ =
……**44 432 098 765 456 790 124** (20 chữ số cuối)

Bài 3: Cho dãy số (u_n) có $\begin{cases}u_1=1;\ u_2=-2;\ u_3=2\\ u_{n+3}=u_{n+2}-\dfrac{1}{2}u_{n+1}+\dfrac{2}{3}u_n\ (n\in\mathbb{N},n\ge 1)\end{cases}$

a) Lập quy trình ấn phím tìm $u_n, S_n\ (n\ge 1)$, trong đó u_n là số hạng thứ n và S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

b) Tính u_{20} và S_{25}.

Lời giải

$$\begin{cases}u_1=1;\ u_2=-2;\ u_3=2\\ u_{n+3}=u_{n+2}-\dfrac{1}{2}u_{n+1}+\dfrac{2}{3}u_n\ (n\in\mathbb{N},n\ge 1)\end{cases}$$

a) Nhập:

$\boxed{3}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{E}}$ {Biến đếm}

$\boxed{2}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{B}}$ { giá trị u_3 }

$\boxed{-2}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{C}}$ { giá trị u_2 }

$\boxed{1}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{D}}$ {giá trị u_1 }

$\boxed{1}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{X}}$ {Biến tổng}

Ghi vào màn hình:

$$E=E+1:A=B-\frac{1}{2}C+\frac{2}{3}D:X=X+A:D=C:C=B:B=A$$

Sau đó ấn phím $\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ liên tục ta được kết quả.

b) Tính U_{20} và S_{25}.

Kết quả: $U_{20}\approx 7,4025; S_{25}\approx 117,3021$.

Bài 4: Một người đàn ông vay vốn ngân hàng với số tiền $100\,000\,000$ vn đồng . Người đó dự định sau 5 năm thì trả hết , để thực hiện trả đủ trong đúng 5 năm thì Ông buộc phải trả đều đặn hàng tháng với số tiền là a vn đồng . Biết lãi suất hàng tháng là $1,2\%$ hàng tháng . Tính số tiền phải trả hàng tháng.

Lời giải

Gọi m,r,T,a lần lượt là số tiền vay ngân hàng , lãi suất hàng tháng , tổng số tiền vay còn lại sau mỗi tháng , số tiền trả đều đặn mỗi tháng .

Sau khi hết tháng thứ nhất $(n=1)$ thì còn lại : $T_1=m(r+1)-a$

Sau khi hết tháng thứ 2 $(n=2)$ thì còn lại :

$$T_2=\left[m(r+1)-a\right](r+1)-a=m(r+1)^2-a(r+1)-a$$
$$=m(r+1)^2-a(r+2)=m(r+1)^2-\frac{a}{r}\left[(r+1)^2-1\right]$$

Sau khi hết tháng thứ 3 $(n=3)$ thì còn :

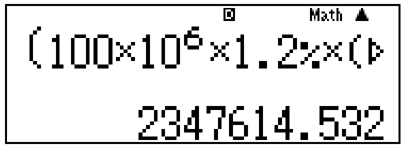
$$T_3=\left[m(r+1)^2-\frac{a}{r}\left[(r+1)^2-1\right]\right](r+1)-a=m(r+1)^3-\frac{a}{r}\left[(r+1)^3-1\right]$$

Tương tự đến : sau khi hết tháng thứ n thì còn lại :

$$T=m(r+1)^n-\frac{a}{r}\left[(r+1)^n-1\right]$$

Áp dụng công thức trên ta có :

$$T_n=0\Leftrightarrow a=\frac{m(r+1)^n r}{(r+1)^n-1}=\frac{100\times 10^6\times 1,2\%\left(\frac{1,2}{100}+1\right)^{60}}{\left(\frac{1,2}{100}+1\right)^{60}-1}$$



Như vậy, mỗi tháng trả gần 2 350 000 (Hai triệu ba trăm năm mươi ngàn)

Bài 5: Cho đa thức $P(x)=2x^4-6x^3+ax^2-7x+3$ và $Q(x)=x^2-x+b$.

a) Xác định a, b (dưới dạng số nguyên hoặc phân số) để đa thức $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$.

b) Với a vừa tìm hãy tính $P\left(\frac{2017}{2018}\right)$.

Lời giải

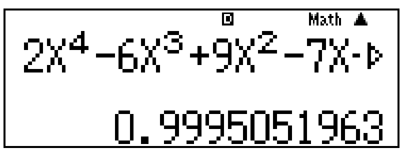
$P(x)=Q(x).\left[2x^2-4x+(a-2b-4)\right]+(a+2b-11)x+3-b(a-2b-4)$

Suy ra: $(a+2b-11)x+3-b(a-2b-4)=0$ với mọi x.

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b-11=0\\3-b(a-2b-4)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=9;b=1\\a=\frac{19}{2};b=\frac{3}{4}\end{array}\right.$

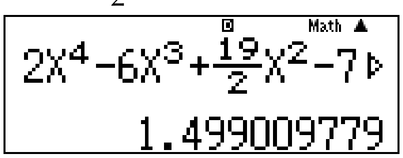
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=9;b=1\\a=\frac{19}{2};b=\frac{3}{4}\end{array}\right.$

- Với $a=9$. Ta có: $P(x)=2x^4-6x^3+9x^2-7x+3$



Vậy $P\left(\frac{2017}{2018}\right)\approx 0,9995$.

- Với $a=\frac{19}{2}$. Ta có: $P(x)=2x^4-6x^3+\frac{19}{2}x^2-7x+3$



Vậy $P\left(\frac{2017}{2018}\right)\approx 1,4990$.

Bài 6: : Giải phương trình: $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=15$.

Lời giải

Với $x\neq -1$, phương trình đã cho tương đương với:

$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2+2.\frac{x^2}{x+1}-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x^2}{x+1}=3\\\frac{x^2}{x+1}=-5\text{ (vô nghiệm)}\end{array}\right.$

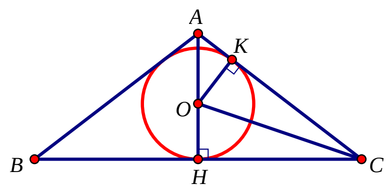
- TH 1: $\dfrac{x^2}{x+1}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\approx 3,7913 \\ x_2=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\approx -0,7913 \end{array}\right.$
- TH 2: $\dfrac{x^2}{x+1}=-5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3=\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}\approx -1,3820 \\ x_4=\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}\approx -03,6180 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x_1\approx 3,7913;\ x_2\approx -0,7913;\ x_3\approx -1,3820;\ x_4\approx -03,6180$.

Bài 7: Cho tam giác ABC cân tại A, có góc $\widehat{BAC}=120^\circ$, chiều cao vẽ từ A là h_a, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC sao cho $h_a=r+5$. Tính cạnh BC.

Lời giải

Gọi H và K lần lượt là các tiếp điểm của BC, AC với đường tròn (O).



Ta có:

$r=AO.\sin\widehat{OAC}=5.\sin\widehat{OAC}$

$=5.\sin 60^0=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

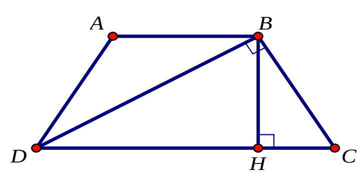
$HC=r.\cot\widehat{OCH}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}.\cot 15^0$

Suy ra: $BC=2.HC=2.\dfrac{5\sqrt{3}}{2}.\cot 15^\circ=15+10\sqrt{3}\approx 32,3205$

Bài 8: Cho hình thang cân ABCD có $AB /\!/ CD,\ AB<CD$, đường chéo BD vuông góc với cạnh bên BC, $AB=7cm$, kẻ $BH\perp CD$ (H thuộc cạnh CD), $BH=5cm$. Tính góc $\widehat{BCD}$ (kết quả lấy gần đúng theo độ, phút, giây).

Lời giải

Đặt $\widehat{BCD}=\alpha$.

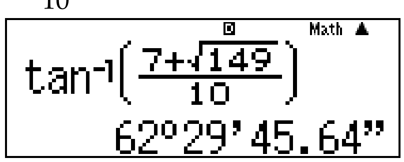


Do $\widehat{BCD}=\widehat{DBH}$ nên $CH=5.\cot\alpha$; $DH=5.\tan\alpha$.

Do $DH-CH=7$. Suy ra:

$5\tan\alpha-5\cot\alpha=7$

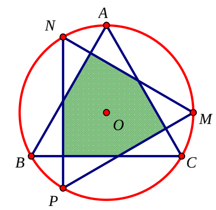
$5\tan^2\alpha-7\tan\alpha-5=0\Rightarrow \tan\alpha=\dfrac{7+\sqrt{149}}{10}$ (vì α nhọn).



Vậy $\widehat{BCD}\approx 62^\circ 29'46''$.

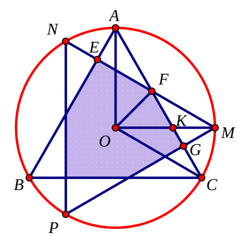
Bài 9:

Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính $R=1$, quay tam giác ABC quanh tâm O một góc 90° theo chiều kim đồng hồ ta được tam giác MNP, (xem hình vẽ). Tính diện tích phần chung giữa tam giác ABC và tam giác MNP (phần tô màu đen).



Lời giải

Gọi S là diện tích hình tô đậm.



$S = S_{ABC} - 3S_{AEF}$

$AC = \sqrt{3}$

$AF = \sqrt{3} - 1;\ AE = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$S_{ABC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}2990$

$S_{AEF} = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{4} \approx 0{,}1160$

Vậy $S = \dfrac{9-3\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}9510$.

Bài 10: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\sqrt{2a^2+ab+2b^2}+\sqrt{2b^2+bc+2c^2}+\sqrt{2c^2+ca+2a^2}$

Lời giải

Với a,b,c là các số dương to $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$

Cách giải 1

Ta có

$$\sqrt{2a^2+ab+2b^2}=\sqrt{\frac{5}{4}(a+b)^2+\frac{3}{4}(a-b)^2}\ge\sqrt{\frac{5}{4}(a+b)^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi a =b

Hay $\sqrt{2a^2+ab+2b^2}\ge\dfrac{\sqrt{5}}{2}(a+b)$

Tương tự : $\sqrt{2b^2+bc+2c^2}\ge\dfrac{\sqrt{5}}{2}(b+c)$. Dấu "=" xảy ra khi $c=b$

$\sqrt{2c^2+ca+2a^2}\ge\dfrac{\sqrt{5}}{2}(c+a)$. Dấu "=" xảy ra khi $a=c$

Suy ra

$$P=\sqrt{2a^2+ab+2b^2}+\sqrt{2b^2+bc+2c^2}+\sqrt{2c^2+ca+2a^2}\ \ge\sqrt{5}(a+b+c)$$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có :

$$(1^2+1^2+1^2)[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2]\ge(1.\sqrt{a}+1.\sqrt{b}+1.\sqrt{c})^2=1$$

Do đó $a+b+c\ge\dfrac{1}{3}\Rightarrow P\ge\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a>0;b>0;c>0 \\ a=b=c \\ \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{9}$

Vậy MinP = $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{9}$

Cách giải 2

Ta chứng minh bất đẳng thức: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ (*) dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$

Thật vậy:

$(*) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \ge (a+c)^2+(b+d)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \ge ac+bd$

$\Leftrightarrow (a^2+b^2)(c^2+d^2) \ge (ac+bd)^2$

$\Leftrightarrow (ad-bc)^2 \ge 0(luon$ dung)

$$\Rightarrow \frac{P}{\sqrt{2}} = \sqrt{\left(a+\frac{b}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}b}{4}\right)^2}+\sqrt{\left(\text{b}+\frac{c}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}c}{4}\right)^2}+\sqrt{\left(\text{c}+\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}a}{4}\right)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$\frac{P}{\sqrt{2}} \ge \sqrt{(a+\frac{b}{4}+b+\frac{c}{4})^2+(\frac{\sqrt{15}b}{4}+\frac{\sqrt{15}c}{4})^2}+\sqrt{(c+\frac{a}{4})^2+(\frac{\sqrt{15}a}{4})^2}$$

$$\ge \sqrt{(\text{a}+\frac{b}{4}+b+\frac{c}{4}+c+\frac{a}{4})^2+(\frac{\sqrt{15}b}{4}+\frac{\sqrt{15}c}{4}+\frac{\sqrt{15}a}{4})^2} = \sqrt{\frac{5}{2}(a+b+c)^2}$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Bunhia ta có

$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \le (1+1+1)(\text{a}+\text{b}+\text{c}) <=> \text{a}+\text{b}+\text{c} \ge \dfrac{1}{3}$

dấu = khi a = b = c

Do đó

$$\frac{P}{\sqrt{2}} \ge \sqrt{\frac{5}{2}(a+b+c)^2} \ge \sqrt{\frac{5}{2}.\frac{1}{9}} \Rightarrow P \ge \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Dấu "=" khi a = b = c = 1/9

Cách giải 3

Ta có: $2a^2+ab+2b^2=2(a+b)^2-3ab$

Mà $ab \le \dfrac{(a+b)^2}{4}$

Nên

$2a^2+ab+2b^2=2(a+b)^2-3ab\ge 2(a+b)^2-\frac{3}{4}(a+b)^2=\frac{5}{4}(a+b)^2$

$=> \sqrt{2a^2+ab+2b^2}\ge \frac{\sqrt{5}}{2}(a+b)$

$TT:\ \sqrt{2b^2+bc+2c^2}\ge \frac{\sqrt{5}}{2}(\mathrm{b}+c)$

$\sqrt{2c^2+ca+2a^2}\ge \frac{\sqrt{5}}{2}(\mathrm{c}+a)$

Do đó $P\ge \sqrt{5}(a+b+c)$

Mặt khác ta có

$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$

$\Leftrightarrow 3(x^2+y^2+z^2)\ge x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

$\Leftrightarrow 3(x^2+y^2+z^2)\ge (x+y+z)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge \frac{1}{3}(x+y+z)^2$

Áp dụng bất đẳng thức ta có:

$a+b+c\ge \frac{1}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=\frac{1}{3}$

=> MinP = $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Dấu “=” khi $a=b=c=\frac{1}{9}$

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 10

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức: $B=\dfrac{x^{32}+x^{31}+x^{30}+...+x+1}{x^{10}+x^{9}+x^{8}+...+x+1}$ khi $x=2$.

Lời giải

$$B=\frac{(x-1)(x^{32}+x^{31}+x^{30}+...+x+1)}{(x-1)(x^{10}+x^{9}+x^{8}+...+x+1)}$$

$$=\frac{x^{32}-1}{x^{11}-1}=\frac{(x^{11}-1)(x^{22}+x^{11}+1)}{x^{11}-1}=x^{22}+x^{11}+1$$

Khi $x=2$ ta có $B=2^{22}+2^{11}+1=4196353$.

Bài 2: Tìm tất cả các giá trị của x, y, z sao cho:

$$2014\sqrt{x}+2015\sqrt{y-z}+2016\sqrt{z-x}=\frac{1}{2}(y+12180677)\ \text{(với } y\ge z\ge x\ge 0\text{)}$$

Lời giải

$$2014\sqrt{x}+2015\sqrt{y-z}+2016\sqrt{z-x}=\frac{1}{2}(y+12180677)$$

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge z\\ z\ge x\end{cases}$. Phương trình đã cho trở thành

$$2.2014\sqrt{x}+2.2015\sqrt{y-z}+2.2016\sqrt{z-x}=x+y-z+z-x+12180677$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{x}-2014)^2+(\sqrt{y-z}-2015)^2+(\sqrt{z-x}-2016)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=2014\\ \sqrt{y-z}=2015\\ \sqrt{z-x}=2016\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2014^2\\ y-z=2015^2\\ z-x=2016^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4056196\\ y=12180677\\ z=8120452\end{cases}$$

Bài 3: Chứng tỏ rằng số $D=0,7.\left(2014^{12^{11}}-2^{2012}\right)$ là một số nguyên.

Lời giải

Ta có: 12^{11} là một số chẵn $\Rightarrow 12^{11}=2n\ (n\in\mathbb{N})$.

$\Rightarrow 2014^{12^{11}}=2014^{2n}=4056196^{n}$ có tận cùng là 6.

$2^{2012}=2^{4.503}=\left(2^{4}\right)^{503}=16^{503}$ có chữ số tận cùng là 6.

$\Rightarrow 2014^{12^{11}}-2^{2012}$ có chữ số tận cùng là 0.

$\Rightarrow D=0,7.\left(2014^{12^{11}}-2^{2012}\right)$ là một số nguyên.

Bài 4: Cho dãy số sắp thứ tự với $U_1=0, U_2=1$ và từ U_3 trở đi được tính theo công thức: $U_{n+1}=\left(U_n\right)^2+\left(U_{n-1}\right)^2$.

a) Viết quy trình bấm phím liên tục để tính giá trị U_n.

b) Sử dụng quy trình bấm phím trên tính U_7, U_8, U_9.

Lời giải

$U_{n+1}=\left(U_n\right)^2+\left(U_{n-1}\right)^2=\left(U_{n-1}\right)^2+\left(U_n\right)^2$ với $U_1=0, U_2=1$

a) Khai báo ban đầu:

$2\to D$; $0\to A$; $1\to B$

Ghi vào màn hình: $D=D+1:C=A^2+B^2:A=B:B=C$.

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$

Kết quả: $U_7=866; U_8=750797; U_9=563696885165$.

Bài 5: Cho $x^{100}+y^{100}=12,18; x^{200}+y^{200}=74,945$. Tính $x^{400}+y^{400}$.

Lời giải

Đặt $x^{100}=a, y^{100}=b$.

Ta có: $a+b=12,18; a^2+b^2=74,945$.

$\Rightarrow (a+b)^2=12,18^2$

$\Rightarrow a^2+2ab+b^2=12,18^2$

$\Rightarrow ab=\left(12,18^2-74,945\right):2$

Khi đó: $x^{400}+y^{400}=a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2(ab)^2$

Kết quả: $2922,42984$.

Bài 6: Với số tiền $80\ 000\ 000$ đồng hiện có , một người lấy một nửa số tiền đó tiền hiện giử tiếp kiện vào ngân hàng A với lãi suất $4,8\%$ một năm . Còn một nửa thì giử vào ngân hàng B với lãi suất $0,4\%$ một tháng . Hỏi sau 36 tháng người đó đồng thời đi rút tiền trong 2 ngân hàng thì ngân hàng nào sẽ trả cả vốn lẫn lãi nhiều nhất và số tiền T là bao nhiêu?

Lời giải

- Ngân hàng A :

$$T=m\left(r+1\right)^{n}=40.10^{6}\left(\frac{4,8}{100}+1\right)^{\frac{36}{12}}=40.10^{6}\left(\frac{4,8}{100}+1\right)^{3}\approx 46040904 \text{ đồng}$$

- Ngân hàng B : $T=m\left(r+1\right)^{n}=40.10^{6}\left(\frac{0,4}{100}+1\right)^{36}\approx 46182097$ đồng .

Vậy ngân hàng B cao hơn và số tiền cả vốn lẫn lại là 46182097 .

Bài 7: Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 180 mét thẳng hàng rào. Ở đó người ta tận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào và rào thành mảnh đất hình chữ nhật. Hỏi mảnh đất hình chữ nhật được rào có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi x là chiều dài cạnh song song với bờ giậu và y là chiều dài cạnh vuông góc với bờ giậu, theo bài ra ta có $x+2y=180$. Diện tích của miếng đất là $S=y(180-2y)$.

Ta có: $y(180-2y)=\frac{1}{2}\cdot 2y(180-2y)\le \frac{1}{2}\cdot\frac{(2y+180-2y)^2}{4}=\frac{180^2}{8}=4050$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow 2y=180-2y\Leftrightarrow y=45m$.

Vậy $S_{max}=4050m^2$ khi $x=90m, y=45m$.

Bài 8: Cho tam giác ABC có 3 cạnh AB, AC, BC tỉ lệ với các số $3;4;5$ và diện tích là 2400cm^2 . Tính độ dài các cạnh của tam giác đó.

Lời giải

Gọi độ dài cạnh AB, AC, BC lần lượt là a, b, c.

Ta có: $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=k\ \left(k>0\right)$

$\Rightarrow a=3k, b=4k, c=5k$.

Nửa chu vi là $p=6k$.

Áp dụng công thức Hê rông, ta có: $S=\sqrt{6k.3k.2k.k}=2400$

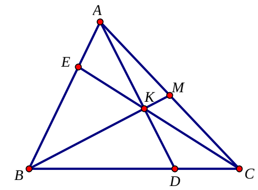
$\Rightarrow 6k^2=2400\Rightarrow k=20$.

Suy ra giá trị của a, b, c.

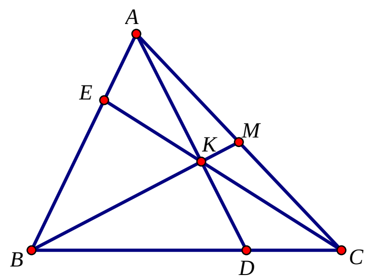
Kết quả: $AB=60cm, AC=80cm, BC=100cm$.

Bài 9:

Cho tam giác ABC (hình vẽ), biết M là trung điểm của cạnh AC và các đường thẳng AD, BM, CE đồng quy tại K. Giả sử hai tam giác AKE và BKE có diện tích lần lượt là $3,41945\text{cm}^2$ và $6,83890\text{cm}^2$. Tính diện tích tam giác ABC.



Lời giải



Vì M là trung điểm cạnh AC nên $S_{ABM} = S_{CBM}$ và $S_{AKM} = S_{CKM}$.

Suy ra: $S_{BKC} = S_{BKA} = 10,25835\left(\text{cm}^2\right)$

Mặt khác: $\dfrac{S_{AKE}}{S_{BKE}} = \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{3,41945}{6,83890} = \dfrac{1}{2}$

(Hai tam giác có cùng đường cao xuất phát từ K).

Lại có: $\dfrac{S_{ACE}}{S_{BCE}} = \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{1}{2}$ (Hai tam giác có cùng đường cao xuất phát từ C)

Suy ra $S_{ACE} = \dfrac{1}{2}S_{BCE} = \dfrac{1}{2}\left(6,83890 + 10,25835\right) \approx 8,54863\left(\text{cm}^2\right)$

Vậy $S_{ABC} = S_{ACE} + S_{BCE} \approx 25,64588\left(\text{cm}^2\right)$.

Bài 10: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho M và N là hai điểm phân biệt, di động lần lượt trên trục hoành và trên trục tung sao cho đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định $I(1;2)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hoành độ của M và tung độ của N; từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{ON^2}$.

Lời giải

Đặt $m = x_M$ và $n = y_N \Rightarrow m.n \neq 0$ và $m \neq 1; n \neq 2$ (*)

Đường thẳng qua ba điểm M, I, N có dạng: $y = ax + b$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 = am + b \\ 2 = a + b \\ n = b \end{cases} \Rightarrow$ hệ thức liên hệ giữa m và n là: $2m + n = mn$.

Chia hai vế cho $m.n \neq 0$ ta được: $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 1$ (**)

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right)^2 = \frac{1}{m^2} + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{mn} = 5\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right) - \left(\frac{2}{m} - \frac{1}{n}\right)^2$$

$\Rightarrow Q = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{5}$; dấu "=" xảy ra khi $\frac{2}{m} = \frac{1}{n}$.

Kết hợp (**): $m = 5,\ n = 2,5$ (thỏa (*)).

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{1}{5}$.

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 11

Bài 1: Cho $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} ... + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

Tìm n là số tự nhiên không vượt quá 100 sao cho giá trị của S_n là một số nguyên.

Lời giải

Ta có

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} ... + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$= \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+...+\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = -1+\sqrt{n+1}$$

Khai báo: $0 \to D$ {biến đếm};

Ghi vào màn hình: $D = D+1 : A = -1+\sqrt{D+1}$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$ cho đến khi $D = 99$

Tìm được n ∈ {3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99}

Bài 2: Tìm số dư khi chia số $19^{2008} + 7^{2008}$ cho số 27.

Lời giải

Ta có:

* $19^3 \equiv 1 \pmod{27}$

$2008 = 3 \times 669 + 1$

$\Rightarrow 19^{2008} = (19^3)^{669} \text{ x } 19 \equiv 1^{669} \text{ x } 19 \equiv 19 \pmod{27}$

* $7^9 \equiv 1 \pmod{27}$

$2008 = 9 \times 223 + 1$

$7^{2008} = \left(7^9\right)^{2008} \times 71 \times 77 \pmod{27}$

Vậy $19^{2008} + 7^{2008} \equiv 19 + 7 \equiv 26 \pmod{27}$

Kết quả : **26.**

Bài 3: Cho dãy số xác định bởi công thức: $x_1 = 0{,}25$, $x_{n+1} = \dfrac{4x_n^2 + 2013}{x_n^2 + 1}$

a) Viết qui trình ấn phím tính x_n.

b) Tính x_2; x_4; x_6; x_8; x_{10}.

Lời giải

Ta có: $x_1 = 0{,}25$ **,** $x_{n+1} = \dfrac{4x_n^2 + 2013}{x_n^2 + 1}$

a) Khai báo:

$0{,}25 \to A$ {giá trị u_1 }; $1 \to D$ {biến đếm}

Ghi vào màn hình: $D = D + 1 : A = \dfrac{4A^2 + 2013}{A^2 + 1}$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$

b) Kết quả:

$x_2 = 1894{,}8235$

$x_4 = 112{,}1453$

$x_6 = 115{,}0232$

$x_8 = 114{,}1561$

$x_{10} = 114{,}0401$

Bài 4 : Tìm chữ số thập phân thứ 2510^{2008} sau dấu phẩy trong phép chia $\dfrac{1}{23}$.

Lời giải

Ta có : $\dfrac{1}{23} = 0{,}(043\ \ 478\ \ 260\ \ 869\ \ 565\ \ 217\ \ 391\ \ 3)$

Vậy $\dfrac{1}{23}$ là số thập phân vô hạn tuần hoàn có chiều dài chu kì là 22.

