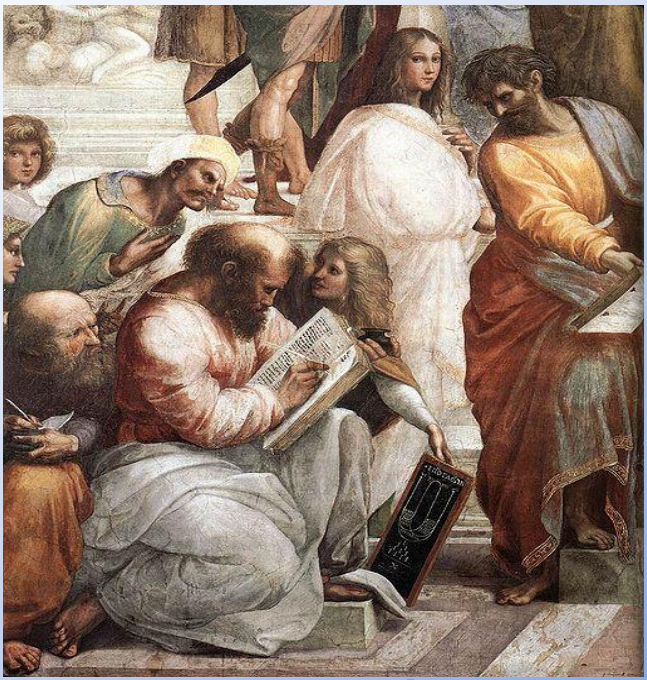
TuhocOnline.edu.vn

BIÊN SOẠN: TRẦN TRUNG CHÍNH

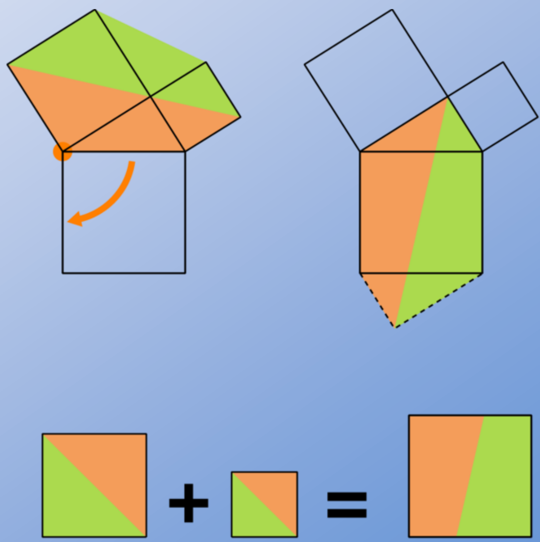
CHUYÊN ĐỀ
LUYỆN THI VÀO LỚP 10

MÔN TOÁN

PHẦN I: HÌNH HỌC



(Người ở giữa với cuốn sách, trong bức Trường Athena củaRafaeln)



CÁC KÍ HIỆU DÙNG TRONG CHUYÊN ĐỀ

(O)	: Đường tròn tâm O
(O; R)	: Đường tròn tâm O, bán kính R
ΔABC	: Tam giác ABC
S_{ABC}	: Diện tích ΔABC
(ABC)	: Đường tròn ngoại tiếp ΔABC
a, b, c	: Độ dài các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C của ΔABC
h_a, h_b, h_c	: Độ dài các đường cao xuất phát từ các đỉnh A, B, C của ΔABC
m_a, m_b, m_c	: Độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C của ΔABC
l_a, l_b, l_c	: Độ dài các đường phân giác xuất phát từ các đỉnh A, B, C của ΔABC
R, r	: Bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác
r_a, r_b, r_c	: Bán kính các đường tròn bàng tiếp đối diện với các đỉnh A, B, C của ΔABC
đpcm	: Điều phải chứng minh
2p	: Chu vi của tam giác ($p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi)
$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$	: Tổng của n số hạng từ a_1 đến a_n.
$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 ... a_n$	: Tích của n số hạng từ a_1 đến a_n.

TỔNG KẾT KIẾN THỨC

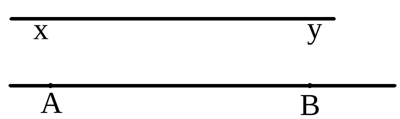
1. Đường thẳng:

Định nghĩa: Một đường thẳng được hiểu như là một đường dài (vô tận), mỏng (vô cùng) và thẳng tuyệt đối.

Tiên đề O'Clit: Qua hai điểm bất kì ta luôn xác định duy nhất một đường thẳng và chỉ một đường thẳng.

Kí hiệu: Người ta thường dùng các chữ cái in thường a, b, c, ..., m, n, p ... để đặt tên cho các đường thẳng hoặc dùng hai chữ cái in hoa hay hai chữ cái in thường để đặt tên cho đường thẳng.

Ví dụ: AB, xy, ...

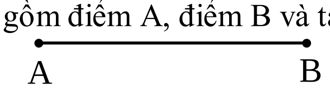


Điểm không thuộc đường thẳng: Điểm A không nằm trên đường thẳng a, điểm A không thuộc đường thẳng a (hay nói cách khác là đường thẳng a không đi qua điểm A).

Kí hiệu: $A \notin a$.

2. Đoạn thẳng:

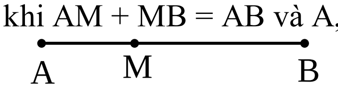
Định nghĩa: Đoạn thẳng AB là hình gồm điểm A, điểm B và tất cả các điểm nằm giữa A và B.



Hai điểm A và B gọi là hai đầu mút (hay còn gọi là hai mút) của đoạn thẳng AB.

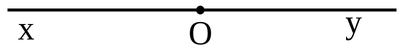
Lưu ý:

Điểm M nằm giữa A và B khi và chỉ khi AM + MB = AB và A, M, B thẳng hàng.



3. Tia:

Tia là hình gồm điểm O và một phần đường thẳng bi chia ra bởi điểm O được gọi là một tia gốc O (có hai tia Ox và Oy như hình vẽ).



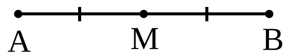
Hai tia có chung một góc O tạo thành đường thẳng được gọi hai tia đối nhau (hai tia Ox và Oy trong hình vẽ là hai tia đối nhau)

4. Điểm:

Để kí hiệu điểm, người ta dùng các chữ cái in hoa A, B, C, ...

Bất cứ hình nào cũng là một tập hợp các điểm.

Trung điểm của đoạn thẳng: Trung điểm M của đoạn thẳng AB là điểm nằm giữa hai điểm A, B và cách đều hai điểm A và B.



Trung điểm M của đoạn thẳng AB còn gọi là điểm chính giữa của đoạn thẳng AB.

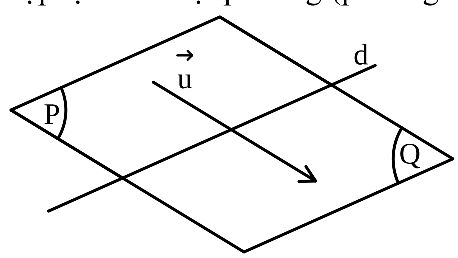
Lưu ý:

Điểm chính giữa hai điểm khác với điểm nằm giữa hai điểm.

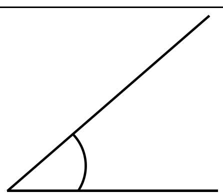
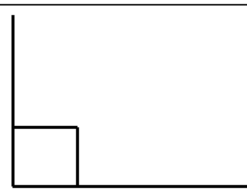
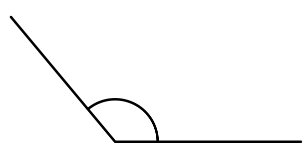
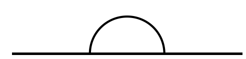
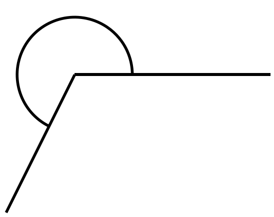
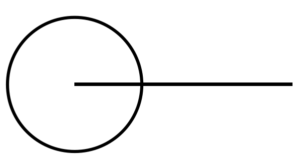
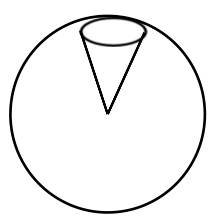
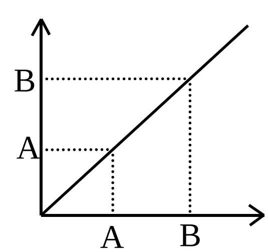
5. Mặt phẳng:

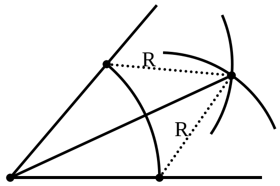
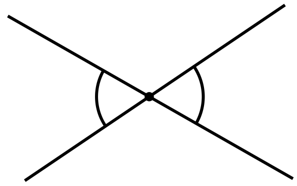
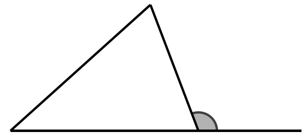
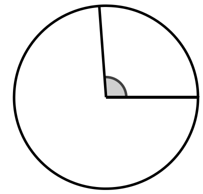
Nửa mặt phẳng bờ a: Hình gồm đường thẳng a và một phần mặt phẳng bị chia ra bởi a được gọi là một nửa mặt phẳng bờ a.

Mặt phẳng là hai nửa mặt phẳng hợp lại theo một phương (phương của vectơ) nhất định.

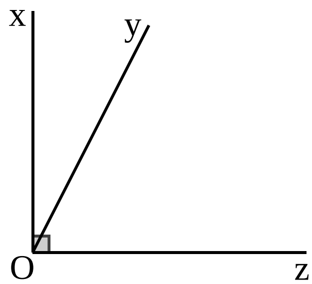


6. Góc:

 Góc nhọn	 Góc vuông	 Góc tù	 Góc bẹt
 Góc phản	 Góc đầy	 Góc khối	 Đường phân giác

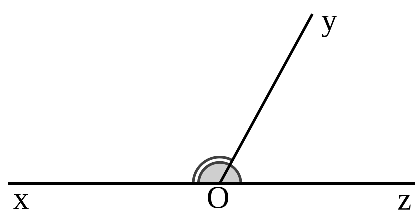
 Chia đôi một góc bằng compa và thước kẻ	 Góc đối đỉnh	 Góc ngoài của tam giác	 Góc ở tâm của đường tròn

(1) Hai góc phụ nhau là hai góc có tổng số đo bằng 90^0.



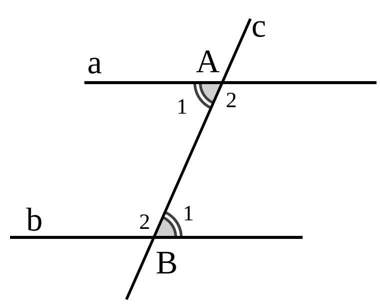
Góc $\widehat{xOy}$ và góc $\widehat{yOz}$ là hai góc phụ nhau.

(2) Hai góc bù nhau là hai góc có tổng số đo bằng 180^0.



Góc $\widehat{xOy}$ và góc $\widehat{yOz}$ là hai góc bù nhau

(3) Hai góc so le trong: Cho hai đường thẳng a //b và đường thẳng c cắt a, b lần lượt tại A, B.

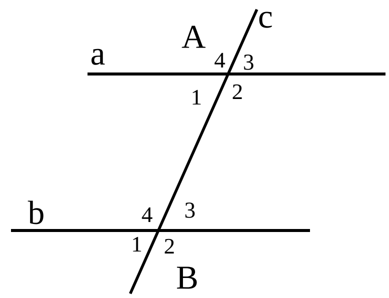


Khi đó:

$\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ và $\widehat{A_2} = \widehat{B_2}$.

(4) Hai góc đồng vị: Cho hai đường thẳng a //b và đường thẳng c cắt a, b lần lượt tại A, B. Khi đó:

$\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$, $\widehat{A_2} = \widehat{B_2}$, $\widehat{A_3} = \widehat{B_3}$, $\widehat{A_4} = \widehat{B_4}$.



7. Tam giác:

7.1. Kí hiệu:

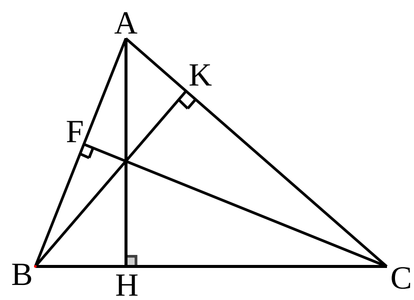
Tam giác ABC được kí hiệu là ΔABC.

Một tam giác ABC có ba đỉnh (góc) lần lượt là A, B, C và ba cạnh là AB, BC, CA.

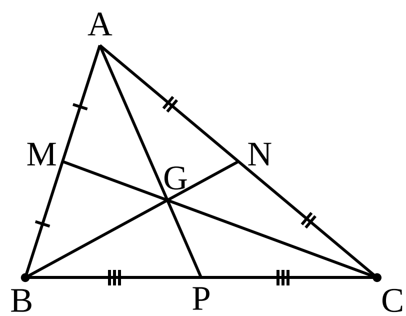
7.2. Các đường trong tam giác:

Đường cao: Là đoạn thẳng nối mỗi đỉnh và vuông góc với cạnh đối diện đỉnh đó. Một tam giác có ba đường cao. Giao điểm của ba đường cao gọi là ***trực tâm*** của tam giác.

Trong ΔABC, có các đường cao AH, BK, CF.



Đường trung tuyến: Là đường thẳng kẻ từ đỉnh và đi qua trung điểm của cạnh đối diện với đỉnh đó. Một tam giác có ba đường trung tuyến. Giao điểm của ba đường trung tuyến gọi là trọng tâm của tam giác.



Trong ΔABC, có các đường trung tuyến AP, BN, CM.

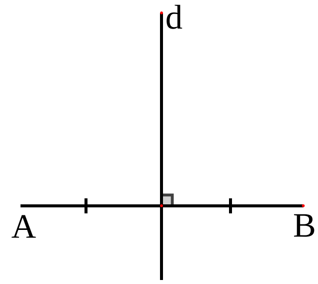
Độ dài đường trung tuyến:

$$\frac{BG}{BN} = \frac{AG}{AP} = \frac{CG}{CM} = \frac{2}{3}$$

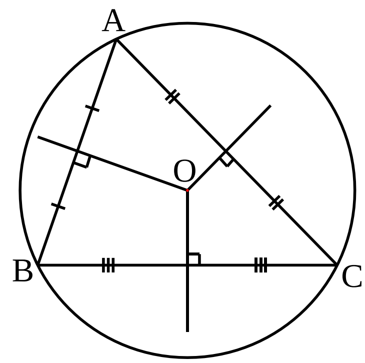
$$\frac{GN}{BN} = \frac{GP}{AP} = \frac{GM}{CM} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{GN}{GB} = \frac{GP}{GA} = \frac{GM}{GC} = \frac{1}{2}$$

Đường trung trực: Là đường thẳng vuông góc với một cạnh tại trung điểm của nó. Một tam giác có ba đường trung trực. Giao điểm của ba đường trung trực gọi là tâm của đường trong ngoại tiếp tam giác.



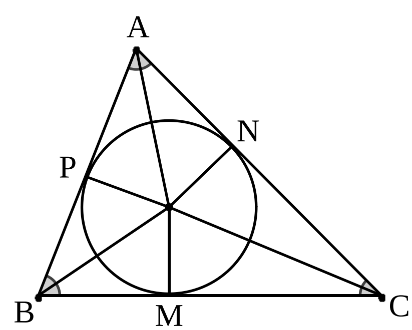
Đường thẳng (d) là đường trung trực của đoạn thẳng AB.



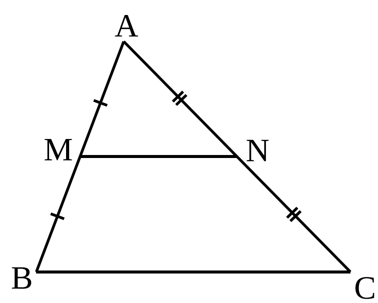
Điểm O là giao điểm của ba đường trung trực.

Đường phân giác: Là đường thẳng chia một góc thành hai góc có số đo bằng nhau. Một tam giác có ba đường phân giác. Giao điểm của ba đường phân giác gọi là tâm của đường trong nội tiếp tiếp tam giác.

Trong ΔABC có: OM = ON = ON.



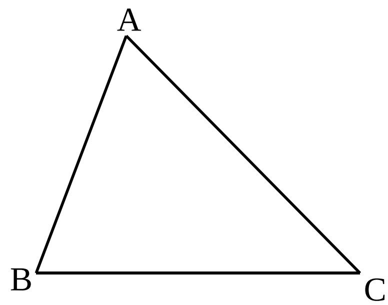
Đường trung bình: Là đường thẳng nối trung điểm hai cạnh của một tam giác. Một tam giác có ba đường trung bình. Tam giác tạo bởi ba đường trung bình thì đồng dạng với tam giác đã cho.



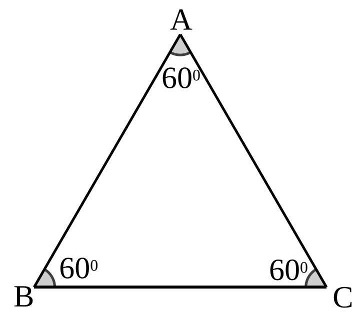
MN gọi là đường trung bình của tam giác. Ta có: MN // BC và $MN = \frac{1}{2}BC$.

7.3. Phân loại tam giác:

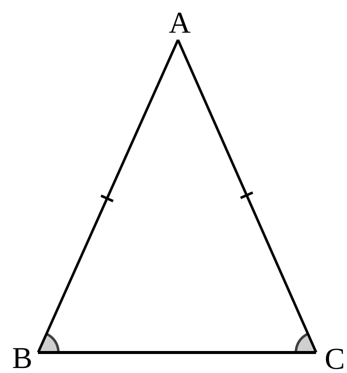
Tam giác nhọn: Là tam giác có ba góc đều nhọn (số đo ba góc < 90^0).



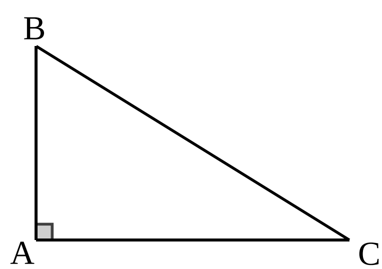
Tam giác đều: Là tam giác có ba cạnh và ba góc bằng nhau.
Trong tam giác đều, đường cao cũng là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực.



Tam giác cân: Là tam giác có hai cạnh bằng nhau hoặc hai góc ở một đáy bằng nhau.



Tam giác vuông: Là tam giác có một góc vuông (bằng 90^0).
Trong một tam giác vuông, cạnh đối diện với góc vuông gọi là cạnh huyền và là cạnh lớn nhất.
Cho ΔABC, có $\widehat{A} = 90^o$ thì $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Đây là hệ thức trên là hệ thức Pitago.



Định lý PITAGO:
Định lý thuận:
Trong tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.

$$\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2}$$

Định lý đảo:
Tam giác có tổng bình phương một cạnh bằng tổng bình phương hai cạnh còn lại là tam giác vuông.
Nếu tam giác ABC thỏa mãn $BC^2 = AB^2 + AC^2$ thì ΔABC là tam giác vuông tại A.

7.4. Tính chất của cạnh và góc của tam giác:

Tính chất 1: Cho tam giác ABC, tổng ba góc:

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^o.$$

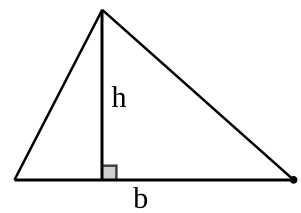
Tính chất 2: Độ dài một cạnh lớn hơn hiệu độ dài hai cạnh kia và nhỏ hơn tổng độ dài của chúng.

$$AB + BC > AC > |AB - BC|$$

Tính chất 3: Trong hai cạnh của cùng một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn. Góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

$$BC > AC > AB \Leftrightarrow \widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}.$$

7.5. Diện tích tam giác:



(1) Công thức tính diện tích tam giác: $S=\frac{1}{2}b.h$

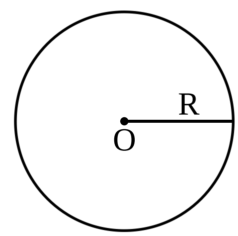
trong đó b là độ dài của cạnh và h là độ dài đường cao ứng với cạnh b.

(2) Công thức Heron: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

trong đó $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ là nửa chu vi của tam giác.

8. Đường tròn:

8.1. Khái niệm:

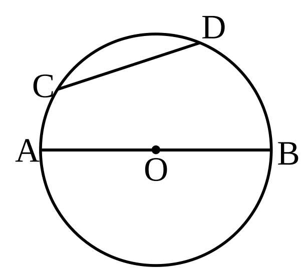


Đường tròn tâm O bán kính R (với R > 0) là hình gồm các điểm cách điểm O cho trước một khoảng không đổi bằng R.

Kí hiệu: (O; R), ta cũng có kí hiệu là (O).

Lưu ý:

- Qua ba điểm không thẳng hàng ta chỉ xác định được một đường tròn.
- Một đường tròn có một tâm đối xứng đó là tâm đường tròn.
- Một đường tròn có vô số trục đối xứng đó là các đường kính của đường tròn.



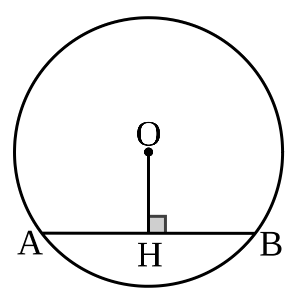
8.2. Đường kính và dây cung:

Định lý 1: Trong các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính. AB là đường kính, CD là dây cung thì AB > CD.

Định lý 2: Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

Nếu OH ⊥ AB tại H thì AH = HB.

Định lý 3: Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.



8.3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây:

Định lý 1: Trong một đường tròn:

Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

Nếu AB = CD thì OM = ON.

Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

Nếu OM = ON thì AB = CD.