*$2510 \equiv 2 \pmod{22}$

$\Rightarrow 2510^{2008} \equiv 2^{2008}$ (mod 22)

$2^{21} \equiv 2$ (mod 22) $\Rightarrow$ $(2^{21})^{21} = 2^{441} \equiv 2^{21} \equiv 2$ (mod 22)

$\Rightarrow 2^{2008} = (2^{441})^4 \times (2^{21})^{11} \times 2^{13} .. 2^4 \times 2^{11} \times 2^{13} \equiv 2^{28} \equiv 2^{21} \times 2^7 \equiv 2 \times 2^7 \equiv 2^8 \equiv 256 \equiv 14$ (mod 22)

Vậy chữ số thập phân thứ 2510^{2008} sau dấu phẩy trong phép chia $\frac{1}{23}$ chính là chữ số thứ 14 trong chu kì tuần hoàn và là chữ số 6.

Bài 5 : Cho đa thức $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 7x + 2010$

a) Tính giá trị của f(x) tại $2; -\frac{1}{2}; \sqrt{2}; \sqrt[3]{5}; \sqrt{7+4\sqrt{3}}; \sqrt{7-4\sqrt{3}}$

(làm tròn đến 0,00001)

b) Chứng minh rằng f(x) $\vdots$ 15, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

a) Ta có

f(2)	$f(-\frac{1}{2})$	$f(\sqrt{2})$	$f(\sqrt[3]{5})$	$f(\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}})$
2160	2005,78125	2051,01219	2090,8301	5430

b) Ta có

* 2010 $\vdots$ 15

*

$$3x^5 + 5x^3 + 7x = x\left(3x^4 + 5x^2 + 7\right)$$
$$= x\left(3x^4 - 3 + 5x^2 - 5 + 15\right) = x\left(x^2 - 1\right)\left(3x^2 + 8\right) + 15x$$

*

$$x\left(x^2 - 1\right)\left(3x^2 + 8\right) = x\left(x^2 - 1\right)\left(3x^2 - 12 + 20\right)$$
$$= 3x\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 4\right) + 20x\left(x^2 - 1\right)$$
$$= 3(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2) + 20(x-1)x(x+1)$$

Ta có $(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2) \vdots 5$ nên $3(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2) \vdots 15$

Lại có $(x-1)x(x+1) \vdots 3$ nên $20(x-1)x(x+1) \vdots 60 \Rightarrow 20(x-1)x(x+1) \vdots 15$

Vậy các số hạng của f(x) đều chia hết cho 15 nên f(x) chia hết cho 15

Bài 6 : Tìm cặp số (x, y) nguyên dương với y nhỏ nhất thỏa mãn phương trình : $\left(x^3 - y\right)^2 + 5y = 260110$

Lời giải

Ta có

$$\left(x^3 - y\right)^2 + 5y = 260110 \Leftrightarrow \left(x^3 - y\right)^2 = 260110 - 5y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 - y = \sqrt{260110 - 5y} \\ x^3 - y = -\sqrt{260110 - 5y} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt[3]{y + \sqrt{260110 - 5y}} \\ x = \sqrt[3]{y - \sqrt{260110 - 5y}} \end{array}\right.$$

Khai báo: $0 \to Y$.

Ghi vào màn hình:

$$Y = Y + 1 : B = \sqrt[3]{Y + \sqrt{260110 - 5Y}} : C = \sqrt[3]{Y - \sqrt{260110 - 5Y}}$$

Ấn $\boxed{\text{CACL}}$ và lặp phím $\boxed{=}$ ta được: $Y = 2, B = 8$.

Vậy $\left(x, y\right) = \left(8; 2\right)$

Bài 7: Người ta đặt một vòi nước chảy vào bể nước và một vòi chảy ra ở lưng chừng bể. Khi bể cạn, nếu mở cả hai vòi thì sau 2 giờ 42 phút bể đầy nước, còn nếu đóng vòi chảy ra mở vòi chảy vào thì sau 1 giờ rưỡi đầy bể. Biết vòi chảy vào chảy mạnh gấp 2 lần vòi chảy ra và chiều cao bể là 2,5m. Trình bày lời giải tính khoảng cách h từ chỗ đặt vòi chảy ra đến đáy bể.

Lời giải

Đổi: 2giờ 42 phút = 2,7 giờ

Gọi thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc mức nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra là x giờ.

Trong 1 giờ vòi chảy vào được: $\frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$ bể

Trong 1 giờ vòi chảy ra được: $\frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$ bể

Nếu mở cả hai vòi, lượng nước chảy vào bể trong 1 giờ được:

$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ bể

Trong x giờ đầu, chỉ có vòi chảy vào làm việc nên lượng nước chảy vào bể là $\frac{2}{3}x$ bể.

Trong $(2,7 - x)$ giờ còn lại cả hai vòi làm việc nên lượng nước chảy vào bể là $\frac{1}{3}(2,7 - x)$

Ta có phương trình: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(2{,}7 - x) = 1$

Do đó x = 0,3. Thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc mực nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra là 0,3 giờ.

Theo đề bài, nếu riêng vòi chảy vào làm việc trong 1,5 giờ thì mực nước cao 2,5m. Vậy nếu riêng vòi chảy vào làm việc trong 0,3 giờ thì mực nước cao $\frac{2{,}5 \times 0{,}3}{1{,}5} = 0{,}5$

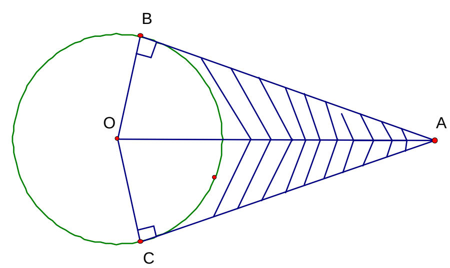
Khoảng cách từ chỗ đặt vòi chảy ra đến đáy bể là h = 0,5m.

Bài 8: Cho đường tròn tâm O bán kính R = 3,15cm. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến AB và AC (B và C thuộc đường tròn (O)). Cho biết OA = a = 7,85cm.

a) Tính góc BOC ?

b) Tính diện tích S của phần mặt phẳng giới hạn bởi hai tiếp tuyến AB, AC và cung nhỏ BC.

Lời giải



a) Đặt góc $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{BOA}$.

Khi đó tam giác vuông AOB cho:

$\cos\alpha = \cos\widehat{BOA} = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{a} = \frac{3{,}15}{7{,}85}$

$\Rightarrow \alpha = 66^0 20' 31.78''$

Suy ra: $\widehat{BOC} = 2\alpha = 132^0 41' 3.56''$.

b) Diện tích phần gạch chéo: $S = 2.S_{BOA} - S_{quatBOC} = aR\sin\alpha - \frac{\pi R^2\alpha}{180}$

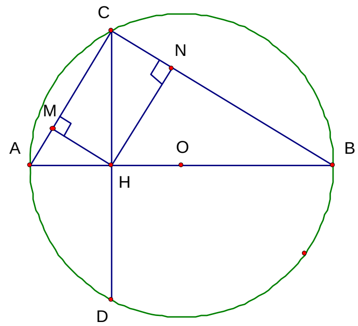
$S_{cheo} = 11{,}16019935 cm^2$

Bài 9 : Cho đường tròn tâm O , đường kính AB = 13 cm . Dây CD có độ dài 12 cm vuông góc với AB tại H.

a) Tính độ dài HA, HB.

b) Gọi M, N thứ tự là hình chiếu của H trên AC, BC. Tính diện tích tứ giác CMHN.

Lời giải



a) Đường kính AB vuông góc dây CD nên: CH = $\frac{CD}{2} = 6cm$ (Giả sử HA < HB)

Áp dụng định lý Pitago tính được

OH = 2,5cm

Do đó: HB = 9cm, HA = 4cm.

b) Ta có: $S_{CMHN} = HM.HN$

Ta lại có:

$$HM.AC = HA.HC\left(= 2S_{AHC}\right) \Rightarrow HM = \frac{HA.HC}{AC}$$

$$HN.BC = HB.HC \Rightarrow HN = \frac{HB.HC}{BC}$$

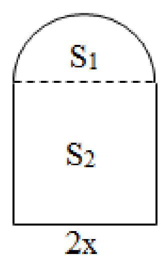
Do đó: $S_{CMHN} = \frac{HA.HC}{AC}.\frac{HB.HC}{BC}$

Nhưng: $HA.HB = HC^2, AC.BC = AB.HC$ nên

$$S_{CMHN} = \frac{HC^4}{AB.HC} = \frac{HC^3}{AB} = 16,61538462cm^2$$

Bài 10 :

Cần phải làm cái cửa sổ mà, phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là $a(m)$ (a chính là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi độ dài cạnh hình chữ nhật là dây cung của hình bán nguyệt). Hãy xác định các kích thước của nó để diện tích cửa sổ là lớn nhất?



Lời giải

Gọi x là bán kính của hình bán nguyệt. Ta có chu vi của hình bán nguyệt là πx, tổng ba cạnh của hình chữ nhật là $a - \pi x$. Diện tích cửa sổ là:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi x^2}{2} + 2x\frac{a - \pi x - 2x}{2} = ax - (\frac{\pi}{2} + 2)x^2 = (\frac{\pi}{2} + 2)x(\frac{a}{\frac{\pi}{2} + 2} - x).$$

Dễ thấy S lớn nhất khi $x = \frac{a}{\frac{\pi}{2} + 2} - x$ hay $x = \frac{a}{4 + \pi}$.

Vậy để S_{max} thì các kích thước của nó là: chiều cao bằng $\frac{a}{4+\pi}$; chiều rộng bằng $\frac{2a}{4+\pi}$

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG
CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA
KHỐI THCS
****
MÔN: MTCT LỚP 9
(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 12

Bài 1: Tính tỉ số của A và B biết

$$A=\frac{1}{1.1981}+\frac{1}{2.1982}+...+\frac{1}{n(1980+n)}+...+\frac{1}{25.2005}$$

$$B=\frac{1}{1.26}+\frac{1}{2.27}+...+\frac{1}{m(25+m)}+...+\frac{1}{1980.2005}.$$

Trong đó A có 25 số hạng, B có 1980 số hạng.

Lời giải

Tính được

$$A=\frac{1}{1980}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{25}\right)-\left(\frac{1}{1981}+\frac{1}{1982}+...+\frac{1}{2005}\right)\right]$$

$$B=\frac{1}{25}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{25}\right)-\left(\frac{1}{1981}+\frac{1}{1982}+...+\frac{1}{2005}\right)\right]$$

Suy ra $\frac{A}{B}=\frac{25}{1980}\approx 0.0126$

Bài 2: Cho biểu thức $F(a,b)=a^2+8b^2-6ab+14a-40b+48$, tìm các số nguyên a và b để $F(a,b)=3$.

Lời giải

Dùng máy tính cầm tay phân tích được:

$a^2+8b^2-6ab+14a-40b+48=(a-4b+8)(a-2b+6)$

Do a, b nguyên và $3=3.1=1.3=(-1).(-3)=(-3).(-1)$ nên suy ra:

$$\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\vee\begin{cases}a=-5\\b=0\end{cases}\vee\begin{cases}a=-9\\b=0\end{cases}\vee\begin{cases}a=-3\\b=2\end{cases}$$

Bài 3: Tìm tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện sau:

- Số tạo thành bởi 2 chữ số cuối lớn hơn số tạo thành bởi 2 chữ số đầu là 5 đơn vị.
- Số cần tìm là số chính phương.

Lời giải

Số cần tìm có dạng: $\overline{abab}+5$, đặt $\overline{ab}=x$ thì:

$101x+5=n^2 \quad (1) \qquad (n\in\mathbb{N}; 10\le x\le 94)$

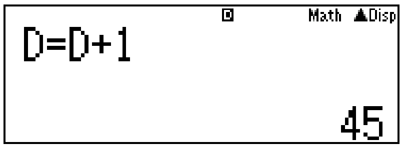
$x\ge 10\Rightarrow n\ge 32$. Tương tự $x\le 94\Rightarrow n\le 97$.

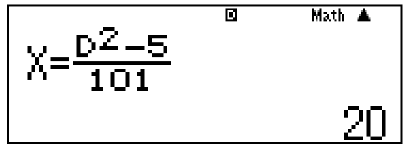
Từ (1) suy ra $x=\dfrac{n^2-5}{101}, (32\le n\le 97)$

Khai bào: $31\to D$

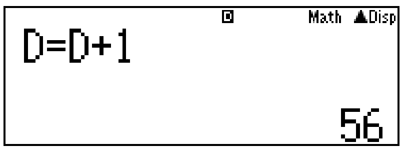
Ghi vào màn hình: $D=D+1:X=\dfrac{D^2-5}{101}$

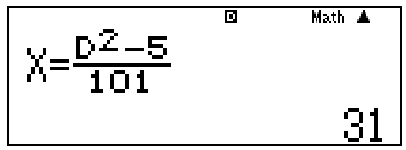
Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$





Như vậy ta được số thứ nhất là 2025





Như vậy ta được số thứ hai là 3136.

Bài 4: Cho đa thức $f(x)=x^4+2x^3-11x^2-14x+28$, $p(x)=2x^2-50$, biết phương trình $f(x)=0$ có các nghiệm là x_1, x_2, x_3, x_4. Tính chính xác giá trị $B=p(x_1)\times p(x_2)\times p(x_3)\times p(x_4)$.

Lời giải

Theo giải thiết đề bài ta có:

$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$, $p(x)=2(x-5)(x+5)$

Ta có: $B=2^4(x_1-5)(x_2-5)(x_3-5)(x_4-5)(x_1+5)(x_2+5)(x_3+5)(x_4+5)$

$=2^4 f(5)f(-5)$

Suy ra: $B=1767744$.

Bài 5: Anh Nam mong muốn rằng sau 6 năm sẽ có 2 tỷ để mua nhà. Hỏi anh Nam phải gửi vào ngân hàng một khoản tiền tiền tiết kiệm như nhau hàng năm gần nhất với giá trị nào sau đây, biết rằng lãi suất của ngân hàng là 8% /năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn.

Lời giải

Gọi a là số tiền gửi hàng tháng, m là lãi suất, n là số tháng

Cuối năm thứ I: $T_1=a+a.m=a(1+m)$

Đầu năm thứ II:

$$T_2=a(1+m)+a=a\left[(1+m)+1\right]=\frac{a}{\left[(1+m)-1\right]}\left[(1+m)^2-1\right]=\frac{a}{m}\left[(1+m)^2-1\right]$$

Cuối năm thứ II:

$$T_3=\frac{a}{m}\left[(1+m)^2-1\right]+\frac{a}{m}\left[(1+m)^2-1\right].m=\frac{a}{m}\left[(1+m)^2-1\right].(1+m)$$

Suy ra cuối năm thứ n:

$$T_n = \frac{a}{m}\left[(1+m)^n - 1\right].(1+m) \Rightarrow a = \frac{T_n \times m}{(1+m)\left[(1+m)^n - 1\right]}$$

Áp dụng: $T = 2\times 10^9; n = 6; m = 0,08 \Rightarrow a \approx 252,5$ triệu

Bài 6: Cho dãy số $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} - 2\ (n \ge 3)$ với $u_1 = 3;\ u_2 = 5$.

a) Lập quy trình ấn phím liên tục tính $u_{17};\ u_{18};u_{19};u_{20}$.

b) Tính u_{2018}.

c) Tính tổng của 2018 số hạng đầu tiên của dãy.

Lời giải

a) $2 \to D$ {biến đếm}; $3 \to A$ {Giá trị u_1 }; $5 \to B$ {Giá trị u_2 }

Ghi vào màn hình:

$D = D+1 : A = 3B - 2A - 2 : D = D+1 : B = 3A - 2B - 2$

Ấn $\boxed{\text{CACL}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$

Ta tìm được các giá trị của $u_{17} = 35;\ u_{18} = 37; u_{19} = 39; u_{20} = 41$.

b) Ta có

$u_1 = 3;$

$u_2 = 3 + 2.1;$

$u_3 = 3 + 2.2;$

$u_4 = 3 + 2.3;$

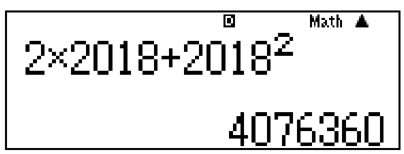
…

$u_n = 3 + 2.(n-1)$

Do đó: $u_{2018} = 3 + 2.2017 = 4037$.

c) Ta có:

$S_n = 3n + 2.\left[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)\right] = 3n + n(n-1) = 2n + n^2$



$\Rightarrow S_{2018} = 4076360$.

Bài 7: Giải phương trình $\left(\frac{8x^3 + 2001}{2002}\right)^3 = 4004x - 2001$.

Lời giải

Đặt t =2x; b=2001, phương trình đã cho tương đương với phương trình

$\left(\frac{t^3 + b}{b+1}\right)^3 = (b+1)t - b$ (*) . Đặt $y = \left(\frac{t^3 + b}{b+1}\right)$ từ (*) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 - (b+1)t + b = 0 \ (1) \\ t^3 - (b+1)y + b = 0 \ (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế (1) và (2) ta được

$y^3 - t^3 + (b+1)(y - t) = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2 + yt + t^2 + b + 1) = 0$ (**)

Mà: $y^2+yt+t^2+b+1=\left(y+\frac{t}{2}\right)^2+\frac{3t^2}{4}+b+1>0$ (Vì $b=1=2002>0$)

Từ (**) suy ra y = t, thay vào (3) ta được pt: $t^3-2002t+2001=0$

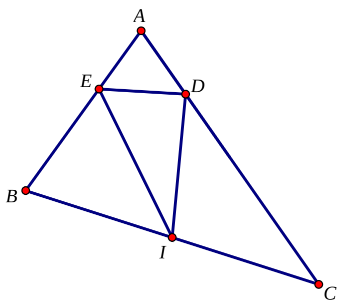
Nhập vào máy giải phương trình bậc ba ta được :

$x_1=\ 0,5;\ x_2\approx 22,1177;\ x_3\approx -22,6177$.

Bài 8: Cho tam giác ABC, điểm I là trung điểm cạnh BC, D là điểm trên cạnh AC sao cho $CD=3AD$, E là điểm trên cạnh AB thỏa mãn $S^2_{\Delta BIE}=S_{\Delta CID}\times S_{\Delta ADE}$ (ký hiệu S_H là diện tích của hình H).

Tính giá trị tỉ số $\frac{AE}{EB}$.

Lời giải



Đặt $\frac{AE}{EB}=k\Rightarrow\frac{BE}{AB}=\frac{1}{1+k};\frac{AE}{AB}=\frac{k}{1+k}$

Suy ra: $\frac{S_{BIE}}{S_{ABC}}=\frac{1}{2}.\frac{1}{1+k}\Rightarrow S_{BIE}=\frac{S_{ABC}}{2(k+1)}$

Tương tự: $\frac{S_{CID}}{S_{ABC}}=\frac{3}{8}\Rightarrow S_{CID}=\frac{3S_{ABC}}{8}$ và

$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\frac{k}{4(k+1)}\Rightarrow S_{ADE}=\frac{k}{4(k+1)}.S_{ABC}$

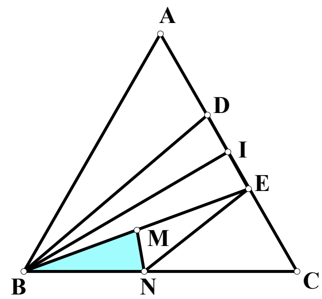
Vì $S^2_{BIE}=S_{CID}.S_{ADE}\Rightarrow\frac{1}{4(k+1)^2}=\frac{3k}{32(k+1)}\Rightarrow k=\frac{\sqrt{105}-3}{6}$.

Bài 9: Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 1. Trên cạnh AC lấy các điểm D, E sao cho $\widehat{ABD}=\widehat{CBE}=20^0$. Gọi M là trung điểm của BE và N là điểm trên cạnh BC sao BN = BM. Tính tổng diện tích hai tam giác BCE và tam giác BEN.

Lời giải

Kẻ BI $\perp$ AC $\Rightarrow$ I là trung điểm AC.

Ta có:



$\widehat{ABD} = \widehat{CBE} = 20^0 \Rightarrow \widehat{DBE} = 20^0 \; (1)$

$\Delta ADB = \Delta CEB \; (g - c - g)$

$\Rightarrow \; BD = BE \Rightarrow \Delta$ BDE cân tại B

$\Rightarrow$ I là trung điểm DE.

mà BM = BN và $\widehat{MBN} = 20^0$

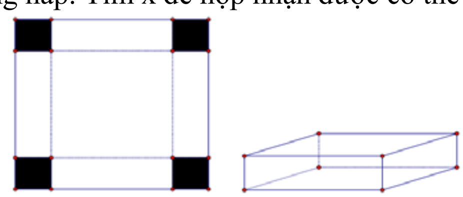
$\Rightarrow \Delta$ BMN và Δ BDE đồng dạng

$$\frac{S_{BMN}}{S_{BED}} = \left(\frac{BM}{BE}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$S_{BNE} = 2S_{BMN} = \frac{1}{2}S_{BDE} = S_{BIE}$$

Vậy $S_{BCE} + S_{BNE} = S_{BCE} + S_{BIE} = S_{BIC} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{8}$

Bài 10: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 18 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Lời giải

Điều kiện: $0 < x < 9$

$V = h.B = x.(18 - 2x)^2 = f(x)$

Bấm mod 7 và tìm được $x = 3$

Cách khác: Áp dụng BĐT Côsi cho 3 số không âm 4x; 18-2x; 18-2x

$$V = x.(18 - 2x)^2 = \frac{1}{4}.4x(18 - 2x).(18 - 2x)$$

$$\le \frac{1}{4}.\left(\frac{4x + (18 - 2x) + (18 - 2x)}{3}\right)^3 = 432$$

Dấu "=" xảy ra khi $4x = 18 - 2x \Leftrightarrow x = 3$

Vậy: $x = 3$ thì thể tích lớn nhất.

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 13

Bài 1: Tính $P=\frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}.\frac{4^3-1}{4^3+1}...\frac{2013^3-1}{2013^3+1}.\frac{2014^3-1}{2014^3+1}$.

Lời giải

$$P=\frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}.\frac{4^3-1}{4^3+1}...\frac{2013^3-1}{2013^3+1}.\frac{2014^3-1}{2014^3+1}$$

Áp dụng hằng đẳng thức: $\frac{X^3-1}{X^3+1}=\frac{(X-1)(X^2+X+1)}{(X+1)(X^2-X+1)}$

$$\Rightarrow P=\frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}.\frac{4^3-1}{4^3+1}...\frac{2013^3-1}{2013^3+1}.\frac{2014^3-1}{2014^3+1}$$

$$=\frac{1.7}{3.3}.\frac{2.13}{4.7}.\frac{3.21}{5.13}.\frac{4.31}{6.21}.....\frac{2013.4054183}{2015.4050157}$$

$$=\left(\frac{1.2.3.4...2013}{3.4.5.6...2015}\right).\left(\frac{7.13.21.31...4054183}{3.7.13.21.31...4050157}\right)$$

$$=2.\frac{2013!}{2015!}.\frac{4054138}{3}=\frac{2.4054183}{2014.2015.3}=0,6660051271$$

Lưu ý: Nếu ta Khai báo $\prod_{2}^{2014}\frac{X^3-1}{X^3+1}\approx 0,6666668309$ thì kết quả này không chính xác.

Bài 2: Cho đa thức $P(x)$, biết rằng $P(x)$ chia cho $(x-1)$ thì dư -2019; $P(x)$ chia cho $(x-2)$ thì dư -2036; $P(x)$ chia cho $(x-3)$ thì dư -2013; $P(x)$ chia cho $(x-4)$ thì dư -1902. Hãy tìm đa thức dư $R(x)$ khi chia $P(x)$ cho $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

Lời giải

Giả sử $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).Q(x)+ax^3+bx^2+cx+d$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases}P(1)=-2019\\P(2)=-2036\\P(3)=-2013\\P(4)=-1902\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c+d=-2019\\8a+4b+2c+d=-2036\\27a+9b+3c+d=-2013\\64a+16b+4c+d=-1902\end{cases}$$

Giải ra, ta được: $a=8; b=-28; c=11; d=-2010$

Vậy đa thức dư là $R(x)=8x^3-28x^2+11x-2010$.

Bài 3: Tìm số tự nhiên m lớn nhất, biết rằng khi chia lần lượt các số 56505086; 7873056; 3094186 cho m thì được cùng một số dư.

Lời giải

Giả sử:

$56505086 = mq_1 + r \quad (1)$

$7873056 = mq_2 + r \quad (2)$

$3094186 = mq_3 + r \quad (3)$

Từ (1) và (2), suy ra: $48632030 \,\vdots\, m$

Từ (1) và (3), suy ra: $53410900 \,\vdots\, m$

Từ (2) và (3), suy ra: $4778870 \,\vdots\, m$

Suy ra: m là ước chung của 48632030; 53410900; 4778870

Vì m là số tự nhiên lớn nhất, nên:

$m=\left(48632030,53410900,4778870\right)=281110$

Bài 4: Cho hai dãy số: $\begin{cases} U_1=1; V_1=2 \\ U_{n+1}=22U_n-15V_n \\ V_{n+1}=17V_n-12U_n \end{cases}$ với $n=1,2,3,\ldots$

Lập quy trình tính U_{n+1} và V_{n+1} ? Tính U_7, V_7 ?

Lời giải

Khai báo: $1 \to X$ {biến đếm}; $1 \to A$ {giá trị u_1 }; $2 \to B$ {giá trị u_2 }

Ghi vào màn hình: $X=X+1:C=22A-15B:D=17B-12A:A=C:B=D$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$ cho đến khi $X=7$ ta được

$U_7=-\ 673114406;\ V_7=500361734.$

Bài 5: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4-14x^2-7x+30$. Sau đó tìm nghiệm đúng của phương trình $x^4-14x^2-7x+30=0$.