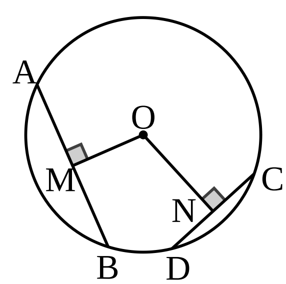
Định lý 2: Trong hai dây của một đường tròn:

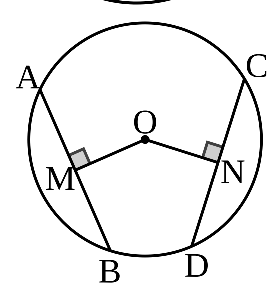
Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

Nếu AB > CD thì OM < ON.

Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

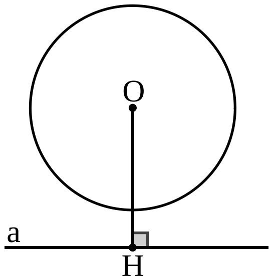
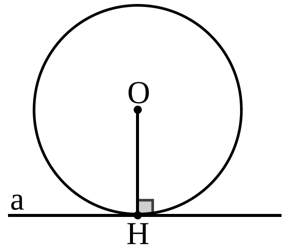
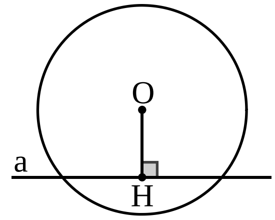
Nếu OM < ON thì AB > CD.





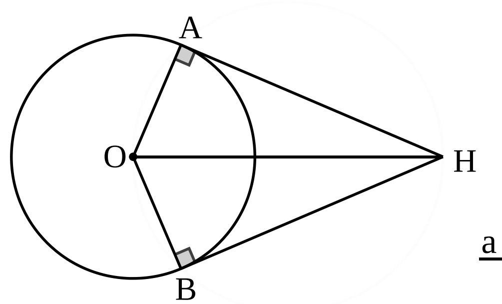
8.4. Khoảng cách giữa đường thẳng và đường tròn:

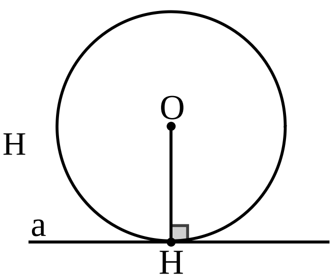
Gọi R là bán kính đường tròn và d là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a. Ta có:

 (d > R)	 (d = R)	 (d < R)
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau.	Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau.	Đường thẳng và đường tròn cắt nhau tại hai điểm (giao nhau).

Định lý 1:

Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.





Nếu a là tiếp tuyến với (O) tại H thì $a \perp OH$.

Định lý 2:

Tiếp tuyến với đường tròn: Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì điểm đó cách đều hai tiếp điểm.

$AH = BH$.

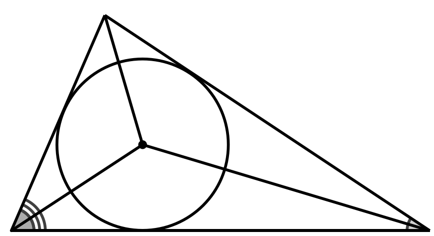
Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

HO là tia phân giác của góc $\widehat{AHB}$.

Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

OH là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$.

8.5. Đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp:

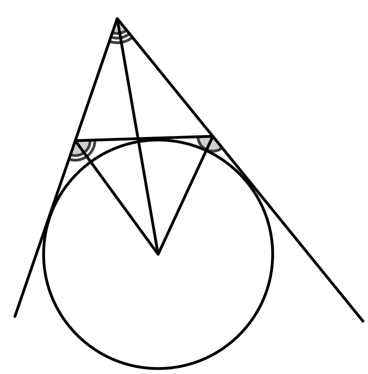


Đường tròn nội tiếp:

- Đường tròn tiếp xúc trong với ba cạnh của tam giác là đường tròn nội tiếp tam giác.
- Tâm đường tròn nội tiếp là giao điểm của ba đường phân giác góc trong của tam giác.

Đường tròn ngoại tiếp:

- Đường tròn tiếp xúc ngoài với ba cạnh của tam giác là đường tròn ngoại tiếp tam giác.
- Tâm đường tròn ngoại tiếp là giao điểm của ba đường phân giác góc ngoài của tam giác.

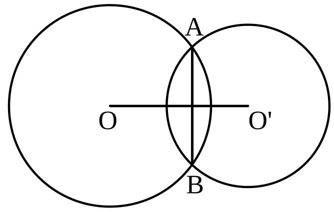
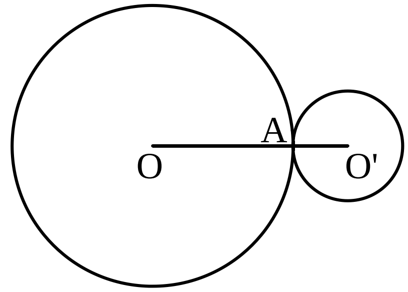
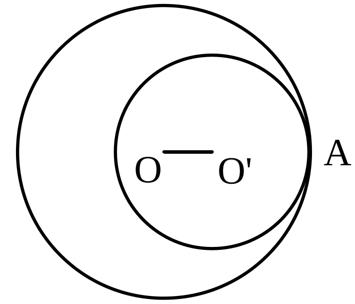
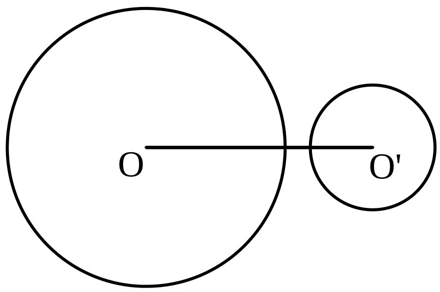


8.6. Vị trí tương đối của hai đường tròn:

Nếu gọi bán kính (O) là R và (O') là r thì ta có:

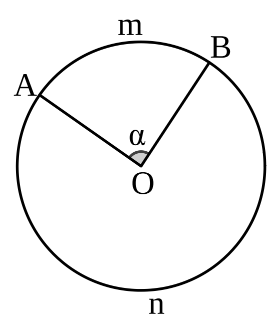
- Hai đường tròn có hai điểm chung được gọi là hai đường tròn cắt nhau.

Hai điểm chung A, B đó gọi là giao điểm. Đoạn thẳng AB nối hai điểm đó gọi là dây chung.

 ($R - r < OO' < R + r$)	 ($R + r = OO'$)	 ($R - r = OO'$)
Hai đường trong cắt nhau.	Hai đường trong tiếp xúc nhau.	Hia đường tròn ở trong nhau,
 ($OO' > R + r$)		
Hai đường trong ở ngoài nhau.		

8.7. Góc với đường tròn:

Góc ở tâm:



Định nghĩa: Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn gọi là góc ở tâm.

Số đo cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AmB} = \widehat{AOB}$$

Số đo cung lớn bằng hiệu số giữa 360^0 và số đo cung nhỏ.

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AmB} = \frac{1}{2}\left(360^0 - \text{sđ}\,\overset{\frown}{AnB}\right)$$

Số đo của nửa đường tròn bằng 180^0.

8.8. Liên hệ giữa cung và dây cung:

Định lý 1: Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

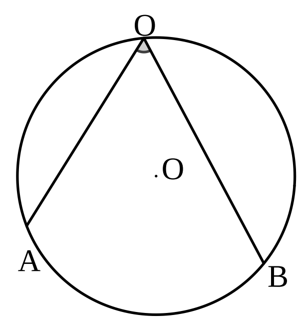
Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.

Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

Định lý 2: Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.

Cung nhỏ hơn căng dây nhỏ hơn.



8.9. Góc nội tiếp:

Định nghĩa: Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của dường tròn đó.

Định lý: Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

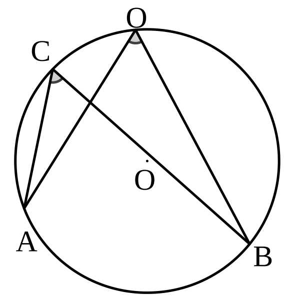
$$\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}$$

Hệ quả: Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

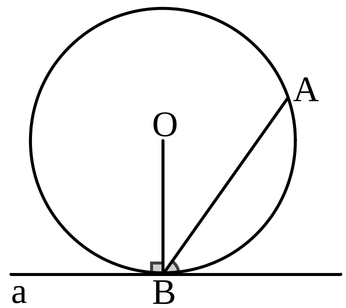
$$\widehat{AOB} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}$$

- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90^0) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.



8.10. Góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung:

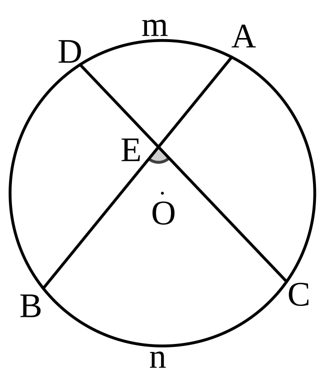
Số đo của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.



$(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = \widehat{ABa})$

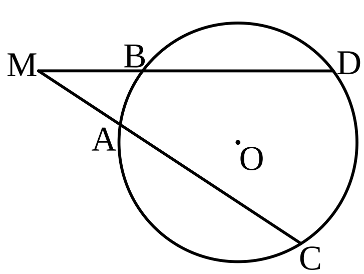
8.11. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn và góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn.

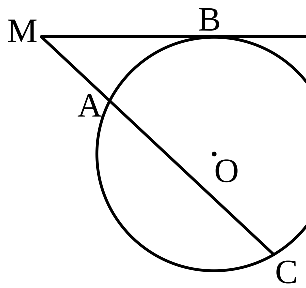
Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

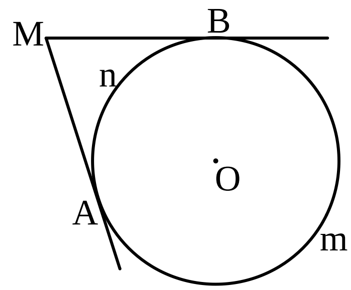


$$\widehat{BEC} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BmC} + \text{sđ}\overset{\frown}{AnD}\right)$$

Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.







$\widehat{CMD} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{CD} - \text{sđ}\overset{\frown}{AB}\right)$; $\widehat{BMC} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BC} - \text{sđ}\overset{\frown}{AB}\right)$; $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AmB} - \text{sđ}\overset{\frown}{AnB}\right)$

8.12. Độ dài đường tròn, cung tròn:

- Công thức tính độ dài đường tròn:

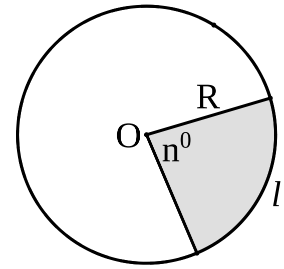
$$C = 2\pi R = \pi d.$$

(R là bán kính, d là đường kính)

- Công thức tính độ dài cung tròn:

Trên đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n^0 được tính như sau:

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$



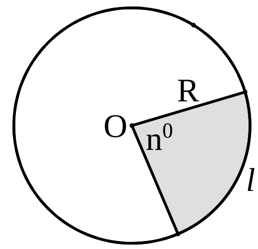
8.13. Diện tích hình tròn, hình quạt tròn:

- Diện tích hình tròn:

$$S = \pi R^2.$$

- Diện tích hình quạt tròn:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \text{ hay } S = \frac{lR}{2}$$



9. Hình học không gian:

Hình trụ - diện tích xung quanh của hình trụ:

- *Diện tích xung quanh:*

$$S_{xq} = 2\pi Rh.$$

(R là bán kính đáy và h là chiều cao)

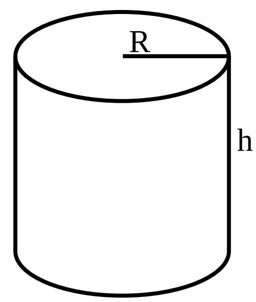
- *Diện tích toàn phần:*

$$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi r^2 = 2\pi R(h + R)$$

- *Thể tích hình trụ:*

$$V = Sh = \pi R^2 h.$$

(S là diện tích đáy, h là chiều cao)



Hình nón - hình nón cụt:

**** Hình nón:***

- *Diện tích xung quanh của hình nón:*

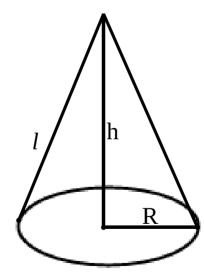
$$S_{xq} = \pi Rl.$$

(với l là độ dài đường sinh, r là bán kính đáy)

- *Diện tích toàn phần của hình nón (tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy) là*

$$S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$$

(với l là độ dài đường sinh, r là bán kính đáy)



- *Thể tích hình nón:*

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

(với l là độ dài đường sinh, r là bán kính đáy)

**** Hình nón cụt:***

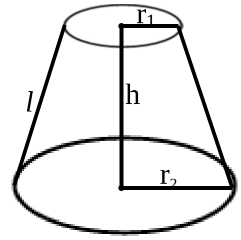
- *Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón cụt:*

$$S_{xq} = \pi\left(r_1 + r_2\right)l$$

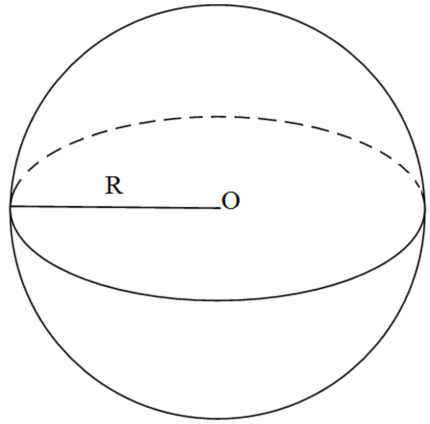
- *Thể tích của hình nón cụt:*

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$$

(h là chiều cao)



- *Hình cầu:*



- *Công thức tính diện tích mặt cầu:*

$S = 4\pi R^2$ hay $S = \pi d^2$.

(Với R là bán kính mặt cầu, d là đường kính mặt cầu)

- *Thể tích hình cầu:*

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

(Với R là bán kính mặt cầu)

CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

CHỦ ĐỀ 1
NHẬN BIẾT VÀ TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA MỘT HÌNH

1. Kiến thức cơ bản:

1.1. Tam giác cân:

Các phương pháp chứng minh tam giác cân:

Phương pháp 1: Tam giác có hai cạnh bằng nhau là tam giác cân.

Phương pháp 2: Tam giác có hai góc bằng nhau là tam giác cân.

Phương pháp 3: Tam giác có một đường cao vừa là đường trung tuyến, đường trung trực, đường phân giác của một góc và ngược lại thì tam giác đó là tam giác cân.

Lứu ý: Có thể chứng minh một tam giác là tam giác cân dựa vào các biểu thức hoặc các hệ thức đã được chứng minh.

1.2. Tam giác đều:

Các phương pháp chứng minh tam giác đều:

Phương pháp 1: Tam giác có ba cạnh bằng nhau là tam giác đều.

Phương pháp 2: Tam giác có ba góc bằng nhau và bằng 60^0 là tam giác đều.

Phương pháp 3: Tam giác cân có số đo góc ở đỉnh cân bằng 60^0 là tam giác đều.

Phương pháp 4: Tam giác có các đường cao vừa là đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung trực và ngược lại là tam giác đều.

1.3. Tam giác vuông:

Các phương pháp chứng minh tam giác vuông:

Phương pháp 1: Tam giác có một góc vuông là tam giác vuông.

Phương pháp 2: Tam giác có hai cạnh nằm trên hai đường thẳng vuông góc là tam giác vuông.

Phương pháp 3: Sử dụng định lý đảo về đường trung tuyến của tam giác vuông.

Định lý: Trong một tam giác có đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền thì tam giác đó là tam giác vuông.

Phương pháp 4: Sử dụng định lý đảo của định lý Pitago.

Định lý: Nếu một tam giác thỏa mãn bình phương một cạnh bằng tổng bình phương hai cạnh còn lại thì tam giác đó là tam giác vuông.

Tức là, nếu $BC^2 = AB^2 + AC^2$ thì tam giác ABC vuông tại A.

Phương pháp 5: Tam giác nội tiếp đường tròn có một cạnh là đường kính thì tam giác đó là tam giác vuông.

1.4. Tam giác vuông cân:

Các phương pháp chứng minh tam giác vuông cân:

Phương pháp 1: Tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau là tam giác vuông cân.

Phương pháp 2: Tam giác vuông có một góc nhọn bằng 45^0 là tam giác vuông cân.

Phương pháp 3: Tam giác cân có số đo một góc ở đáy bằng 45^0 là tam giác vuông cân.

1.5. Hình thang, hình thang cân, hình thang vuông:

Diện tích hình thang:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(AB + CD\right).AH$$

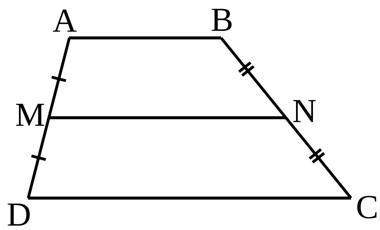
Tính chất:

Định lý 1: Trong hìn thang cân, hai cạnh bên bằng nhau.

Định lý 2: Trong hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau.

Định lý 3: Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

Đường trung bình của hình thang: Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.



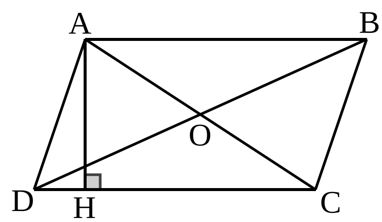
Định lý 1:
Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.
Định lý 2:
Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

$$MN\frac{1}{2}\left(AB+CD\right)$$

Phương pháp chứng minh hình thang:
Phương pháp 1: Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.
Phương pháp chứng minh hình thang vuông:
Phương pháp 1: Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.
Phương pháp chứng minh hình thang cân:
Phương pháp 1: Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.
Phương pháp 2: Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.
Phương pháp 3: Hình thang cân là hình thang có hai đường chéo bằng nhau.

1.6. Hình bình hành:

Định nghĩa: Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song.



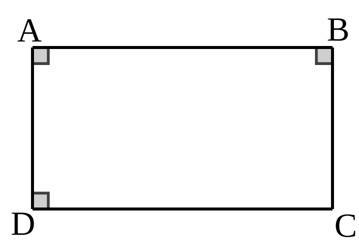
Diện tích hình bình hành:

$$S_{ABCD}=AH.CD=AH.AB$$

Các phương pháp chứng minh hình bình hành:
Phương pháp 1: Tứ giác có các cạnh đối song song.
Phương pháp 2: Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau.
Phương pháp 3: Tứ giác có các cạnh đối song song và bằng nhau.
Phương pháp 4: Tứ giác có các góc đối bằng nhau.
Phương pháp 5: Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

1.7. Hình chữ nhật:

Định nghĩa: Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.



Chu vi hình chữ nhật:

$$C_{ABCD}=2\left(AB+BC\right)=2\left(AD+DC\right)$$

Diện tích hình chữ nhật:

$$S_{ABCD} = AB.CD$$

Các phương pháp chứng minh hình chữ nhật:

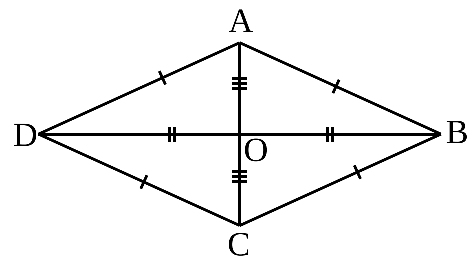
Phương pháp 1: Tứ giác có ba góc vuông.

Phương pháp 2: Hình thang cân có một góc vuông.

Phương pháp 3: Hình bình hành có một góc vuông.

Phương pháp 4: Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau.

1.8. Hình thoi:



Định nghĩa: Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

Tính chất:

Trong hình thoi: Hai đường chéo vuông góc với nhau.

Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.

Chu vi hình thoi:

$$C_{ABCD} = 4AB = 4BC = 4CD = 4DA$$

Diện tích hình thoi:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = BO.AC = OD.AC$$

Các phương pháp chứng minh hình thoi:

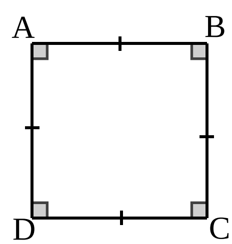
Phương pháp 1: Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

Phương pháp 2: Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau.

Phương pháp 3: Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau.

Phương pháp 4: Hình binh hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc.

1.9. Hình vuông:



Định nghĩa: Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau.

Tính chất:

Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

Chu vi hình vuông:

$$C_{ABCD} = 4AB = 4BC = 4CD = 4AD$$

Diện tích hình vuông:

$$S_{ABCD} = AB^2 = BC^2 = CD^2 = AD^2$$

Phương pháp chứng minh hình vuông:

Phương pháp 1: Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau.

Phương pháp 2: Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau.

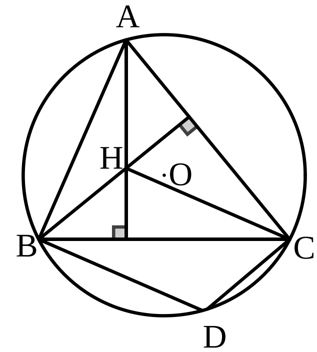
Phương pháp 3: Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc.

Phương pháp 4: Hình thoi có một góc vuông.
Phương pháp 5: Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho ΔABC có ba góc đều nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi H là trực tâm của ΔABC. D là một điểm trên cung BC không chứa điểm A. Xác định vị trí của điểm D để tứ giác BHCD là hình bình hành.

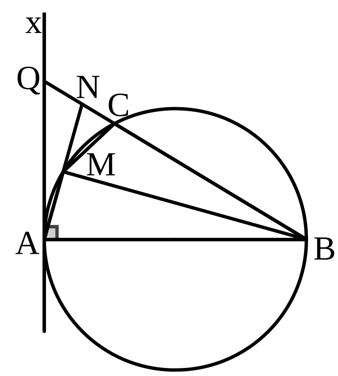
Giải



Giả sử đã tìm được điểm D trên cung BC sao cho tứ giác BHCD là hình bình hành.
Khi đó: BD // HC và CD // HB.
Vì H là trực tâm tam giác ABC nên $CH \perp AB$ và $BH \perp AC$.
$\Rightarrow BD \perp AB$ và $CD \perp AC$.
Do đó: $\widehat{ABD} = 90^{00}$ và $\widehat{ACD} = 90$.
Vậy AD là đường kính của đường tròn tâm O
Ngược lại nếu D là đầu đường kính AD của đường tròn tâm O thì tứ giác BHCD là hình bình hành.