Lời giải

Ta có

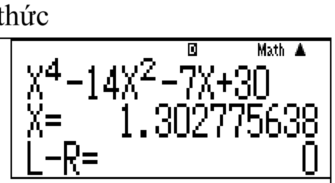
$x^4-14x^2-7x+30=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

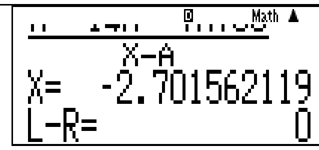
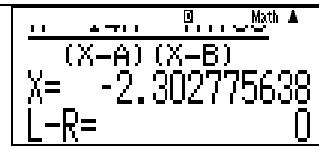
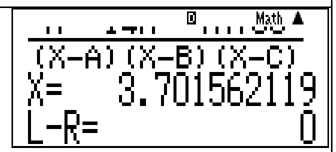
$=x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(bc+ad)x+bd$

$\Rightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ b+ac+d=-14 \\ bc+ad=-7 \\ bd=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=-1 \\ d=-10 \end{cases}$

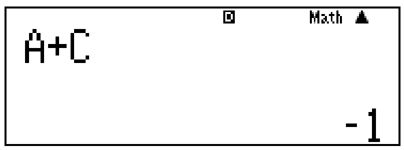
$\Rightarrow x^4-14x^2-7x+30=(x^2+x-3)(x^2-x-10)$

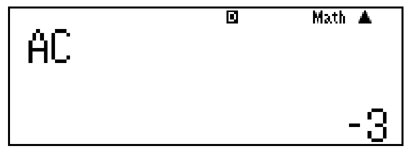
Cách 2: Sử dụng máy tính lưu nghiệm và chia đa thức

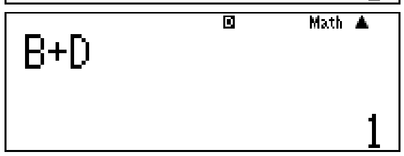
Bước 1: Ghi vào màn hình $x^4-14x^2-7x+30$, ấn $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{SOLVE}}\boxed{1}\boxed{=}$ ta được nghiệm thứ nhất $1,2027 \to A$	

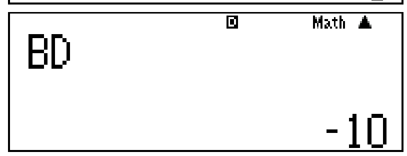
Bước 2: Nhập màn hình $\dfrac{x^4-14x^2-7x+30}{X-A}$ $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{SOLVE}}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ ta được nghiệm thứ nhất hai $-2,7015 \to B$	
Bước 3: Nhập màn hình $\dfrac{x^4-14x^2-7x+30}{\left(X-A\right)\left(X-B\right)}$ $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{SOLVE}}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ ta được nghiệm thứ ba $-3,2027 \to C$	
Bước 4: Nhập màn hình $\dfrac{x^4-14x^2-7x+30}{\left(X-A\right)\left(X-B\right)\left(X-C\right)}$ $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{SOLVE}}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$ ta được nghiệm thứ ba $3,7015 \to D$	

Nhận thấy:









Từ đó ta phân tích được: $x^4-14x^2-7x+30=(x^2+x-3)(x^2-x-10)$

b) Ta có:

$x^4-14x^2-7x+30=0 \Leftrightarrow (x^2+x-3)(x^2-x-10)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-3=0 \\ x^2-x-10=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{41}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2},\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{41}}{2}$

Bài 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5 & (1) \\ \sqrt{2x+y}+x-y=2 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Phân tích: Nhìn vào bài toán, ấn tượng đầu tiên là hai căn bậc 2, do đó một suy nghĩ rất tự nhiên là đặt $a=\sqrt{7x+y}$ và $b=\sqrt{2x+y}$ để gọn bài toán (mặt khác $\sqrt{2x+y}$ cũng lặp lại cả hai phương trình). Tiếp theo với căn bậc 2 suy nghĩ thường trực vẫn là bình phương để khử căn, để ý tiếp ta có biểu thức: $a^2-b^2=5x$ (triệt tiêu mất y). Hơn nữa, ta có $a+b=5$ từ phương trình đầu, do đó ta có thể rút được b theo x và y. Việc này có tác dụng rất lớn vì b chính là $\sqrt{2x+y}$.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5x \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = x \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow b = \frac{5 - x}{2}$$

Đến đây, chỉ cần thế kết quả này vào phương trình thứ hai là ta có thể tìm được mối quan hệ bậc nhất giữa x và y. Khi đó, kết hợp với một trong hai phương trình của hệ, không có lý do gì ta lại không giải được bài toán.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} 7x + y \ge 0 \\ 2x + y \ge 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{7x + y} \\ b = \sqrt{2x + y} \end{cases} (a; b \ge 0) \Rightarrow a^2 - b^2 = 5x$. Khi đó, hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ b + x - y = 2 \\ a^2 - b^2 = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ (a - b)(a + b) = 5x \\ b + x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = x \\ b + x - y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{5 - x}{2} \\ \frac{5 - x}{2} + x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y - 1$$

Khi đó $(2) \Leftrightarrow \sqrt{2(2y - 1) + y} + (2y - 1) - y = 2 \Leftrightarrow \sqrt{5y - 2} = 3 - y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5} \le y \le 3 \\ 5y - 2 = (3 - y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5} \le y \le 3 \\ y^2 - 11y + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{11 - \sqrt{77}}{2} \\ x = 10 - \sqrt{77} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 10 - \sqrt{77} \\ y = \frac{11 - \sqrt{77}}{2} \end{cases}$

Bài 7: Một người tiết kiệm tiền để mua một chiếc xe máy bằng cách hàng tháng gửi vào ngân hàng a đồng. Biết rằng lãi xuất của ngân hàng là 0.8%/tháng, hàng tháng không rút lãi ra.

a) Xây dựng công thức tính tổng số tiền tiết kiệm có được sau n tháng?

b) Đúng ba năm sau người đó mua được chiếc một xe máy trị giá 20600000 đồng . Hỏi hàng tháng người đó phải gửi vào ngân hàng một số tiền là bao nhiêu?

Lời giải

a) Gọi số tiền nhận được sau tháng thứ n là T_n. Số tiền gửi hàng tháng là a(đồng). Lãi suất hàng tháng là m (%).

Sau 1 tháng số tiền cả gốc và lãi là: $T_1 = a + am = a(1 + m)$

Đầu tháng thứ 2 số tiền là: $a(1 + m) + a = a(1 + m + 1) = \frac{a}{m}\left[(1 + m)^2 - 1\right]$

Sau 2 tháng số tiền cả gốc và lãi là:

$$T_2 = \frac{a}{m}\left[(1 + m)^2 - 1\right] + \frac{a}{m}\left[(1 + m)^2 - 1\right] = \frac{a}{m}\left[(1 + m)^2 - 1\right](1 + m)$$

Đầu tháng thứ 3 số tiền là:

$$\frac{a}{m}\left[(1+m)^2-1\right](1+m)+\ a=a\left(\frac{\left[(1+m)^2-1\right](1+m)}{m}+1\right)=\frac{a}{m}\left[(1+m)^3-1\right]$$

Sau 3 tháng số tiền cả gốc và lãi là: $T_2=\frac{a}{m}\left[(1+m)^3-1\right](1+m)$.

....

Sau n tháng số tiền cả gốc và lãi là: $T_n=\frac{a}{m}\left[\left(1+m\right)^n-1\right]\left(1+m\right)$ (*)

b) Từ (*) suy ra $a=\frac{T_n.m}{\left[(1+m)^n-1\right](1+m)}$.

hay $T_n=20600000,\ m=0,8\ \%=0,008;\ n=36.$

Vậy sau 3 năm (36 tháng) để có 20600000 đồng thì hàng tháng người đó phải gửi vào ngân hàng số tiền là:

$$a=\frac{20600000.0,008}{\left[(1+0,008)^{36}-1\right](1+0,008)}=492105,3$$

Bài 8: Cho tứ giác lồi ABCD có $AB=AD=\sqrt{34}$; $CB=CD=\sqrt{52}$. Biết BA vuông góc với BC. Gọi I là giao điểm của tia phân giác $\widehat{ABC}$ với đoạn AC. Vẽ IK vuông góc với CD, biết điểm K thuộc CD. Tính IK.

Lời giải

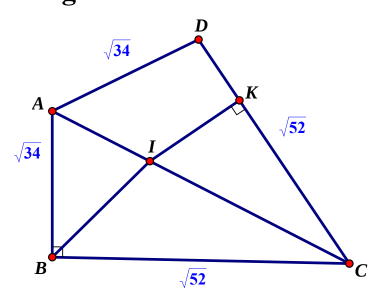
$AC=\sqrt{86}cm$

$IC=x\Rightarrow IA=\sqrt{86}-x$

$\frac{IA}{IC}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{\sqrt{86}-x}{x}=\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{52}}$

$\Rightarrow x(\sqrt{52}+\sqrt{34})=\sqrt{4472}$

$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{4472}}{\sqrt{52}+\sqrt{34}}\Rightarrow IC=\frac{\sqrt{4472}}{\sqrt{52}+\sqrt{34}}$



$$\Delta IKC\sim\Delta ABC\Rightarrow\frac{KI}{AB}=\frac{IC}{AC}\Rightarrow KI=\frac{IC.AB}{AC}=\frac{\frac{\sqrt{4472}}{\sqrt{52}+\sqrt{34}}.\sqrt{34}}{\sqrt{86}}=3.224000656cm$$

Bài 9: Cho hình chữ nhật ABCD có độ dài các cạnh AB = m và BC = n. Từ A kẻ AH vuông góc với đường chéo BD.

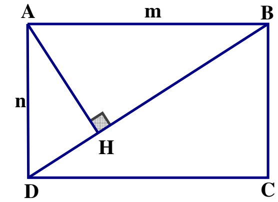
a) Tính diện tích tam giác ABH theo m và n.

b) Cho biết m = 2017,2018 cm và n = 2019,2020cm. Tính diện tích tam giác ABH .

Lời giải

a) $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{m^2+n^2}$

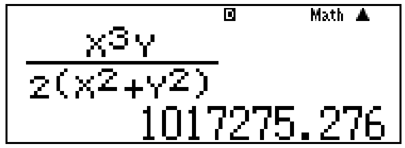
$AH=\frac{AB.AD}{BD}=\frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$



$AB^2 = BD.BH \Rightarrow BH = \dfrac{AB^2}{BD} = \dfrac{m^2}{\sqrt{m^2+n^2}}$

Vậy $S_{ABH} = \dfrac{1}{2}AH.BH = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}\cdot\dfrac{m^2}{\sqrt{m^2+n^2}} = \dfrac{m^3n}{2\left(m^2+n^2\right)}$

b) Áp dụng với $m = 2017{,}2018$ và $n = 2019{,}2020$;



ta tính được $S_{ABH} = 1017275{,}276$ (cm^2)

Bài 10: Một đại lý xăng dầu cần làm một cái bồn dầu hình trụ bằng tôn có thể tích $16\pi\left(m^3\right)$. Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra ít tốn nguyên vật liệu nhất.

Lời giải

Gọi $x\left(m\right)$ là bán kính của hình trụ $\left(x>0\right)$.

Ta có: $V = \pi.x^2.h \Leftrightarrow h = \dfrac{16}{x^2}$

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S\left(x\right) = 2\pi x^2 + 2\pi xh = 2\pi x^2 + \dfrac{32\pi}{x} = 2\pi x^2 + \dfrac{16\pi}{x} + \dfrac{16\pi}{x}$

$\geq 3\sqrt[3]{2\pi x^2.\dfrac{16\pi}{x}.\dfrac{16\pi}{x}} = 3\sqrt[3]{512\pi^3}$

Khi đó: $\min S\left(x\right) = 3\sqrt[3]{512\pi^3}$ khi $2\pi x^2 = \dfrac{16\pi}{x} \Leftrightarrow x = 2$

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 14

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức sau:

$$S=\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)......\left(2013^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)......\left(2014^4+\frac{1}{4}\right)}$$

Lời giải

Áp dụng: $n^4+4=\left[(n-1)^2+1\right]\left[(n+1)^2+1\right]$

$$\frac{(2k-1)^4+\frac{1}{4}}{(2k)^4+\frac{1}{4}}=\frac{(4k-2)^4+4}{(4k)^4+4}=\frac{\left[(4k-3)^2+1\right]\left[(4k-1)^2+1\right]}{\left[(4k-1)^2+1\right]\left[(4k+1)^2+1\right]}$$

Suy ra: $S=\dfrac{(1^2+1)(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)...(4027^2+1)}{(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)(9^2+1)...(4029^2+1)}=\dfrac{1}{8116421}$

Bài 2: Cho đa thức: $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$. Biết $P(1)=1;\ P(2)=4;\ P(3)=7;\ P(4)=10$

a) Tìm các hệ số a, b ,c, d

b) Với a, b,c,d vừa tìm được ta chia đa thức $P(x)$ cho 2x+3 ta được thương là đa thức Q(x) có bậc là 3. Hãy tìm hệ số của x trong Q(x)?

Lời giải

a) Đặt $B(x)=3x-2$. Ta có $B(1)=1;\ B(2)=4;\ B(3)=7;\ B(4)=10$

$\Rightarrow P(x)-B(x)$ có 4 nghiệm 1; 2; 3; 4 và là đa thức bậc 4 có hệ số cao nhất bằng 1

$\Rightarrow P(x)-B(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

$\Rightarrow P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+B(x)$

$\Rightarrow P(x)\ =(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+3x-2$

$\Rightarrow P(x)=x^4-10x^3+35x^2-47x+22$

Vậy $a=-10, b=35, c=-47, d=22$.

Cách 2: Giải hệ 4 phương trình bốn ẩn (Dùng máy Vinacal). Bạn đọc tự giải

b) Áp dụng lược đồ Hoocne viết :

$$P(x)=(2x+3)\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{23}{4}x^2+\frac{209}{8}x^2-\frac{1003}{16}\right)+\frac{3361}{16}$$

Bài 3: Cho dãy số với số hạng tổng quát được cho bởi công thức

$$U_n=\frac{(-1+\sqrt{5})^n-(-1-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}} \text{ với } n=1,2,3,\ldots k,\ldots$$

a) Tính U_1, U_2, U_3, U_4, U_5.

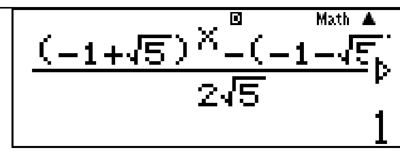
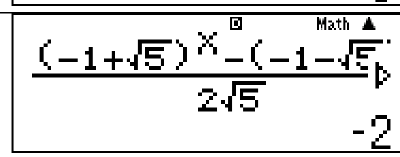
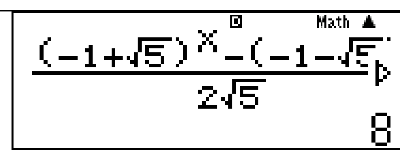
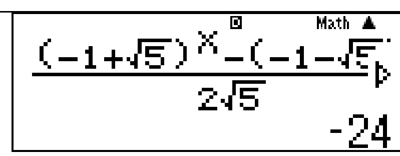
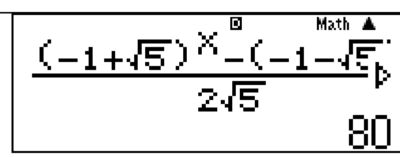
b) Lập công thức truy hồi để tính U_{n+2} theo U_{n+1}, U_n.

c) Lập quy trình ấn phím liên tục tính U_{n+2}.

Lời giải

Dãy số $U_n=\dfrac{\left(-1+\sqrt{5}\right)^n-\left(-1-\sqrt{5}\right)^n}{2\sqrt{5}}$ ***với n = 1 , 2 , 3 , . . . k , . . .***

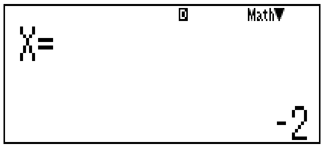
a) Ghi vào màn hình: $\dfrac{\left(-1+\sqrt{5}\right)^X-\left(-1-\sqrt{5}\right)^X}{2\sqrt{5}}$

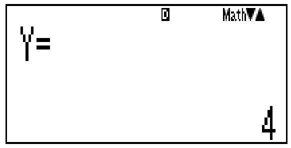
Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ nhập $X=1$ Ta được $U_1=1$	
Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ nhập $X=2$ Ta được $U_2=-2$	
Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ nhập $X=3$ Ta được $U_3=8$	
Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ nhập $X=4$ Ta được $U_4=-34$	
Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ nhập $X=5$ Ta được $U_5=80$	

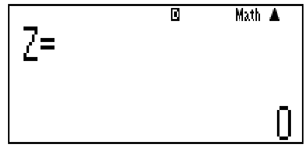
b) Công thức truy hồi có dạng: $U_{n+2}=aU_{n+1}+b\,U_n+c$. Ta có hệ

$$\begin{cases}U_3=aU_2+bU_1+c\\U_4=aU_3+bU_2+c\\U_5=aU_4+bU_3+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+b+c=8\\8a-2b+c=-24\\-24a+8b+c=80\end{cases}$$

Giải hệ phương trình:







Ta được : $a=-2,\ b=4,\ c=0$

Vậy: $U_{n+2}=-2U_{n+1}+4U_n$

c) Ta có: $U_1=1; U_2=-2$

Khai báo:

$2\to D$ {Biến đếm}; $1\to A$ {giá trị U_1 }; $-2\to B$ {giá trị U_2 }

Ghi vào màn hình:

$D=D+1:A=-2B+4A:D=D+1:B=-2A+4B$

Ấn $\boxed{\text{CACL}}$ và lặp dấu bằng $\boxed{=}$ ... $\boxed{=}$ ...

Bài 4: Tìm các số x, y sao cho khi chia $\overline{xxxxx}$ cho $\overline{yyyy}$ có thương là 16 dư là r, còn khi chia $\overline{xxxx}$ cho $\overline{yyy}$ cũng có thương là 16 nhưng có số dư là $(r-2000)$.

Lời giải

Theo đề bài ta có :

$\overline{xxxxx} = 16.\overline{yyyy} + r$ (1)

$\overline{xxxx} = 16.\overline{yyy} + r - 2000$ (2).

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được:

$\overline{x0000}=16.\overline{y000}+2000 \Leftrightarrow 10x=16y+2 \Leftrightarrow 5x=8y+1 \Leftrightarrow y=\frac{5x-1}{8}$

Vì $0<x,\ y\le 9$ nên suy ra $x=5,\ y=3$.

Bài 5: Giải phương trình $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$

Lời giải

Cách 1.

Để ý đến hệ số cao nhất của phương trình ta thấy nếu bình phương hai vế thì hệ số của x^4 bị triệt tiêu vì vậy ta có cách giải "bình dân" nhất như sau:

Bình phương hai vế phương trình đã cho ta có:

$x^4+9x^2+1+6x^3+2x^2+6x=x^4+x^2+6x^3+6x+9x^2+9 \Leftrightarrow x^2-8=0$

Suy ra $x=2\sqrt{2}$ hoặc $x=-2\sqrt{2}$.

Thử lại thấy hai nghiệm đều thỏa mãn phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2\sqrt{2}$, $x=-2\sqrt{2}$.

Cách 2.

Bài toán này khá nhẹ ở phần biến đổi hình thức. Thật vậy, phương trình đã cho được sắp xếp lại như sau:

$(x^2+1)-3\sqrt{x^2+1}+3x-x\sqrt{x^2+1}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-3\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-3\right)=0$

Đến đây bạn đọc giải tiếp nhé

Cách 3.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\ge 1$, ta viết lại phương trình như sau:

$t^2-\left(x+3\right)t+3x=0$

Ta có: $\Delta=x^2+6x+9-12x=\left(x+3\right)^2$

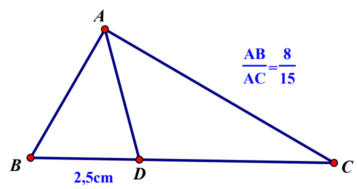
Đến đây bạn đọc giải tiếp nhé

Bài 6: Cho ΔABC vuông tại A có BC = 2,55m; các cạnh AB và AC tỉ lệ với 8 và 15, AD là phân giác trong của góc A.

a) Tính góc B, góc C

b) Tính chu vi của tam giác ABD

Lời giải



a) $\tan C=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{8}{15}\Rightarrow$; góc $C=28^0 4'21''$

suy ra góc $B=61^0 55'39''$

b) Ta có:

$AC=BC.\sin B=BC.\sin 61^0 55'39''=$ 2,25m

$AB=BC.\sin C=2,55\times\sin\left(28^0 4'21''\right)=1,2m$

Ta có $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{BD+DC}{AB+AC}=\dfrac{BC}{AB+AC}=\dfrac{2,55}{3,45}=\dfrac{17}{23}$.

Suy ra $BD=\dfrac{17}{23}.AB=\dfrac{102}{115}\approx 0,8869565217$ m

Theo công thức độ dài đường phân giác: $AD=\dfrac{2}{AB+AC}.AB.AC\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{18\sqrt{2}}{23}\approx 1,106775831$.

Tính chu vi của tam giác ABD là: $BD+AD+AB=$ 3,193732353m .

Bài 7: Cho tam giác ABC có góc A bằng 45^0, góc B bằng 59^0, $AB-BC=12cm$.

a) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC ?

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải

a) Từ góc A và góc B ta suy ra được góc C = 76^0

Áp dụng định lí hàm số Sin ta có:

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=\frac{AB-BC}{\sin C-\sin A}=\frac{12}{\sin C-\sin A}$$

Suy ra:

$BC=\dfrac{12}{\sin C-\sin A}.\sin A=32,24026515\to A$

$AC=\dfrac{12}{\sin C-\sin A}.\sin B=39,08221755\to B$

$AB=\dfrac{12}{\sin C-\sin A}.\sin C=44,24026515\to C$

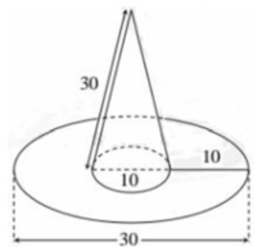
Vậy, $AB=44,24027$ AC =39,08222cm ; BC =32,24027cm

b) Ta có: $S=\frac{abc}{4R}\Rightarrow R=\frac{4S}{abc}$, mặt khác theo công thức công thức Hêrông $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Suy ra $R=\frac{abc}{4.\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=22{,}79731cm$ với $p=\frac{A+B+C}{2}=57{,}7837392$

Bài 8.

Tính diện tích vải cần có để may một cái mũ có hình dạng và kích thước (cùng đơn vị đo) được cho bởi hình vẽ bên (không kể riềm, mép)



Lời giải

Cái mũ gồm 2 phần:

- Phần 1 dạng hình nón có bán kính 5 và đường sinh 30 $\Rightarrow$ Diện tích xung quanh của phần 1 là: $S_1=\pi.5.30=150\pi$;
- Phần 2 có dạng vành khăn $\Rightarrow$ Diện tích phần thứ 2 là: $S_2=\pi\left(15^2-5^2\right)=200\pi$

Diện tích vải cần để may mũ là: $S_1+S_2=150\pi+200\pi=350\pi$

Bài 9: Cho chóp tam giác đều SABC cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Tính thể tích chóp đều SABC.

Lời giải

Ta có tam giác ABC đều nên

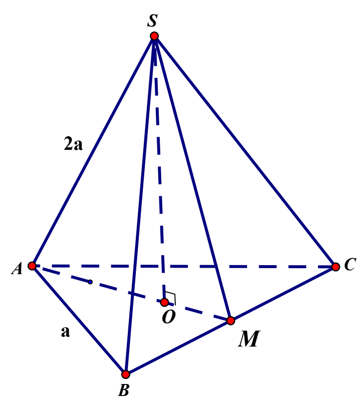
$AO=\frac{2}{3}AH=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong tam giác vuông SOA

$SO^2=SA^2-OA^2=\frac{11a^2}{3}$

$\Rightarrow SO=\frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$

Vậy $V=\frac{1}{3}S_{ABC}.SO=\frac{a^3\sqrt{11}}{12}$



Bài 10: Lãi suất của tiền gửi tiết kiệm của một số ngân hàng thời gian vừa qua liên tục thay đổi. Bạn Minh gửi số tiền ban đầu là 5 triệu đồng với lãi suất 0,7% tháng chưa đầy một năm, thì lãi suất tăng lên 1,15% tháng trong 6 tháng tiếp theo và bạn Minh tiếp tục gửi; sau 6 tháng đó lãi suất giảm xuống còn 0,9% tháng, bạn Minh tiếp tục gửi thêm một số tháng tròn nữa, khi rút tiền bạn Minh được cả vốn lẫn lãi là 5747 478,359 đồng (chưa làm tròn).Hỏi bạn Minh đã gửi tiền tiết kiệm trong bao nhiêu tháng ? Nêu sơ lược quy trình bấm phím trên máy tính để giải

Lời giải

Giả sử số tiền ban đầu gửi vào là a, lãi suất r%tháng.

- Sau tháng thứ nhất số tiền là $a+ar\%=a\left(1+r\%\right)$.

- Sau tháng thứ hai số tiền là $a\left(1+r\%\right)+a\left(1+r\%\right)r\% = a\left(1+r\%\right)^2$

- ...

- Sau n tháng thì số tiền cả gốc lẫn lãi được nhận là: $T = a(1+r\%)^n$.

Gọi n là số tháng gửi với lãi suất 0,7% tháng,

x là số tháng gửi với lãi suất 0,9% tháng,

thì số tháng gửi tiết kiệm là: $n+6+x$.

Khi đó số tiền gửi cả vốn lẫn lãi là:

$$5000000 \times 1.007^n \times 1.0115^6 \times 1.009^x = 5747478,359$$

Ghi biểu thức trên máy bấm

$5000000 \times 1.007^A \times 1.0115^6 \times 1.009^X - 5747478,359$

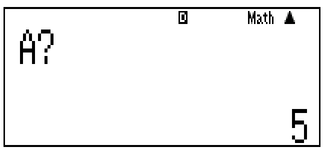
$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{SOLVE}}$

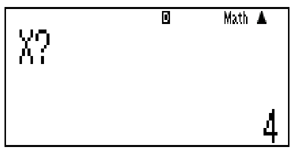
Nhập giá trị của A là 1 $\boxed{=}$

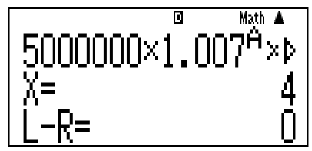
Nhập giá trị đầu cho X là 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{SOLVE}}$

Cho kết quả X là số không nguyên.

Lặp lại quy trình với A nhập vào lần lượt là 2, 3, 4, 5, ...đến khi nhận được giá trị nguyên của X = 4 khi A = 5.







Vậy số tháng bạn Minh gửi tiết kiệm là: 5 + 6 + 4 = 15 tháng.

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 15

Bài 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$A=\frac{3,75:1\frac{1}{2}+\left(1,5:3\frac{3}{4}\right).2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}}{2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right).\frac{18}{65}};$$

Lời giải

Trước hết ta tính: $3,75:1\frac{1}{2}+\left(1,5:3\frac{3}{4}\right).2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}=8$.

Tiếp đến tính: $2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right).\frac{18}{65}=-\frac{29}{2}$

Như vậy: $A=\frac{8}{-\frac{29}{2}}=-\frac{16}{29}$.

Nhận xét: Rõ ràng đối với những bài toán trên không hề phức tạp. Ta chỉ cần tính từng thành phần, sau đó thực hiện phép tính sẽ được kết quả. Máy tính không thể nhập một lúc hết các biểu thức trên.

Bài 2: Dân số nước ta tính đến năm 2002 là 79,93 triệu người. Tỉ lệ tăng dân số trung bình hàng năm là 1,2%.

a) Hỏi đến năm 2020 dân số nước ta là bao nhiêu ?

b) Đến năm nào thì dân số nước ta vượt 150 triệu người ?

Lời giải

Áp dụng công thức: $A_n=a(1+r)^n$.

a) Đến năm 2020 tức là sau 18 năm nữa kể từ năm 2002. Áp dụng công thức tính

$A_{18}=79,93(1+1,2\%)^{18}\approx 99,0738$ triệu người.

b) Đưa $1\to X$ {biến đếm}

Ghi vào màn hình: $X = X + 1 : C = 79,93(1 + 1,2\%)^{X}$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$ đến $X = 53$ ta được $C \approx 150,4101$ triệu dân.

Như vậy sau: 53 năm nữa.

Bài 3: Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho $\dfrac{27x^3 + 27x^2 - 3x + 2010}{3x - 1}$ là một số nguyên.

Lời giải

Đặt $P(x) = 27x^3 + 27x^2 - 3x + 2010$

Số dư trong phép chia đa thức $P(x)$ cho $3x - 1$ là $P\left(\dfrac{1}{3}\right) = 2013 = 3.11.61$

Để $\dfrac{P(x)}{3x - 1}$ nhận giá trị nguyên thì $3x - 1$ phải là ước của 2013. Từ đó suy ra: $x \in \{-20; 0; 4; 224\}$

Bài 4: Cho đa thức P(x) xác định với mọi giá trị của x nguyên và cho biết $P\left(x^2 + 1\right) = x^4 + 5x^2 + 3$.

a) Tìm đa thức P(x).

b) Tính giá trị đúng của P(20152016).

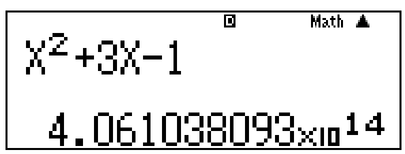
Lời giải

a) Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = t - 1$. Lúc đó:

$P(t) = (t - 1)^2 + 5(t - 1) + 3 = t^2 - 2t + 1 + 5t - 5 + 3 = t^2 + 3t - 1$

Như vây: $P(x) = x^2 + 3x - 1$

b) Ghi vào màn hình: $X^2 + 3X - 1$ và ấn $\boxed{\text{CALC}}\boxed{20152016}$ ta được kết quả trên màn hình là:



Hiện tượng này được gọi là tràn màn hình: sau dấu , có đến 14 chữ số

Ấn tiếp:

$\boxed{-}\boxed{4}\boxed{\times}\boxed{10^{14}}\boxed{=}$ $\{6,10380932 \times 10^{12}\}$

$\boxed{-}\boxed{6}\boxed{\times}\boxed{10^{12}}\boxed{=}$ $\{1,038093203 \times 10^{11}\}$

$\boxed{-}\boxed{1}\boxed{\times}\boxed{10^{11}}\boxed{=}$ $\{3809320303\}$

Vậy $P(20152016) = 406103809320303$.

Lời bình: Sử dụng lệnh subs trên Maple ta được kết quả như sau:

```
> P := x^2 + 3 x-1;
                         P := x^2 + 3 x - 1
> subs(x = 20152016 , P);
                         406103809320303
```

Bài 5: Tìm các số tự nhiên n sao cho $n^2+16n+2011$ là một số chính phương.

Lời giải

Giả sử $n^2+16n+2011=m^2$ (m,n là các số tự nhiên)

$\Leftrightarrow m^2-\left(n^2+16n\right)=2011 \Leftrightarrow m^2-\left(n+8\right)^2=1947 \Leftrightarrow (m-n-8)(m+n+8)=1947$

mà $1947=3.11.59$, do đó $1947=1.1947=3.649=11.177=33.59$

Ta xét các trường hợp sau:

1) $\begin{cases} m-n-8=1 \\ m+n+8=1947 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=974 \\ n=965 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} m-n-8=3 \\ m+n+8=649 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=326 \\ n=315 \end{cases}$

3) $\begin{cases} m-n-8=11 \\ m+n+8=177 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=94 \\ n=75 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} m-n-8=33 \\ m+n+8=59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=46 \\ n=5 \end{cases}$

Vậy các giá trị của n là: $965;\ 315;\ 75;\ 5$.

Nhận xét: Hiển nhiên $m+n+8>m-n-8$ với mọi $m,n\in\mathbb{N}$

Bài 6: Cho dãy số $\left(u_n\right)$ thỏa mãn: $\begin{cases} u_{n+1}=2u_n-1+3n,\ (\forall n\in N^*) \\ u_1=2 \end{cases}$.

a) Tính $u_{11}-u_1+u_{12}-u_2+...+u_{20}-u_{10}$

b)Tìm n để $u_n>10^6$.

Lời giải

Cho dãy số $\left(u_n\right)$ thỏa mãn: $\begin{cases} u_{n+1}=2u_n-1+3n,\ (\forall n\in N^*) \\ u_1=2 \end{cases}$.

Ta có:

$u_{n+1}+3\left(n+1\right)+2=2u_n-1+3n+3\left(n+1\right)+2$

$=2\left(u_n+3n+2\right)$

$\Rightarrow u_n+3n+2=2\left(u_{n-1}+3\left(n-1\right)+2\right)$

$=...=2^{n-1}\left(u_1+3.1+2\right)=7.2^{n-1}$

$\Rightarrow u_n=7.2^{n-1}-3n-2$

a) $u_{11}-u_1+u_{12}-u_2+...+u_{20}-u_{10}=7325403$

b) Nhận xét: vì $u_{n+1}=2u_n-1+3n,\ (\forall n\in N^*)$ nên khi n tăng thì u_n tăng {Dùng bảng TABLE, rút ra nhận xét}

Ta có: $u_n>10^6 \Leftrightarrow 7.2^{n-1}-3n-2-10^6>0$

Khai báo: $1\to A$. Ghi vào màn hình: $A=A+1:B=7.2^{A-1}-3A-2-10^6$

Ấn $\boxed{\text{CACL}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$. Từ đó tìm được: $n\ge 19$.

Bài 7: Giải phương trình $\sqrt{2x^2+10x+12}-\sqrt{x^2+2x-3}=2\sqrt{x+2}$

Phân tích: Phương trình có dạng chứa 3 căn thức và trong 3 căn thức này đều là đa thức có bậc không vượt quá 2 nên ta hoàn toàn tự tin xử lí được. Nếu ta để nguyên phương trình như vậy mà bình phương thì cần đặt điều kiện, đồng thời sau khi bình phương sẽ thu được số hạng chứa căn là $\sqrt{\left(2x^2+10x+12\right)\left(x^2+2x-3\right)}\to$ tiếp tục cần một lần bình phương nữa thì sẽ mất thời gian khai triển $\left(2x^2+10x+12\right)\left(x^2+2x-3\right)$. Còn nếu ta chuyển $\sqrt{x^2+2x-3}$ sang vế phải rồi bình phương thì sẽ có thuận lợi hơn ở hai điều: thứ nhất là bình phương lên không cần thêm điều kiện, thứ hai là thu được biểu thức trong căn là $(x+2)\left(x^2+2x-3\right)$, dễ khai triển hơn so với biểu thức trên.

Cách 1:

Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2+10x+12\ge 0 \\ x^2+2x-3\ge 0 \\ x\ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \vee x\le -3 \\ x\ge 1\vee x\le -3 \\ x\ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1$

Lúc đó phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{2x^2+10x+12}=\sqrt{x^2+2x-3}+2\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+10x+12=\left(\sqrt{x^2+2x-3}+2\sqrt{x+2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+10x+12=x^2+6x+5+4\sqrt{\left(x^2+2x-3\right)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+7=4\sqrt{\left(x^2+2x-3\right)(x+2)} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+4x+7\right)^2=16\left(x^2+2x-3\right)(x+2) \quad \left(\text{do } x^2+4x+7>0\right)$$

$$\Leftrightarrow x^4-8x^3-34x^2+40x+145=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{5} \\ x=4\pm 3\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta kết luận được phương trình có hai nghiệm là $x=\sqrt{5}$ và $x=4+3\sqrt{5}$.

Cách 2:

Không hoàn toàn dựa trên phép nâng lũy thừa mà còn tinh ý phát hiện phương trình đẳng cấp

$$(*)\Leftrightarrow \left(x^2+x-2\right)+3(x+3)=4\sqrt{\left(x^2+x-2\right)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x+3}+3=4\sqrt{\frac{x^2+x-2}{x+3}} \quad \text{(chia hai vế cho } (x+3)>0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{x^2+x-2}{x+3}}=1 \\ \sqrt{\dfrac{x^2+x-2}{x+3}}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-2=x+3 \\ x^2+x-2=9(x+3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{5} \\ x=4\pm 3\sqrt{5} \end{array}\right.$$

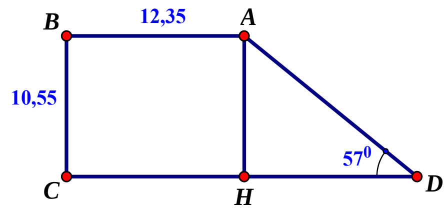
Lời bình: Qua hai lời giải trên thì ta thấy:

- Lời giải bằng phương pháp đưa về phương trình bậc 4 thì việc trình bày gọn nhẹ, đơn giải hơn nhưng kĩ năng thao tác tính toán cần phải chính xác.
- Lời giải bằng phương pháp phương trình đẳng cấp đơn giải hơn nhưng trình bày có vẻ dài dòng hơn, đồng thời cần một phản xạ, kĩ năng nhìn nhận và sự tinh ý nhất định khi gặp dạng phương trình này (đề cập ở chương sau)

Bài 8: Cho hình thang ABCD vuông tại B và C, có $AB < CD$, AB ≈ 12,35cm, BC ≈ 10,55cm, và $\widehat{ADC} \approx 57^0$. Tính diện tích hình thang ABCD . Tính tỉ số : $\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABC}}$.

Lời giải

a) Gọi H là hình chiếu của A lên CD.



Ta có:

$HD = AH.\cot 57^0 = AH.\tan 33^0$

$= 10,55.\tan 33^0$

Khi đó:

$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \times BC$

$= \frac{AB + CH + HD}{2} \times BC$

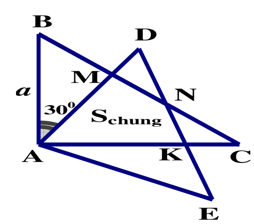
$= \frac{AB + AB + BC.\tan 33^0}{2} \times BC = \frac{12,35 + 12,35 + 10,55\tan 33^0}{2}$

$= 15,7756 \text{ cm}^2$.

b) $\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AH.CD}{\frac{1}{2}AB.BC} = \frac{CD}{AB} = \frac{12,35 + 10,55\tan 33^0}{12,35} \approx 1,5548.$

Bài 9:

Cho tam giác ABC và tam giác ADE vuông cân tại A cạnh góc vuông bằng $a = 2016,2016$ được quay quanh đỉnh góc vuông một góc 30⁰. Tính S_{chung}.



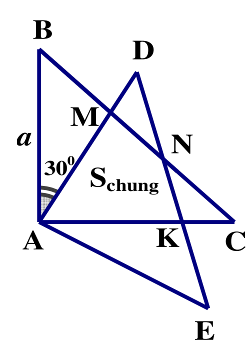
Lời giải

Định hướng: Để tính S_{chung} ta cần tính $S_{chung} = S_{ABC} - S_{ABM} - S_{CKN}$

Ta có:

$\widehat{EAK} = \widehat{BAM} = 30^0; \hat{B} = \hat{D} = \hat{C} = \hat{E} = 45^0$

$\widehat{CKN} = \widehat{AKE} = \widehat{BMA} = 105^0$; $a = 2016,2016$



Theo định lý hàm số sin, ta có:

$\frac{BM}{\sin 30^0} = \frac{AM}{\sin 45^0} = \frac{AB}{\sin 105^0}$

Suy ra:

$BM = \frac{AB\sin 30^0}{\sin 105^0} = \frac{a\sin 30^0}{\sin 105^0}$

$= \frac{2016,2016 \times \sin 30^0}{\sin 105^0} = 1043,662746 \rightarrow b$

(gán vào ô nhớ B)

$AM=\frac{AB\sin 45^0}{\sin 105^0}=\frac{2016,2016\times \sin 45^0}{\sin 105^0}=1475,96201\to c$ (gán vào ô nhớ C)

Ta có: $\Delta AKE=\Delta AMB\ \Rightarrow AK=AM=c$.

Suy ra $CK=AC-AK=a-c$

Ta có: $\Delta CKN\backsim\ \Delta BMA\Rightarrow \frac{CN}{BA}=\frac{CK}{BM}\Rightarrow CN=\frac{BA.CK}{BM}=\frac{a\left(a-c\right)}{b}$

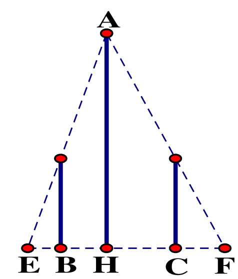
Vậy:

$S_{chung}=S_{ABC}-S_{ABM}-S_{CKN}=\frac{1}{2}AB^2-\frac{1}{2}AB.BM\sin B-\frac{1}{2}CK.CN\sin C$

$=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}ab\sin 45^0-\frac{1}{2}\left(a-c\right)\cdot\frac{a\left(a-c\right)}{b}\sin 45^0=\frac{a}{2}\left[a-\frac{b}{\sqrt{2}}-\frac{\left(a-c\right)^2}{b\sqrt{2}}\right]\approx 1089231,927$ (đvdt)

Bài 10:

Một ngọn đèn đặt ở vị trí A, hình chiếu vuông góc của nó trên mặt đất là H. Người ta đặt một chiếc cọc dài 1,6m ở hai vị trí B và C thẳng hàng với H, khi đó bóng của chiếc cọc dài 0,4 m và 0,6 m. Biết khoảng cách của hai chiếc cọc bằng 1,4 m. Tính độ cao ngọn đèn.



Lời giải

Ta có:

$BE=0,4;CF=0,6;BC=1,4;BM=CN=1,6$

Đặt $x=BH$, suy ra:

$CH=BC-BH=1,4-x$

Nhận thấy: $\Delta AHE\backsim\ \Delta MBE$

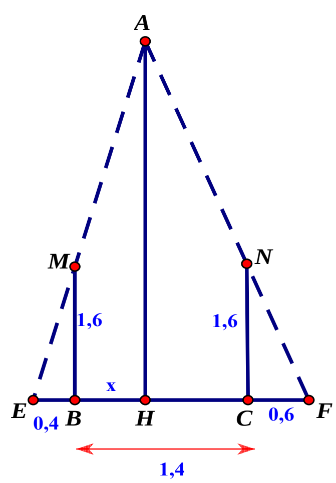
$\Rightarrow \frac{AH}{BM}=\frac{HE}{BE}\Rightarrow \frac{AH}{1,6}=\frac{0,4+x}{0,4}$

$\Rightarrow AH=4\left(x+0,4\right)(1)$

$\Delta AHF\backsim\ \Delta NCF$

$\Rightarrow \frac{AH}{CN}=\frac{HF}{CF}\Rightarrow \frac{AH}{1,6}=\frac{1,4-x+0,6}{0,6}$

$\Rightarrow AH=\frac{8\left(2-x\right)}{3}(2)$



Từ (1) và (2), suy ra: $4\left(x+0,4\right)=\frac{8\left(2-x\right)}{3}\Leftrightarrow x=0,56$

Vậy $AH=4\left(x+0,4\right)=4\left(0,56+0,4\right)=3,84$ (m)

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 16

Câu 1: Tính giá trị của $B=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2018^2}+\frac{1}{2019^2}}$.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh công thức sau

$\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}}=1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$ với $a>0$

Ta có:

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{2}{a}-\frac{2}{a+1}-\frac{2}{a(a+1)}}$$

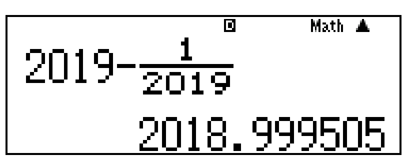
$$=\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{2a+2-2a-2}{a(a+1)}}$$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}}\ (*)$$

Hiển nhiên: $1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}>0,\forall a>0$.

Do đó: $(*)\Leftrightarrow 1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}=\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}}$

Từ đó: $B=2019-\frac{1}{2019}\approx 2018,9995$



Câu 2: Cho hàm số y = $-\frac{1}{2}x + 2$. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành và trục tung. Xác định tọa độ của các điểm A, B và tính khoảng cách từ góc tọa độ O đến đường thẳng AB.

Lời giải

Ta có: $d \cap Ox = A(4;0)$; $d \cap Oy = B(0;2)$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAB

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{16} \Rightarrow OH = \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1,788854382.$$

Câu 3: Tìm đa thức P(x) bậc 3 sao cho P(x) chia cho $(x^2 - 5x + 4)$ được dư là $(\frac{x}{3} - \frac{2}{5})$ và P(x) chia cho $(x^2 - 5x + 6)$ được dư là $(\frac{x}{5} + \frac{2}{3})$.

Lời giải

Giả sử $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$

Theo giả thiết có: $P(x) = (x^2 - 5x + 4)Q(x) + \frac{x}{3} - \frac{2}{5}, \forall x$

nên $P(1) = -\frac{1}{15}$; $P(4) = \frac{14}{15}$

$P(x) = (x^2 - 5x + 6)Q(x) + \frac{x}{5} + \frac{2}{3}, \forall x$

nên $P(2) = \frac{16}{15}$; $P(3) = \frac{19}{15}$.

Khi đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a + b + c + d = -\frac{1}{15} \\ 64a + 16b + 4c + d = \frac{14}{15} \\ 8a + 4b + 2c + d = \frac{16}{15} \\ 27a + 9b + 3c + d = \frac{19}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 63a + 15b + 3c = 1 \\ 56a + 12b + 2c = -\frac{2}{15} \\ 37a + 7b + c = -\frac{5}{15} \\ d = a + b + c - \frac{1}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{15} \\ b = -\frac{13}{15} \\ c = \frac{49}{15} \\ d = -\frac{38}{15} \end{cases}$

Câu 4: Cho $Q(x) = (5x^2 + 3x - 10)^{64}$. Tính tổng các hệ số của đa thức chính xác đến hàng đơn vị.

Lời giải

Gọi tổng của các hệ số của đa thức là F, ta có:

$F = Q(1) = (5 + 3 - 10)^{64} = 2^{64}$

Ta có: $2^{64} = (2^{32})^2 = 4294967296^2$. Đặt: 42949 = X; 67296 = Y.

Ta có: F = $(X.10^5 + Y)^2 = X^2.10^{10} + 2XY.10^5 + Y^2$

Tính và kết hợp trên giấy, ta có:

$X^2.10^{10}$ =	1 8 4 4 6 1 6 6 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
$2XY.10^5$ =	5 7 8 0 5 9 1 8 0 8 0 0 0 0 0
Y^2 =	4 5 2 8 7 5 1 6 1 6
Vậy F =	1 8 4 4 6 7 4 4 0 7 3 7 0 9 5 5 1 6 1 6

Câu 5: Giá tiền mặt của một cái máy giặt là 13.940.000 đồng. Nếu mua trả góp thì tiền đặt cọc là 2.924.000 đồng và trả góp trong 24 tháng, mỗi tháng 544.000 đồng. Tìm sự chênh lệch giữa giá tiền trả góp và giá tiền mặt và biểu thị hiệu tìm được theo phần trăm của giá tiền mặt?

Lời giải

Tổng số tiền trả góp trong 24 tháng: 544.000đ*24= 13.056.000 đồng

Tiền trả góp: 2.924.000đ + 13.056.000đ = 15.980.000đ

Sự chênh lệch giữa giá tiền trả góp và giá tiền mặt: 15.980.000đ – 13.940.000đ = 2.040.000đ

Phần trăm chênh lệch so với giá tiền mặt: $\frac{2.040.000}{13.940.000}\times 100\% \approx 14,6341\%$

Câu 6: Giải phương trình nghiệm nguyên: $9x^2+12x=4y^2+17$.

Lời giải

Ta có:

$9x^2+12x=4y^2+17 \Leftrightarrow 9x^2+12x-4y^2-17=0$

$\Delta'=36+36y^2+153=9(4y^2+21)$

Phương trình có nghiệm nguyên khi $4y^2+21$ chính phương

$\Leftrightarrow 4y^2+21=t^2(t\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow (t-2y)(t+2y)=1.21=21.1=3.7=7.3$

$\Rightarrow (t;y)=(11;5),(11;-5),(5;1),(5;-1)$

$\Rightarrow (x;y)=(3;5),(3;-5),(1;1),(1;-1)$

Câu 7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy^2+4y^2+8=x(x+2) \\ x+y+3=3\sqrt{2y-1} \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện: $2y-1\ge 0 \Leftrightarrow y\ge\frac{1}{2}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$(x+4)(y^2-x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=y^2+2 \end{array}\right.$

Với $x=-4$, thế vào phương trình thứ hai ta được:

$y-1=3\sqrt{2y-1}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 1\\(y-1)^2=9(2y-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 1\\(y-1)^2=9(2y-1)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 1\\y^2-20y+10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 1\\y=10\pm 3\sqrt{10}\end{cases}\Leftrightarrow y=10+3\sqrt{10}$

Với $x=y^2+2$, thế vào phương trình thứ hai ta được $y^2+y+5=3\sqrt{2y-1}$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$VT(*)=\left(y^2-y+1\right)+(2y-1)+5>(2y-1)+5\ge 2\sqrt{5(2y-1)}>3\sqrt{2y-1}=VP(*)$

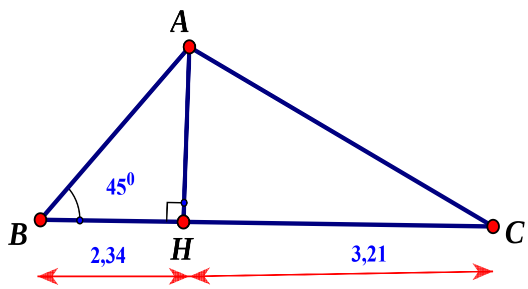
Do đó phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ là $x=-4,\ y=10+3\sqrt{10}$

Câu 8: Cho tam giác ABC với đường cao AH. Biết góc $\widehat{ABC}=45^0$, BH = 2,34cm, CH = 3,21cm. Tính gần đúng chu vi tam giác ABC.

Lời giải

Tam giác ABH vuông tại H và có $\hat{B}=45^0$ nên vuông cân tại H.



Suy ra:

$AB=BH\sqrt{2}=3,309259736$

Mặt khác:

$AC=\sqrt{AH^2+HC^2}=3,972367053$

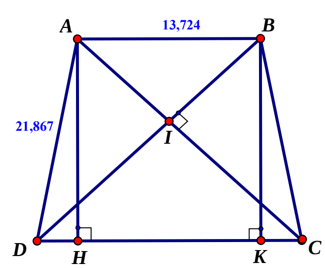
Hiển nhiên: $BC=BH+HC=2,34+3,21=5,55$

Vậy chu vi của tam giác ABC là: $AB+BC+AC=12,83162679$.

Câu 9: Một hình thang cân có hai đường chéo vuông góc với nhau. Đáy nhỏ 13,724 cm; cạnh bên 21,867 cm. Tính diện tích hình thang?