Bài tập 2: Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R và C là một điểm thuộc đường tròn $(C \neq A;\ C \neq B)$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C. Kẻ tia Ax tiếp xúc với đường tròn (O), gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC. Tia BC cắt Ax tại Q , tia AM cắt BC tại N. Chứng minh các ΔBAN và ΔMCN cân.

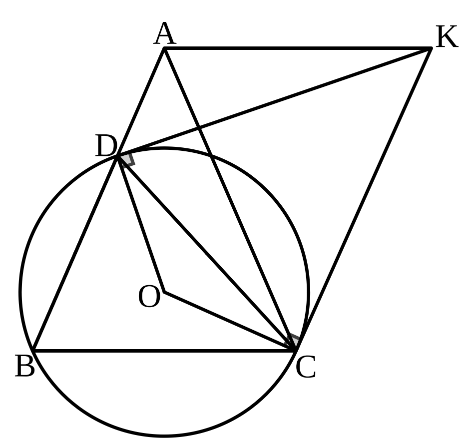
Giải



Xét ΔABM và ΔNBM, ta có:
AB là đường kính.
Nên $\widehat{AMB} = \widehat{NMB} = 90^0$.
M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC nên
$\widehat{ABM} = \widehat{MBN} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{BNM}$.
$\Rightarrow \Delta BAN$ cân tại đỉnh B.
Xét tứ giác AMCB nội tiếp:
$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{MCN}$ (cùng bù với $\widehat{MCB}$)
$\Rightarrow \widehat{MCN} = \widehat{MNC}$ (cùng bằng $\widehat{BAM}$)
$\Rightarrow \Delta MCN$ cân tại đỉnh M.

Bài tập 3: Cho ΔABC cân tại A, (AB > BC). Điểm D di động trên cạnh AB, (D không trùng với A, B). Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔBCD. Tiếp tuyến của (O) tại C và D cắt nhau ở K.
a) Chứng minh tứ giác ADCK nội tiếp?
b) Tứ giác ABCK là hình gì? Vì sao?
c) Xác định vị trí điểm D sao cho tứ giác ABCK là hình bình hành?

Giải



c) Theo câu b, tứ giác ABCK là hình thang.
Do đó, tứ giác ABCK là hình bình hành.
$\Leftrightarrow$ AB // CK
$\Leftrightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ACK}$
Mà $\widehat{ACK} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{EC}$ $= \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BD}$ $= \widehat{DCB}$
Nên $\widehat{BCD} = \widehat{BAC}$
Dựng tia Cy sao cho $\widehat{BCy} = \widehat{BAC}$.
Khi đó, D là giao điểm của $\overset{\frown}{AB}$ và Cy.

Với giả thiết $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{BC}$ thì $\widehat{BCA} > \widehat{BAC} > \widehat{BDC}$.

$\Rightarrow D \in AB$.

Vậy điểm D xác định như trên là điểm cần tìm.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O. D và E lần lượt là điểm chính giữa của các cung AB và AC. DE cắt AB ở I và cắt AC ở L.

a) Chứng minh DI = IL = LE.

b) Chứng minh tứ giác BCED là hình chữ nhật.

c) Chứng minh tứ giác ADOE là hình thoi và tính các góc của hình này.

Bài tập 2: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn có các đường chéo vuông góc với nhau tại I.

a) Chứng minh rằng nếu từ I ta hạ đường vuông góc xuống một cạnh của tứ giác thì đường vuông góc này qua trung điểm của cạnh đối diện của cạnh đó.

b) Gọi M, N, R, S là trung điểm của các cạnh của tứ giác đã cho. Chứng minh MNRS là hình chữ nhật.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật này đi qua chân các đường vuông góc hạ từ I xuống các cạnh của tứ giác.

Bài tập 3: Cho tam giác vuông ABC ($\angle A = 1v$) có AH là đường cao. Hai đường tròn đường kính AB và AC có tâm là O_1 và O_2. Một cát tuyến biến đổi đi qua A cắt đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh tam giác MHN là tam giác vuông.

b) Tứ giác MBCN là hình gì?

c) Gọi F, E, G lần lượt là trung điểm của O_1O_2, MN, BC. Chứng minh F cách đều 4 điểm E, G, A, H.

d) Khi cát tuyến MAN quay xung quanh điểm A thì E vạch một đường như thế nào?

Bài tập 4: Cho hình vuông ABCD. Lấy B làm tâm, bán kính AB, vẽ 1/4 đường tròn phía trong hình vuông.Lấy AB làm đường kính , vẽ 1/2 đường tròn phía trong hình vuông. Gọi P là điểm tuỳ ý trên cung AC (không trùng với A và C). H và K lần lượt là hình chiếu của P trên AB và AD, PA và PB cắt nửa đường tròn lần lượt ở I và M.

a) Chứng minh I là trung điểm của AP.

b) Chứng minh PH, BI, AM đồng qui.

c) Chứng minh PM = PK = AH

d) Chứng minh tứ giác APMH là hình thang cân.

đ) Tìm vị trí điểm P trên cung AC để tam giác APB là đều.

Bài tập 5: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ AB lấy một điểm M. Đường thẳng qua A song song với BM cắt CM tại N. Chứng minh rằng tam giác AMN là tam giác đều.

Bài tập 6: Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O; R) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Gọi M là trung điểm của AB. Tia CM cắt đường tròn tại điểm N. Tia AN cắt đường tròn tại điểm D.

a) Chứng minh rằng $MB^2 = MC. MN$

b) Chứng minh rằng AB// CD

c) Tìm điều kiện của điểm A để cho tứ giác ABDC là hình thoi. Tính diện tích cử hình thoi đó.

CHỦ ĐỀ 2
CHỨNG MINH SONG SONG

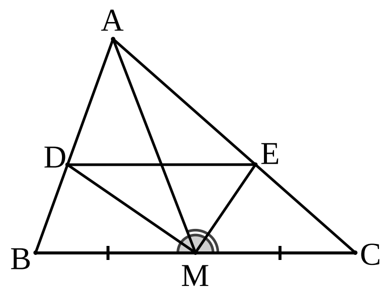
1. Kiến thức cơ bản:

Các phương pháp chứng minh:

Phương pháp 1: Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi chúng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba.

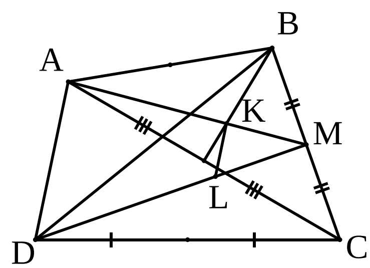
Phương pháp 2: Dựng mối quan hệ giữa các góc: So le bằng nhau, đồng vị bằng nhau, trong cùng phía bằng nhau, …
Phương pháp 3: Sử dụng định lý đảo của định lý Talét.
Định lý: Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tỷ lệ thì hai đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.
Phương pháp 4: Áp dụng tính chất của các tứ giác đặc biệt, đường trung bình của tam giác.
Phương pháp 5: Áp dụng tính chất hai dây chắn giữa hai cung bằng băng nhau của đường tròn.
2. Bài tập áp dụng:
Bài tập 1: Cho ΔABC, trung tuyến AM, đường phân giác của góc $\widehat{AMB}$ cắt cạnh AB tại D. Đường phân giác của góc $\widehat{AMC}$ cắt cạnh AC ở E. Chứng minh rằng: ED // BC.

Giải



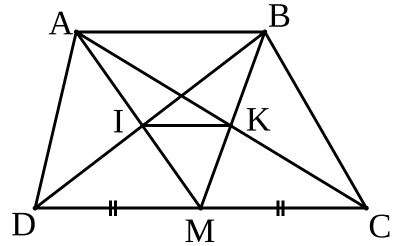
Trong ΔABM có MD là phân giác của $\widehat{AMB}$ nên, ta có:
$$\frac{AD}{DB}=\frac{MA}{MB} \quad (1) \quad \text{(định lý)}$$
Trong ΔAMC có ME là phân giác của $\widehat{AMC}$ nên, ta có:
$$\frac{AE}{EC}=\frac{MA}{MC} \quad (2) \quad \text{(định lý)}$$
Vì MB = MC (giả thiết).
Nên từ (1) và (2).
Suy ra: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$
Trong ΔABC có DE định ra 2 cạnh AB, AC những đoạn thẳng tỉ lệ nên DE // BC
Bài tập 2: Cho tứ giác ABCD. Gọi K, L lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và tam giác BCD. Chứng minh rằng KL // AD.

Giải



Gọi M là trung điểm của BC.
Vì K là trọng tâm của ΔABC
nên MK= $\frac{1}{3}$MA (tính chất trọng tâm của tam giác)
hay $\frac{MK}{MA}=\frac{1}{3}$ (1)
Và L là trọng tâm của ΔBCD
nên ML $=\frac{1}{3}$MD hay $\frac{ML}{MD}=\frac{1}{3}$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{MK}{MA}=\frac{ML}{MD}$ nên KL //AD (định lý Talét đảo)
Do trong ΔAMD có KL định ra trên 2 cạnh MA, MD những đoạn thẳng tỷ lệ nên
KL // AD (định lý Talét đảo).
Bài tập 3: Cho hình thang ABCD (AB // CD), M là trung điểm của CD. Gọi I là giao điểm của AM và BD và K là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng: IK //AB.

Giải



Ta có:
$$\frac{IM}{IA}=\frac{MD}{AB} \text{ (do AB // MD hay } \Delta AIB \backsim \Delta MID)$$
và (Do AB // MC)
Mà MD = MC (giả thiết)

Nên: $\frac{IM}{IA} = \frac{KM}{KB}$.

Suy ra IK // AB (Điều phải chứng minh)

Vì trong ΔAMB có IK định ra trên 2 cạnh MA, MB những đoạn thẳng tỷ lệ nên IK // AB (định lý Talét đảo).

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho hình thang ABCD (AB // CD, AB < CD). Kẻ AK // BC, AK$\cap$BD = E; Kẻ BI //AD; BI$\cap$AC = F (K, I $\in$ CD). Chứng minhn rằng: EF // AB.

Bài tập 2: Cho tứ giác ABCD. Qua B, vẽ Bx // CD cắt AC tại E. Qua C vẽ Cy // BA cắt BD tại F. Chứng minh rằng: EF // AD.

Bài tập 3: Cho hình bình hành ABCD đường phân giác của góc BAD cắt BD tại M, đường phân giác của góc ADC cắt AC tại N. Chứng minh rằng: MN //AD.

Bài tập 4: Cho ΔABC. Lấy điểm M tùy ý trên cạnh BC. Lấy N tùy ý trên cạnh AM. Đường thẳng DE // BC (D $\in$ AB, E $\in$ AC). Gọi P là giao điểm của DM và BN và Q là giao điểm của CN và EM. Chứng minh rằng: PQ // BC.

Bài tập 5: Tam giác cân ABC có BA = BC = a, AC = b. Đường phân giác góc A cắt BC tại M, đường phân giác của góc C cắt BA tại N. Chứng minh rằng: MN // AC.

Bài tập 6: Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Vẽ đường kính NOC. Chứng minh rằng AO // MN.

CHỦ ĐỀ 3
CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp chứng minh đường thẳng a và đường thẳng b vuông góc với nhau:

Phương pháp 1: Chứng minh chúng song song với hai đường vuông góc khác.

Phương pháp 2: Đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

Phương pháp 3: Dựng tính chất của ba đường cao và cạnh đối diện trong một tam giác.

Phương pháp 4: Đường kính đi qua trung điểm của một dây.

Phương pháp 5: Phân giác của hai góc kề bù nhau.

Phương pháp 6: Sử dụng góc nối tiếp nửa đường tròn.

Phương pháp 7: Sử dụng tính chất đường trung trực.

Phương pháp 8: Tính chất tiếp tuyến và đường kính của đường tròn.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho ΔABC, các đường cao BD và CE. Gọi M, N là chân các đường vuông góc kẻ từ B, C đến DE. Gọi I là trung điểm của DE, K là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: KI $\perp$ ED?

Chứng minh

Xét ΔBDC có: DK là đường trung tuyến $\Rightarrow$ DK = $\frac{1}{2}$BC (1)

Xét ΔBEC có: EK là đường trung tuyến $\Rightarrow$ EK = $\frac{1}{2}$BC (2)

Từ (1) và (2), suy ra: DK = EK.

Suy ra: ΔEKD cân tại K.

Mà I là trung điểm của DE.

Do đó: KI là đường cao của ΔEKD $\Rightarrow$ KI $\perp$ ED.

Bài tập 2: Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. S là một điểm nằm bên ngoài đường tròn. SA và SB lần lượt cắt đường tròn tại M, N. Gọi H giao điểm của BM và AN. Chứng minh rằng SH $\perp$ AB.

Chứng minh

Ta có: $\widehat{AMB} = 90^0$ (t/c góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ANB} = 90^0$ (t/c góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔSAB có AN, BM là hai đường cao.

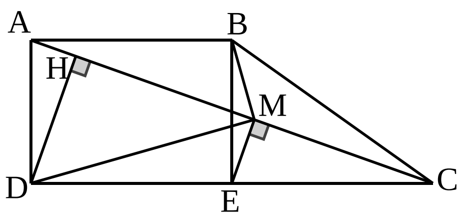
Mà H là giao điểm của AN và BM $\Rightarrow$ H là trực tâm của ΔSAB.

Suy ra: SH thuộc đường cao thứ ba của ΔSAB.

Vậy $SH \perp AB$.

Bài tập 3: Cho hình thang vuông ABCD, $\left(\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0\right)$, có CD = 2AB. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AC và M là trung điểm của HC. Chứng minh rằng đường thẳng qua DM vuông góc với đường thẳng qua BM.

Giải



Kẻ $BE \perp CD$ ($E \in CD$).

Vì CD = 2AB nên AB = DE = EC.

Hay E là trung điểm của CD.

Xét ΔDHC có EM là đường trung bình.

$\Rightarrow$ EM // DH $\Rightarrow$ $EM \perp AC$ (Vì $DH \perp AC$).

Xét tứ giác MADE có $\widehat{ADC} = 90^0$ và $\widehat{AME} = 90^0$.

Suy ra: Tứ giác MADE nội tiếp đường trong đường kính AE. Tức là bốn điểm M, A, D, E nằm trên một đường tròn. (1)

Xét tứ giác ABED có: $\widehat{ADE} = 90^0$ và AB = DE.

$\Rightarrow$ Tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

$\Rightarrow$ Bốn điểm A, B, E, D nằm trên một đường trong đường kính AE. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: M thuộc đường tròn đường kính AE.

Ta có: Tứ giác ABMD nội tiếp.

Mà $\widehat{BAD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BMD} = 90^0$.

$\Rightarrow BM \perp DM$.

Bài tập 4: Cho tam giác cân ABC, gọi H là trung điểm của BC và E là hình chiếu của H trên AC. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng HE. Chứng minh AO vuông góc với BE.

Chứng minh

Gọi K là trung điểm của EC.

Ta có: HK là đường trung bình của ΔBEC nên HK // EB (1)

Trong ΔEHC, ta có: OK là đường trung bình nên OK // HC. (2)

Mà $AH \perp HC$ (giả thiết) (3)

Từ (2) và (3), suy ra: $OK \perp AH$ (*)

Ta lại có: $HE \perp AC$ (vì E là hình chiếu của H trên AC) (**)

Từ (*) và (**), suy ra: O là trực tâm của ΔAHK

$\Rightarrow AO \perp HK$ (4)

Từ (1) và (4), suy ra: $AO \perp BE$ (điều phải chứng minh).

Bài tập 5: Cho ΔAHC, có $\left(\widehat{H}=90^0\right)$. Đường cao HE. Gọi O, Klần lượt là trung điểm của EH và EC. Chứng minh AO vuông góc với HK.

Chứng minh

Từ giả thiết có OK là đường trung bình của tam giác EHC

$\Rightarrow$ OK // HC.

Mặt khác: HC $\perp$ AH

$\Rightarrow$ OK $\perp$ AH

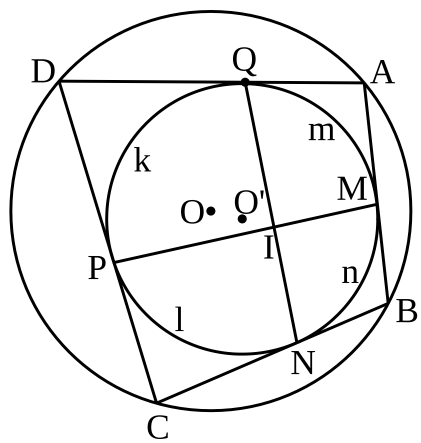
Xét ΔAHK có: HE $\perp$ AC, OK $\perp$ AH

$\Rightarrow$ O là trực tâm của ΔAHK

$\Rightarrow$ AO $\perp$ HK.

Bài tập 6: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đồng thời ngoại tiếp đường tròn khác có các tiếp điểm M, N, P, Q lần lượt với các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác đã cho. Chứng minh rằng MP vuông góc với NQ.

Chứng minh



Gọi (O) là đường tròn nội tiếp tứ giác và (O') là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

Ta có:

$$\widehat{B}=\frac{sđ\,\overparen{MQPN}-sđ\,\overparen{MnN}}{2}$$ (góc có đỉnh bên ngoài đường tròn)

$$\widehat{D}=\frac{sđ\,\overparen{PNMQ}-sđ\,\overparen{PkQ}}{2}$$ (góc có đỉnh bên ngoài đường tròn)

$\widehat{D}+\widehat{B}=180^0$ (vì tứ giác ABCD nội tiếp (O'))

$$\Rightarrow \frac{sđ\,\overparen{PNMQ}\text{ - }sđ\,\overparen{PkQ}}{2}+\frac{sđ\,\overparen{MQPN}\text{ - }sđ\,\overparen{MnN}}{2}=180^0$$

$$\Rightarrow \frac{2\overparen{PIN}+2\overparen{MmQ}}{2}=180^0$$

$$\Rightarrow \overparen{PlN}+\overparen{MmQ}=180^0$$

Mà $\widehat{MIQ}+\widehat{PIN}=\dfrac{sđ\overparen{PlN}+sđ\overparen{MnQ}}{2}=\dfrac{180^0}{2}=90^0$

$\Rightarrow$ MP $\perp$ QN. (điều phải chứng minh)

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho ΔABC đều. Gọi H là trung điểm của BC và E là hình chiếu của H trên AC. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng HE. Chứng minh: $AO \perp BE$.

Bài tập 2: Cho tam giác vuông cân ABC $\left(\widehat{A} = 90^0\right)$. Gọi H là trung điểm của BC và E là hình chiếu của H trên AC. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng HE. Chứng minh: $AO \perp BE$.

Bài tập 3: Cho ΔABC cân tại A, đường cao AH. Hạ $HI \perp AC$, M là trung điểm của HI. Chứng minh $BI \perp AM$.

Bài tập 4: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu của B trên AC. I và N lần lượt là trung điểm của AD và HC. Chứng minh: $BN \perp IN$.

Bài tập 5: Cho ΔABC cân tại A, đường cao AH. Dựng hình chữ nhật AHCK, $HI \perp AC$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của IC và AK . Chứng minh: $MN \perp BI$.

Bài tập 6: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu của B trên AC. Gọi E, F, M lần lượt là trung điểm của AB, DH, BH. Chứng minh: $AM \perp EF$.

Bài tập 7: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu của B lên AC. E, F, M, N lần lượt là trung điểm của AB, DH, HC, AD. Chứng minh: $EF \perp MN$.

Bài tập 8: Cho ΔABC $\left(\widehat{A} = 90^0\right)$. H là hình chiếu của A trên BC. I, K là thứ tự hai điểm thuộc AH và CK sao cho $\dfrac{HK}{KC} = \dfrac{HI}{IA}$. Chứng minh: $BI \perp AK$.

Bài tập 9: Cho hình thang vuông ABCD $\left(\widehat{A} = \widehat{B} = 90^0\right)$ và AC = m, BD = n. Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Lấy điểm $K \in HC$, sao cho $\dfrac{KH}{HC} = \dfrac{n}{m}$. Chứng minh: $DK \perp AK$.

Bài tập 10: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi E là giao điểm của hai cạnh đối AD và BC. Gọi F là giao điểm của hai cạnh đối DC và AB. Chứng minh rằng các tia phân giác trong của hai góc E và F vuông góc với nhau.

Bài tập 11: Cho hình chữ nhật ABCD. Trên tia AD và BC lần lượt lấy hai điểm E và F sao cho DF=CE=DC. Trên tia DC lấy điểm H sao cho CH = CB. Chứng minh: $AE \perp FH$.

Bài tập 12: Cho hình vuông ABCD. T là một điểm bất kì ở trên cạnh AB (T khác A và B). Tia DT cắt tia CB tại E. Đường thẳng CT cắt AE tại M. Chứng minh rằng đường thẳng DE vuông góc với đường thẳng DM.

Bài tập 13: Cho hình vuông ABCD cố định. Lấy Điểm T trên cạnh AB (T khác A và B). Tia DT cắt tia CB tại E. Đường thẳng CT cắt đường thẳng AE tại M .Đường thẳng BM cắt đường thẳng DE tại F. Tìm quỹ tích điểm F khi T chạy trên cạnh AB.

Bài tập 14: Cho ΔTBE $\left(\widehat{B} = 90^0\right)$. Vẽ đường phân giác BD và đường cao BF. Từ D dựng DA và DC theo thứ tự vuông góc với cạnh TB và cạnh BE (A trên cạnh TB, C trên BE). Chứng minh rằng các đường thẳng TC, AE, BF cắt nhau tại một điểm.

Bài tập 15: Đường tròn tâm O nội tiếp trong tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là hai tiếp điểm của đường tròn đó với hai cạnh AB và AC. Tia MN cắt tia phân giác của góc B tại P. Chứng minh BP vuông góc với CP.

CHỦ ĐỀ 4
CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU

1. Kiến thức cơ bản:

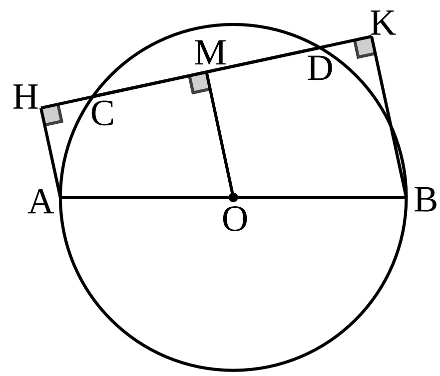
Phương pháp 1: Chứng minh hai đoạn thẳng có cùng độ dài (theo cùng đơn vị đo chiều dài).

Phương pháp 2: Chứng minh hai đoạn thẳng cùng bằng đoạn thẳng thứ ba thì bằng nhau.

Phương pháp 3: Chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau là các cạnh của các tam giác, tứ giác đặc biệt (hình đặc biệt), tam giác bằng nhau.
Ví dụ: Hai cạnh bên của tam giác cân thì bằng nhau, các cạnh của tam giác đều thì bằng nhau, hai cạnh bên của hình thang cân, các cặp cạnh đối của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông thì bằng nhau.
Phương pháp 4: Chứng minh tỉ số độ dài của các cặp cạnh cần chứng minh luôn đạt giá trị bằng 1.
Phương pháp 5: Sử dụng định nghĩa, tính chất của:
Trung điểm, trung trực của đoạn thẳng.
Đường trung tuyến, đường trung bình, đường trung trực, ... trong tam giác.
Đường chéo của hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông, ...
2 điểm, 2 đoạn thẳng đối xứng qua 1 điểm, 1 trục.
Phương pháp 6: Chứng minh hai tam giác có cùng diện tích với các đường cao, cạnh đáy tương ứng.
Phương pháp 7: Sử dụng tính chất của dây cung và tiếp tuyến với đường tròn.

2. Bài tập áp dụng:
Bài tập 1: Cho đường trong (O) đường kính, dây CD không cắt đường kính AB. Gọi H và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng: CH = DK.

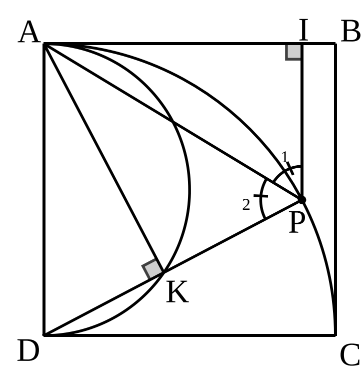
Chứng minh



Theo giả thiết, ta có: AH ⊥ CD và BK ⊥ CD nên AH // BK.
Suy ra: AHKB là hình thang.
Kẻ OM ⊥ CD tại M ⇒ MC = MD (t/c đường kính và dây cung) (1)
Xét hình thang AHKB có OA = OB = R; OM // AH // BK (cùng vuông góc với CD)
OM là đường trung bình của hình thang
⇒ MH = MK (2)
Từ (1) và (2), ta có: CH = DK.
Bài tập 2: Trong hình vuông ABCD và nửa đường tròn đường kính AD và vẽ cung AC mà tâm là D. Nối D với điểm P bất kỳ trên cung AC, DP cắt nửa đường tròn đường kính AD ở K. Chứng minh PK bằng khoảng cách từ P đến AB.

Chứng minh

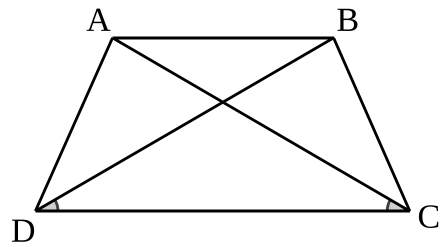
Kẻ PI ⊥ AB.
Xét ΔAPK và ΔAPI:
ΔAPK vuông tại K
(Vì $\widehat{AKD} = 90^0$ góc nội tiếp chắn nữa đường tròn đường kính AD)
ΔADP cân tại D
⇒ AD = DP
⇒ $\widehat{P_2} = \widehat{DAP}$
Mặt khác:
$\widehat{P_1} = \widehat{DAP}$ (So le trong vì AD // PI)
Do đó: $\widehat{P_1} = \widehat{P_2}$



⇒ ΔAPK = ΔAPI (có chung cạnh huyền và một cặp góc nhọn bằng nhau)
⇒ PK = PI.
Bài tập 3: Cho hình thang ABCD (AB// CD) có ACD = BDC. Chứng minh rằng: AD = BC.

Chứng minh

Gọi E là giao điểm của AC và BD



Xét ΔECD có: $\widehat{D_1} = \widehat{C_1}$ (do $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$)

$\Rightarrow$ ΔECD là tam giác cân.

Suy ra ED = EC (1)

Do $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ và $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (so le trong)

Mà $\widehat{D_1} = \widehat{C_1}$

$\Rightarrow$ ΔEAB là tam giác cân.

Suy ra: EA = EB (2)

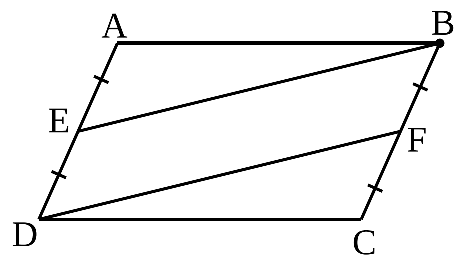
Từ (1) và (2), suy ra: AC = BD.

Hình thang ABCD có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

Suy ra: AD = BC.

Bài tập 4: cho hình bình hành ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC. Chứng minh rằng: BE = DF.

Chứng minh



Ta có: DE = $\frac{1}{2}$AD; BF = $\frac{1}{2}$BC

Mà AD = BC (hai cạnh đối của hình bình hành ABCD)

$\Rightarrow$ DE = BF.

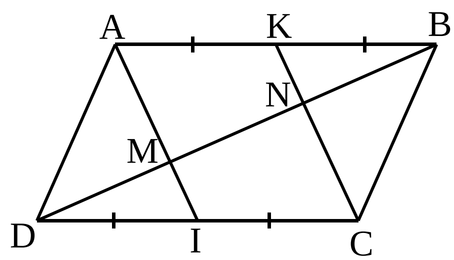
Mặt khác: DE // BF.

$\Rightarrow$ EBFD là hình bình hành.

Vậy BE = DF.

Bài tập 5: Cho hình bình hành ABCD. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của CD, AB. Đường chéo BD cắt AI, CK theo thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng: DM = NB.

Chứng minh



Tứ giác AICK có: AK // IC và AK = IC

$\Rightarrow$ Tứ giác AICK là hình bình hành.

$\Rightarrow$ AI // CK.

ΔDCN có IC = ID và IM // CN.

Suy ra: DM = MN (1)

ΔBAM có: BK = KA và KN // AM.

Suy ra: MN = NB (2)

Từ (1) và (2), suy ra: DM = NB.

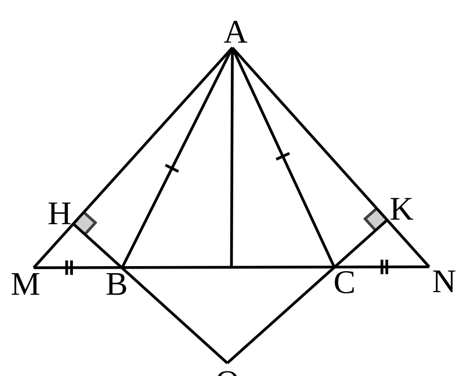
Bài tập 6: Cho tam giác ABC cân tại A.Trên tia đối của tia BC lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho BM= CN.

a) Chứng minh: AM = AN.

b) Kẻ BH $\perp$ AM (H $\in$ AM), CK $\perp$ AN (K $\in$ AN). Chứng minh: BH = CK.

c) Chứng minh: AH = AK.

Chứng minh



a) ΔAMB cân

$\Rightarrow$ $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow$ $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}\left(=180^0 + \widehat{ABC}\right)$

ΔABM và Δ ACN có:

AB = AC (giả thiết)

$\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$ (chứng minh trên)

BM = CN (giả thiết)

$\Rightarrow$ ΔABM = ΔACN (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{M} = \widehat{N} \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A $\Rightarrow AM = AN$

b) Xét ΔHBM và ΔKNC có: $\widehat{M} = \widehat{N}$ (theo câu a)

MB = CN

$\Rightarrow \Delta HMB = \Delta KNC$ (ch – gn)

$\Rightarrow$ NK = CK.

c) Theo câu a) ta có AM = AN (1)

Theo chứng minh trên: HM = KN (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ HA = AK.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho hình vuông ABCD. Kẻ AC cắt BD tại H. Lấy hai điểm E, F lần lượt thuộc AD, BC sao cho AE = CF, AF cắt HB tại I. Gọi M là trung điểm của IB. Chứng minh: AE= IM.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC có AP là phân giác. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa đỉnh A, vẽ tia Px sao cho góc CPx bằng góc BAC. Tia này cắt AC ở E. Chứng minh rằng: PB = PE.

Bài tập 3: Gọi P là điểm nằm trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Hạ các đường vuông góc PA_1, PB_1, PC_1 xuống các cạnh BC, CA, AB.

a) Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

b) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng $A_1B_1C_1$ cắt PH tại I. Chứng minh IP = IH.

Bài tập 4: Dựng phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Vẽ hình bình hành EADF. Chứng minh BCF là một tam giác đều.

Bài tập 5: Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Lấy AB và BC là cạnh dựng hai tam giác đều ABE và BCF nằm về cùng một phía bờ AC. Gọi I và J là trung điểm của AF và CE. Chứng minh rằng: $IJ = \frac{EF}{2}$.

Bài tập 6: Cho tam giác ABC và (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Các tiếp điểm trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt là A_1, B_1, C_1. Gọi E là điểm đối xứng của B qua CI, F là điểm đối xứng của B qua AI. Chứng minh rằng $B_1E = B_1F$.

Bài tập 7: Cho đường tròn (O) và đường thẳng d không cắt đường tròn (O). Gọi A là hình chiếu của (O) trên d. Qua A kẻ một cát tuyến cắt (O) ở B và C. Hai tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt d ở E và F. Chứng minh: AE = AF.

Bài tập 8: Cho đường trong (O) đường kính AB, dây CD cắt đường kính AB tại G. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A và B trên CD. Chứng minh rằng: CH = DK.

Bài tập 9: Cho tứ giác ACBD nội tiếp đường tròn đường kính AB. Chứng minh rằng hình chiếu vuông của các cạnh đối diện của tứ giác trên đường chéo CD bằng nhau.

CHỦ ĐỀ 5
CÁC GÓC BẰNG NHAU

1. Kiến thức cơ bản:

Các phương pháp chứng minh hai góc bằng nhau:

Phương pháp 1: Hai góc có cùng một số đo thì bằng nhau.

Phương pháp 2: Hai góc của hai tam giác bằng nhau hoặc hai tam giác đồng dạng, hai góc của tam giác cân, đều; hai góc của cùng một đáy trong hình thang cân, hai góc đối của hình bình hành, … thì bằng nhau.

Phương pháp 3: Hai góc cùng bằng một góc thứ 3.

Phương pháp 4: Tia phân giác chia một góc thành hai phần bằng nhau.

Phương pháp 5: Các góc so le trong, đồng vị, đối đỉnh, ...

Phương pháp 6: Các góc nội tiếp cùng chắn một cung trong một đường tròn thì bằng nhau.

Phương pháp 7: Tứ giác nội tiếp có góc ngoài bằng góc đối trong.
Phương pháp 8: Sử dụng hàm số lượng giác: sin, cos, tan và cot.
Phương pháp 9: Sử dụng tính chất của phép tịnh tiến, đối xứng, quay.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ đường kính AC và AD của (O) và (O'). Tia CA cắt đường tròn (O') tại F, tia DA cắt đường tròn (O) tại E. Chứng minh: $\widehat{EFC} = \widehat{EDC}$

Chứng minh

Ta có:

$\widehat{CED} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

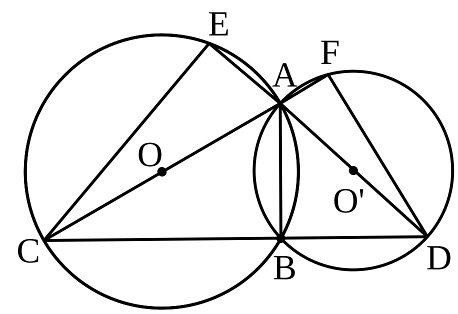
$\widehat{CFD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O'))

$\Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{CFD}\left(= 90^0\right)$

Hai đỉnh E, F cùng nhịn cạnh CD một góc bằng 90^0.

$\Rightarrow$ Tứ giác CEFD nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{EFC} = \widehat{EDC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{EC}$).



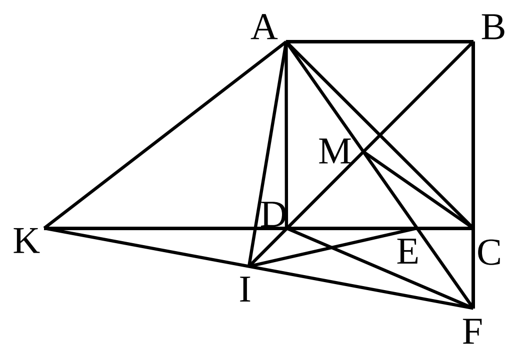
Bài tập 2: Cho hình vuông ABCD cố định. E là điểm di động trên cạnh CD (khác C và D). Tia AE cắt đường thẳng BC tại F. Tia Ax vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng DC tại K. BD cắt KF tại I.

a) Chứng minh: $\widehat{CAF} = \widehat{CKF}$

b) Chứng minh: $\widehat{IDF} = \widehat{IEF}$

c) Chứng minh: ΔKAF vuông cân.

Chứng minh



a) Ta có: $\widehat{KAF} = 90^0$ (AK $\perp$ AF) và $\widehat{KCF} = 90^0$ (ABCD là hình vuông)

Suy ra: $\widehat{KAF} = \widehat{KCF}\left(= 90^0\right)$

Hai đỉnh A, C cùng nhìn đoạn KF một góc bằng 90^0.

$\Rightarrow$ Tứ giác ACFK nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{CAF} = \widehat{CKF}$

b) Tứ giác ACKF nội tiếp nên ta có:

$\widehat{AFK} = \widehat{ACK}$ mà $\widehat{ACK} = 45^0$, $\widehat{BDC} = 45^0$ (ABCD là hình vuông)

Suy ra: $\widehat{AFK} = \widehat{BDC}\left(= 45^0\right)$

Do đó: Tứ giác IDEF nội tiếp (Vì góc ngoài bằng góc trong của đỉnh đối diện)

$\Rightarrow \widehat{IDF} = \widehat{IEF}$

c) ΔAKF vuông tại A (giả thiết), ta có:

$\widehat{AFK} = 45^0 \Rightarrow \widehat{AKF} = 45^0 \Rightarrow \Delta$KAF vuông cân tại A.

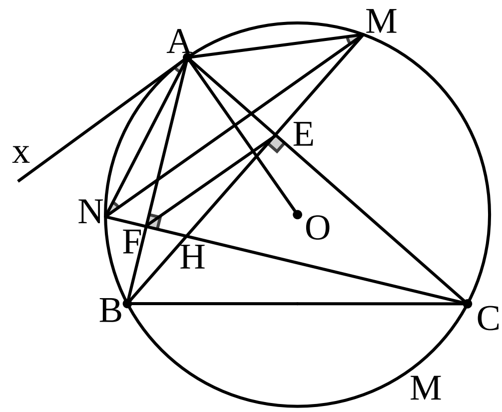
Bài tập 3: Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O; R). Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp nội tiếp được đường tròn.

b) Hai tia BE và CF cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N. Ax là tiếp tuyến tại A. Chứng minh $\widehat{xAN} = \widehat{ANM}$.

c) Chứng minh: $\widehat{MNC} = \widehat{EFC}$.

Chứng minh



a) Tứ giác BFEC có:

$\widehat{BFC} = 90^0$ (CF là đường cao)

$\widehat{BEC} = 90^0$ (BE là đường cao)

Hai đỉnh F, E cùng nhìn cạnh BC một góc bằng 90^0.

$\Rightarrow$ Tứ giác BFEC nội tiếp.

b) Vì Ax là tia tiếp tuyến của (O).

Suy ra: $AO \perp Ax$.

Và $\widehat{xAN} = \widehat{ACN}$ (1) (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung với góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Ta có: $\widehat{ANM} = \widehat{ABM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$)

Và $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{EF}$)

Suy ra: $\widehat{ANM} = \widehat{ACN}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{xAN} = \widehat{ANM}$. (điều phải chứng minh)

c) Ta có: $\widehat{MNC} = \widehat{MBC}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

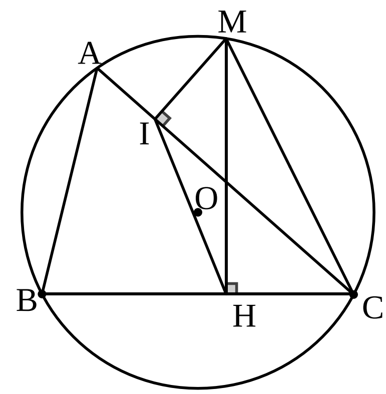
Và $\widehat{EFC} = \widehat{MBC}$ (tứ giác BFEC nội tiếp)

Suy ra: $\widehat{MNC} = \widehat{EFC}$. (điều phải chứng minh).

Bài tập 4: Cho ΔABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). M là điểm thuộc cung nhỏ AC. Vẽ $MH \perp BC$ tại H, $MI \perp AC$ tại I.

Chứng minh: $\widehat{IHM} = \widehat{ICM}$.

Chứng minh



Xét tứ giác MIHC, có:

$\widehat{MIC} = 90^0$ ($MI \perp AC$)

$\widehat{MHC} = 90^0$ ($MH \perp BC$)

Hai đỉnh I, H cùng nhìn đoạn MC một góc bằng 90^0.

$\Rightarrow$ Tứ giác MIHC nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{IHM} = \widehat{ICM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{MI}$)

(điều phải chứng minh)

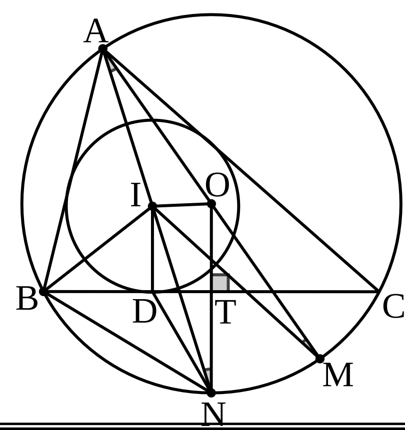
Bài tập 5: *(Đề thi HSG 12 tỉnh Đồng Nai 2013 - 2014)*

Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) có AB < BC < AC và $\widehat{ABC}$ là góc nhọn. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác và tiếp xúc với BC tại D. M, N lần lượt là giao điểm của hai đường thẳng AO, AI với (O). Biết A không trùng với M và N. Chứng minh: $\widehat{IND} = \widehat{IMO}$.

Chứng minh

Gọi T là giao của ON và BC.

Dễ chứng minh được:



$$IN = BN = \frac{BT}{\cos\widehat{NBC}} = \frac{a/2}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{a}{2\cos\frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{IN}{AM} = \frac{a}{2.2R.\cos\frac{A}{2}} = \frac{a}{2\cos\frac{A}{2}.\frac{a}{\sin A}} = \frac{\sin A}{2\cos\frac{A}{2}} = \sin\frac{A}{2} = \frac{ID}{IA}$$

Mặt khác, ta có: $\widehat{DIN} = \widehat{IAM}\left(= \widehat{IMO}\right)$

Suy ra: $\Delta DIN \backsim \Delta IAM$

$\Rightarrow \widehat{IND} = \widehat{IMO}$. (điều phải chứng minh)

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho ΔABC, trên cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm D và E sao cho BD = CE. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và DE. Đường thẳng qua M và N lần lượt cắt AB và AC tại P và Q. Chứng minh rằng: $\widehat{MPB} = \widehat{MQC}$.

Bài tập 2: Cho D là trung điểm của đoạn thẳng AM. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AM ta vẽ nửa đường tròn đường kính AM và nửa đường tròn đường kính AD. Tiếp tuyến tại D của đường tròn nhỏ cắt nửa đường tròn lớn tại C và các tiếp tuyến tại C và A của đường tròn lớn cắt nhau tại B. Nối P bất kì trên cung nhỏ AC với điểm D cắt nửa đường tròn nhỏ tại K. Chứng minh rằng: AP là phân giác của $\widehat{BAK}$.

Bài tập 3: Cho hình vuông ABCD cạnh a. E là điểm nằm giữa A và B, đường thẳng CE cắt dường thẳng AD tại K. Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với CE, cắt AB tại I.

a) Chứng minh rằng: Trung điểm của IK di động trên một đường thẳng cố định khi E di động trên đoạn AB.

b) Cho BE = x. Tính BK, CK, IK và diện tích tứ giác ACKI theo a và x.

Bài tập 4: Cho tam giác ABC với $\widehat{A} < 90^o$, có AB < AC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Vẽ đường cao AH và bán kính OA. Chứng minh rằng $\widehat{OAH} = \widehat{B} - \widehat{C}$.

Bài tập 5: Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau ở A và B (O_1 và O_2 thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB). Qua A kẻ cát tuyến cắt đường tròn ở (O_1) ở C, cắt đường tròn (O_2) ở D. Các tiếp tuyến của hai đường tròn kẻ từ C và D cắt nhau ở I. Chứng minh rằng khi cát tuyến CAD thay đổi thì:

a) $\widehat{CBD}$ không đổi

b) $\widehat{CID}$ không đổi

Bài tập 6: Cho hình bình hành ABCD, P ở trong hình bình hành sao cho $\widehat{PAB} = \widehat{PCB}$. Chứng minh rằng: $\widehat{PBA} = \widehat{PDA}$.