Lời giải

Ta có:



$AB^2=IA^2+IB^2\quad(1)$

$DC^2=ID^2+IC^2\quad(2)$

Lấy (1) cộng (2) vế theo vế ta được

$AB^2+DC^2=\left(IA^2+ID^2\right)+\left(IB^2+IC^2\right)$

$\Leftrightarrow AB^2+DC^2=2AD^2$

$\Rightarrow DC=\sqrt{2AD^2-AB^2}=\sqrt{2.(21,867)^2-13,724^2}$

$=27,71250985$

Mặt khác: $DH+HK+KC=DC\Leftrightarrow 2DH+AB=DC\Rightarrow DH=\dfrac{DC-AB}{2}$

$$AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=\sqrt{AD^2-\left(\frac{DC-AB}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{4AD^2-DC^2-AB^2+2DC.AB}{4}}$$

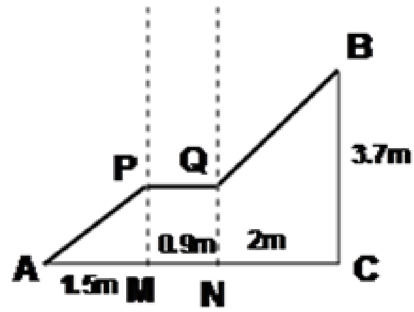
$$=\sqrt{\frac{\left(DC+AB\right)^2}{4}}=\frac{AB+CD}{2}$$

Do đó:

$$S_{ABCD}=\frac{AB+DC}{2}.AH=\frac{AB+DC}{2}.\frac{AB+CD}{2}=\frac{\left(AB+CD\right)^2}{4}\approx 429,2461cm^2.$$

Câu 10.

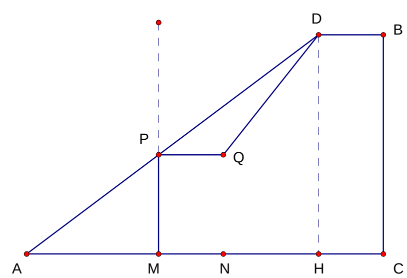
Người ta muốn làm một cầu thang để đi từ tầng dưới lên tầng trên của tòa nhà cao tầng. Đây là bản vẽ mặt cắt của cầu thang biểu diễn đường đi của môt người đi lên cầu thang. Xuất phát từ điểm A ở chân cầu thang và đi lên điểm B của đầu cầu thang phía trên.



Cầu thang có một chiếu nghỉ PQ // AC. Hãy xác định chiều cao của chiếu nghỉ để đoạn đường đi từ A đến B là ngắn nhất. Cho biết AM =1,5 m; MN = 0,9 m; NC = 2 m. PM và QN vuông góc với AC.

Lời giải

Xét điểm D sao cho MNBD là hình bình hành, điểm D cố định.



Ta có:

$AP + PQ + QB = AP + DB + PD$

$= AP + PD + DB$

$\geq AD + DB = \text{const}$

Dấu bằng xảy ra khi A, P, D là ba điểm thẳng hàng.

Khi đó chiều cao của chiếu nghỉ là:

$PM = AM \times \tan A = AM \times \dfrac{DH}{AH}$

Ta có:

$AM = 1,5\ ;\ DH = BC = 3,7m$

$AH = AC - HC = AM + MN + NC - HC$

$= AM + NC = 1,5 + 2 = 3,5m\left(\text{Do}\, MN = HC\right)$

Do đó: $PM = 1,5857$.

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 17

Bài 1: Tính

$$A=\frac{\left(2,09:1\frac{1}{10}+4,5\right)\cdot\frac{28}{11}+3,68}{\left(6\frac{3}{5}:6-0,125+\frac{2}{15}\cdot 0,3\right)}:\frac{\left[\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{225}\right).9+0,16\right]:\left(\frac{1}{3}-0,3\right)}{\left(5-1,1409:0,3\right):\left(4,2:12-0,21\cdot\frac{2}{3}\right)}$$

Lời giải

Thực hiện phép tính trên máy bình thường, có sử dụng biến nhớ.

Tính từng thành phần:

$$*\left(2,09:1\frac{1}{10}+4,5\right)\cdot\frac{28}{11}+3,68=\frac{5492}{275}\to C$$

$$*\left(6\frac{3}{5}:6-0,125+\frac{2}{15}\cdot 0,3\right)=\frac{203}{200}\to D$$

$$*\left[\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{225}\right).9+0,16\right]:\left(\frac{1}{3}-0,3\right)=15\to E$$

$$*\left(5-1,1409:0,3\right):\left(4,2:12-0,21\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{57}{10}\to F$$

Lúc đó: $A=\frac{C}{D}:\frac{E}{F}=\frac{C}{D}\times\frac{F}{E}=\frac{5492}{275}\times\frac{200}{203}\times\frac{57}{10}\times\frac{1}{15}=\frac{62608800}{8373750}=\frac{417392}{55825}$

Vậy $A=\frac{417392}{55825}$

Bài 2: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hai đường thẳng d_1 và d_2. Biết d_1 đi qua hai điểm $A(1;2); B(-2;3)$. Biết d_2 đi qua hai điểm $C(5;0); D(2;-1)$. Tìm tọa độ giao điểm I của d_1 và d_2.

Lời giải

Gọi $d_1: y = ax + b$. Ta có:

$A(1;2) \in d_1 \Rightarrow 2 = a + b$; $B(-2;3) \in d_1 \Rightarrow 3 = -2a + b$.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} a + b = 2 \\ -2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow d_1: y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{7}{3}.$

Gọi $d_2: y = cx + d$

$C(5;0) \in d_1 \Rightarrow 0 = 5a + b$; $D(2;-1) \in d_2 \Rightarrow -1 = 2a + b$.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5a + b = 0 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = -\dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow d_1: y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{5}{3}.$

Tọa độ giao điểm I là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{7}{3} \\ y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Vậy $I\left(6; \dfrac{1}{3}\right)$.

Bài 3: Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:

$u_1 = 15; u_2 = -10; u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$ với mọi n nguyên dương. Tính giá trị của u_{20} và tổng (ký hiệu là S_{20}) của 20 số hạng đầu tiên của dãy số đó.

Lời giải

Ta có: $u_1 = 15; u_2 = -10; u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$; $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

Với $S_1 = u_1 = 15$; $S_2 = u_1 + u_2 = 15 + (-10) = 5$; $S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = S_2 + u_3$; $S_4 = S_3 + u_4$; …

Ghi vào màn hình biểu thức:

$X = X + 1 : A = 2B + 3A : C = D + A : X = X + 1 : B = 2A + 3B : D = C + B$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$, nhập $X = 2; B = -10; A = 15; D = 5$

Ấn $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ …, ta sẽ tính được các giá trị của $u_n; S_n$

(Biến X là biến đếm; các biến A, B là giá trị của u_n; các biến C, D là giá trị của S_n)

Kết quả: $u_{20} = 1452826820$; $S_{20} = 2179240250$

Bài 4: Dự báo với mức độ tiêu thụ dầu không đổi như hiện nay, trữ lượng dầu của một Quốc gia sẽ hết sau 50 năm. Nếu thay vì mức tiêu thụ dầu không đổi, nhưng do nhu cầu thực tế mức tiêu thụ dầu tăng lên 3%/năm. Hỏi sau bao nhiêu năm số dầu dự trữ sẽ hết?

Lời giải

Gọi mức tiêu thụ dầu hằng năm là A. Khi đó lượng dầu dự trữ là $50A$.

Gọi x_n là lượng dầu sử dụng vào năm thứ n. Khi đó $x_1 = A$

Với tỉ lệ tăng 3%/năm thì $x_n = 1{,}03x_{n-1}$

Tổng lượng dầu sử dụng sau n năm là:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{n-1} + x_n = A + 1{,}03A + 1{,}03^2 A + ... + 1{,}03^{n-2} A + 1{,}03^{n-1} A$$

$$= A\left(1 + 1{,}03 + 1{,}03^2 + ... + 1{,}03^{n-2} + 1{,}03^{n-1}\right)$$

$$= \frac{A\left(1{,}03-1\right)\left(1{,}03^{n-1} + 1{,}03^{n-2} + ... + 1{,}03^2 + 1{,}03 + 1\right)}{1{,}03-1} = \frac{A\left(1{,}03^n - 1\right)}{0{,}03}$$

Để số dầu tiêu thụ hết thì:

$$\frac{A\left(1{,}03^n - 1\right)}{0{,}03} = 50A \Leftrightarrow \frac{\left(1{,}03^n - 1\right)}{0{,}03} = 50 \Leftrightarrow 1{,}03^n = 50.0{,}03 + 1 \Leftrightarrow 1{,}03^n = 2{,}5$$

Sử dụng chức năng $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{SOLVE}}$ ta tìm được $n \approx 31$.

Vậy trữ lượng dầu sẽ hết sau khoảng 31 năm.

*** Cách khác**: Ghi vào màn hình biểu thức: $X = X + 1 : A = A - 1.03^{X-1}$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ nhập $X = 0$, $A = 50$

Ấn $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ … đến khi nào giá trị của $A < 0$ thì dừng. Khi đó ta chọn được $X = 31$.

Vậy trữ lượng dầu sẽ hết sau khoảng 31 năm.

Bài 5: Cho biết $x_0 = \sqrt{1006 + \sqrt{2011}} - \sqrt{1006 - \sqrt{2011}}$ là nghiệm của phương trình ẩn x: $x^3 + ax^2 + bx + 14 = 0$ (với $a, b \in \mathbb{Q}$). Hãy tìm a, b và các nghiệm còn lại của phương trình.

Lời giải

Ta có: $x_0 = \sqrt{1006 + \sqrt{2011}} - \sqrt{1006 - \sqrt{2011}} = \sqrt{2}$

Vì x_0 là nghiệm của phương trình ẩn $x^3 + ax^2 + bx + 14 = 0$, nên ta có:

$$\left(\sqrt{2}\right)^3 + a\left(\sqrt{2}\right)^2 + b\left(\sqrt{2}\right) + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} + 2a + b\sqrt{2} + 14 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(2 + b\right) + \left(2a + 14\right) = 0 \quad (*)$$

Vì $a, b \in \mathbb{Q}$, nên từ (*) suy ra: $\begin{cases} b + 2 = 0 \\ 2a + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = -7 \end{cases}$

Khi đó, ta có phương trình: $x^3 - 7x^2 - 2x + 14 = 0$. Giải ra ta được ba nghiệm: $\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 7$

Vậy $a = -7; b = -2$ và các nghiệm còn lại của phương trình là 7 và $-\sqrt{2}$.

Bài 6: Tìm nghiệm đúng của hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^3+5y^3-2xy=6 \\ 2x^3+3y^3+3xy=8 \end{cases}$.

Lời giải

$$\text{HPT} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3=13xy-12 \\ x^3=22-21xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3y^3+(13xy-12)(21xy-22)=0 \\ x^3=22-21xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3=22-21xy \\ x^3y^3+273x^2y^2-538xy+264=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} xy=1 \\ xy=-137+\sqrt{19033} \\ xy=-137-\sqrt{19033} \end{array}\right. \\ x^3=22-21xy \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ \begin{cases} x=\sqrt[3]{2899-21\sqrt{19033}} \\ y=\sqrt[3]{-1973+13\sqrt{19033}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt[3]{2899+21\sqrt{19033}} \\ y=\sqrt[3]{-1793-13\sqrt{19033}} \end{cases} \end{array}\right.$$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm là:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=\sqrt[3]{2899-21\sqrt{19033}} \\ y=\sqrt[3]{-1973+13\sqrt{19033}} \end{cases}; \begin{cases} x=\sqrt[3]{2899+21\sqrt{19033}} \\ y=\sqrt[3]{-1793-13\sqrt{19033}} \end{cases}$$

Bài 7: Tìm số thực x để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất

$$P=\left(x^2-50x\right)\left(x^2-65x+636\right)+(636-15x)\left(x^2-65x+636\right)+x^2-24x+2014$$

Lời giải

Ta có:

$$P=\left(x^2-50x\right)\left(x^2-65x+636\right)+(636-15x)\left(x^2-65x+636\right)+x^2-24x+2014$$

$$=\left(x^2-65x+636\right)^2+(x-12)^2+1870\ge 1870$$

$$\Rightarrow \min P=1870 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-65x+636=0 \\ x-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=12$$

Bài 8: Tìm 4 chữ số tận cùng của số: 20132014^n với $n=2015^{2016}$.

Lời giải

Ta có:

$n=2015^{2016}\equiv 15^{2016}(\bmod 1000)$

Xét chu kỳ của 15^{2016} khi chia cho 1000 ta được:

$n\equiv 625(\bmod 1000)\Rightarrow n=1000k+625$

$$\Rightarrow A=20132014^n\equiv\left(2014^{1000}\right)^k.2014^{625}(\bmod 10000)$$

$$\Rightarrow A\equiv 9376^k.624\equiv 9376.624\equiv 0624(\bmod 10000)$$

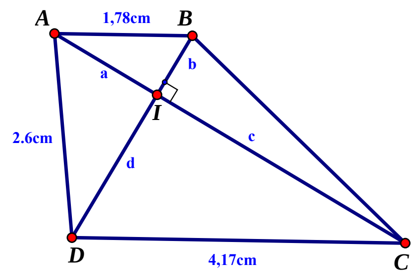
Vậy :4 chữ số tận cùng của A là 0624

Bài 9: Cho hình thang *ABCD* có hai đường chéo *AC* và *BD* vuông góc với nhau tại *I*, hai cạnh đáy *AB* = 1,78 (cm); *DC* = 4,17 (*cm*); cạnh bên *AD* = 2,6 (*cm*).

a) Tính độ dài cạnh bên *BC*.

b) Tính diện tích hình thang *ABCD*.

Lời giải



a) Đặt: AI = a; BI = b; CI = c; DI = d;

$a^2+b^2=AB^2, c^2+d^2=DC^2,$

$a^2+d^2=AD^2$

$\Rightarrow 2\left(a^2+d^2\right)+\left(b^2+c^2\right)$

$=AB^2+DC^2+AD^2$

Hay

$2AD^2+BC^2=AB^2+DC^2+AD^2$

$\Rightarrow BC^2=AB^2+DC^2-AD^2 \Rightarrow BC=\sqrt{AB^2+DC^2-AD^2}$

$=\sqrt{(1,78)^2+(4,17)^2-(2,6)^2}=3,714471699$

Vậy $BC\approx 3,7145(cm)$.

b) Ta có: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{AB}{DC}=\frac{1,78}{4,17}=0,4268585132=k;$ Suy ra: $a=kc; b=kd$

$AD^2=a^2+d^2=k^2c^2+d^2=k^2c^2+\left(DC^2-c^2\right)$

$\Rightarrow\left(1-k^2\right)c^2=DC^2-AD^2\Rightarrow c^2=\frac{DC^2-AD^2}{1-k^2}$

$\Rightarrow c=\sqrt{\frac{DC^2-AD^2}{1-k^2}}=\sqrt{\frac{4,17^2-2,6^2}{1-k^2}}=3,605145376$

Mặt khác:

$d^2=DC^2-c^2\Rightarrow d=\sqrt{DC^2-c^2}=\sqrt{4,17^2-3,605145376^2}\approx 2,095668585$

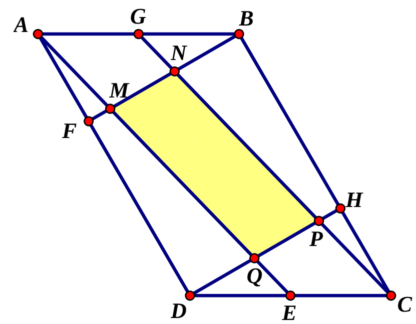
Từ đó: $a=kc=1,538886995;\ b=kd=0,8945539761.$

Diện tích hình thang ABCD là:

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AC\times BD)=\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\approx 7,690900825\approx 7,6909\left(m^2\right)$

Bài 10: Cho hình bình hành ABCD có AB = 11cm, AD = 12cm, $\widehat{BAD}=75^0$. Gọi E, G lần lượt là trung điểm cua hai cạnh CD, AB. Gọi F là điểm thuộc đoạn AD thỏa AD = 3AF. Gọi H là điểm thuộc BC thỏa CB = 3CH. Gọi M là giao điểm của AE và BF, gọi N là giao điểm của BF và CG, gọi P là giao điểm của CG và DH, gọi Q là giao điểm của DH và AE. Tính gần đúng diện tích tứ giác MNPQ.

Lời giải



Ta có: $QE=GN=\frac{1}{2}AM$

Mặt khác: $AM=\frac{1}{2}MQ$ nên $QE=\frac{1}{4}MQ$

Ta có:

$AE=AM+MQ+QE$

$=\frac{1}{2}MQ+MQ+\frac{1}{4}MQ=\frac{7}{4}MQ$

Suy ra: $S_{MNPQ}=\frac{4}{7}S_{AGCE}=\frac{4}{7}.\frac{1}{2}.S_{ABCD}$

$=\frac{2}{7}.AB.AD.\sin75^0=36,42920259\text{ cm}^2$

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 18

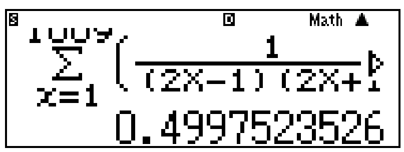
Bài 1: Tính gần đúng tổng sau: $S=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{2017.2019}$

Lời giải

Cách 1

Ta có:

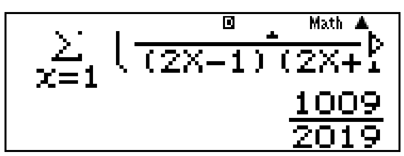
$$S=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{2017.2018}=\sum_{x=1}^{1009}\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{1009}{2019}\approx 0,4997523526.$$



Cách 2: Ta có

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+...+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2017}-\frac{1}{2019}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2019}\right)$$

$$=\frac{1009}{2019}\approx 0,4997523526.$$



Bài 2: Tìm tất cả các số có dạng $\overline{34x5y}$ chia hết cho 36.

Lời giải

Ta có: $\overline{34x5y}=34050+100x+y$, với $x,y\in\{0,1,...,9\}$

Chọn **MODE 7,** nhập $F(X)=(34050+X)\div 36$ với **START 0** , **END 9** và **STEP 1**

{Lưu ý: X ở đây chính là y }

X	$F(X)=(34050+X)\div 36$
0	945,83
1	945,86
2	945,88
3	945,91
4	945,94
5	945,97
6	946
7	946,02
8	946,05
9	946,08

Tiếp tục cho 34150 . Lúc đó $F(X)=(34150+X)\div 36$ với **START 0** , **END 9** và **STEP 1**

{Lưu ý: X ở đây chính là y }

X	$F(X)=(34150+X)\div 36$
0	948,61
1	948,63
2	948,66
3	948,69
4	948,72
5	948,75
6	948,77
7	948,8
8	948,83
9	948,86

Như vậy ở bảng trên không có giá trị $F(X)$ nào nguyên. Trường hợp này không thỏa

Tiếp tục quá trình trên cho đến 34950 {quá trình này thật ra là cho x chạy từ 0 đến 9, sau đó kiểm thử với giá trị của y}

Đáp số: 34056; 34452; 34956

Bài 3: Cho đa thức $g(x)=8x^3-18x^2+x+6$.

a) Tìm các nghiệm của đa thức $g(x)$.

b) Tìm các hệ số a, b, c của đa thức bậc ba $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, biết rằng khi chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $g(x)$ thì được đa thức dư là $r(x)=8x^2+4x+5$.

Lời giải

a) Ta có:

$$g(x)=8x^3-18x^2+x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\x=2\\x=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của đa thức $g\left(x\right)$ là $x=-\dfrac{1}{2};\ x=2;\ x=\dfrac{3}{4}$

b) Theo giả thiết ta cã: $f(x)=q.g(x)+8x^2+4x+5$

Suy ra:

$$\begin{cases}f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=r\left(-\dfrac{1}{2}\right)=5\\f(2)=r(2)=45\\f\left(\dfrac{3}{4}\right)=r\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{25}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{4}a-\dfrac{1}{2}b+c=5+\dfrac{1}{8}\\4a+2b+c=45-8\\\dfrac{9}{16}a+\dfrac{3}{4}b+c=\dfrac{25}{2}-\dfrac{27}{64}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{4}a-\dfrac{1}{2}b+c=\dfrac{41}{8}\\4a+2b+c=37\\\dfrac{9}{16}a+\dfrac{3}{4}b+c=\dfrac{773}{64}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{23}{4}\\b=\dfrac{33}{8}\\c=\dfrac{23}{4}\end{cases}$$

Vậy hàm số $f\left(x\right)=x^3+\dfrac{23}{4}x^2+\dfrac{33}{8}x+\dfrac{23}{4}$

Bài 4: Trên mặt phẳng tọa độ cho hai đường thẳng d và d' lần lượt có phương trình là: $y=\sqrt{2}x+\sqrt{3}$ và $y=-\sqrt{5}x+4$ chúng cắt nhau tại A. Gọi M là giao điểm của d với Ox, N là giao điểm của d' với Ox. Tính gần đúng

a) Tọa độ điểm A

b) Diện tích tam giác AMN.

Lời giải

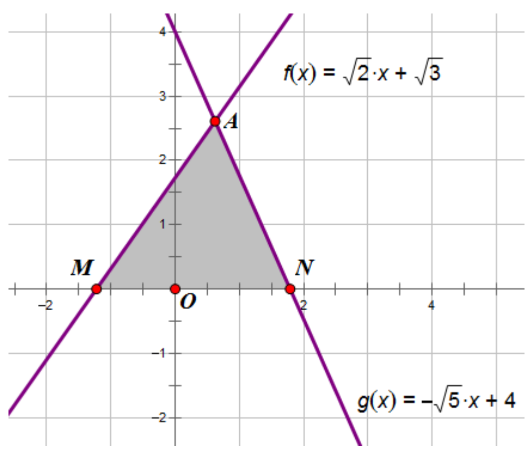
a) Giao điểm của d và d' là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{2}x-y=-\sqrt{3}\\\sqrt{5}x+y=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\approx0.621308019\\y\approx2,610713034\end{cases}$$

Vậy

$A\left(0.621308019;2,610713034\right)$



b) Giao điểm của d với trục hoành $x_M=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, giao điểm d' với trục hoành $x_N=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$. Độ dài đoạn $MN=\dfrac{4}{\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\approx3,013599253$

Diện tích tam giác AMN

$S_{AMN} = \frac{1}{2} y_A.MN == \frac{1}{2}.2,61071303.\left(\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \approx 3,933821425$

Bài 5: Với $x > 0$; $y > 0$. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} x = 1,357y \\ x^2 - y^2 = 2,468 \end{cases}$.

Lời giải

Từ

$x = 1,357\ y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 1,357 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} = 1,357^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} - 1 = 1,357^2 - 1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 - y^2}{y^2} = 1,357^2 - 1$

$\Rightarrow y^2 = \frac{x^2 - y^2}{1,357^2 - 1} = \frac{2,468}{1,357^2 - 1}$

Do $y > 0 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{2,468}{1,357^2 - 1}}$

Ta có : $x = 1,357y$

Nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases} x = 2,324012855 \\ y = 1,7126108 \end{cases}$.

Bài 6: Cho dãy sô $\{U_n\}$ được xác định như sau $U_1 = \frac{1}{3}$**;** $U_n = \frac{(n^2-1)U_{n-1}}{n(n+2)}$ **(Với** $n = 2;3;4\ldots$)

a)Viết quy trình bấm phím liên tục để tính U_n

b)Tím U_{12}; U_{13}; U_{14}; U_{15}.

c)Tính gần đúng giá trị của biểu thức: $A = U_1 + U_2 + U_3 + .. + U_{2013}$

Lời giải

a) $1 \to D$ {Biến đếm}; $\frac{1}{3} \to A$ {giá trị u_1 }

Ghi vào màn hình: $D = D + 1 : A = \frac{\left(D^2 - 1\right)A}{D\left(D + 2\right)}$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$

b) Thực hiện quy trình trên ta tìm được: $U_{12} = \frac{1}{168}; U_{13} = \frac{1}{195}; U_{14} = \frac{1}{224}; U_{15} = \frac{1}{255}$

c) Ta có $U_1 = \frac{1}{1.3}, U_2 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2.4}$, $U_3 = \frac{1}{15} = \frac{1}{3.5}$, …

Dự đoán và chứng minh bằng quy nạp ta có $U_n = \frac{1}{n(n+2)}$

Vậy

$$A=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{2013.2015}$$
$$=(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{2013.2015})+(\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+...+\frac{1}{2012.2014})$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2015})+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2014})$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{2015})+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2014})=0,7495035989$$

Bài 7: Bàn cờ vua có 64 ô. Ô thứ nhất đặt 2 hạt gạo, ô thứ hai trở đi đặt số gạo gấp đôi ô trước đó.

a) Số hạt gạo đặt ở ô thứ 64.

b) Tổng số hạt gạo đặt trên bàn cờ.

Lời giải

a) Ta có: Số hạt gạo ở ô 64 là $2^{64}=2^{32}.2^{32}$

Với $2^{32}=4294967296$. Thực hiện kỹ thuật nhân tràn số

$4294967296\times4294967296$ để tìm 2^{64}

Ô 64 có : $18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 556\ 616$ hạt.

b) Tổng số gạo trên bàn cờ là :

$$2+2^2+2^3+\ ...+\ 2^{64}=2\left(1+2+2^2+...+\ 2^{63}\right)$$
$$=\ 2.\ \frac{(2-1)\left(1+2+2^2+\ ...\ +\ 2^{63}\right)}{2-1}\ =\ \left(2^{64}-1\right).2$$

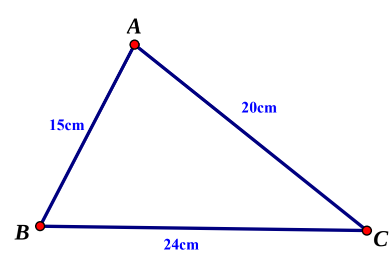
Thực hiện nhân trên giấy để lấy kết quả là : $36\ 893\ 488\ 147\ 419\ 113\ 230$

Bài 8: Cho tam giác ABC có $AB=15cm; AC=20cm; BC=24cm.$

a) Tính gần đúng (độ, phút, giây) các góc của tam giác ABC

b) Gọi M, N là trung điểm của AB và AC. Tính gần đúng diện tích tam giác CMN.