Bài tập 7: Cho hình bình hành ABCD, trên BC và CD lấy 2 điểm tương ứng là M và N sao cho BN=DM. Gọi I là giao điểm của BN và DM. Chứng minh: $\widehat{AID} = \widehat{AIB}$.

Bài tập 8: Cho (O_1) và (O_2) tiếp xúc trong với nhau tại A. Điểm C thuộc (O_1). Kẻ tiếp tuyến của (O_1) tại C cắt (O_2) tại B và D. Chứng minh: $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$.

Bài tập 9: Cho hình bình hành ABCD và điểm P nằm ngoài hình bình đó sao cho $\widehat{PAB} = \widehat{PCB}$ đồng thời A và C khác phía với đường thẳng PB. Qua A vẽ đường thẳng Ax //DP, qua P vẽ đường thẳng Py // AD hai đường thẳng này cắt nhau ở Q.

a) chứng minh tứ giác ABPQ nội tiếp.

b) Chứng minh: $\widehat{APB} = \widehat{DPC}$.

Bài tập 10: (NK 2006 – 2007 CD) cho ΔABC nhọn, có trực tâm H. Các đường thẳng BH và CH lần lượt cắt AC, AB tại M, N. Biết: $\widehat{NHM} = 120^0$.

a) Chứng minh: $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$. Tính: $\dfrac{MN}{BC}$.

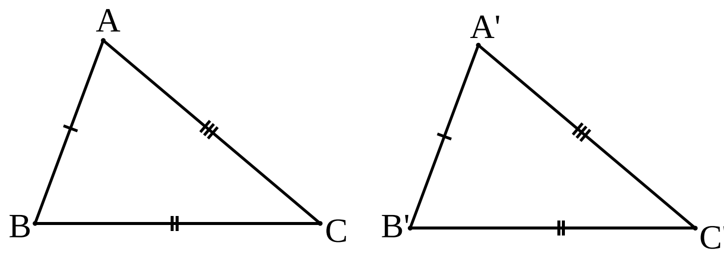
b) Tính: $\dfrac{AH}{BC}$.

CHỦ ĐỀ 6
CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

1. Kiến thức cơ bản:

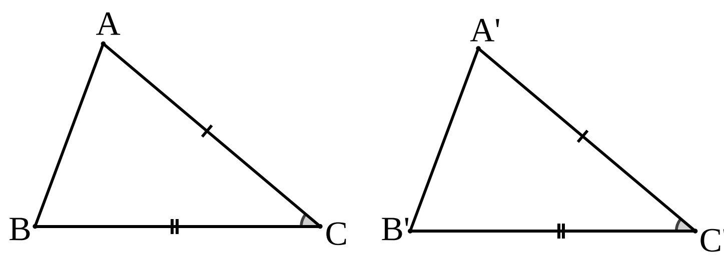
Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi thỏa mãn một trong ba trường hợp sau:

Trường hợp1: Hai tam giác có ba cặp cạnh tương ứng bằng nhau thì bằng nhau (cạnh-cạnh-cạnh).



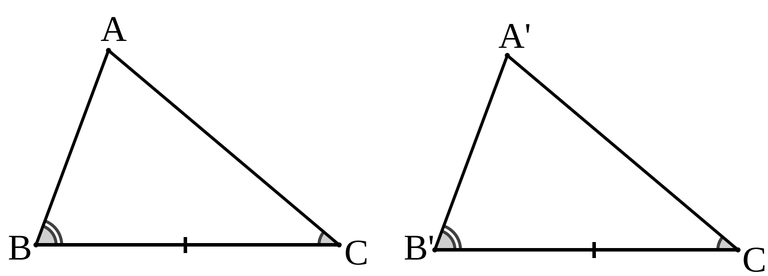
$$\left.\begin{aligned} AB &= A'B' \\ AC &= A'C' \\ BC &= B'C' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (cạnh-cạnh-cạnh)}$$

Trường hợp 2: Hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau và cặp góc xen giữa các cạnh đó bằng nhau thì bằng nhau (cạnh-góc-cạnh).



$$\left.\begin{aligned} AC &= A'C' \\ \widehat{C} &= \widehat{C'} \\ BC &= B'C' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (cạnh-góc-cạnh)}$$

Trường hợp 3: Hai tam giác có một cặp cạnh bằng nhau và hai cặp góc kề với cặp cạnh ấy bằng nhau thì bằng nhau (góc-cạnh-góc).



$$\left.\begin{aligned} \widehat{B} &= \widehat{B'} \\ BC &= B'C' \\ \widehat{C} &= \widehat{C'} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (góc-cạnh-góc)}$$

Lưu ý trường hợp bằng nhau của tam giác vuông:

Trường hợp 1: Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

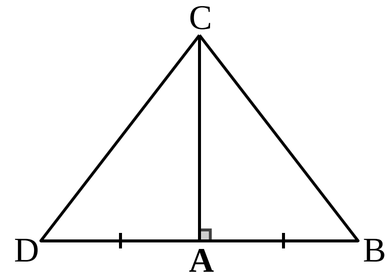
Trường hợp 2: Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Trường hợp 3: Nếu cạnh huyền và góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.
Trường hợp 4: Nếu cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho ΔABC có $\widehat{A} = 90^0$. Trên tia đối của AB, lấy điểm D sao cho AB = AD. Chứng minh: ΔABC = ΔADC.

Chứng minh



Xét ΔABC và ΔADC có:

AB = AC (giả thiết)

$\widehat{CAD} = \widehat{CAB} = 90^0$

AC cạnh chung.

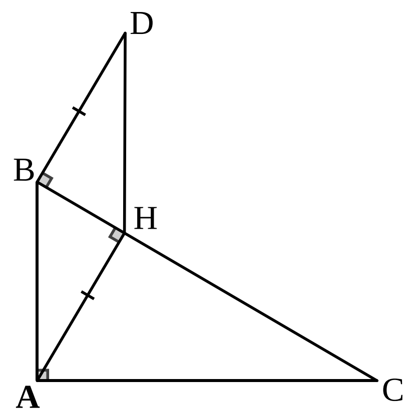
⇒ ΔABC = ΔADC (cạnh - góc - cạnh)

Bài tập 2: Cho ΔABC có $\widehat{A} = 90^0$. Đường thẳng AH ⊥ BC tại H. Trên đường vuông góc với BC tại B lấy điểm D không cùng nửa mặt phẳng bờ BC với điểm A sao cho AH = BD.

a) Chứng minh: ΔAHB = ΔDBH.

b) Chứng minh: AB // HD.

Chứng minh



a) Xét ΔAHB và ΔDBH, ta có:

AH = BD (giả thiết)

$\widehat{A} = \widehat{B} = 90^0$ (giả thiết)

BH là cạnh chung.

⇒ ΔAHB = ΔDBH (c – g – c)

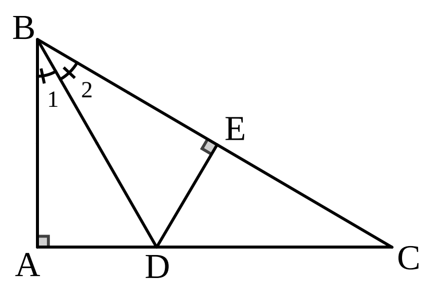
b) Vì ΔAHB = ΔDBH ⇒ $\widehat{ABH} = \widehat{BHD}$ (góc tương ứng)

Mà $\widehat{ABH}$ và $\widehat{BHD}$ ở vị trí so le

⇒ AB // HD.

Bài tập 3: Cho ΔABC vuông tại A. Vẽ BD là tia phân giác của góc B. Vẽ AE ⊥ BC tại E. Chứng minh: ΔABD = ΔEBD.

Chứng minh



Xét ΔABD = ΔEBD, ta có:

$\widehat{BAD} = \widehat{BED} = 90^0$ (giả thiết)

BD cạnh chung.

$\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (giả thiết)

⇒ ΔABD = ΔEBD (cạnh huyền – góc nhọn).

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho ΔABC có AB =AC. Gọi M là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh: ΔABM = ΔACM.

b) Chứng minh: AM ⊥ BC.

Bài tập 2: Cho ΔABC. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC, qua C kẻ đường thẳng song song với AB hai đường thẳng này cắt nhau tại D

a) Chứng minh: ΔABC = ΔADC.

b) Chứng minh: ΔADB = ΔCBD.

c) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh: ΔABO = ΔCOD.

Bài tập 3: Cho góc vuông xAy. Trên tia Ax lấy 2 điểm B và D, trên tia Ay lấy 2 điểm C và E sao cho AB = AC và AD = AE.

a) Chứng minh: ΔACD = ΔABE.

b) Chứng minh: ΔBOD = ΔCOE.

Bài tập 4: Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên tia Ox lấy 2 điểm A và D, trên tia Oy lấy 2 điểm C và E sao cho OD = OE và OA = OB.

a) Chứng minh: ΔODC = ΔOBE.

b) Gọi A là giao điểm của BE và CD. Chứng minh: ΔAOB = ΔAOC.

Bài tập 5: Cho ΔABC, có AB = AC. Tia phân giác của góc A cắt BC tại M.

a) Chứng minh: ΔAMB = ΔAMC.

b) Chứng minh M là trung điểm của cạnh BC.

c) K là một điểm bất kì trên đoạn thẳng AM, đường thẳng CK cắt cạnh AB tại I. Vẽ IH vuông góc với BC tại H. Chứng minh góc $\widehat{BAC} = 2\widehat{BIH}$.

Bài tập 6: Cho góc xOy khác góc bẹt. Lấy các điểm A, B thuộc tia Ox sao cho OA < OB. Lấy các điểm C, D thuộc tia Oy sao cho OC = OA, OB = OD. Gọi M là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng:

a) AD = BC.

b) ΔMAB = ΔMCD.

c) OM là tia phân giác của góc xOy.

Bài tập 7: Cho ΔABC, (AB < AC) có AM là phân giác của góc A (M thuộc BC). Trên AC lấy D sao cho AD = AB.

a) Chứng minh: BM = MD

b) Gọi K là giao điểm của AB và DM. Chứng minh: ΔDAK = ΔBAC.

Bài tập 8: Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ AH ⊥ BC. Kẻ HP ⊥ AB và kéo dài để có PE = PH. Kẻ HQ ⊥ AC và kéo dài để có QF = QH.

a) Chứng minh: ΔAPE = ΔAPH, ΔAQH = ΔAQF.

b) Chứng minh: E, A, F thẳng hàng và A là trung điểm của EF.

Bài tập 9: Cho ΔABC vuông ở C, có $\widehat{A} = 60^0$. Tia phân giác của góc BAC cắt BC ở E, kẻ EK ⊥ AB (K ∈ AB), kẻ BD ⊥ AE (D ∈ AE).

Chứng minh:

a) AK = KB

b) AD = BC

Bài tập 10: Cho ΔABC, AB = AC và M là trung điểm của AC và N là trung điểm của AB. Gọi K là giao điểm của BM và CN. Chứng minh:

a) ΔBNC = ΔCMB

b) ΔBKC cân tại K.

Bài tập 11: Cho đoạn thẳng BC. Gọi I là trung điểm của BC. Trên đường trung trực của BC lấy điểm A (A ≠ I)

a) Chứng minh: ΔAIB = ΔAIC.

b) Kẻ IH ⊥ AB, kẻ IK ⊥ AC. Chứng minh: ΔAHK có 2 cạnh bằng nhau

c) Chứng minh: HK // BC.

Bài tập 12: Cho ΔABC vuông tại A, có BD là phân giác. Kẻ DE ⊥ BC (E ∈ BC). Gọi F là giao điểm của AB và DE. Chứng minh rằng:

a) BD là đường trung trực của AE

b) DF = DC

c) AD < DC

d) AE // FC

Bài tập 13: Cho biết $\widehat{AOB} = 120^0$. Kẻ tia phân giác OC của $\widehat{AOB}$. Trên tia OC lấy điểm M và OA⊥HM, OB ⊥MK.

a) Tính số đo các $\widehat{HMO}$ và $\widehat{KMO}$.

b) Chứng minh: ΔMHO = ΔMKO.

CHỦ ĐỀ 7
CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

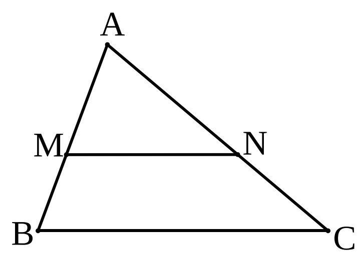
1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp 1: Hai tam giác được gọi là đồng dạng với nhau nếu chúng có các cặp cạnh tương ứng tỉ lệ và các góc tương ứng tỉ lệ.

Xét ΔABC và ΔA'B'C', ta có:

Nếu $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ và $\widehat{A} = \widehat{A'}$; $\widehat{B} = \widehat{B'}$; $\widehat{C} = \widehat{C'}$ thì ΔABC ∽ ΔA'B'C'.

Phương pháp 2: Định lý Talet: Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.



(MN // BC)

Ta có: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$; $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

Phương pháp 3: Chứng minh các điều kiện cần và đủ để hai tam giác đồng dạng:

Hai tam giác có các cặp cạnh tương ứng tỷ lệ thì đồng dạng.

Hai tam giác có hai cặp góc tương ứng bằng nhau thì đồng dạng.

Hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng tỷ lệ, hai góc xen giữa hai cặp cạnh ấy bằng nhau.

Phương pháp 4: Chứng minh trường hợp thứ nhất (cạnh-cạnh-cạnh): Nếu 3 cạnh của tam giác này tỷ lệ với 3 cạnh của tam giác kia thì 2 tam giác đó đồng dạng.

$$\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Phương pháp 5: Chứng minh trường hợp thứ 2 (cạnh-góc-cạnh): Nếu 2 cạnh của tam giác này tỷ lệ với 2 cạnh của tam giác kia và 2 góc tạo bởi tạo các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam đó giác đồng dạng.

$$\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \end{cases}.$$

Phương pháp 6: Chứng minh trường hợp thứ 3 (góc-góc): Nếu 2 góc của tam giác này lần lượt bằng 2 góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

$$\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{cases}.$$

Phương pháp 7: *Sử dụng chứng minh cho tam giác vuông:*

- Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó đồng dạng.
- Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỷ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó đồng dạng.
- Nếu cạnh huyền và một cạnh của tam giác vuông này tỷ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó đồng dạng.
Phương pháp 8:
Chứng minh các tính chất của tỉ số đồng dạng để suy ra hai tam giác đồng dạng:
- Tỉ số hai đường phân giác, hai đường cao, hai đường trung tuyến, hai bán kính nội tiếp và ngoại tiếp, hai chu vi tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.
- Tỉ số hai đường cao của hai tam giác đồng dạng:
Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$, BH và B'H' là hai đường cao.

Nếu a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$ thì $\frac{BH}{B'H'} = a$.
- Tỉ số hai đường phân giác của hai tam giác đồng dạng:
Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$, BD và B'D' là hai đường phân giác lần lượt của $\widehat{B}$ và $\widehat{B}'$.

Nếu a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$ thì $\frac{BD}{B'D'} = a$.
- Tỉ số hai đường trung tuyến của hai tam giác đồng dạng:
Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$, BM và B'M' là hai đường trung tuyến.

Nếu a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$ thì $\frac{BM}{B'M'} = a$.
- Tỉ số chu vi của hai tam giác đồng dạng:
Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$.
Nếu a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$ thì

$$\frac{C_{\Delta ABC}}{C_{\Delta A'B'C'}} = \frac{AB + BC + CA}{A'B' + B'C' + C'A'} = a.$$

- Tỉ số bán kính đường tròn ngoại của hai tam giác đồng dạng:
Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ và OM, ON, OP là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, O'M', O'N', O'P' là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$
Nế'u a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$ thì

$$\frac{OM}{O'M'} = \frac{ON}{O'N'} = \frac{OP}{O'P'} = a.$$

- Tỉ số bán kính đường tròn ngoại của hai tam giác đồng dạng:
Ta có: $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ và OM, ON, OP là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, O'M', O'N', O'P' là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$
Nế'u a là tỉ số đồng dạng của hai tam giác ΔABC và $\Delta A'B'C'$ thì

$$\frac{OM}{O'M'} = \frac{ON}{O'N'} = \frac{OP}{O'P'} = a.$$

- Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng thì bằng bình phương tỉ số đồng dạng.
Nếu $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ và là tỉ số đồng dạng của hai tam giác thì

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = a^2$$

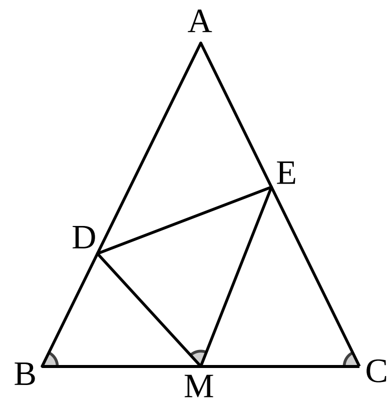
2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho ΔABC cân tại A; BC = 2a. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy các điểm D và E trên AB; AC sao cho $\widehat{DME} = \widehat{B}$.

a) Chứng minh rằng: $\Delta BDM \backsim \Delta CME$

b) Chứng minh: $\Delta MDE \backsim \Delta DBM$

c) Chứng minh: BD.CE không đổi?



Chứng minh

a) Ta có: $\widehat{DBM} = \widehat{ECM}$ (1)

và $\widehat{DBM} = \widehat{DME}$ (giả thiết)

Mà

$\widehat{DBM} + \widehat{BMD} + \widehat{MDB} = 180^0$

$\widehat{DME} + \widehat{BMD} + \widehat{CME} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{MDB} = \widehat{CME}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\Delta BDM \backsim \Delta CME$ (g - g).

b) Vì $\Delta BDM \backsim \Delta CME$ nên

$\dfrac{BD}{CM} = \dfrac{DM}{ME}$ và BM = CM (giả thiết)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BM} = \dfrac{DM}{ME}$

$\Rightarrow \Delta MDE \backsim \Delta DBM$.

c) Vì $\Delta BDM \backsim \Delta CME$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{CM} = \dfrac{BM}{CE}$

$\Rightarrow$ BD.CE = CM . BM

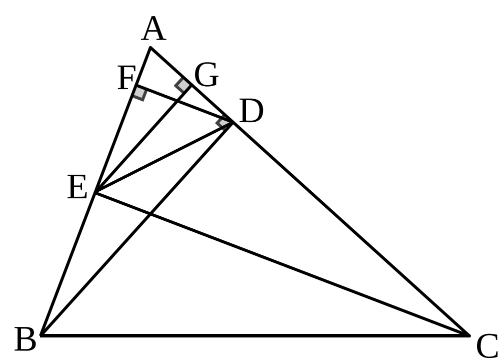
Mà CM = BM = $\dfrac{BC}{2}$ = a $\Rightarrow$ BD . CE = $\dfrac{a^2}{4}$ (không đổi)

Bài tập 2: Cho ΔABC, BD và CE là 2 đường cao của ΔABC. DF và EG là 2 đường cao của ΔADE. Chứng minh rằng: $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ đồng dạng.

Chứng minh

Xét ΔADB và ΔAEC, ta có:

$\widehat{A}$ là góc chung.



$\widehat{AEC} = \widehat{ADB} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta ADB \backsim \Delta AEC$ (g - g)

Suy ra:

$\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$

Và $\widehat{A}$ = 90^0

$\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (g - c - g)

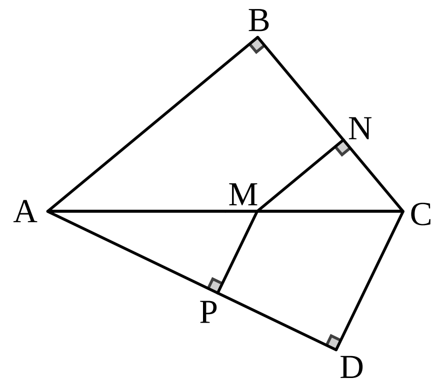
Bài tập 3: Lấy điểm M trên đường chéo AC của tứ giác ABCD có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^0$. Kẻ MN$\perp$ BC (N $\in$ BC) và MP $\perp$ AD (P $\in$AD). Chứng minh: $\dfrac{MN}{AB} + \dfrac{MP}{CD} = 1$.

Chứng minh

Vì AB $\perp$ BC (giả thiết)

MN $\perp$ BC (giả thiết)

Nên MN // AB



$\Rightarrow \Delta CNM \backsim \Delta CBA \Rightarrow \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{MC}{AC}$ (1)

Ta có: MP // CD nên $\Delta AMP \backsim \Delta ACD$

$\Rightarrow \dfrac{MP}{CD} = \dfrac{AM}{AC}$ (2)

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được:

$$\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD} = \frac{MC + AM}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1$$

Vậy $\dfrac{MN}{AB} + \dfrac{MP}{CD} = 1.$

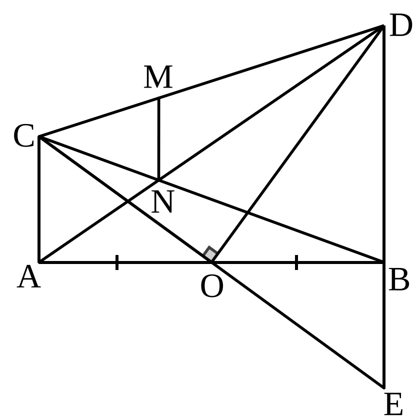
Bài tập 4: Cho đoạn thẳng AB. Gọi O là trung điểm của AB. Vẽ về 1 phía AB các tia Ax và By vuông góc với AB. Lấy C trên Ax, D trên By sao cho góc COD = 90^0.

a) Chứng minh rằng: $\Delta ACO \backsim \Delta BDO$.

b) Chứng minh rằng: CD = AC + BD.

c) Kẻ OM $\perp$ CD tại M, gọi N là giao điểm của AD với BC. Chứng minh rằng: MN // AC.

Chứng minh



a) Ta có:

$\widehat{AOC} = \widehat{BOE}$ (1)

$\widehat{BOE} + \widehat{BOD} = 90^0$

$\widehat{BDO} + \widehat{BOD} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{BOE} = \widehat{BDO}$ (2)

Xét ΔACO và ΔBDO, có:

$\widehat{OAC} = \widehat{DBO} = 90^0$ (giả thiết)

$\widehat{BOE} = \widehat{BDO}$ (theo (2))

$\Rightarrow \Delta ACO \backsim \Delta BDO$ (g - g)

b) Kẻ CO cắt DB tại E.

Ta có: $\Delta AOC = \Delta BOE$ (g - c - g)

$\Rightarrow$ OC = OE.

Xét ΔCOD và ΔEOD, có:

OC = OE (chứng minh trên)

$\widehat{COD} = \widehat{EOD} = 90^0$

OD là cạnh chung.

$\Rightarrow \Delta COD = \Delta EOD$ (c - g - c).

$\Rightarrow$ CD = ED (cạnh tương ứng).

Ta có: AC = BE $\Rightarrow$ AC + BD = BE + BD = ED (Vì CD = ED)

Vậy: AC + BD = CD.

c) Ta có: $\Delta ANC \backsim \Delta DNB$.

$\Rightarrow \dfrac{AN}{ND} = \dfrac{AC}{BD}$

$\Rightarrow \dfrac{AN}{ND} = \dfrac{BE}{BD}$ (Vì AC = BE)

Vì CD = ED nên ΔCDE cân tại D.

$\Rightarrow$ OD là đường cao hạ từ đỉnh D.

Theo chứng minh ở câu b, ta có:

OB = OM (2 đường cao tương ứng)

CM = BE (hình chiếu ứng với các cạnh bằng nhau)
MD = BD (hình chiếu ứng với các cạnh bằng nhau)

$\Rightarrow \dfrac{AN}{ND} = \dfrac{BE}{BD} = \dfrac{CM}{MD}$

$\Leftrightarrow \dfrac{AN}{ND} = \dfrac{CM}{MD}$

Theo định lý Talet, ta có: MN // AC.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho hình bình hành ABCD với đường chéo AC > BD. Gọi E và F là chân đường vuông góc kẻ từ C đến các đường thẳng AB và AD. Gọi G là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AC.

a) Chứng minh rằng: $\Delta CBG \backsim \Delta ACF$.

b) Chứng minh rằng: $AB.AE + AD.AF = AC^2$.

Bài tập 2: Cho ΔABC, M là trung điểm của cạnh BC. Từ một điểm E trên cạnh BC, ta kẻ Ex // AM. Ex cắt tia CA ở F và tia BA ở G. Chứng minh rằng: FE + EG = 2AM.

Bài tập 3: Cho hình bình hành ABCD, trên đường chéo AC lấy I. Tia DI cắt đường thẳng AB tại M, cắt đường thẳng BC tại N.

a) Chứng minh rằng: $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{DM}{DN} = \dfrac{CB}{CN}$

b) Chứng minh rằng: $ID^2 = IM.IN$.

Bài tập 4: Cho ΔABC, BD và CE là 2 đường cao của ΔABC. DF và EG là 2 đường cao của ΔADE. Chứng minh rằng:

a) $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$.

b) FG // BC.

Bài tập 5: Cho ΔABC (AB < AC). Hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) So sánh $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$.

b) So sánh 2 đoạn thẳng BD và CE.

c) Chứng minh: $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$.

Bài tập 6: Cho 4 điểm A, E, F, B theo thứ tự ấy trên 1 đường thẳng. Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các hình vuông ABCD; FGHE.

a) Gọi O là giao điểm của AG và BH. Chứng minh: $\Delta OHE \backsim \Delta OBC$.

b) Chứng minh rằng: Các đường thẳng CE và FD cùng đi qua O.

Bài tập 7: Cho ΔABC có các trung điểm của BC, CA, AB theo thứ tự là D, E, F. Trên cạnh BC lấy điểm M và N sao cho BM = MN = NC. Gọi P là giao điểm của AM và BE; Q là giao điểm của CF và AN. Chứng minh rằng:

a) F, P, D thẳng hàng và D, Q, E thẳng hàng.

b) $\Delta ABC \backsim \Delta DQP$.

Bài tập 8: Cho ΔABC; H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm, giao điểm 3 đường trung trực của Δ. Gọi E, D theo thứ tự là trung điểm của AB và AC.

Chứng minh :

a) $\Delta OED \backsim \Delta HCB$

b) $\Delta GOD \backsim \Delta GBH$

c) Ba điểm O, G, H thẳng hàng và GH = 2OG.

Bài tập 9: Cho ΔABC, AD là phân giác $\widehat{A}$; AB < AC. Trên tia đối của DA lấy điểm I sao cho $\widehat{ACI} = \widehat{BDA}$. Chứng minh rằng:

a) $\Delta ADB \backsim \Delta ACI$; $\Delta ADB \backsim \Delta CDI$

b) $AD^2 = AB.AC - BD.DC$.

Bài tập 10: Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau ở H. Chứng minh rằng:

a) AE.AC = AF.AB

b) $\Delta AFE \backsim \Delta ACB$

c) $\Delta FHE \backsim \Delta BHC$

d) $BF.BA + CE.CA = BC^2$.

CHỦ ĐỀ 8
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

1. Kiến thức cơ bản:

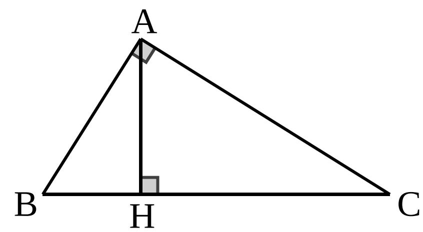
(1) $AB^2 = BH.BC$;

$AC^2 = CH.BC$

(2) $AB.AC = AH.BC$

(3) $AH^2 = BH.HC$

(4) $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$



Kết quả:

Với tam giác đều cạnh là a, ta c: $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Tỉ số lượng giác áp dụng trong tam giác vuông:

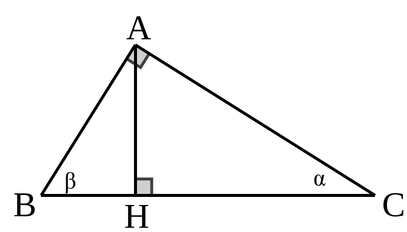
Đặt $\widehat{ACB} = \alpha$; $\widehat{ABC} = \beta$, khi đó:

$\sin\alpha = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AH}{HC}$;

$\cos\alpha = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{HC}{AC}$;

$\tan\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AH}{HC}$

$\cot\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{HC}{AH}$



$b = a\sin B = a\cos C = c\tan B = c\cot C$

$c = a\cos B = a\sin C = b\cot B = b\tan C$

Kết quả suy ra:

(1) $\sin\alpha = \cos\beta$; $\cos\alpha = \sin\beta$; $\tan\alpha = \cot\beta$; $\cot\alpha = \tan\beta$

(2) $0 < \sin\alpha < 1$; $0 < \cos\alpha < 1$; $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

(3) $\sin^2\alpha + \cos\alpha = 1$; $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$; $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

4) Cho ΔABC nhọn, BC = a; AC = b; AB = c. khi đó:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A;\ S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc.\sin A$$

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết AH = 9cm, CH = 16cm.

a) Tính độ dài các cạnh AB, AC.

b) Tính chiều cao AH.

Giải

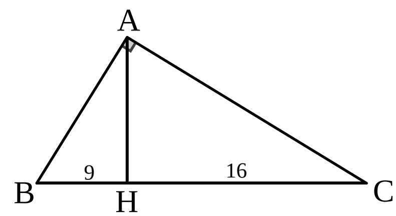
a) Ta có: BC = BH + HC = 9 + 16 = 25 (cm)

ΔABC vuông tại A, AH $\perp$ BC (giả thiết)

Sử dụng hệ thức về góc vuông và hình chiếu của nó lên cạnh huyền, ta có:

$AB^2 = BH.HC = 9.25 = 225$.

$\Rightarrow AB = \sqrt{225} = 15\ (cm)$



$AC^2 = CH.CB = 16.25 = 400$

Suy ra:

$\Rightarrow AC = \sqrt{400} = 20\ (cm)$

b) Theo hệ thức liên hệ giữa đường cao thuộc cạnh huyền và hình chiếu của hai góc vuông trên cạnh huyền, ta có:

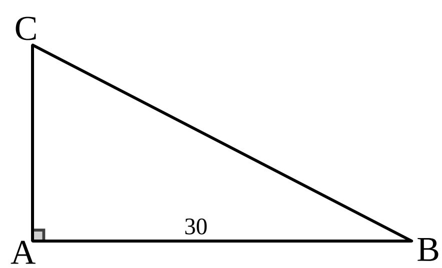
$AH^2 = BH.HC = 9.16 = 144 \Rightarrow AH = 12$ (cm)

Bài tập 2: Cho ΔABC vuông tại A, AB = 30 (cm), $\tan B = \dfrac{8}{15}$

a) Tính AC, BC.

b) Tính sinB, cosB, cotB.

Giải



a) Trong ΔABC vuông tại A, ta có:

$\tan B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{8}{15}$ mà AB = 30 (cm) nên ta có:

$\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{8}{15} \Leftrightarrow AC = \dfrac{30.8}{15} = 16\ (cm)$

Theo định lý Pitago, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 30^2 + 16^2 = 1156$

Suy ra: BC = 34 (cm)

b) Theo định nghĩa, ta có các tỉ số lượng giác của các góc là:

$\sin B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{16}{34} \approx 0,4706$

$\cos B = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{30}{34} \approx 0,8824$

$\tan B = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{30}{16} = 1,875$

Bài tập 3: Cho ΔABC, đường cao AH (H $\in$ BC), $\widehat{B} = 42^0$ AB = 12cm, BC = 22cm. Tính các cạnh và góc còn lại của tam giác.

Giải

Trong ΔAHB vuông tại H, $\widehat{B} = 42^0$ nên $\widehat{HAB} = 90^0 - 42^0 = 48^0$

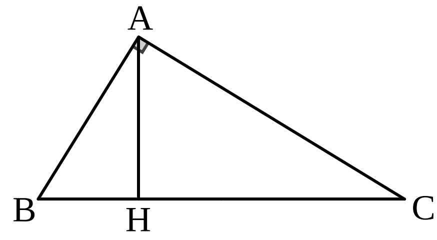
Áp dụng hệ thức lượng liên hệ giữa các cạnh và góc trong của tam giác vuông AHB, ta có:

$AH = AB.\sin B = 12.\sin 42^0 \approx 12.0,669 \approx 8,028$ (cm)

$BH = AB.\cos B = 12.\cos 42^0 \approx 12.0,743 \approx 8,916$ (cm)

Trong tam giác vuông AHB, ta có:

$\tan C = \dfrac{AH}{HC} \approx \dfrac{0,028}{13,084} = 0,614$



$\Rightarrow \widehat{C} \approx 31^0 30'$

$\Rightarrow \widehat{HAC} \approx 90^0 - 31^0 30' = 58^0 30'$

Do đó:

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 48^0 + 58^0 30' = 106^0 30'$

$AH = AC.\sin C$

Suy ra:

$AC = \dfrac{AH}{\sin C} \approx \dfrac{8,028}{\sin 31^0 30'} \approx 15,35\ (cm)$

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho ΔABC vuông tại A, biết:

a) a = 72cm, $\widehat{B} = 58^0$

b) b = 20cm, $\widehat{B} = 48^0$

c) b = 15cm, $\widehat{C} = 30^0$

d) b = 21cm, c = 18cm.

Bài tập 2: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết HB = 25cm, HC = 64cm. Tính $\widehat{B}, \widehat{C}$.

Bài tập 3: Chứng minh rằng: Nếu một tam giác có hai cạnh bằng a và b, góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng đó bằng c thì diện tích của tam giác đó bằng: $S = \dfrac{1}{2}ab.\sin c$

Bài tập 4: Cho ΔABC có, AB = 16cm và $\widehat{B} = 60^0$.

a) Tính BC.

b) Tính S_{ABCD}.

Bài tập 5: Cho ΔABC vuông tại A. Gọi H là chân đường cao hạ từ A. Biết rằng AB = 7cm, AC = 9cm. Tính BH, CH, AH.

Bài tập 6: Cho ΔABC vuông cân tại A, đường cao AH. Biết BC = a, AH = h. Tính độ dài cạnh bên theo a, h.

Bài tập 7: Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, kẻ HM ⊥ AB tại M. Chứng minh: $BM = \dfrac{AB^3}{BC^2}$

Bài tập 8: Cho ΔABC có AB = 48cm, AC = 14cm, BC = 50cm. Tính độ dài đường phân giác của góc C.

Bài tập 9: Cho ΔABC vuông tại A có AB = 3cm; BC = 5cm. AH là đường cao. Tính BH; CH; AC và AH.

Bài tập 10: Cho ABC cân tại A có BC = 16cm; AH = 6cm. Một điểm D ∈ BH sao cho BD = 3,5 cm. Chứng minh: ΔDAC vuông.

Bài tập 11: Cho ΔABC vuông tại A có AC = 10cm; AB = 8cm. Tính:

a) BC.

b) Hình chiếu của AB và AC lên BC.

c) Đường cao AH.

Bài tập 12: Cho đường tròn tâmO bán kính R = 10cm.Dây cung AB bất kỳ có trung điểm I.

a) Tính AB nếu OI = 7cm.

b) Tính OI nếu AB = 14cm.

Bài tập 13: Cho đường tròn tâm O có đường kính AB = 26,5 cm. Vẽ dây cung AC = 22,5cm. H là hình chiếu của C trên AB, nối BC. Tính BC; BH; CH và OH.

Bài tập 14: Hình thang ABCD cân; đáy lớn AB = 30cm, đáy nhỏ CD = 10cm và góc A là 60^0.

a) Tính cạnh BC.

b) Gọi M; N lần lượt là trung điểm AB và CD. Tính MN.

Bài tập 15: Cho đa giác lồi ABCD có AB = AC = AD = 10cm, góc B bằng 60^0 và góc A là 90^0.

a) Tính đường chéo BD.

b) Tính khoảng cách BH và Điều kiện từ B và D đến AC.

c) Tính HK.

d) Vẽ BE $\perp$ DC kéo dài. Tính BE; CE và DC.

Bài tập 16: Cho đoạn thẳng AB=2a. Từ trung điểm O của AB vẽ Ox $\perp$ AB tại O. Trên Ox lấy D: OD = $\frac{a}{2}$. Từ B kẻ BC $\perp$ AD kéo dài.

a) Tính AD; AC và BC theo a.

b) Kéo dài DO một đoạn OE = a. Chứng minh: Bốn điểm A, C, B và E cùng nằm trên một đường tròn.

b) Xác định tính chất CE với góc ACB.

c) Vẽ đường vuông góc với BC tại B cắt CE tại F. Tính BF.

d) Gọi P là giao điểm của AB và CE. Tính AP và BP.

Bài tập 17: Cho ΔABC nhọn, nội tiếp (O; R) có: $\widehat{AOB} = 90^0$ và $\widehat{AOC} = 120^0$

a) Chứng minh: O ở trong tam giác ABC.

b) Tính các góc tam giác ABC.

c) Tính đường cao AH và BC theo R.

Bài tập 18: Cho ΔABC có ba góc nhọn. AB = c, AC = b, BC = a. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Bài tập 19: Cho ΔABC có ba góc nhọn. AB = c, AC = b, BC = a. Chứng minh rằng:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B.$$

Bài tập 20: Cho ΔABC vuông tại A, $\widehat{C} = a$, $\left(a < 45^0\right)$ trung tuyến AM. Đường cao AH. Biết BC = a, AC = b, AH = h.

a) Tính: sina, sin2a theo a, b, h.

b) Chứng minh rằng: sin2a = 2sina.cosa.

Bài tập 21: Cho ΔABC cân tại A. Đường cao thuộc cạnh bên bằng h, góc ở đáy bằng a. Chứng minh rằng: $S_{\Delta ABC} = \frac{h^2}{4\sin a.\cos a}$.

Bài tập 22: Cho hình thang ABCD, đáy lớn AB = 20cm, cạnh bên AD = 8cm và tạo với đáy lớn AB một góc 65^0.

a) Tính độ dài đường cao AH và đáy nhỏ CD.

b) Tính số đó góc $\widehat{ABD}$ và đường chéo BD.

Bài tập 23: Cho hình thang ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$, AD = 30cm, CD = 18cm và BC = 20cm.

a) Tính cách góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$.

b) Tính các góc $\widehat{DAC}$, $\widehat{ADB}$ và dộ dài các đường chéo AC, BD.

Bài tập 24: Cho ΔABC. Biết AB = 10cm, AC = 24cm, BC = 26cm.

a) Chứng minh rằng: ΔABC vuông tại A.

b) Tính: sinB, sinC.

c) Tính chiều cao AH và đoạn thẳng mà chiều cao nó chia ra trên BC.

CHỦ ĐỀ 9
CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC

1. Kiến thức cơ bản:

- Dùng định lý Talet, tính chất đường phân giác, tam giác đồng dạng, các hệ thức lượng trong tam giác vuông, …

Giả sử cần chứng minh: MA.MB = MC.MD

Lập sơ đồ: MA.MB = MC.MD $\Leftarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MB} \Leftarrow \Delta MAD \backsim \Delta MCB$ hoặc $\Delta MAC \backsim \Delta MDB$

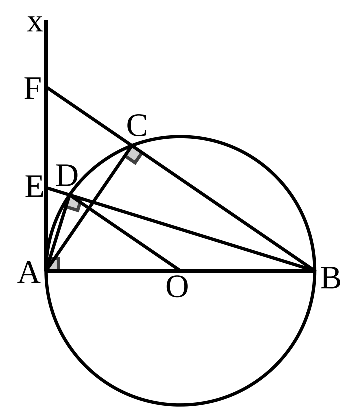
Ngoài ra cần chú ý đến việc sử dụng các hệ thức trong tam giác vuông; phương tích của một điểm với đường tròn.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho đường tròn (O; R), tiếp tuyến Ax. Trên tiếp tuyến Ax, lấy điểm F sao cho BF cắt đường tròn tại C. Tia phân giác của góc ABF cắt Ax tại E và cắt đường tròn tại D.

a) Chứng minh OD // BC.

b) Chứng minh hệ thức: BD.BE = BC.BF



Chứng minh

a) ΔBOD cân ở O (vì OD = OB = R)

$\Rightarrow \widehat{OBD} = \widehat{ODB}$

Mà $\widehat{OBD} = \widehat{CBD}$ (giả thiết) nên $\widehat{ODB} = \widehat{CBD}$.

Do đó: OD // BC.

b) Ta có:

$\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)

$\Rightarrow AD \perp BE$.

$\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)

$\Rightarrow AC \perp BF$.

ΔEAB vuông ở A (do Ax là tiếp tuyến), có AD $\perp$ BE nên AB^2 = BD.BE (1)

ΔFAB vuông ở A (do Ax là tiếp tuyến), có AC $\perp$ BF nên AB^2 = BC.BF (2)

Từ (1) và (2) suy ra: BD.BE = BC.BF.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác BCDE nội tiếp.

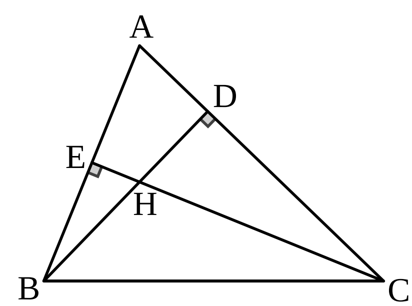
b) Chứng minh: AD.AC = AE.AB.

Chứng minh

a) Xét tứ giác BCDE, có:

$\widehat{BDC} = 90^0$

$\widehat{BEC} = 90^0$



Ta có hai đỉnh D, E cùng nhìn cạnh BC với một góc bằng 90^0.

$\Rightarrow$ Tứ giác BCDE nội tiếp.

b) Xét ΔADB và ΔAEC, ta có:

$\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^0$ (Vì BD, CE là hai đường cao)

$\widehat{A}$ là góc chung.

$\Rightarrow \Delta ADB \backsim \Delta AEC$ (g - g).

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$

$\Rightarrow$ AD.AC = AE.AB

Bài tập 3: Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) tại D và E (D nằm giữa A và E, dây DE không qua tâm O). Gọi H là trung điểm của DE, AE cắt BC tại K .

a) Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp đường tròn .

b) Chứng minh: HA là tia phân giác của $\widehat{BHC}$

c) Chứng minh: $\dfrac{2}{AK}=\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{AE}$.

Chứng minh

a) Ta có: $\widehat{ABO}=\widehat{ACO}=90^0$ (tính chất tiếp tuyến)

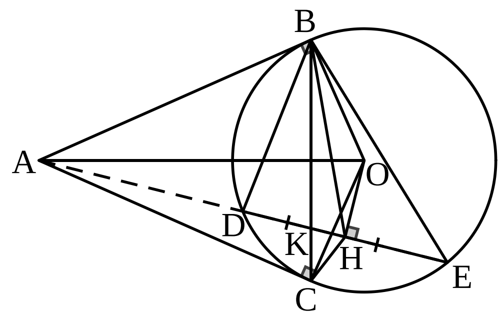
Trong tứ giác ABOC có $\widehat{ABO}+\widehat{ACO}=180^0$ nên nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Ta có: AB = AC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Suy ra: $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$.

Do đó: $\widehat{AHB}=\widehat{AHC}$.

Vậy HA là tia phân giác của $\widehat{BHC}$.



c) Chứng minh: $\dfrac{2}{AK}=\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{AE}$:

Xét ΔABD và ΔAEB, có:

$\widehat{BAE}$ là góc chung

$\widehat{ABD}=\widehat{AEB}\left(=\dfrac{1}{2}\text{sđ }\overset{\frown}{BD}\right)$

Suy ra: $\Delta ABD \backsim \Delta AEB$

Do đó: $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AD}{AB}\Rightarrow AB^2=AD.AE$ (1)

Xét ΔABK và ΔAHB, có:

$\widehat{BAH}$ là góc chung

$\widehat{ABK}=\widehat{AHB}$ (do $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$)

$\Rightarrow \Delta ABK \backsim \Delta AHB$.