Lời giải



a) Áp dụng định lý Cosin trong tam giác ABC

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A$$
$$\Rightarrow \cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}$$

Bấm máy ta tìm được:

$A\approx85^0 16' 56,26''$.

Tương tự ta tính được

$B\approx56^0 9' 18,91''; C\approx38^0 31' 83''$

b) Ta có:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{1}{2}.15.20.\sin 85^0 16' 56,26''\approx149,4989548$$

$SCM=\frac{1}{4}S_{ABC}\approx 37,3747387$

Bài 9: Cho hình chữ nhật có diện tích bằng $100(cm^2)$. Hỏi mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để chu vi của nó nhỏ nhất?

Lời giải

Gọi x, y là các kích thước của hình chữ nhật, $(x,y>0)$

Chu vi hình chữ nhật là: $P=2(x+y)=2x+2y$

Theo đề bài thì: $xy=100$ hay $y=\frac{100}{x}$.

Do đó: $P=2(x+y)=2x+\frac{200}{x}\ge 2\sqrt{400}=40$ với $x>0$

P nhỏ nhất bằng 40 khi $2x=\frac{200}{x}\Leftrightarrow x=10\Rightarrow y=10$

Bài 10: Cho a, b, c là các số dương thay đổi thỏa mãn điều kiện: $5a^2+2abc+4b^2+3c^2=60$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=a+b+c$.

Lời giải

Ta có: $5a^2+2abc+4b^2+3c^2=60$

$\Leftrightarrow 5a^2+2abc+4b^2+3c^2-60=0$

$\Delta=(bc)^2-5\left(4b^2+3c^2-60\right)=\left(15-b^2\right)\left(20-c^2\right)$

Vì

$5a^2+2abc+4b^2+3c^2=60\Rightarrow 4b^2\le 60$ và $3c^2\le 60$ $\Rightarrow$ $b^2\le 15$

và $c^2\le 20\Rightarrow\left(15-b^2\right)\ge 0$ và $\left(20-c^2\right)\ge 0$

$$\Rightarrow \Delta_a\ge 0\ \Rightarrow a=\frac{-bc+\sqrt{(15-b^2)(20-c^2)}}{5}\le\frac{-bc+\frac{1}{2}(15-b^2+20-c^2)}{5}$$

$$\Rightarrow a\le\frac{-2bc+35-b^2-c^2}{10}=\frac{35-(b+c)^2}{10}$$

$$\Rightarrow a+b+c\le\frac{35-(b+c)^2+10(b+c)}{10}=\frac{60-(b+c-5)^2}{10}\le 6$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}b+c-5=0\\15-b^2=20-c^2\\a+b+c=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\\c=3\end{cases}$

Vậy Giá trị lớn nhất của A là 6 đạt tại $a=1;\ b=2;\ c=3$.

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA
KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 19

Bài 1: Cho α và β là hai góc nhọn và $\sin\alpha = 0,7896$; $\cos\beta = 0,8191$. Tính $Q = \alpha + 2\beta$. (Chính xác đến giây).

Lời giải

Từ $\sin\alpha = 0,7896 \Rightarrow \alpha = 52^0 8'53,33'' \to A$;

Từ $\cos\beta = 0,8191 \Rightarrow \beta = 35^0 0'18,71'' \to B$

Lúc đó: $Q = \alpha + 2\beta = A + 2B = 122^0 9'30,76''$

Bài 2: Cho biểu thức $A = \left(4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x - 2\right)^{2012} + 2013$ **.** Bằng phép toán , tính giá trị của A khi $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$

Lời giải

Ta có

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \Rightarrow 2x + 1 = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 1 = 0$$

Mặt khác:

$$A = \left(4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x - 2\right)^{2012} + 2013$$

$$= \left\{x^3\left(4x^2 + 4x - 1\right) - x\left(4x^3 + 4x - 1\right) + \left(4x^2 + 4x - 1\right) - 1\right\}^{2012} + 2013$$

Do đó: $A = (-1)^{2012} + 2013 = 2014.$

Lời bình: Ta có thể kiểm tra lại bằng MTCT như sau:

Nhập vào màn hình: $\left(4X^5 + 4X^4 - 5X^3 + 5X - 2\right)^{2012} + 2013$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và khai báo $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$ rồi ấn $\boxed{=}$ ta được kết quả là 2014.

b)

Bài 3: Tìm tất cả các số có 10 chữ số là luỹ thừa bậc 5 của một số tự nhiên và có chữ số hàng đơn vị là 4.

Lời giải

Lấy căn bậc 5 của 1000000000 (Số nhỏ nhất có 10 chữ số) được: 63

Lấy căn bậc 5 của 9999999999 (Số lớn nhất có 10 chữ số) được: 100

Cho X chạy từ 63 đến 100. Tính X^5.

Khai báo $62 \to X$

Ghi vào màn hình: $X = X + 1 : D = X^5$

Ấn $\boxed{\text{CACL}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$ cho đến khi $X = 100$ thì dừng. Quan sát các số thỏa điều kiện (Chữ số tận cùng bằng 4) là: 1073741824; 2219006624; 4182119424; 7339040224.

Bài 4: Cho dãy số $u_n = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2\sqrt{3}}$

a) Lập một công thức truy hồi để tính u_{n+2} theo u_{n+1} và u_n .

b) Tìm u_{15}; u_{20}.

Lời giải

a) Đặt $a = (2+\sqrt{3}); b = (2-\sqrt{3})$

Ta có : a + b = 4 và ab = 1

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{2\sqrt{3}} = \frac{(a+b)(a^{n-1}-b^{n-1}) - a^{n-1}b + ab^{n-1}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4(a^{n-1}-b^{n-1}) - ab(a^{n-2}-b^{n-2})}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4(a^{n-1}-b^{n-1})}{2\sqrt{3}} - \frac{(a^{n-2}-b^{n-2})}{2\sqrt{3}} = 4u_{n-1} - u_{n-2}$$

Vậy $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$ hay $u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$

b) Với $u_n = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2\sqrt{3}}$ ta tìm được $u_1 = 1; u_2 = 4$

$2 \to D$ {biến đếm} ; $1 \to A$ {giá trị u_1 } ; $4 \to B$ {giá trị u_2 }

Ghi vào màn hình : $D = D + 1 : A = 4B - A : D = D + 1 : B = 4A - B$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$

u_{15} =109 552 575; $u_{20} = 7,931591298 \times 10^{10}$

Để tìm giá trị chính xác của u_{10} ta ấn $\boxed{-}7,931591298 \times 10^{10}$ ta được kết quả là 4.

Như vậy $u_{20} = 79315912984$.

Bài 5: a) Một người vào bưu điện chuyển tiền cho người thân. Trong ví có 5 triệu đồng. Phí chuyển tiền là 0,9% tổng số tiền gởi đi. Tìm số tiền tối đa mà người thân nhận được.

b) Một số tiền 58 000 000 đồng được gửi tiết kiệm theo lãi kép (sau mỗi tháng tiền lãi được cộng thành vốn). Sau 25 tháng thì được cả vốn lẫn lãi là 84 155 000 đ. Tính lãi suất/tháng .

Lời giải

a) Gọi x là số tiền người thân nhận được.

Theo đê ta có phương trình:

$x + 0,9\%x = 5000000 \Leftrightarrow x = 5000000 \div \left(1 + 0,9\%\right) = 4\,955\,401,388$

b) Áp dụng công thức tính lãi suất kép: $P = A\left(1 + x\right)^n$

Với A là vốn ban đầu; x là lãi xuất; P là số tiền (cả gốc lẫn lãi sau n tháng).

Rút được $x = \sqrt[n]{\dfrac{P}{A}} - 1 = \sqrt[25]{\dfrac{84155000}{58000000}} - 1 \approx 0,015$.

Vậy lãi xuất $x \approx 0.015 \approx 1,5\%$

Bài 6: Cho đa thức: $P(x) = x^4 - 8x^3 - 41x^2 + 228x + 260$

a) Hãytìm số dư trong phép chia P(x) cho đa thức 2x + 5

b) Hãy tìm m để đa thức $P\left(x\right) + \dfrac{2}{3}m$ chia hết cho đa thức 2x - 7

c) Hãy tìm các nghiệm của đa thức P(x)

Lời giải

$P(x) = x^4 - 8x^3 - 41x^2 + 228x + 260$

a) Áp dụng định lý Bozu ta có dư của phép chia đa thức P(x) cho $2x + 5$ là $P\left(\dfrac{-5}{2}\right)$.

Ấn trên máy ta được số dư bằng: $-\dfrac{6435}{16}$

b) Để đa thức $P\left(x\right) + \dfrac{2}{3}m$ chia hết cho $2x - 7$ thì $P\left(x\right) + \dfrac{2}{3}m = \left(2x - 7\right).Q\left(x\right)$

$\Rightarrow P\left(\dfrac{7}{2}\right) + \dfrac{2}{3}m = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}m = -\dfrac{5805}{16} \Leftrightarrow m = -\dfrac{17415}{32}$

c) Xét phương trình: $x^4 - 8x^3 - 41x^2 + 228x + 260 = 0$

Sử dụng 580VN ta được của phương trình là: $x = -1$; $x = 9,483314774$; $x = 5$; $x = -5,483314774$.

Bài 7: Cho ΔABC vuông tại A đường cao AH, tia phân giác góc B cắt AC tại D. Biết DA = 2cm; DC = 3cm.

a) Tính số đo góc C và góc B của ΔABC.

b) Tính độ dài các đoạn thẳng AH; HB; HC.

Lời giải

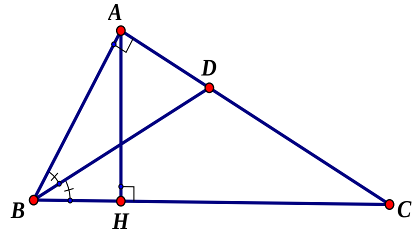
a) Ta có BD là phân giác của góc B suy ra

$\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{2}{3} = \sin C$

Từ đó tính được :

$\widehat{C} \approx 41^0 48'37,13''$ và

$\widehat{B} \approx 48^0 11'22,87''$



b) Áp dụng tỉ số lượng giác trong tam giác vuông ta có

$AH = AC.\sin C \approx 3,3333(cm)$

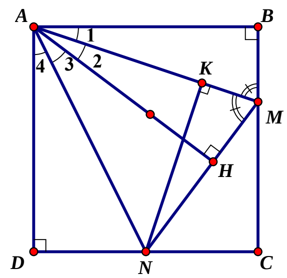
$HB = AH.\cot B \approx 2,9814(cm)$
$HC = AH.\tan B \approx 3,7268(cm)$

Bài 8: Cho hình vuông ABCD , điểm M thuộc cạnh BC sao cho BM=$\frac{1}{3}$BC.

a) Hãy xác định điểm N trên CD sao cho MA là tia phân giác của góc BM .
b)Tính diện tích tứ giác AMCN biết cạnh của hình vuông ABCD là 17,12013 cm.

Lời giải

a)



Đặt cạnh hình vuông là a
Áp dụng định lý pitago trong ΔAMB
ta có $AM = a\sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$
Kẻ $AH \perp MN$ tại H, $NK \perp AM$ tại K.
Theo bài ra $\widehat{AMB} = \widehat{AMN}$
Suy ra: $\Delta ABM \sim \Delta NKM$ mà

$AB = 3BM$ nên $NK = 3KM$
Mặt khác:
$\Delta ABM = \Delta AHM$ (góc nhọn và cạnh huyền) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$
$\Delta AND = \Delta AHN$ (cạnh góc vuông và cạnh huyền) $\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{A_4}$
Mà: $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} + \widehat{A_4} = 90^0 \Rightarrow \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 45^0$ hay $\widehat{MAN} = 45^0$
Suy ra ΔAKN vuông cân tại K nên AK=NK
Suy ra AK=3 KM hay AK=$\frac{3}{4}$ AM= $a\frac{3}{4}\sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$

Áp dụng định lý pitago trong ΔAKN : $AN^2 = 2AK^2 = \frac{20}{16}a^2$

Áp dụng định lý pitago cho ΔADN : $DN^2 = AN^2 - AD^2 = \frac{20}{16}a^2 - a^2 = \frac{1}{4}a$ Hay DN=$\frac{1}{2}$a.

Vậy N là trung điểm của DC.
b) Ta có: $S_{AMNC} = S_{ABCD} - (S_{ABM} + S_{ADN})$
Với
$S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.BM = \frac{1}{2}AB.\frac{1}{3}AB = \frac{1}{6}AB^2;$
$S_{ADN} = \frac{1}{2}AD.DN = \frac{1}{2}AD.\frac{1}{2}AD = \frac{1}{4}AB^2$
Như vậy
$S_{AMNC} = S_{ABCD} - (S_{ABM} + S_{ADN}) = a^2 - \left(\frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{4}a\right) = \frac{7}{12}a^2$

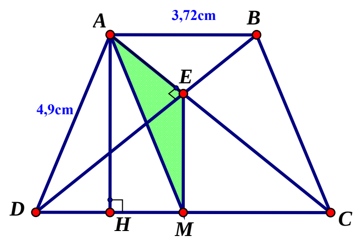
Thay số ta được $S_{AMNC} = \frac{7}{12}.(17,12013)^2 = 170,9743299$

Bài 9: Cho hình thang cân ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại E. Cho biết đáy nhỏ AB = 3,27cm và cạnh bên AD = 4,9cm.

a) Tính diện tích hình thang ABCD.

b) Gọi M là trung điểm của CD. Tính diện tích tam giác MAE.

Lời giải



a) Vẽ đường cao AH của hình thang ABCD.

Tam giác AEB vuông cân tại E nên $EA = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{3,72}{\sqrt{2}} = 2,630437226cm$ Ta có:

$$ED = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{4,9^2 - \left(\dfrac{3,72}{\sqrt{2}}\right)^2} = 4,134102079cm$$

$$DC = DE\sqrt{2} = 5,846503228cm$$

$$DH = \dfrac{DC - AB}{2} = 1,063251614cm$$

$$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = 4,783251614cm$$

Tính được $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AH.\left(AB + DC\right) = 22,879496cm^2$

b) Ta có:

$$S_{AMC} = \dfrac{1}{2}AH.MC = \dfrac{1}{2}AH.\dfrac{1}{2}CD = \dfrac{1}{4}AH.CD = 6,991324cm^2$$

$$AC = AE + EC = 2,630437226 + 4,134102079 = 6,764539305cm$$

$$\dfrac{S_{MAE}}{S_{MAC}} = \dfrac{AE}{AC}$$

$$\Rightarrow S_{MAE} = S_{MAC} \times \dfrac{AE}{AC} = 6,991324 \times \dfrac{2,630437226}{6,764539305} = 2,718624001cm^2$$

Bài 10: Tính nghiệm của phương trình sau: $\sqrt[3]{x+\sqrt[4]{2,468}} + \sqrt[3]{x - \sqrt[4]{2,468}} = \sqrt[3]{2x}$.

Lời giải

Đặt $a = \sqrt[4]{2,468}$ có phương trình $\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x-a} = \sqrt[3]{2x}$.

Lập phương hai vế ta được phương trình hệ quả

$$\Rightarrow x + a + x - a + 3\sqrt[3]{\left(x+a\right)\left(x-a\right)}\sqrt[3]{5x} = 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2 - a^2}.\sqrt[3]{5x} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0;\ x_{2;3} = \pm\ a$$

Với $a = \sqrt[4]{2,468}$, ta có $x_1 = 0;\ x_{2;3} = \pm\ 1,25339$. Thử lại kết quả, nhận cả 3 giá trị tìm được của x.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x_1 = 0;\ x_{2;3} = \pm\ 1,25339$.

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 20

Bài 1: Tính chính xác: $A = 123456^3$.

Lời giải

Ta có:

$$123456^3 = \left(123 \times 10^3 + 456\right)$$

$$= \underbrace{123^3 \times 10^9} + \underbrace{3 \times 123^2 \times 10^6 \times 456} + \underbrace{3 \times 123 \times 10^3 \times 456^2} + \underbrace{456^3}$$

Ta tính từng thành phần sau đó tổng lại

$$+\begin{cases} 123^3 \times 10^9 & = 1860867000000000 \\ 3 \times 123^2 \times 10^6 \times 456 & = 20696472000000 \\ 3 \times 123 \times 10^3 \times 456^2 & = 76728384000 \\ 456^3 & = 94818816 \end{cases}$$

$$= 1881640295202816$$

Vậy $A = 123456^3 = 1881640295202816$.

Bài 2: Cho biểu thức $P(x) = \dfrac{12x^3 + 21x^2 - 102x + 24}{x - 2} \quad (x \neq 2)$

a) Rút gọn biểu thức P(x).

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của P trên $[-2;\ 1]$

Lời giải

a) Ta có : $P(x) = \dfrac{12x^3 + 21x^2 - 102x + 24}{x - 2} = 12x^2 + 45x - 12$

b) Ta có:

$P(-2) = -54;$

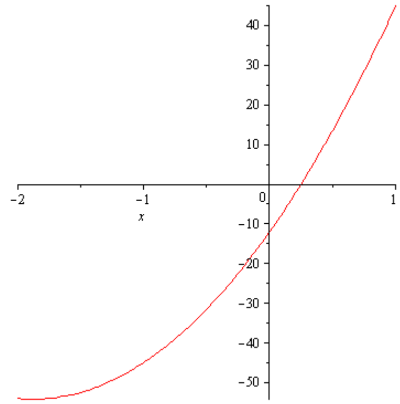
$P(-1,875) = -54,1875$

$P(1) = 45$

Dựa vào đồ thị hàm số $P(x) = 12x^2 + 45x - 12$ trên đoạn $[-2;1]$ ta thấy:

$P_{min} = -54,1875$ đạt được khi $x = -1,875$

$P_{Max} = 45$ đạt được khi $x = 1$



Bài 3: Tìm 3 chữ số cuối cùng bên phải của 7^{2012}.

Lời giải

Ta có

$7^{10} \equiv 249 (\text{mod } 1000); 7^{100} = (7^{10})^{10} \equiv 249^{10} (\text{mod } 1000);$

$249^2 \equiv 001 (\text{mod } 1000) \Rightarrow (249^2)^5 \equiv 001 (\text{mod } 1000)$

$\Rightarrow 7^{100} \equiv 001 (\text{mod } 1000)$

$\Rightarrow 7^{2000} \equiv 001 (\text{mod } 1000) \Rightarrow 7^{2012} \equiv 7^{2000} x 7^{10} x 7^2 \equiv 1x249x49 \equiv 201 (\text{mod } 1000)$

Vậy 3 chữ số cuối cùng bên phải là: 201.

Bài 4: Một người tiết kiệm tiền để mua một chiếc xe máy bằng cách hàng tháng gửi vào ngân hàng a đồng. Biết rằng lãi xuất của ngân hàng là 0,8%/tháng, hàng tháng không rút lãi ra.

a) Xây dựng công thức tính tổng số tiền tiết kiệm có được sau n tháng?

b) Đúng ba năm sau người đó mua được chiếc một xe máy trị giá 20 600 000 đồng . Hỏi hàng tháng người đó phải gửi vào ngân hàng một số tiền là bao nhiêu?

Lời giải

a) Gọi số tiền nhận được sau tháng thứ n là T_n. Số tiền gửi hàng tháng là a(đồng). Lãi suất hàng tháng là $m \ (\%)$

Sau 1 tháng số tiền cả gốc và lãi là: $T_1 = a + am = a(1+m)$

Đầu tháng thứ 2 số tiền là: $a(1+m) + a = a(1+m+1) = \frac{a}{m}\left[(1+m)^2 - 1\right]$

Sau 2 tháng số tiền cả gốc và lãi là:

$$T_2 = \frac{a}{m}\left[(1+m)^2 - 1\right] + \frac{a}{m}\left[(1+m)^2 - 1\right]m = \frac{a}{m}\left[(1+m)^2 - 1\right](1+m)$$

Đầu tháng thứ 3 số tiền là:

$$\frac{a}{m}\left[(1+m)^2 - 1\right](1+m) + a = a\left(\frac{\left[(1+m)^2 - 1\right](1+m)}{m} + 1\right) = \frac{a}{m}\left[(1+m)^3 - 1\right]$$

Sau 3 tháng số tiền cả gốc và lãi là: $T_2 = \frac{a}{m}\left[(1+m)^3 - 1\right](1+m)$.

....

Sau n tháng số tiền cả gốc và lãi là: $T_n = \frac{a}{m}\left[(1+m)^n - 1\right](1+m)$ (*)

Vậy Công thức tổng số tiền có được sau n tháng $T_n = \frac{a}{m}\left[(1+m)^n - 1\right](1+m)$

b) Từ (*) suy ra $a = \frac{T_n.m}{\left[(1+m)^n - 1\right](1+m)}$.

Thay $T_n = 20600000,\ m = 0,8\ \% = 0,008;\ n = 36$.

Vậy sau 3 năm (36 tháng) để có 20 600 000 đồng thì hàng tháng người đó phải gửi vào ngân hàng số tiền là: $a = \frac{20600000.0,008}{\left[(1+0,008)^{36} - 1\right](1+0,008)} =\ 492105,3$

Bài 5: Cho dãy số với số hạng tổng quát được cho bởi công thức: $U_n = \frac{(-1+\sqrt{5})^n - (-1-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}$ với

$n = 1, 2, 3, \ldots k, \ldots$

a) Tính U_1, U_2, U_3, U_4, U_5.

b) Lập công thức truy hồi để tính U_{n+2} theo U_{n+1}, U_n.

c) Lập quy trình ấn phím liên tục tính U_{n+2}.

Lời giải

a) Nhập biểu thức U_n vào máy và thay các giá trị của $n = 1,2,3,4,5$ ta được 5 số hạng đầu của dãy:
$U_1 = 1, U_2 = -2, U_3 = 8, U_4 = -24, U_5 = 80.$

b) Công thức truy hồi có dạng; $U_{n+2} = aU_{n+1} + b\,U_n + c$. Ta có hệ

$$\begin{cases} U_3 = aU_2 + bU_1 + c \\ U_4 = aU_3 + bU_2 + c \\ U_5 = aU_4 + bU_3 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b + c = 8 \\ 8a - 2b + c = -24 \\ -24a + 8b + c = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b - 4 \\ c = 0 \end{cases}$$

Vậy: $U_{n+2} = -2U_{n+1} + 4U_n$

c) Khai báo:

$2 \to D$ {biến đếm}; $1 \to A$ {giá trị U_1 }; $-2 \to B$ {giá trị U_2 }

Ghi vào màn hình: $D = D + 1 : A = -2B + 4A : D = D + 1 : B = -2A + 4B$

Ấn $\boxed{\text{CACL}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$

Bài 6: Cho : $x^3 + y^3 = 10,1003$ và $x^6 + y^6 = 200,2006$. Hãy tính gần đúng giá trị biểu thức $x^9 + y^9$.

Lời giải

Đặt $a = x^3;\ b = y^3$. Ta có: $\begin{cases} a + b = 10,1003 \\ a^2 + b^2 = 200,2006 \end{cases}$

Như vậy ta cần tính $a^3 + b^3$

Ta có:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)=(a+b)\left(a^2+b^2+\frac{a^2+b^2-(a+b)^2}{2}\right)$$

$$=(a+b)\left(\frac{3(a^2+b^2)}{2}-\frac{(a+b)^2}{2}\right)\approx 2517,932774.$$

Bài 7: Cho hình chữ nhật có chu vi là 17,356; tỷ số 2 kích thước là $\frac{5}{7}$. Tính độ dài đường chéo của hình chữ nhật.

Lời giải

Gọi cạnh hình chữ nhật là a và b.

Khi ấy đường chéo d của hình chữ nhật là $d=\sqrt{a^2+b^2}$

Theo bài ra ta có: $\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{5}{7}\\ a+b=\frac{17,336}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{a+b}=\frac{5}{5+7}=\frac{5}{12}\\ \frac{a+b}{b}=\frac{12}{7}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{5}{12}.(a+b)\\ b=\frac{12}{7}.(a+b)\end{cases}$

Vậy

$$d=\sqrt{\left(\frac{5}{12}(a+b)\right)^2+\left(\frac{7}{12}(a+b)\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{144}(a+b)^2+\frac{49}{144}(a+b)^2}$$

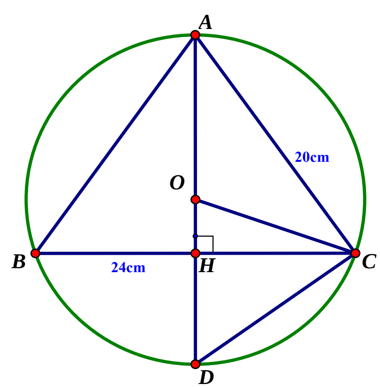
$$=\sqrt{\frac{74}{144}(a+b)^2}=\frac{(a+b)}{12}\sqrt{74}$$

$$=\frac{17,336}{12.2}\sqrt{74}=\frac{17,336}{24}\sqrt{74}\approx 6,213746285\,\text{cm}.$$

Vậy độ dài đường chéo của hình chữ nhật là: $6,213746285\,\text{cm}$.

Bài 8: Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt đường tròn tại D. Biết BC=24 cm, AC = 20 cm. Tính bán kính của đường tròn (O).

Lời giải



Ta có: HC = 12cm. Áp dụng định lý Pitago cho tam giác AHC:

$AH=\sqrt{AC^2-HC^2}=\sqrt{20^2-12^2}=16\text{cm}$

Rõ ràng AD là đường kính của đường tròn tâm O.

$\Rightarrow\widehat{ACD}=90^0$ vuông tại C.

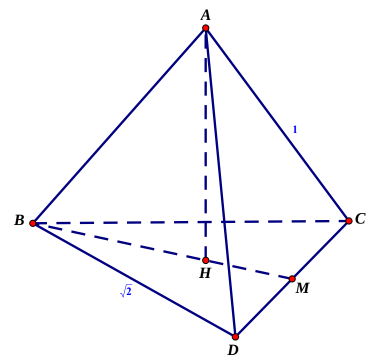
Áp dụng hệ thực lượng trong tam giác vuông ACD:

$AC^2=AH.AD\Rightarrow AD=\frac{AC^2}{AH}=\frac{20^2}{16}=25\text{cm}$

Vậy bán kính 12,5cm

Bài 9: Tính thể tích hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng $\sqrt{2}$ và các cạch bên bằng 1.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của CD, H là chân đường cao hạ từ A đến mặt phẳng đáy.