Suy ra: $\dfrac{AK}{AB}=\dfrac{AB}{AH}\Rightarrow AB^2=AK.AH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: AE.AD = AK. AH

$$\Rightarrow \frac{1}{AK}=\frac{AH}{AE.AD}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{AK}=\frac{2AH}{AE.AD}=\frac{2\left(AD+DH\right)}{AE.AD}=\frac{2AD+2DH}{AE.AD}=\frac{AD+AD+ED}{AE.AD}=\frac{AE+AD}{AE.AD}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{AE}$$

(do AD + DE = AE và DE = 2DH).

Vậy $\dfrac{2}{AK}=\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{AE}$ **(**đpcm).

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho (O) có đường kính AB. Qua A kẻ tiếp tuyến xy. Lấy điểm M $\in$ Ax; nối BM cắt (O) tại C. Chứng minh: MA^2 = MB.MC.

Bài tập 2: Cho ΔABC đều, nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm trên cung BC (BC là cung nhỏ). CD và AB kéo dài cắt nhau ở M; BD và AC kéo dài cắt nhau ở N. Chứng minh: AB^2 = BM.CN.

Bài tập 3: Cho ΔABC có AB < AC. Từ M $\in$ AB vẽ MEF //BC cắt AC tại E và đường thẳng song song AB vẽ từ C tại F. AC cắt BF tại I. Chứng minh: IC^2 = IE.IA.

Bài tập 4: Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 36mm; AD = 24mm. Từ D nối đến trung điểm M của AB cắt AC tại I và CB kéo dài tại K. Chứng minh: $ID^2 = IM.IK$.

Bài tập 5: Cho ΔABC vuông tại A. Vẽ phân giác trong AD của góc A ($D \in BC$). Gọi khoảng cách từ D đến AB là d. Biết AB = c, AC = b, BC = a. Chứng minh: $\frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Bài tập 6: Cho (O; R) và hai dây cung song song nhau AD và BE ở về hai phía của dây AB và cùng hợp với AB một góc 45^0. Nối DE cắt AB tại M. Chứng minh: $MA^2 + MB^2 + MD^2 + ME^2 = 4R^2$.

Bài tập 7: Cho ba điểm A, B, C cùng nằm trên một đường thẳng xy theo thứ tự trên. Vẽ đường tròn (O) đi qua B và C. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AM và AN. Chứng minh $AM^2 = AN^2 = AB.AC$.

Bài tập 8: Trên cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC, lấy một điểm P tuỳ ý. Gọi là giao điểm của AP và BC.

a) Chứng minh: $BC^2 = AP . AQ$.

b) Trên AP lấy điểm M sao cho PM = PB. Chứng minh: BP + PC = AP.

c) Chứng minh: $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

Bài tập 9: Cho hình bình hành ABCD (AC > BD). Vẽ $CE \perp AB$ và $FC \perp AD$. Chứng minh rằng: $AB.AE + AD.AF = AC^2$.

Bài tập 10: Cho tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh BC. Từ 1 điểm E trên cạnh BC ta kẻ Ex // AM. Ex cắt tia CA ở F và tia BA ở G. Chứng minh rằng: FE + EG = 2AM.

Bài tập 11: Cho Cho hình bình hành ABCD, trên Đường chéo AC lấy I. Tia DI cắt đường thẳng AB tại M, cắt đường thẳng BC tại N.

a) Chứng minh rằng: $\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DN} = \frac{CB}{CN}$

b) Chứng minh rằng: $ID^2 = IM.IN$.

Bài tập 12: Lấy 1 điểm O trong tam giác ABC. Các tia AO, BO, CO cắt BC, AC, AB lần lượt tại P, Q, R. Chứng minh rằng: $\frac{OA}{AP} + \frac{OB}{BQ} + \frac{OC}{CR} = 2$.

Bài tập 13: Cho tam giác ABC (AB = AC) có góc ở đỉnh bằng 20^0; cạnh đáy là a; cạnh bên là b. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Bài tập 14: Cho ΔABC có $\hat{A} = 30^0$. Dựng bên ngoài ΔBCD đều. Chứng minh: $AD^2 = AB^2 + AC^2$.

Bài tập 15: Cho ΔABC cân tại A ($\widehat{A} = 90^0$). Từ B kẻ $BM \perp AC$. Chứng minh rằng: $\frac{AM}{AC} = 2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 1$.

CHỦ ĐỀ 10
TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

1. Kiến thức cơ bản:

Các phương pháp chứng minh tứ giác nội tiếp:

- Chứng minh bốn đỉnh của tứ giác cùng cách đều một điểm.
- Chứng minh tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng 180^0 (bù nhau).
- Chứng minh hai đỉnh cùng nhìn một đoạn thẳng dưới một góc bằng nhau.
- Chứng minh tổng của góc ngoài tại một đỉnh với góc trong đối diện bù nhau.

Hay diễn đạt là: "Góc ngoài bằng góc đối trong".

- Nếu MA.MB = MC.MD hoặc NA.ND = NC.NB thì tứ giác ABCD nội tiếp.

(Trong đó: $M = AB \cap CD$; $N = AD \cap BC$)

- Nếu PA.PC = PB.PD thì tứ giác ABCD nội tiếp. (Trong đó P= AC $\cap$ BD)
- Chứng minh tứ giác đó là hình thang cân; hình chữ nhật; hình vuông; …

Nếu cần chứng minh cho nhiều điểm cũng thuộc một đường tròn ta có thể chứng minh lần lượt 4 điểm một lúc. Song cần chú ý tính chất "Qua 3 điểm không thẳng hàng xác định duy nhất một đường tròn"

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho ΔABC, BD, CE là hai đường cao. Chứng minh: Tứ giác BCDE và AEHD nội tiếp.

Chứng minh

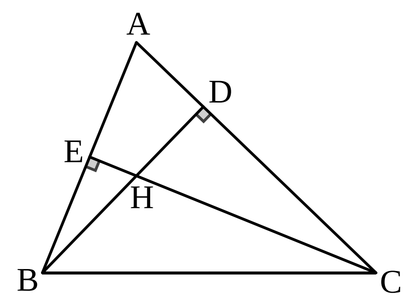
Xét tứ giác BCDE, có:

$\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^0$ (Vì BD, CE là hai đường cao)

$\widehat{A}$ là góc chung.

$\Rightarrow$ Hai đỉnh E, D cùng nhìn cạnh BC với một góc bằng 90^0.

$\Rightarrow$ Tứ giác BCDE nội tiếp.



Xét tứ giác AEHD, có:

$\widehat{AEH} = 90^0$ (EC là đường cao)

$\widehat{ADH} = 90^0$ (BD là đường cao)

$\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{ADH} = 180^0$

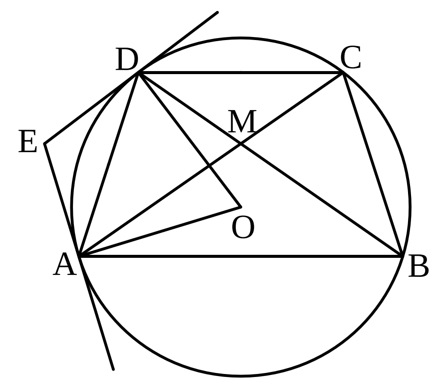
$\Rightarrow$ Tứ giác AEHD nội tiếp.

Bài tập 2: Cho hình thang cân ABCD (AB > CD, AB // CD) nội tiếp trong đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A và D chúng cắt nhau ở E. Gọi M là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh tứ giác AEDM nội tiếp được trong một đường tròn.

Chứng minh

Ta có:

$\widehat{EAC} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AC}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến AE và dây AC của đường tròn (O))



Tương tự:

$\widehat{xDB} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{DB}$ (Dx là tia đối của tia tiếp tuyến DE)

Mà AC = BD (do ABCD là hình thang cân) nên $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

Do đó $\widehat{EAC} = \widehat{xDB}$.

Vậy tứ giác AEDM nội tiếp được trong một đường tròn.

Bài tập 3: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R, dây cung AC. Gọi M là điểm chính giữa cung AC. Đường thẳng kẻ từ C song song với BM cắt tia AM ở K và cắt tia OM ở D. OD cắt AC tại H. Chứng minh tứ giác CKMH nội tiếp.

Chứng minh

Ta có:

$\widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB)

$\Rightarrow AM \perp MB$.

Mà CD // BM (giả thiết) nên AM $\perp$ CD .

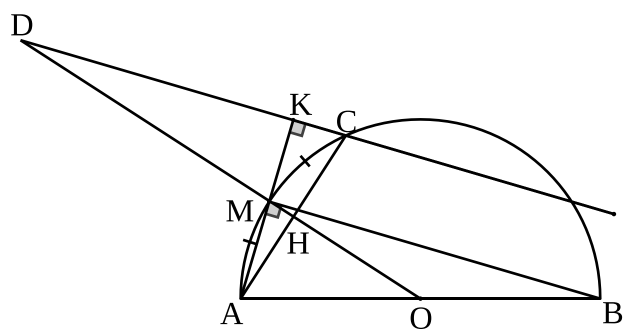
Vậy $\widehat{MKC} = 90^0$.

Ta có:

$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{CM}$ (giả thiết)

$\Rightarrow OM \perp AC$

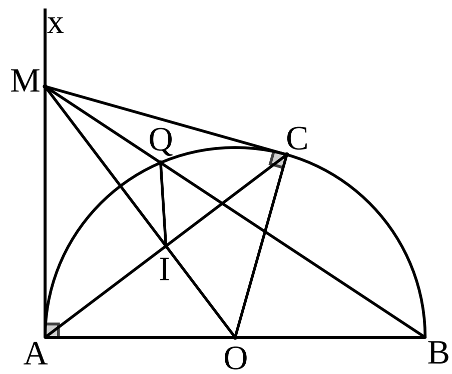
$\Rightarrow \widehat{MHC} = 90^0$.



Tứ giác CKMH có $\widehat{MKC}+\widehat{MHC}=180^0$ nên nội tiếp được đường tròn.

Bài tập 4: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Từ điểm M trên tiếp tuyến Ax của nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến thứ hai MC (C là tiếp điểm). Đường thẳng MB cắt nửa đường tròn (O) tại Q. Gọi giao điểm của MO và AC là I. Chứng minh rằng: Tứ giác AMQI nội tiếp.

Chứng minh



Ta có:

MA = MC (tính chất hai tếp tuyến cắt nhau)

OA = OC (bán kính đường tròn (O))

Do đó: MO $\perp$ AC $\Rightarrow \widehat{MIA}=90^0$.

$\widehat{AQB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\Rightarrow \widehat{MQA}=90^0$.

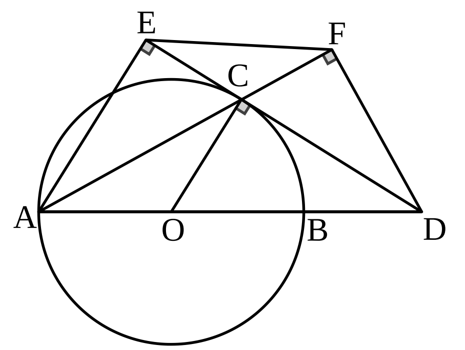
$\Rightarrow$ Hai đỉnh I, Q cùng nhìn cạnh AM với một góc bằng 90^0

$\Rightarrow$ Tứ giác AMQI nội tiếp được trong đường tròn.

Bài tập 5: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia AB lấy điểm D nằm ngoài đoạn AB và kẻ tiếp tuyến DC với đường tròn (O) (C là tiếp điểm). Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ A xuống đường thẳng CD và F là chân đường vuông góc hạ từ D xuống đường thẳng AC.

Chứng minh: Tứ giác EFDA nội tiếp.

Chứng minh



Ta có:

$\widehat{AED}=90^0$ (Vì AE $\perp$ CD tại E)

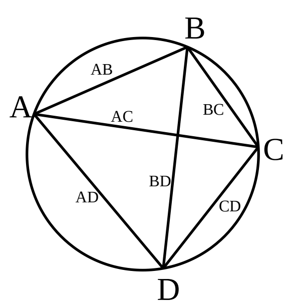
$\widehat{AFD}=90^0$ (Vì DF $\perp$ AC tại F)

$\Rightarrow$ Hai đỉnh E, F cùng nhìn cạnh AD với một góc bằng 90^0.

$\Rightarrow$ Tứ giác EFDA nội tiếp.

Bài tập 6: Sử dụng tính chất của định lý Plôtêmê :

Định lý Ptolemy hay Đẳng thức Ptolemy là đẳng thức trong hình học Euclid miêu tả quan hệ giữa độ dài bốn cạnh và hai đường chéo của một tứ giác nội tiếp đường tròn. Định lý này mang tên nhà toán học và thiên văn học người Hy Lạp cổ đại Ptolemy (Claudius Ptolemaeus).



Nếu A, B, C, và D là 4 đỉnh của tứ giác nội tiếp đường tròn thì:

$$\left|\overline{AC}\right|.\left|\overline{BD}\right|=\left|\overline{AB}\right|.\left|\overline{CD}\right|+\left|\overline{BC}\right|+\left|\overline{AD}\right|$$

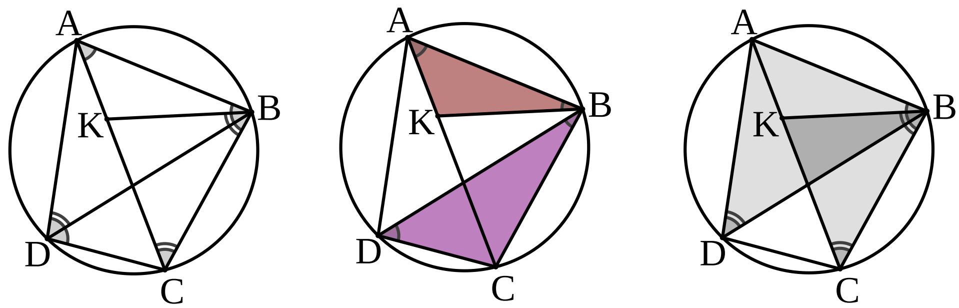
(với dấu gạch ngang kí hiệu độ dài của các cạnh)

Định lý này cũng có thể phát biểu thành định lý thuận và đảo:

Định lý thuận: Nếu một tứ giác nội tiếp trong một đường tròn thì tích của hai đường chéo bằng tổng các tích của các cặp cạnh đối diện.

Định lý đảo: Nếu một tứ giác thỏa mãn điều kiện tổng các tích của các cặp cạnh đối diện bằng tích của hai đường chéo thì tứ giác đó nội tiếp một đường tròn.

Chứng minh



Gọi ABCD là tứ giác nội tiếp đường tròn.
Trên cung nhỏ BC, ta có các góc nội tiếp:
$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$, và trên cung AB, $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$.
Lấy 1 điểm K trên AC sao cho $\widehat{ABK} = \widehat{CBD}$;
Từ $\widehat{ABK} + \widehat{CBK} = \widehat{ABC} = \widehat{CBD} + \widehat{ABD}$.
Suy ra: $\widehat{CBK} = \widehat{ABD}$.
Do vậy tam giác $\triangle ABK \backsim \triangle DBC$, và tương tự có $\triangle ABD \backsim \triangle KBC$.
Suy ra: $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{CD}{BD}$, và $\dfrac{CK}{BC} = \dfrac{DA}{BD}$;
Từ đó AK.BD = AB.CD, và CK.BD = BC.DA;
Cộng các vế của 2 đẳng thức trên: AK.BD + CK.BD = AB.CD + BC.DA;
Hay: (AK+CK).BD = AB.CD + BC.DA;
Mà AK+CK = AC, nên AC·BD = AB.CD + BC.DA. (Điều phải chứng minh)

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho đường tròn (O) đường kính AB. M là một điểm trên tiếp tuyến xBy. AM cắt (O) tại C; lấy $D \in BM$; nối AD cắt (O) tại I. Chứng minh: Tứ giác CIDM nội tiếp.

Bài tập 2: Cho ΔABC vuông tại A có AB = 5cm và AC = $5\sqrt{3}$ cm. Đường cao AH ($H \in BC$). Đường tròn (H; HA) cắt AB tại D và AC tại E. Chứng minh: Tứ giác CEBD nội tiếp.

Bài tập 3: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Từ A và B vẽ $Ax \perp AB$ và $By \perp BA$. Vẽ tiếp tuyến x'My' (tiếp điểm M) cắt Ax tại C và By tại D. OC cắt AM tại I và OD cắt BM tại K. Chứng minh: Tứ giác CIKD nội tiếp.

Bài tập 4: Cho đường tròn (O) đường kính AB, vẽ bán kính $OC \perp AB$. Từ B vẽ tiếp tuyến Bx. Gọi M là trung điểm OC, AM kéo dài cắt đường tròn tại E và Bx tại I. Tiếp tuyến từ E cắt Bx tại D. Chứng minh: Tứ giác MODE nội tiếp.

Bài tập 5: Cho tam giác ABC ($\widehat{BAC} < 45^0$) nội tiếp trong nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Dựng tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C và gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến tiếp tuyến đó. AH cắt đường tròn (O) tại M ($M \neq A$). Đường vuông góc với AC kẻ từ M cắt AC tại K. Chứng minh tứ giác MKCH nội tiếp.

Bài tập 6: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Đường tròn tâm O đường kính AH cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N ($A \neq M$ và N). Chứng minh:

a) $\widehat{AHN} = \widehat{ACB}$

b) Tứ giác BMNC nội tiếp.

Bài tập 7: Cho đường tròn (O;R) đường kính AB. Gọi C là điểm bất kỳ thuộc đường tròn đó ($C \neq A$ và B). Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ AC và BC. Các đường thẳng BN và AC cắt nhau tại I, các dây cung AN và BC cắt nhau ở P. Chứng minh tứ giác ICPN nội tiếp. Xác định tâm K của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

Bài tập 8: Cho đường tròn (O; R), đường kính AB . Trên tiếp tuyến kẻ từ A của đường tròn này lấy điểm C sao cho AC = AB. Từ C kẻ tiếp tuyến thứ hai CD của đường tròn (O; R), với D là tiếp điểm. Chứng minh rằng tứ giác ACDO nội tiếp.

Bài tập 9: Cho đường tròn (O) đường kính AB bằng 6cm . Gọi H làđiểm nằm giữa A và B. Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với AB, đường thẳng này cắt đường tròn (O) tại C và D. Hai đường thẳng BC và DA cắt nhau tại M. Từ M hạ đường vuông góc MN với đường thẳng AB (N thuộc thẳng AB). Chứng minh MNAC là tứ giác nội tiếp.

CHỦ ĐỀ 11
CÁC ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp 1: Áp dụng tính chất các đường đồng quy trong tam giác.

Phương pháp 2: Chứng minh các đường thẳng cùng đi qua một điểm: Ta chỉ ra hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm và chứng minh đường thẳng cũng đi qua điểm đó.

Phương pháp 3: Dùng định lý đảo của định lý Talet.

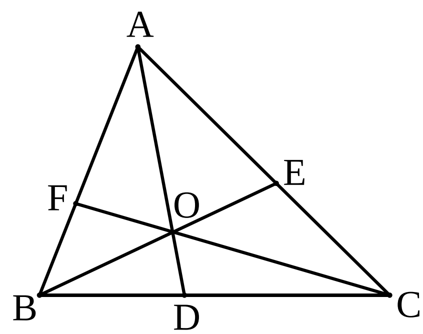
Phương pháp 4:

Định lý Lyness mở rộng(Bổ đề Sawayama): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M $\in$ BC. Một đường tròn (O') tiếp xúc với hai cạnh MA và MC tại E và F đồng thời tiếp xúc với cả đường tròn (O) tại K. Khi đó ta có tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC nằm trên đường thẳng EF.

Định lý Pascal: Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn. Khi đó các giao điểm của các cặp cạnh AB và DE, BC và EF, CD và FA thẳng hàng.

Phương pháp 6:

Định lý CEVA: Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E và F lần lượt nằm trên các cạnh BC, AC, AB.