Vì hình chóp A.BCD là hình chóp đều nên H trùng với tâm của đáy

Xét tam giác BCM vuông tại M:

$$BM^2 = BC^2 - CM^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow BM = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow BH = \frac{2}{3}.BM = \frac{2}{3}.\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Xét Δ AHB vuông tại H:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow AH = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}.CD.BM = \frac{1}{2}.\sqrt{2}.\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$V = \frac{1}{3}.S_{BCD}.AH = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6} \approx 0,1666667.$$

Bài 10: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{x}\right)^2$ với $x + y = 1$ và $x > 0,\ y > 0$.

Lời giải

Ta có:

$$A = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + 4 = \left(x^2 + y^2\right)\left(1 + \frac{1}{x^2y^2}\right) + 4$$

Theo Bất đẳng thức Bunhiacovsky, ta có:

$$1 = (x + y)^2 \le 2\left(x^2 + y^2\right) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \ge \frac{1}{2}$$

Ta lại có: $(x + y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow 4 \le \frac{1}{xy} \Leftrightarrow 16 \le \frac{1}{x^2y^2}$

Do vậy: $A \ge \frac{1}{2}(1 + 16) + 4 = \frac{25}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x = y \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 21

Bài 1: Tính chính xác: $B = 200912^2 + 201081^2$

Lời giải

Ta có:

$$200912^2 = \left(2\times 10^5 + 912\right)^2 = 4\times 10^{10} + 4\times 912\times 10^5 + 912^2$$

$$201081^2 = \left(2010\times 10^2 + 81\right)^2 = 2010^2\times 10^4 + 2\times 81\times 2010\times 10^2 + 81^2$$

Tính toán từng thành phần và cộng lại theo hàng dọc {tính trên giấy} ta được kết quả

$B = 200912^2 + 201081^2 = 80799200305$

Bài 2: Cho $Q(x) = x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q$.

Biết $Q(1) = 5,\ Q(2) = 7,\ Q(3) = 9, Q(4) = 11$. Tính các giá trị của $Q(10), Q(11), Q(12), Q(13)$.

Lời giải

Theo đề đưa ra được hệ phương trình

$$\begin{cases} m+n+p+q=4 \\ 8m+4n+2p+q=-9 \\ 27m+9n+3p+q=-72 \\ 64m+16n+4p+q=-245 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-10 \\ n=35 \\ p=-48 \\ q=27 \end{cases}$$

Tính được $Q(10) = 3047,\ Q(11) = 5065,\ Q(12) = 7947,\ Q(13) = 11909$.

Bài 3: Tìm nghiệm nguyên dương x, y của phương trình: $y^2 + x^2\left(x^2 - y\right) = 81001$.

Lời giải

Phương trình đã cho trở thành: $y^2 - x^2y + x^4 - 81001 = 0$

Ta có: $\Delta = x^4 - 4.\left(x^4 - 81001\right) = 324004 - 3x^4$. Để phương trình đã cho có nghiệm thì

$$\Delta \ge 0 \Leftrightarrow 324004 - 3x^4 \ge 0 \Leftrightarrow x^4 \le \frac{324004}{3} \Rightarrow x \le 18$$.

Như vậy $0 < x \le 18, x \in \mathbb{Z}_+$

Nghiệm của phương trình:

$$\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{x^2+\sqrt{324004-3x^4}}{2} \\ y=\dfrac{x^2-\sqrt{324004-3x^4}}{2} \end{array}\right.$$

* Với $y=\dfrac{x^2+\sqrt{324004-3x^4}}{2}$ ta tìm nghiệm như sau:

Khai báo: $0 \to X$. Ghi vào màn hình $X=X+1:Y=\dfrac{X^2+\sqrt{324004-3X^4}}{2}$

Ấn $\boxed{\text{CACL}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$ ta được các cặp nghiệm: $(x,y)=(3,289);(x,y)=(17,280)$

* Với $y=\dfrac{x^2-\sqrt{324004-3x^4}}{2}$. Tương tự ta tìm được cặp nghiệm: $(x,y)=(17,9)$.

Bài 4: Cho dãy số $S_n=1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+n.(n+1).(n+2)$

a) Viết công thức tính S_n

b)Tính S_{2012} *(ghi kết quả dạng số tự nhiên).*

Lời giải

$S_n=1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+n.(n+1).(n+2)$

a) Ta có:

$$\begin{array}{l} 4.1.2.3 = 1.2.3.4 - 0.1.2.3 \\ 4.2.3.4 = 2.3.4.5 - 1.2.3.4 \\ 4.3.4.5 = 3.4.5.6 - 2.3.4.5 \\ 4.4.5.6 = 4.5.6.7 - 3.4.5.6 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 4.n(n+1)(n+2)=n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2) \end{array}$$

Cộng vế theo vế ta được: $4.S_n=n(n+1)(n+2)(n+3)$

Vậy $S_n=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

b) Ta có:

$S_{2012}=\dfrac{2012\times2013\times2014\times2015}{4}=503\times2013\times2014\times2015$

Ấn trực tiếp trên máy: $503\times2013\times2014\times2015$ ta được kết quả trên màn hình là: $4,109095895\times10^{12}$. Ấn tiếp $\boxed{\text{Ans}}\boxed{-}4,109095895\times10^{12}$ ta được kết quả 190 .

Vậy $S_{2012}=4109095895190$.

Bài 5: Giải phương trình

$$\sqrt{x+123234048-22012\sqrt{x+2102012}}+\sqrt{x+103426368-20132\sqrt{x+2102012}}=2014$$

Lời giải

Ta có:

$$x+12323408-22012\sqrt{x+2102012}=\left(\sqrt{x+2102012}-11006\right)^2$$

$x+103426368-20132\sqrt{x+2102012}=\left(\sqrt{x+2102012}-10066\right)^2$

Lúc đó, phương trình đã cho trở thành:

$$\left|\sqrt{x+2102012}-11006\right|+\left|\sqrt{x+2102012}-10066\right|=2014 \quad (2)$$

- Nếu $x \ge 119030024$ thì từ (2) có :

$\sqrt{x+2102012}-11006+\sqrt{x+2102012}-10066=2014$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2102012}=\ 23086 \Leftrightarrow \sqrt{x+2102012}=11543 \Leftrightarrow x=133240849$

- Nếu $x \le 99222344$ thì từ (2) có :

$11006-\sqrt{x+2102012}+10066-\sqrt{x+2102012}=\ 2014$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2102012}=19058 \Leftrightarrow \sqrt{x+2102012}=9529 \Leftrightarrow x=88699829$

- Nếu $99222344 <\ x < 119030024$ thì từ (2) có :

$\sqrt{x+2102012}-11006+10066-\sqrt{x+2102012}=2014 \Leftrightarrow 0x=2954$ vô lý

Vậy nghiệm của phương trình là $x=133240849$, $x=88699829$.

Bài 6: Tìm số tự nhiên có 3 chữ số $\overline{abc}$ thỏa mãn: $\begin{cases}\overline{abc}=n^2-1\\ \overline{cba}=(n-2)^2\end{cases}$ $(n \in N;\ n>2)$.

Lời giải

$\begin{cases}\overline{abc}=n^2-1\\ \overline{cba}=(n-2)^2\end{cases}$

Ta có:

$\overline{abc}=100a+10b+c=n^2-1$ (1) $\overline{cba}=100c+10b+a=n^2-4n+4$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $99\left(a-c\right)=4n-5 \Rightarrow \left(4n-5\right) \vdots 99$

Mặt khác: Từ (1): $100 \le n^2-1 \le 999 \Leftrightarrow 101 \le n^2 \le 1000 \Leftrightarrow 11 \le n \le 31$

Khai báo: $10 \to X$. Ghi vào màn hình: $X=X+1:Y=\dfrac{4X-5}{99}$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$ cho X chạy từ $11 \to 31$, quan sát giá trị Y nguyên.

Nhận thấy $X=16, Y=1.$ Hay n = 26.

Vậy $\overline{abc}=675$.

Bài 7: Cho tam giác ABC có $AB=3{,}123cm,\ AC=4{,}234cm,\ BC=5{,}432cm$. Tính độ dài đường cao và diện tích tam giác ABC.

Lời giải

Nữa chu vi của tam giác ABC là: $p=\dfrac{AB+BC+AC}{2}=6{,}3945$ **.**

Áp dụng công thức He-rong tính diện tích của tam giác

$S=\sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}=6{,}59559929$

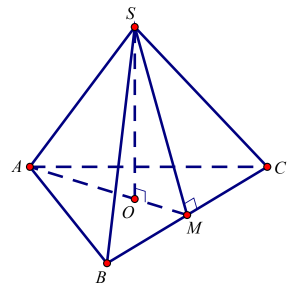
Ta có: $S=\dfrac{1}{2}AH.BC \Rightarrow AH=\dfrac{2S}{BC}=2{,}428423892.$.

Vậy diện tích tam giác ABC là: $6{,}59559929cm^2$ và đường cao của tam giác là $2{,}428423892cm$.

Bài 8: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh bên $SA=12cm$, $\widehat{BSC}=47^\circ$.

a) Tính thể tích khối chóp đều S.ABC.
b) Tính diện tích toàn phần của hình chóp đều S.ABC.

Lời giải



Gọi O là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, M là trung điểm BC.

a. $SM = 12.\cos 23,5^\circ$; $BC = 24\sin 23,5^\circ$;

$OM = 4\sqrt{3}.\sin 23,5^\circ.$

$SO = 12.\sqrt{\dfrac{3.\cos^2 23,5^\circ - \sin^2 23,5^\circ}{3}}$

$V = 576.\sin^2 23,5^\circ.\sqrt{3.\cos^2 23,5^\circ - \sin^2 23,5^\circ}$
$\approx 140,8138$

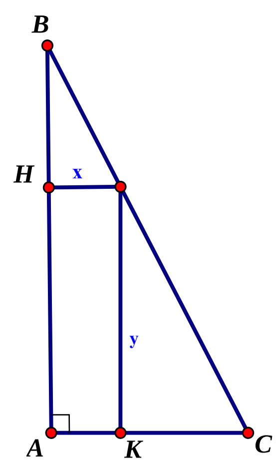
b. $S_{tp} = 144\left(3.\sin 23,5^\circ.\cos 23,5^\circ + \sqrt{3}\sin^2 23,5^\circ\right)$

$S_{tp} \approx 197,6296$

Bài 9: Cho tam giác vuông ABC vuông ở A. AB = 4,1 cm; AC = 3,2 cm. M là điểm thay đổi trên cạnh BC; gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB và AC. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác HMK.

Lời giải

Tứ giác AHMK có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật



Suy ra tam giác MHK vuông ở M.

Diện tích tam giác MHK là $S = \dfrac{xy}{2}$

Ta có:

Vì HM // AC nên $\dfrac{HM}{AC} = \dfrac{x}{3,2} = \dfrac{BM}{BC}\ (1)$

Vì MK//AB nên $\dfrac{MK}{AB} = \dfrac{y}{4,1} = \dfrac{MC}{CB}\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{x}{3,2} + \dfrac{y}{4,1} = 1$

Suy ra $1 \geq \dfrac{4xy}{3,2.4,1} \Rightarrow \dfrac{xy}{2} \leq \dfrac{3,2.4,1}{8} = 1,64$

Do đó, Diện tích tam giác MHK lớn nhất bằng 1,64 (cm^2) khi $\dfrac{x}{3,2} = \dfrac{y}{4,1} = \dfrac{1}{2}$ hay M là trung điểm BC.

Bài 10: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a.b=1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(2a+2b-3)(a^3+b^3)+\dfrac{7}{(a+b)^2}$

Lời giải

Ta có:

$$P=(2a+2b-3)(a^3+b^3)+\frac{7}{(a+b)^2}$$

$$<=>[2(a+b)-3](a+b)(a^2-ab+b^2)+\frac{7}{(a+b)^2}$$

Do a, b là các số dương, nên áp dụng BĐT Cô si ta có: $a^2+b^2\ge 2ab$

$$P\ge[2(a+b)-3](a+b)(2-ab)+\frac{7}{(a+b)^2}$$

$$=[2(a+b)-3](a+b)(2-1)+\frac{7}{(a+b)^2}$$

$$=[2(a+b)-3](a+b)+\frac{7}{(a+b)^2}$$

$$=2(a+b)^2-3(a+b)+\frac{7}{(a+b)^2}$$

$$=\frac{7}{16}(a+b)^2+\frac{7}{(a+b)^2}+[\frac{5}{4}(a+b)-\frac{5}{2}]^2+\frac{13}{4}(a+b)-\frac{25}{4}$$

Ta có:

$$\frac{7}{16}(a+b)^2+\frac{7}{(a+b)^2}\ge 2\sqrt{\frac{7}{16}(a+b)^2.\frac{7}{(a+b)^2}}=\frac{7}{2}$$

$$[\frac{5}{4}(a+b)-\frac{5}{2}]^2\ge[\frac{5}{4}.2\sqrt{ab}-\frac{5}{2}]^2\ge 0$$

$$\frac{13}{4}(a+b)\ge\frac{13}{2}$$

Nên ta có: $P\ge\dfrac{7}{2}+0+\dfrac{13}{2}-\dfrac{25}{4}=\dfrac{15}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P = 15/4.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=b\\ab=1\end{cases}\Leftrightarrow$ a=b=1

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 22

Bài 1: Tính chính xác: $D=(5+2\sqrt{6})^{14}+(5-2\sqrt{6})^{14}$

Lời giải

Nhập trực tiếp vào màn hình: $(5+2\sqrt{6})^{14}+(5-2\sqrt{6})^{14}$ ta được kết quả là:

$8,674929204\times10^{13}$. Ấn tiếp $\boxed{\text{Ans}}\boxed{-}8,674929204\times10^{3}$ ta được kết quả 4898

Vậy $D=86749292044898$.

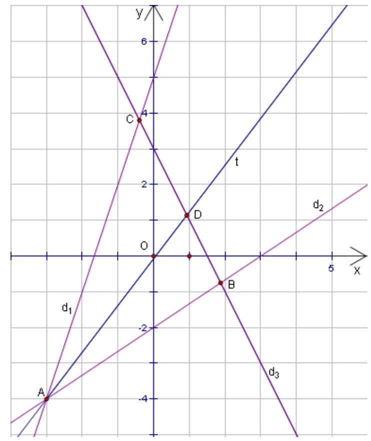
Bài 2: Cho 3 đường thẳng $(d_1);(d_2);(d_3)$ lần lượt là đồ thị của các hàm số $y=3x+5;\ y=\frac{2}{3}x-2$ và $y=-2x+3$. Hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau tại A; hai đường thẳng (d_2) và (d_3) cắt nhau tại B; hai đường thẳng (d_3) và (d_1) cắt nhau tại C.

a) Tìm tọa độ của các điểm A, B, C (viết dưới dạng phân số).

b) Tính gần đúng hệ số góc của đường thẳng chứa tia phân giác trong góc A của tam giác ABC và tọa độ giao điểm D của tia phân giác trong góc A với cạnh BC.

c) Tính gần đúng diện tích phần hình phẳng giữa đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Kết quả làm tròn đến 2 chữ số lẻ thập phân.

Lời giải



$d_1: y = 3x + 5$; $d_2: y = \frac{2}{3}x - 2$ và $d_3: y = -2x + 3$.

Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - y = -5 \\ \frac{2}{3}x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}. \text{ Vậy } A(-3; -4).$$

Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ \frac{2}{3}x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{8} \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases}. \text{ Vậy } B\left(\frac{15}{8}; -\frac{3}{4}\right)$$

Tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{8} \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases}. \text{ Vậy } C\left(-\frac{2}{5}; \frac{19}{5}\right)$$

b) $\widehat{A} = \tan^{-1} 3 - \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$. Góc giữa tia phân giác At và Ox là:

$$\tan^{1-}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} 3 + \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

Suy ra: Hệ số góc của At là: $a = \tan\left[\frac{1}{2}\left(\tan^{-1} 3 + \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)\right]$

Chuyển máy về chế độ **rad**

Nhập trực tiếp vào màn hình : $\tan\left[\frac{1}{2}\left(\tan^{-1} 3 + \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)\right]$ ấn $\boxed{=}$ ta được kết quả

$a \approx 1.309250386 \to A$ {lưu vào ô nhớ A}

Đường thẳng chứa tia phân giác At là đồ thị của hàm số: $y = ax + b$, At đi qua điểm $A(-3; -4)$ nên $b = 3a - 4$.

Tọa độ giao điểm D của At và BC là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ ax - y = -3a + 4 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình này bằng cách nhập a_2 chính là A {biến nhớ A}, c_2 chính là $-3A + 4$ ta được: $D(0,928382105; 1,143235789)$

c) Ta có : $AB = \sqrt{\left(\frac{15}{8} + 3\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{4}\right)^2} = \frac{13\sqrt{13}}{8} \to A$

$$BC = \sqrt{\left(\frac{15}{8} + \frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{19}{5} + \frac{3}{4}\right)^2} = \frac{91\sqrt{5}}{40} \to B$$

$CA=\sqrt{\left(3-\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{19}{5}+4\right)^2}=\frac{13\sqrt{10}}{5}\to C$

Nưa chu vi: $p=\frac{A+B+C}{2}=9,583998694\to D$

Diện tích của tam giác ABC: $S_{ABC}=\sqrt{D(D-A)(D-B)(D-C)}=\frac{1183}{80}\to E$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC: $R=\frac{abc}{4S}=4,142953355\to F$

Bán kính đường tròn nội tiếp ABC : $r=\frac{S_{ABC}}{p}=1,542936354\to X$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ABC : $S=\pi R^2-\pi r^2=\pi\left(R^2-r^2\right)=94,59130462$

Bài 3: Tìm chữ số tận cùng của tổng: S = $2^1+3^5+4^9+...+505^{2013}$.

Lời giải

Trước tiên, ta nhận xét rằng: $n^5-n=n(n-1)(n+1)\left(n^2+1\right)$ là số chẵn và chia hết cho 5 nên có tận cùng bằng 0 (với mọi số tự nhiên n)

Mặt khác, ta có: $n^{4k+1}-n=n\left(n^{4k}-1\right)$ chia hết cho $n\left(n^4-1\right)=n^5-n$

Nên $n^{4k+1}-n$ cũng là số có tận cùng bằng 0.

Như vậy, tổng:

$\left(2^1-2\right)+\left(3^5-3\right)+\left(4^9-4\right)+...+\left(505^{2013}-505\right)$ có tận cùng bằng 0.

Suy ra chữ số tận cùng của tổng: S = $2^1+3^5+4^9+...+505^{2013}$ chính là chữ số tận cùng của tổng:

$2+3+4+...+504+505=\frac{1}{2}.504.507=127764$

Vậy chữ số tận cùng của tổng S là 4.

Bài 4: Cho dãy số: $U_n=\frac{\left(5+\sqrt{7}\right)^n-\left(5-\sqrt{7}\right)^n}{2\sqrt{7}}$ (với $n\in N$)

a) Tìm 8 số hạng đầu tiên của dãy số

b) Lập công thức tính U_{n+2} theo U_{n+1} và U_n

c) Lập quy trình bấm phím liên tục tính U_{n+2} theo U_{n+1} và U_n .

Lời giải

$U_n=\frac{(5+\sqrt{7})^n-(5-\sqrt{7})^n}{2\sqrt{7}}$ **(với $n\in N$)**

a) Nhập vào màn hình : $\frac{(5+\sqrt{7})^X-(5-\sqrt{7})^X}{2\sqrt{7}}$

Ấn $\boxed{\text{CACL}}$ nhập các giá trị của X và ấn $\boxed{=}$ ta được các kết quả

n	0	1	2	3	4	5	6	7
U_n	0	1	10	82	640	4924	37720	288568

b) Giả sử $U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n + c$, từ kết quả trên ta có :

$U_3 = aU_2 + bU_1 + c \Leftrightarrow 10a + b + c = 82$

$U_4 = aU_3 + bU_2 + c \Leftrightarrow 82a + 10b + c = 640$

$U_5 = aU_4 + bU_3 + c \Leftrightarrow 640a + 82b + c = 4924$

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 10a + b + c = 82 \\ 82a + 10b + c = 640 \\ 640a + 82b + c = 4924 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = -18. \\ c = 0 \end{cases}$

Vậy $U_{n+2} = 10U_{n+1} - 18U_n$

c) Khai báo : $1 \to D$ {biến đếm} ; $0 \to A$ {giá trị U_0 } ; $1 \to B$ {giá trị U_2 }

Ghi vào màn hình : $D = D + 1 : A = 10B - 18A : D = D + 1 : B = 10A - 18B$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$ ta được :

$\mathbf{U_{12} =}$ **7 541 585 920** ; $\mathbf{U_{13} =}$ **57 661 119 424** ; $\mathbf{U_{14} =}$ **440 826 647 680**

Lưu ý: Giá trị u_{13} và u_{14} ta phải xử lý kỉ thuật tràn màn hình.

Bài 5 : Tìm các số nguyên x, y, z, t thoả mãn: $\begin{cases} xy - 3zt = 1 \\ xz + yt = 2 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} xy - 3zt = 1 \\ xz + yt = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy - 3zt)^2 = 1 \\ 3(xz + yt)^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 - 6xyzt + 9z^2t^2 = 1 \\ 3x^2z^2 + 6xyzt + 3y^2t^2 = 12 \end{cases}$

Cộng vế với vế, ta được:

$x^2y^2 + 3x^2z^2 + 3y^2t^2 + 9z^2t^2 = 13$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3t^2)(y^2 + 3z^2) = 13 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 3t^2 = 1 \\ y^2 + 3z^2 = 13 \end{cases} (I) \\ \begin{cases} y^2 + 3z^2 = 1 \\ x^2 + 3t^2 = 13 \end{cases} (II) \end{array} \right.$$

* Giải (I): $\begin{cases} x^2 + 3t^2 = 1 & (1) \\ y^2 + 3z^2 = 13 & (2) \end{cases}$.

Từ (1) suy ra $t = 0, x = \pm 1$ thay vào hệ $\begin{cases} xy - 3zt = 1 \\ xz + yt = 2 \end{cases}$ ta được $y = \pm 1$, $z = \pm 2$

Như vậy, trường hợp này ta được nghiệm $(x, y, z, t) = (1, 1, 2, 0); (x, y, z, t) = (-1, -1, -2, 0)$

* Giải (II): Hoàn toàn tương tự ta tìm được nghiệm là:

$(x, y, z, t) = (1, 1, 0, 2); (x, y, z, t) = (-1, -1, 0, -2)$.

Vậy, các cặp số $(x; y; z; t)$ thỏa mãn điều kiện đề bài là :

$(x,y,z,t)=\{(1,1,2,0);(-1,-1,-2,0);(1,1,0,2);(-1,-1,0,-2)\}$

Bài 6: Cho P(x) là một đa thức bậc 4 có hệ số bậc cao nhất bằng 1 và thỏa mãn: $P(1)=10, P(2)=20, P(3)=30$. Tính: $P(12)+P(-8)$.

Lời giải

Xét đa thức: $H(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn $G(x)=P(x)+H(x)$ là đa thức có các nghiệm: 1; 2; 3. Tức là: $G(1)=G(2)=G(3)=0$.

Suy ra: $\begin{cases} a+b+c=-10 \\ 4a+2b+c=-20 \\ 9a+3b+c=-30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c=0 \\ b=-10 \end{cases}$

Suy ra: $P(x)=G(x)-H(x)=G(x)+10x$.

Vì $G(x)=P(x)+H(x)$ là đa thức có các nghiệm 1; 2; 3 và *P(x)* là một đa thức bậc bốn có hệ số bậc cao nhất bằng 1 nên có số thực a để: $G(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-a)$.

Vậy: $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-a)+10x$ nên:

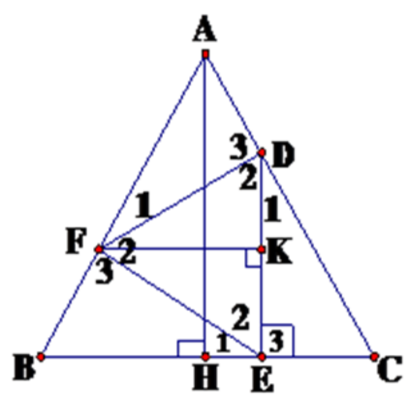
$P(12)+P(-8)=11.10.9.(12-a)+120+(-9).(-10).(-11).(-8-a)-80=19840$.

Bài 7: Cho tam giác DEF đều nội tiếp tam giác ABC đều, sao cho DE vuông góc với BC. Biết $S_{ABC}=b$.

a) Hãy tính S_{DEF} theo b;

b) Áp dụng tính S_{DEF} với $b=6\sqrt{13}$ cm².

Lời giải



a) Kẻ $AH\perp BC$, $FK\perp DE$

Dễ dàng chứng minh được $\hat{D}_3=\hat{F}_3=\hat{E}_3=90^0$

$\Rightarrow \Delta ADF=\Delta CED=\Delta BFE$.

Đặt $CE=a\Rightarrow DC=2a\Rightarrow AB=AC=BC=3a$.

$DF=EF=DE=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$.

$AH=\sqrt{AC^2-HC^2}=\sqrt{9a^2-\frac{9a^2}{4}}=\sqrt{\frac{27a^2}{4}}=\frac{3a}{2}\sqrt{3}$

$FK=\sqrt{DF^2-DK^2}=\sqrt{(a\sqrt{3})^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}$.

$=\sqrt{3a^2-\frac{3a^2}{4}}=\sqrt{\frac{9a^2}{4}}=\frac{3a}{2}$

Ta có:

$S_{DEF}=\frac{DE.FK}{2}=\frac{a\sqrt{3}.\frac{3a}{2}}{2}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$; $\quad S_{ABC}=\frac{BC.AH}{2}=\frac{3a.\frac{3a\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{9a^2\sqrt{3}}{4}$

Suy ra: $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{DEF}=\frac{1}{3}S_{ABC}=\frac{1}{3}b$

b) $S_{DEF}=\frac{1}{3}.6\sqrt{13}\approx 7,2111026\left(cm^2\right)$.

Bài 8: Cho tam giác ABC có các góc B và C nhọn, BC = 14 cm, đường cao AH = 11 cm. Tính diện tích hình vuông MNPQ có M thuộc AB, N thuộc AC, P và Q thuộc cạnh BC.

Lời giải

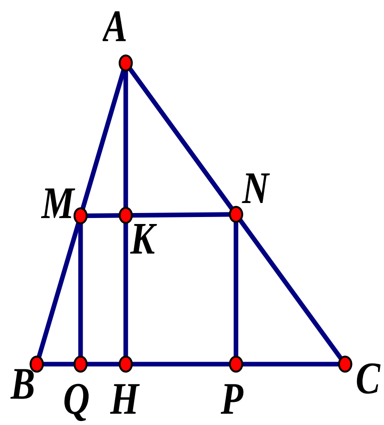
Gọi giao điểm của AH và MN là K.
Do MN song song với BC nên AK vuông góc với MN.
Tam giác AMN đồng dạng với tam giác ABC, do đó:

$\frac{AK}{AH}=\frac{MN}{BC}$.

Đặt $MN=KH=x,\ BC=a,\ AH=h$,

Ta có: $\frac{h-x}{h}=\frac{x}{a}$. Suy ra: $xh=ah-ax$

Hay $x\left(h+a\right)=ah$. Do đó: $x=\frac{ah}{a+h}$.



Diện tích hình vuông MNPQ: $x^2=\frac{(ah)^2}{(a+h)^2}$

Thay số ta được: $S=37,9456\ cm^2$.

Bài 9: Cho lăng trụ đứng ABC.A’B’C’ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. Biết $AB=3cm,\ BC'=3\sqrt{2}cm$. Thể tích khối lăng trụ đã cho

Lời giải

Diện tích đáy của khối lăng trụ:

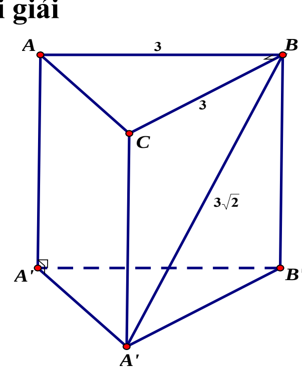
$S_{ABC}=\frac{9}{a}\left(cm^2\right)$

Chiều cao của khối lăng trụ:

$h=CC'=\sqrt{BC'^2-BC^2}=3\left(cm\right)$

Thể tích của khối lăng trụ đã cho:

$V=S_{ABC}.h=\frac{9}{2}.3=\frac{27}{2}\left(cm^3\right)$.



Bài 10: Với các số thực x, y thỏa mãn $x-\sqrt{x+6}=\sqrt{y+6}-y$ tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -6,\ y\ge -6$

Từ điều kiện đề bài ta có $x+y\ge 0$ và

$x+y=\sqrt{x+6}+\sqrt{y+6} \Leftrightarrow (x+y)^2 = x+y+12+2\sqrt{(x+6)(y+6)}$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm, ta có

$2\sqrt{(x+6)(y+6)} \le (x+6)+(y+6) = x+y+12$

$\Rightarrow (x+y)^2 = x+y+12+2\sqrt{(x+6)(y+6)} \le 2(x+y)+24$

$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 2(x+y) - 24 \le 0$

$\Leftrightarrow -4 \le x+y \le 6$

Khi $x=y=3$ thì $x+y=6$

Ta có $2\sqrt{(x+6)(y+6)} \ge 0$ nên từ (*) suy ra

$(x+y)^2 \ge x+y+12$

$\Leftrightarrow (x+y-4)(x+y+3) \ge 0$

$\Leftrightarrow x+y \ge 4 (\text{Do } x+y+3>0)$

Khi $x=10,\ y=-6$ hoặc $x=-6,\ y=10$ thì $x+y=4$

Vậy GTLN của P là 6 khi $x=y=3$ và GTNN của P là 4 khi $x=10,\ y=-6$ hoặc $x=-6,\ y=10$.

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 23

Bài 1: Rút gọn biểu thức A rồi tính giá trị tại điểm được chỉ ra

$$A=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}+\frac{\sqrt{a}}{a-1}\right):\left(\frac{2}{a}-\frac{2-a}{a\left(\sqrt{a}+1\right)}\right) \text{ với } a=2017\sqrt{2018}.$$

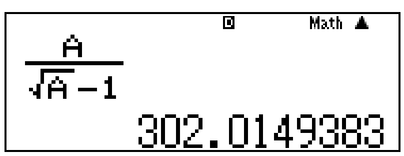
Lời giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} a\ge 0 \\ a\ne 1 \end{cases}$. Ta có:

$$A=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}+\frac{\sqrt{a}}{a-1}\right):\left(\frac{2}{a}-\frac{2-a}{a\left(\sqrt{a}+1\right)}\right)=\left(\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)}{a-1}+\frac{\sqrt{a}}{a-1}\right):\left(\frac{2\left(\sqrt{a}+1\right)}{a\left(\sqrt{a}+1\right)}-\frac{2-a}{a\left(\sqrt{a}+1\right)}\right)$$

$$=\frac{a+2\sqrt{a}}{a-1}.\frac{a\left(\sqrt{a}+1\right)}{a+2\sqrt{a}}=\frac{a}{\sqrt{a}-1}$$

b) Với $a=2017\sqrt{2018}$ thay vào A ta được: 302,0149383.



Bài 2: Tính tổng:

$$S=\sqrt{1+2010^2+\frac{2010^2}{2011^2}}+\frac{2010}{2011}+\sqrt{1+2011^2+\frac{2011^2}{2012^2}}+\frac{2011}{2012}+\sqrt{1+2012^2+\frac{2012^2}{2013^2}}+\frac{2012}{2013}.$$

Lời giải

Ta có:

$$2011^2=\left(2010+1\right)^2=2010^2+2.2010+1 \Rightarrow 1+2010^2=2011^2-2.2010$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+2010^2+\frac{2010^2}{2011^2}}+\frac{2010}{2011}=\sqrt{2011^2-2.2010+\frac{2010^2}{2011^2}}+\frac{2010}{2011}$$

$$=\sqrt{\left(2011-\frac{2010}{2011}\right)^2}+\frac{2011}{2012}=2011-\frac{2010}{2011}+\frac{2010}{2011}=2011$$

Tương tự:

$$\sqrt{1+2011^2+\frac{2011^2}{2012^2}}+\frac{2011}{2012}=2012;$$

$$\sqrt{1+2012^2+\frac{2012^2}{2013^2}}+\frac{2012}{2013}=2013;$$

Vậy $S=6036$.

Bài 3: Cho đa thức: $f(x)=(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+84x^5)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{50}x^{50}$.

Tính $S=a_1+a_2+...+a_{50}$

Lời giải

Ta có : $S=a_1+a_2+\ldots+a_{50}=f\left(1\right)=99^{10}$

Mà $99^{10}=(99^5)^2=9509900499^2=\left(95099.\,10^5+499\right)^2$

$=95099^2.10^{10}+2.95099.499.10^5+499^2=90438207500880449001$

Vậy $S=90438207500880449001$.

Bài 4: Cho dãy số với số hạng tổng quát được cho bởi : $U_n=\dfrac{\left(13+\sqrt{3}\right)^n-\left(13-\sqrt{3}\right)^n}{2\sqrt{3}}$ (**n** $\in N^*$)

a) Tính $U_1;\ U_2;\ U_3;\ U_4$ (chỉ ghi kết quả)

b) Chứng minh rằng : $U_n=\dfrac{U_{n+1}+166U_{n-1}}{26}$

c) Lập quy trình bấm phím tính U_{n+1} theo U_n và U_{n-1} rồi tính giá trị biểu thức $S=U_8-U_5$

Lời giải

a) $U_1=1; U_2=26;\ U_3=510;\ U_4=8944.$

b) Đặt $U_{n+1}=a.U_n+b.U_{n-1}$

Theo kết quả tính được ở trên, ta có:

$$\begin{cases}510=a.26+b.1\\8944=a.510+b.26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}26a+b=510\\510a+b26=8944\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=26\\b=-166\end{cases}$$

Vậy ta có công thức: $U_{n+1}=26U_n-166U_{n-1}\Rightarrow U_n=\dfrac{U_{n+1}+166U_{n-1}}{26}$

c) Khai báo: $2\rightarrow D$ {biến đếm}; $1\rightarrow A$ {giá trị u_1 }; $26\rightarrow B$ {giá trị u_2 }

Ghi vào màn hình: $D=D+1:A=26B-166A:D=D+1:B=26A-166B$

Ấn $\boxed{\text{CACL}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$ ta được các giá trị:

$U_5=147\ 884;\ U_6=2\ 360\ 280;\ U_7=36\ 818\ 536;\ U_8=565\ 475\ 456$

$\Rightarrow U_8-U_5=565\ 327\ 572.$

Bài 5 : Cho x,y là các số thực thỏa điều kiện: $\begin{cases}\left(x^3-3xy^2\right)^2=51\\ \left(y^3-3x^2y\right)^2=13\end{cases}$. Tìm hai chữ số tận cùng của

$P=\left(x^2+y^2\right)^{2012}$.

Lời giải

Từ $\begin{cases}\left(x^3-3xy^2\right)^2=51\\ \left(y^3-3x^2y\right)^2=13\end{cases}$ Suy ra: $\left(x^3-3xy^2\right)^2+\left(y^3-3x^2y\right)^2=64$ khai triển ra ta được:

$\left(x^2+y^2\right)^3=64$ nên $x^2+y^2=4.$ Vậy $P=\left(x^2+y^2\right)^{2012}=4^{2012}$

Ta có:

$4^{1792}\equiv 16\left(\text{mod}100\right)$

$4^{220}\equiv 76\left(\text{mod}100\right)$

$\Rightarrow 4^{1792}\times 4^{220}=4^{2012}\equiv 16\times 76\left(\text{mod}100\right)\equiv 16\left(\text{mod}100\right).$

Vậy hai chữ số tận cùng của P là 16.

Bài 6: Một người gửi vào ngân hàng một số tiền là a đồng với lãi suất m% một tháng. Biết rằng người đó không rút tiền lãi ra.

a) Hỏi sau n tháng người đó nhận được bao nhiêu tiền cả gốc và lãi.

b) Áp dụng khi $a=50\ 000\ 000;\ m=1,2\%;\ n=24$ *(làm tròn đến đồng)*

c) Để có trên 100 000 000 người đó phải gửi ít nhất bao nhiêu tháng?

Lời giải

a) Gọi số tiền có được sau n tháng gửi là A (đồng) ta có $A=a.\left(1+m\%\right)^n$

Chứng minh bằng quy nạp:

Với $n=1$ ta có $A=a.\left(1+m\%\right)=a+a.m\%$ (đúng)

Giả sử đúng với $n=k$ nghĩa là $A_k=a.\left(1+m\%\right)^k$ ta phải chứng minh $A_{k+1}=a.\left(1+m\%\right)^{k+1}$

Thật vậy ta có

$A_{k+1}=A_k+A_k.m\%=a.\left(1+m\%\right)^k+a.\left(1+m\%\right)^k.m\%$

$=a.\left(1+m\%\right)^k\left(1+m\%\right)=a.\left(1+m\%\right)^{k+1}$

Vậy $A = a.\left(1 + m\%\right)^n$

b) Với $a = 50\ 000\ 000$ đồng, $m = 0{,}012$, $n = 24$ tháng thì số tiền người đó nhận được là:

$A = 50\ 000\ 000\left(1 + 0{,}012\right)^{24} = 66\ 573\ 640$ đồng

c) Ta có $A = a.1{,}012^n$ suy ra $1{,}012^n = \dfrac{A}{a}$

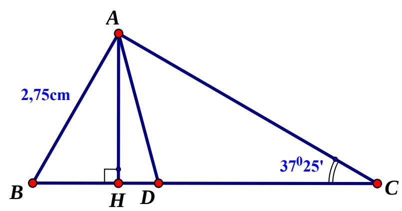
Áp dụng với $A = 100\ 000\ 000$ đồng $a = 50\ 000\ 000$ đồng.

Dùng chức năng $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{SOLVE}}$ ta rìm được $n \approx 58{,}10814$

Vậy để có trên 100 000 000 đồng người đó phải gửi ít nhất 59 tháng.

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AB = 2{,}75$ cm, $\widehat{C} = 37^o25'$. Từ A vẽ các đường cao AH, đường phân giác AD. Tính độ dài của AH, AD.

Lời giải



Ta có:

$AB = AC.\cot\left(37^0 25'\right) = 2{,}75.\cot\left(37^0 25'\right)$

$= 3{,}59468309cm$

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AB^2}$

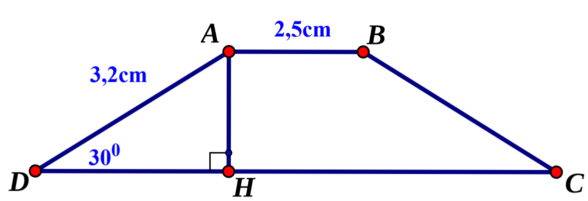
$\Rightarrow AH = \dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = 2{,}1841542248$

Áp dụng công thức độ đai đường phân giác:

$AD = \dfrac{2}{AB + AC}.AB.AC\cos\dfrac{A}{2} = 2{,}203425473$

Bài 8: Hình thang cân ABCD (AB//CD) có đáy nhỏ AB = 2,5cm, cạnh bên $AD = 3{,}2cm$, $\widehat{ADC} = 30^0$. Hãy tính diện tích hình thang.

Lời giải



Hạ $AH \perp CD$. Tam giác ADH là nửa tam giác đều.

Ta có:

$DH = AC\cos 30^0 = 3{,}2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{8\sqrt{3}}{5}$

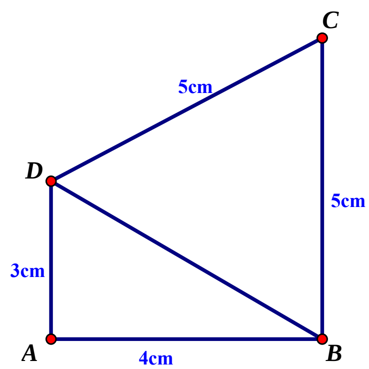
$AH = AC\sin 30^0 = 3{,}2 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{8}{5} \rightarrow B$

$DC = AB + 2DH = \dfrac{16+16\sqrt{3}}{5} \to C$

Lúc đó: $S_{ABCD} = \dfrac{AB+DC}{2}AH = 9,554050067cm^2$.

Bài 9: Tứ giác ABCD có $\hat{A} = 90^0$, AB = 4cm; BC =5cm; CD = 5cm; DA = 3cm. Tính diện tích tứ giác ABCD.

Lời giải



Áp dụng định lý Pitago cho tam giác ADB:

$DB = \sqrt{AD^2 + AB^2} = 5cm$

Suy ra DCB đều.

Do đó: $S_{DCB} = 5.\dfrac{5.\sqrt{3}}{4} = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = S_{ADB} + S_{DCB} = \dfrac{25.\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3.4}{2} = 16,82531755cm^2$.

Bài 10: Ta có một miếng tôn phẳng hình vuông với kích thước $a(cm)$, ta muốn cắt đi ở 4 góc 4 hình vuông cạnh bằng $x(cm)$ để uốn thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Phải cắt như thế nào để hình hộp có thể tích lớn nhất?

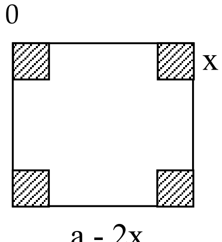
Lời giải

Gọi cạnh của hình vuông bị cắt là $x, (0 < x < a)$.

Ta có thể tích hình hộp là: $V = x(a-2x)^2 = \dfrac{1}{4}4x(a-2x)^2$.

Áp dụng Bất đẳng thức Côsi cho 3 số: $4x, a-2x, a-2x > 0$

Ta có : $V \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4x+a-2x+a-2x}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{4}.\dfrac{8a^3}{27} = \dfrac{2a^3}{27}$



V lớn nhất khi và chỉ khi : $4x = a - 2x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{6}$

Vậy để thể tích hộp lớn nhất, cần cắt bốn góc bốn hình vuông có cạnh $\dfrac{a}{6}$.

HƯỚNG ĐẾN KÌ THI HSG CẤP TỈNH VÀ CẤP QUỐC GIA

KHỐI THCS

*****

MÔN: MTCT LỚP 9

(Thời gian làm bài: 90 phút)

ĐỀ LUYỆN TỐC ĐỘ SỐ 25

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức: $B=\dfrac{1+x+x^2+x^3+...+x^{20}}{1-y^2+y^4-y^6+...+y^{20}}$ Với $x=2;\ y=3$.

Lời giải

Ta có:

$1+x+x^2+x^3+...+x^{20}$ là tổng của 21 số hạng đầu tiên của cấp số nhân có $u_1=1$ và công bội $q=x$

Do đó: $1+x+x^2+x^3+...+x^{20}=u_1.\dfrac{1-x^{21}}{1-x}=\dfrac{1-2^{21}}{1-2}=2097151$.

Ta cũng có: $1-y^2+y^4-y^6+...+y^{20}$ là tổng của 11 số hạng đầu tiên của cấp số nhân có $u_1=1$ và công bội $q=-y^2$

Do đó: $1-y^2+y^4-y^6+...+y^{20}=\dfrac{1+y^{22}}{1+y^2}=3138105961$.

Vậy $B=\dfrac{2097151}{3138105961}$.

Bài 2: Tìm x biết $1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[5]{5}+.........+\sqrt[x]{x}=46,45262278$.

Lời giải

Khai báo: $0\to X$; $0\to A$

Ghi vào màn hình: $X=X+1:\ A=A+\sqrt[X]{X}$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$. Quan sát kết quả ta tìm được gái trị của x cần tìm là $x=39$.

Bài 3: Tìm số dư của phép chia : 12345678912345 cho 2010

Lời giải

Bước 1: Lấy 123456789 : 2010 được dư 579

Bước 2: Lấy 57912345 : 2010 được dư 225

Vậy 12345678912345 chia cho 2010 được dư: 225.

Bài 4: Dãy phi-bô-na-xi bậc ba $\{u_n\}$ được xác định:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = u_3 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}.$$

a) Lập qui trình tính u_n.

b) Tính $u_{10}; u_{20}; u_{30}; u_{40}$.

Lời giải

a) Khai báo: $3 \rightarrow D$ {Biến đếm}; $1 \rightarrow A$ {giá trị u_1 }; $1 \rightarrow B$ {giá trị u_2 }; $1 \rightarrow C$ {giá trị u_3 }

Ghi vào màn hình:

$D = D+1 : A = C+B+A : D = D+1 : B = A+C+B : D = D+1 : C = B+A+C$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$ và lặp lại phím $\boxed{=}$

b) Thực hiện quy trình ấn phím trên ta tìm được

$u_{10} = 105; u_{20} = 46499; u_{30} = 20603361; u_{40} = 9129195487$

Bài 5: Cho đa thức: $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$

a) Xác định a, b, c để đa thức: $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ chia hết cho $(x-1)^3$.

b) Tính $P(\sqrt{3})$, $P(\sin 30^0)$.

Lời giải

a)

- Bước 1: Lấy P(x) chia cho x – 1 được thương $P_1(x)$ và dư $a+b+c+1$.

  Vì P(x) chia cho $x-1$ nên $a+b+c+1=0$
- Bước 2: Tiếp tục chia $P_1(x)$ cho x – 1 được thương $P_2(x)$ và dư $2a+b+4$. Vì $P_1(x)$ chia cho x – 1 nên $2a+b+4=0$
- Bước 3: Tiếp tục chia $P_2(x)$ cho x – 1 được thương $P_3(x)$ và dư a + 6.

  Vì $P_2(x)$ chia cho x – 1 nên a + 6 = 0

Suy ra: $a=-6$; $b=8$; $c=-3$.

b) P($\sqrt{3}$) = 1,8564; P(sin30^0) = 0,4375.

Bài 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x - 2\sqrt{xy} + 3y - 2\sqrt{x} + 2013,25$.

Lời giải

Ta có:

$P = x - 2\sqrt{xy} + 3y - 2\sqrt{x} + 2013,25$

$= \left(\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1\right)^2 + 2\left(\sqrt{y} - \frac{1}{2}\right)^2 + 2011,75 \geq 2011,75$

Giá trị nhỏ nhất của P là $P = 2011,75$ đạt được tại $x = \frac{9}{4}; y = \frac{1}{4}$

Bài 7: Lãi suất của tiền gửi tiết kiệm của một số ngân hàng thời gian vừa qua liên tục thay đổi. Bạn Châu gửi số tiền ban đầu là 5 triệu đồng với lãi suất 0,7% tháng chưa đầy một năm, thì lãi suất tăng lên 1,15% tháng trong nửa năm tiếp theo và bạn Châu tiếp tục gửi; sau nửa năm đó lãi suất giảm xuống còn 0,9% tháng, bạn Châu tiếp tục gửi thêm một số tháng tròn nữa, khi rút tiền bạn Châu được cả vốn lẫn lãi là 5 747 478,359 đồng (chưa làm tròn). Hỏi bạn Châu đã gửi tiền tiết kiệm trong bao nhiêu tháng ?

Lời giải

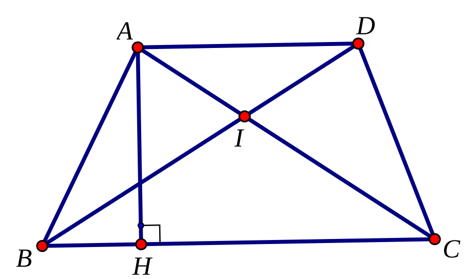
Gọi a là số tháng gửi với lãi suất 0,7% tháng, x là số tháng gửi với lãi suất 0,9% tháng, thì số tháng gửi tiết kiệm là: a + 6 + x. Khi đó, số tiền gửi cả vốn lẫn lãi là:

$5000000 \times 1.007^{a} \times 1.0115^{6} \times 1.009^{x} = 5747478.359$

Vậy số tháng bạn Châu gửi tiết kiệm là: 5 + 6 + 4 = 15 tháng

Bài 8: Cho tứ giác ABCD, giao điểm của hai đường chéo là I. Biết diện tích tam giác IAB bằng diện tích tam giác IDC và đường chéo BD là phân giác của góc ABC. Tính diện tich tứ giác ABCD, biết $\widehat{ABC} = 60^{0}$; $AB = 5$; $BC = 8$.

Lời giải



Vì $S_{IAB} = S_{IDC}$ suy ra $S_{ABC} = S_{DCB}$, suy ra tứ giác ABCD là hình thang.

Suy ra: $\widehat{ADB} = \widehat{DBC}$, mà BD là tia phân giác của $\widehat{ABC}$

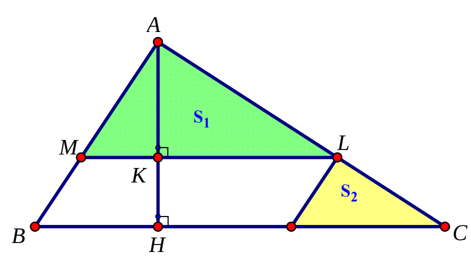
nên $\widehat{ADB} = \widehat{ABD}$ Suy ra $AD = AB$

Ta có: $AH = AB\sin\widehat{ABC} = 4,330127019$

$$S_{ABCD} = \frac{(AD + BC)AH}{2} = 28,1458$$

Bài 9: Cho tam giác ABC, trên cạnh AB, AC, BC lần lượt lấy các điểm M, L, K sao cho tứ giác KLMB là hình bình hành. Biết $S_{AML} = 42,7283\text{ cm}^2$, $S_{KLC} = 51,4231\text{ cm}^2$. Hãy tính diện tích tam giác ABC (gần đúng với 4 chữ số thập phân) .

Lời giải



Ta có:

$$\Delta AML \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{s}} = \frac{AK}{AH} \ (1)$$

$$\Delta LKC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{KH}{AH} \ (2)$$

Lấy (1) cộng (2) vế theo vế ta được:

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{AK}{AH} + \frac{KH}{AH} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \Rightarrow S = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2}$$

Thay số ta được kết quả: $S \approx 187,9005\text{ cm}^2$.

Bài 10: Theo di chúc, bốn người con được hưởng số tiền là 9 902 490 255 đồng chia theo tỉ lệ như sau:

- Người con thứ nhất và người con thứ hai là 2:3
- Người con thứ hai và người con thứ ba là 4:5
- Người con thứ ba và người con thứ tư là 6:7

Hỏi mỗi người con nhận được số tiền là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số tiền người con thứ nhất, thứ hai , thứ ba và thứ tư lần lượt là x, y, z, t (đồng) (với x, y, z, $t \in \mathbb{N}^*$)

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} x+y+z+t=9902490255 \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{y}{z}=\dfrac{4}{5} \\ \dfrac{z}{t}=\dfrac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z+t=9902490255 \\ 3x-2y=0 \\ 5y-4z=0 \\ 7z-6t=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1508950896 \\ y=2263426344 \\ z=2829282930 \\ t=3300830085 \end{cases}$$

Vậy :

- người con thứ nhất được hưởng: 1 508 950 896 đồng
- người con thứ hai được hưởng: 2 263 426 344 đồng
- người con thứ ba được hưởng: 2 829 282 930 đồng
- người con thứ tư được hưởng: 3 300 830 085 đồng