Định lý phát biểu rằng các đường thẳng AD, BE và CF là những đường thẳng đồng quy khi và chỉ khi:

$$\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}=1$$

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho tam giác ABC dựng tam giác đều MAB, NBC, PAC thuộc miền ngoài tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) MC = NA = PB

b) $\left(\overline{AM}.\overline{MC}\right)=\left(\overline{MC},\overline{BP}\right)=\left(\overline{BP},\overline{NA}\right)=60^0$

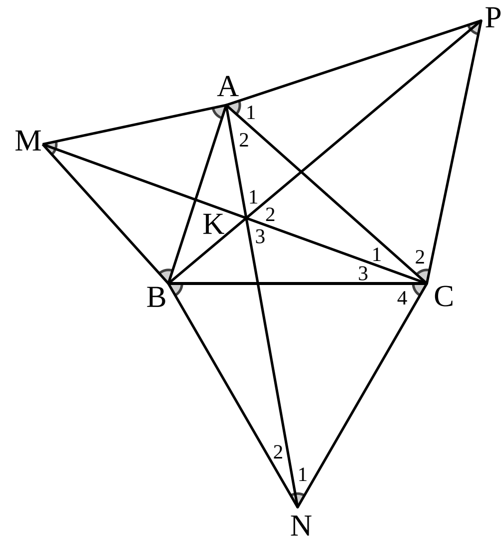
c) MC, NA, PB đồng quy

Chứng minh

a) Xét ΔABN và ΔMBC, có:

AB = MB;

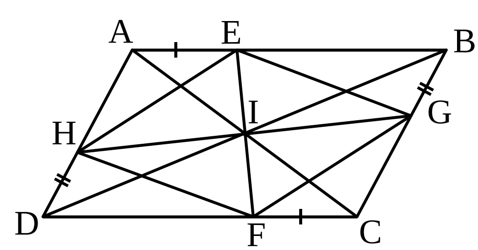
BC = BN (các cạnh của tam giác đều)



$\widehat{ABN} = \widehat{MBC}$ (cùng bằng $60^0 + \widehat{ABC}$)
$\Rightarrow \Delta ABN = \Delta MBC$ (c.g.c)
$\Rightarrow$ AN = MC (*)
Tương tự: $\Delta ABP = \Delta AMC$ (c.g.c)
AB = AM;
BC = BN (các cạnh của tam giác đều)
$\widehat{BAP} = \widehat{MAC}$ (cùng bằng $60^0 + \widehat{BAC}$)
$\Rightarrow$ BP = MC (**)
Từ (*) và (**) ta có: AN = MC = BP (đpcm).
b)
Trong ΔAPC, có: $\hat{A}_1 + \hat{C}_2 + \hat{P}_1 + \hat{P}_2 = 180^0$ mà $\hat{P}_1 = \hat{C}_1$
Trong ΔPCK, có: $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{P}_2 + \hat{K}_2 = 180^0$
$\Rightarrow 60^0 + \left(\hat{C}_1 + \hat{P}_2\right) + \hat{K}_2 = 180^0 \Rightarrow \hat{K}_2 = 60^0$ (1)
Tương tự: $\Delta ABN = \Delta MBC$
$\Rightarrow \widehat{N_1} = \widehat{C_3}$ mà $\widehat{N_1} + \widehat{N_2} = 60^0$
$\Rightarrow \widehat{N_2} + \widehat{C_3} = 60^0$ mà $\widehat{C_4} = 60^0$
$\Rightarrow \Delta NKC$ có $\widehat{N_2} + \widehat{C_3} + \widehat{C_4} + \widehat{K_3} = 180^0$
$\Rightarrow \widehat{K_3} = 60^0$ (2)
Tương tự: $\Delta ACN = \Delta PCB$
$\Rightarrow \widehat{P_2} = \widehat{A_2}$ mà $\hat{P}_1 + \hat{P}_2 = 60^0$
$\Rightarrow \widehat{P_1} + \widehat{A_2} = 60^0$ mà $\widehat{A_1} = 60^0$
$\Rightarrow$ Trong ΔAKP, có: $\widehat{K_1} = 60^0$ (3)
Từ (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh
c) Giả sử $MC \cap BP = K$, ta chứng minh cho A, K, N thẳng hàng.
Theo chứng minh trên ta có: $\widehat{K_2} = 60^0, \widehat{K_3} = 60^0, \widehat{K_1} = 60^0 \Rightarrow \widehat{K_1} + \widehat{K_2} + \widehat{K_3} = 180^0$
$\Rightarrow$ A,K,N thẳng hàng
Vậy AN, MC, BP đồng quy (đpcm)

Bài tập 2: Cho hình bình hành ABCD. Trên AB và CD lấy 2 điểm E và F sao cho AE = CF. Trên AD và BC lấy H và G sao cho DH = BG.
a) Chứng minh: Tứ giác EGFH là hình bình hành
b) Chứng minh: AC, BD, EF, GH cắt nhau tại 1 điểm.

Chứng minh



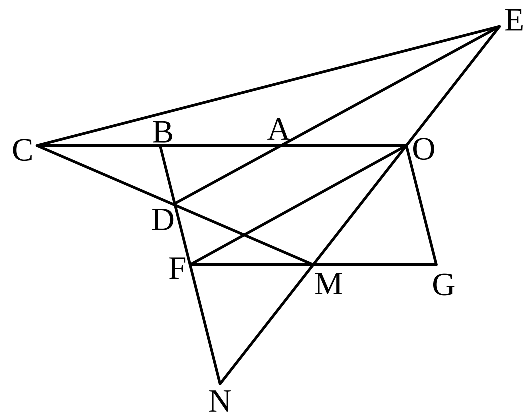
a) Xét ΔDHF và ΔBGE, ta có:
DH = BG
$\widehat{HDF} = \widehat{GBE}$ (Vì ABCD là hình bình hành)
DF = BE (Vì AE = CF)
$\Rightarrow \Delta DHF = \Delta BGE$
$\Rightarrow$ HF = EG. (1)
Mặt khác, ta có:
$\widehat{DHG} = \widehat{BGH}$ và $\widehat{DHF} = \widehat{BGE} \Rightarrow \widehat{FCG} = \widehat{EGH}$ (2)
Từ (1), (2) suy ra: Tứ giác EGFH là hình bình hành.
b) (Theo câu a)
$\Rightarrow$ Tứ giác EGFH là hình bình hành.

Gọi I là giao điểm của 2 đường chéo HG và EF (của hình bình hành EGFH)
Ta lại có: Tứ giác AGCH là hình bình hành (AH // CG và AH = CG)
⇒ Giao của 2 đường chéo HG và AC là I (I trung điểm HG)
Tương tự, ta có: Hình bình hành HBGD có giao điểm của 2 đường chéo là HG và BD tại I (I là trung điểm HG)
Suy ra: HG, EF, AC, BD cắt nhau tại điểm I (cũng là điểm duy nhất).

Bài tập 3: Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại O. Trên d_1 lần lượt lấy ba điểm phân biệt A, B, C khác O sao cho OA = AB = BC. Trên d_2 lần lượt lấy ba điểm E, M, N khác O sao cho OE = OM = MN. Chứng minh rằng ba đường thẳng AE, BN và CM đồng quy.

Chứng minh

Gọi D là giao điểm của BN và CM.
Qua M kẻ đường thẳng song song với OC cắt BC tại F.
Qua O kẻ đường thẳng song song với BN cắt MF tại G.



Xét ΔFBO và ΔOGF, ta có:

$\widehat{BOF} = \widehat{GFO}$ (so le trong)
OF là cạnh chung
$\widehat{BFO} = \widehat{GOF}$ (so le trong)
⇒ΔFBO = ΔOGF (g-c-g).
⇒ FG = BO. (1)

Xét ΔNFM và ΔOGM, ta có:

$\widehat{GOM} = \widehat{FNM}$
MO=MN
$\widehat{OMG} = \widehat{NMF}$ (đối đỉnh)
⇒ ΔNFM = ΔOGM.
⇒ MF = MG. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: MF = OA = AB = BC.
Sử dụng kết quả vừa tìm được này kết hợp:

$\widehat{DCB} = \widehat{DMF}$ (so le trong) và $\widehat{DBC} = \widehat{DFM}$ (so le trong)

Suy ra: ΔDBC = ΔDFM (g-c-g).
Do đó: DC = DM
hay D là trung điểm của CM. (3)
Xét ΔCEM, ta có:

CO là trung tuyến ứng với cạnh ME (do OE=OM)
CA = $\dfrac{2}{3}$CO
⇒ A là trọng tâm của ΔCEM.

Suy ra: AE đi qua trung điểm của cạnh CM. (4)
Từ (3) và (4), ta suy ra: AE đi qua D.
Vậy BN,CM và AE đồng quy tại D.

Bài tập 4: Cho ΔABC, các đường cao AD, BE, CF của tam giác đồng quy tại H. Gọi I là trung điểm của HC.
a) Chứng minh BCEF là tứ giác nội tiếp.
b) Chứng minh rằng H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF và DIEF là tứ giác nội tiếp 1 đường tròn.
c) Về phía ngoài ΔABC dựng các ΔABM và ΔCAN sao cho chúng là các tam giác vuông cân tại các đỉnh B và C tương ứng. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BN, CM đồng quy.

Chứng minh

a) HS tự làm.
b) Ta dễ dàng chứng minh được các tứ giác AEHF, AEDB nội tiếp trong đường tròn.

Khi đó, ta có:

$\widehat{FAH} = \widehat{FEH}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{FH}$)

và $\widehat{FAH} = \widehat{BAD}$

$\widehat{BAD} = \widehat{BED}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$)

và $\widehat{BED} = \widehat{HED}$

$\Rightarrow \widehat{FEH} = \widehat{HED}$

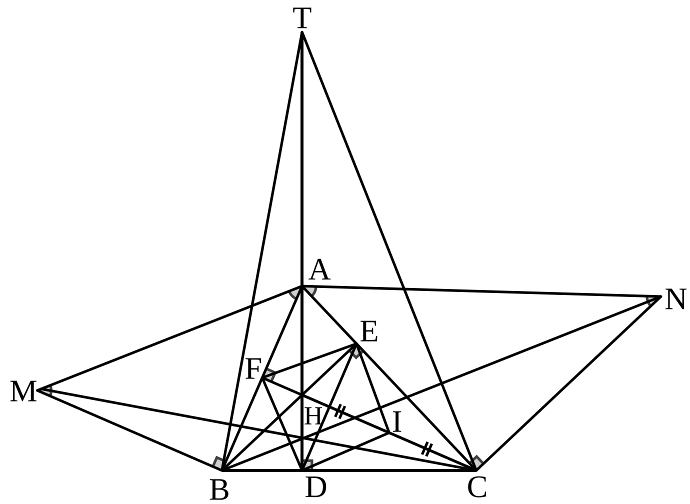
$\Rightarrow$ HE là tia phân giác của $\widehat{FED}$.

Tương tự, ta có:

HF là tia phân giác của $\widehat{EFD}$.

HD là tia phân giác của $\widehat{EDF}$.

$\Rightarrow$ H là giao điểm của 3 đường phân giác trong của ΔDEF.



Vậy H là tâm của đường trong nội tiếp ΔDEF.

* Theo chứng minh ở trên, ta có:

$\widehat{FED} = 2\widehat{FAD}$ và $\widehat{FAD} = \widehat{FCD}$ (HS tự chứng minh tứ giác ACDF nội tiếp)

$\widehat{HID} = 2\widehat{FCD}$ (góc ngoài bằng tổng của 2 góc trong không kề)

$\Rightarrow \widehat{FED} = 2\widehat{FAD} = 2\widehat{FCD} = \widehat{HID} = \widehat{FID}$

Hay $\widehat{FED} = \widehat{FID}$

$\Rightarrow$ Tứ giác EIDF nội tiếp.

c) Trên tia đối tia AD, lấy T sao cho AT = BC.

$\widehat{MBC} = 90^0 + \widehat{ABC} = \widehat{TAB}$

$\Rightarrow \Delta MBC = \Delta BAT$ (c - g - c)

$\Rightarrow \widehat{BTD} = \widehat{BCM}$

$\Rightarrow CM \perp TB$

Tương tự, ta có: $BN \perp TC$.

Mà $TD \perp BC$

Vậy TD, CM, BN đồng quy (3 đường cao của ΔTBC)

Bài tập 5: Cho tứ giác ABCD, AD, BC không song song, nội tiếp đường tròn (O). P là giao điểm của AC và BD. Đường tròn (O_1) tiếp xúc với các đoạn PA, PB và tiếp xúc trong với (O) tại E. Đường tròn (O_2) tiếp xúc với các đoạn PC, PD và tiếp xúc trong với (O) tại F. Chứng minh rằng AD, BC, EF đồng quy.

Chứng minh

Giả sử (O_2) tiếp xúc PB, PC tại X, Y và tiếp xúc (O) tại F.

Theo *bổ đề Sawayama* (*định lí Lyness mở rộng*) ta có XY đi qua H, K (với H,K là tâm nội tiếp các ΔADC, ΔBDC.

Gọi Z, T là giao điểm của HK trên AD, BC. Gọi M, N, P, Q là trung điểm các cung AD, BD, AC, BC của (O).

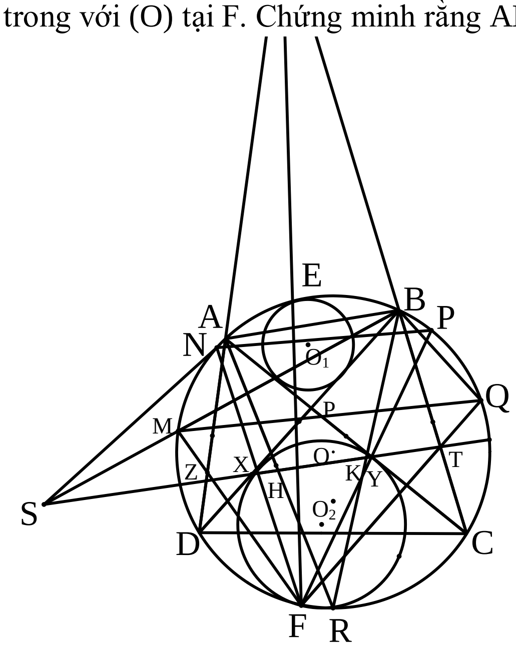
Vì (O_2) tiếp xúc AC, BD nên F, X, N và F, Y, P thẳng hàng.

Ta sẽ chứng minh: M, Z, F thẳng hàng.

Thật vậy: Gọi Z′ là giao của FM và AD.

AN giao BM tại S. Gọi R là trung điểm cung CD.

Theo *định lí Pascan* cho lục giác MFNADB ta có S, Z′, X thẳng hàng.



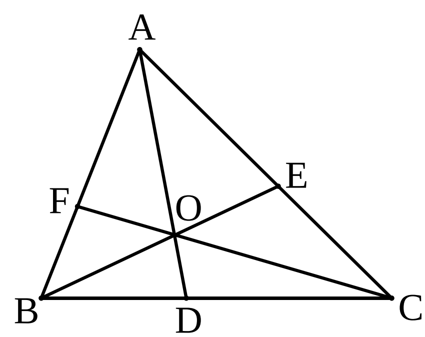
Tiếp tục với lục giác NARBMC ta có H, K, S thẳng hàng.
Mà H, K, X thẳng hàng, nên ta có Z′, X, H, K thẳng hàng hay Z′ trùng Z.
Tương tự, ta có: F, T, Q thẳng hàng.
Gọi (O_3) là đường tròn tiếp xúc AD, BC và tiếp xúc (O) tại cung nhỏ DC.
Ta sẽ chứng minh (O_3) là (ZFT).
Thật vậy, gọi Z", T" là tiếp điểm trên AD, BC của (O_3) thì theo *bổ đề Sawayama*, ta cũng có Z", T", H, K thẳng hàng hay Z", T" trùng Z, T.
Mà MZ và NT cắt nhau tại F nên ta có ngay ZFT chính là (O_3).
Từ đó, ta quy bài toán về phát biểu đơn giản hơn như sau: (O_3) tiếp xúc AD, BC và tiếp xúc cung nhỏ CD tại F.
Tương tự có E.
Khi đó AD, BC, EF đồng quy.

Bài tập 6: Chứng minh dựa vào định lý CEVA.

Định lý CEVA: Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E và F lần lượt nằm trên các cạnh BC, AC, AB.

Định lý phát biểu rằng các đường thẳng AD, BE và CF là những đường thẳng đồng quy khi và chỉ khi:

$$\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}=1$$



Chứng minh

Giả sử AD, BE và CF đồng qui tại một điểm O nào đó (trong hay ngoài tam giác). Do ΔBOD và ΔCOD có chung chiều cao (độ dài của đường cao), ta có:

$$\frac{|\Delta BOD|}{|\Delta COD|}=\frac{BD}{DC}$$

Tương tự,

$$\frac{|\Delta BAD|}{|\Delta CAD|}=\frac{BD}{DC}$$

Ta suy ra

$$\frac{BD}{DC}=\frac{|\Delta BAD|-|\Delta BOD|}{|\Delta CAD|-|\Delta COD|}=\frac{|\Delta ABO|}{|\Delta CAO|}$$

Tương tự,

$$\frac{CE}{EA}=\frac{|\Delta BCO|}{|\Delta ABO|},$$

và

$$\frac{AF}{FB}=\frac{|\Delta CAO|}{|\Delta BCO|}.$$

Nhân ba đẳng thức trên cho ta:

$$\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}=1.$$

(điều phải chứng minh).

Ngược lại, giả sử rằng ta đã có những điểm D, E và F thỏa mãn đẳng thức. Gọi giao điểm của AD và BE là O, và gọi giao điểm của CO và AB là F'. Theo chứng minh trên,

$$\frac{AF'}{F'B}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}=1.$$

Kết hợp với đẳng thức trên, ta nhận được:

$$\frac{AF'}{F'B} = \frac{AF}{FB}.$$

Thêm 1 vào mỗi vế và chú ý rằng AF" + F"B = AF + FB = AB, ta có:

$$\frac{AB}{F'B} = \frac{AB}{FB}.$$

Do đó F"B = FB, vậy F và F" trùng nhau . Vì vậy AD, BE và CF = CF" đồng qui tại O, và định lí đã được chứng minh (là đúng theo cả hai chiều).

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho tam giác ABC dựng các tam giác đều MAB, NBC, PAC thuộc miền ngoài tam giác ABC. Chứng minh MC, NA, PB đồng quy.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC dựng các tam giác đều MAB, NBC, PAC và có tâm lần lượt là O_1, O_2, O_3. Chứng minh các đường tròn ngoại tiếp 3 tam giác đều trên đều đồng quy tại một điểm.

Bài tập 3: Gọi A', B', C' là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp ΔABC với các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng: AA', BB', CC' đồng quy.

Hướng dẫn

Chứng minh $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1 \Leftrightarrow$ AA', BB', CC' đồng quy

Bài tập 4: Cho hình thang ABCD (AB > CD). Gọi E là giao điểm hai cạnh bên AD và BC; F là trung điểm của AB. Chứng minh rằng: AC, BD, CF đồng quy.

Bài tập 5: Cho tam giác nhọn ABC. Các đường cao AH, BK, CL cắt nhau tại I. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của IA, IB, IC. Chứng minh PD, QE, RF đồng quy. Gọi J là điểm đồng quy, chứng minh I là trung điểm của mỗi đường.

Hướng dẫn

Chứng minh PEDQ, PRDF là hình chữ nhật

$\Rightarrow$ PD, QE, RF là đường chéo của 2 hình chữ nhật đó

$\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

Bài tập 6: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) và có H là trực tâm. Gọi A', B', C' là điểm đối xứng của H qua BC, CA, AB. Qua H, vẽ đường thẳng d bất kì. Chứng minh rằng: Các đường thẳng đối xứng của d qua các cạnh của ΔABC đồng quy tại một điểm trên (O).

Hướng dẫn

Gọi d_1, d_2, d_3 là các đường thẳng đối xứng của d qua các cạnh của ΔABC.

Gọi I là giao của d_1 và d_2

Chứng minh tứ giác A'B'C'I là tứ giác nội tiếp. Suy ra A'B'C'I là nội tiếp (O).

Chứng minh I thuộc d_3.

CHỦ ĐỀ 12
BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp 1:

Tiên đề Ơ'clit: Qua một điểm A nằm ngoài đường thẳng a kẻ được duy nhất một đường thẳng song song với a.

Hệ quả: Qua một điểm A nằm ngoài đường thẳng a kẻ được duy nhất một đường thẳng vuông góc với a.

Phương pháp 2: Chứng minh qua một điểm có hai đường thẳng vuông góc với 1 đường thẳng cho trước tại điểm đó.

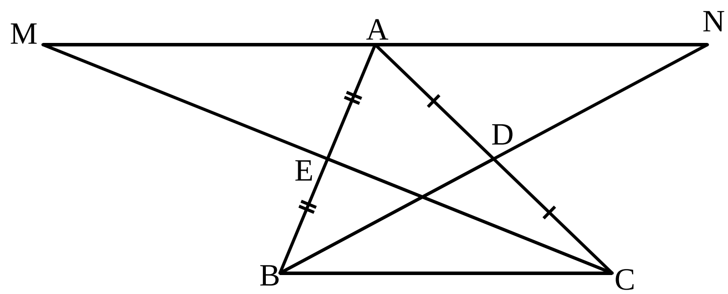
Phương pháp 3: Chứng minh tổng hai góc bằng 180 độ (sử dụng tứ giác nội tiếp, các góc bằng nhau...).

Phương pháp 4: Sử dụng tính chất đồng quy của ba đường cao, phân giác, trung trực, trung tuyến...
Phương pháp 5: Chứng minh điểm AM + MB = AB thì A thuộc đoạn thẳng BC. Suy ra A, B, C thẳng hàng.
Phương pháp 7: Dùng tính chất đường trung trực: Chứng minh các điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng cho trước thì đều nằm trên một đường thẳng.
Phương pháp 8: Dùng tính chất tia phân giác: Chứng minh 3 điểm đó cùng cách đều hai cạnh của một góc.
Phương pháp 9: Sử dụng tính chất đường chéo của các tứ giác đặc biệt.
Phương pháp 10: Sử dụng tính chất đường kính và dây cung của đường tròn.
Phương pháp 11: Sử dụng tính chất hai đường tròn tiếp xúc nhau.
Đoạn thẳng nối hai tâm của hai đường trong và tiếp tuyến chung thì vuông góc với nhau.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho ΔABC với hai trung tuyến BD và CE. Gọi M và N theo thứ tự thuộc các tia đối của các tia EC và DB sao cho EC = EM và DB = DN. Chứng minh rằng A, M, N thẳng hàng.

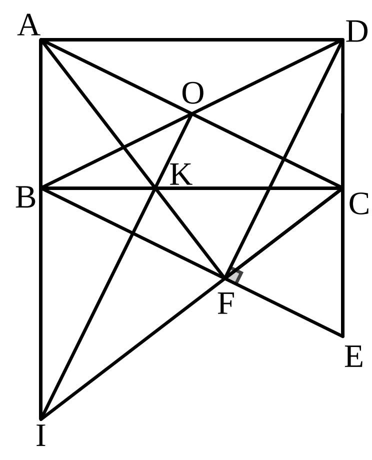
Giải



Tứ giác AMBC có:
EA = EB,
EM = EC (gt)
Nên là hình bình hành.
Suy ra: AM // BC. (1)
Chứng minh tương tự, ta có:
AN // BC. (2)
Từ (1) và (2) suy ra ba điểm A, M, N thẳng hàng (tiên đề Ơcơlit).

Bài tập 2: Cho hình chữ nhật ABCD (AB < CD), có O là giao điểm của hai đường chéo. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho CE = CD. Gọi F là hình chiếu của của D trên BE; I là giao điểm của AB và CF; K là giao điểm của AF và BC. Chứng minh rằng ba điểm O, K, I thẳng hàng.

Giải



ABCD là hình chữ nhật nên:
AB = CD, AC = BD và OA = OB = OC = OD.
Ta có CB $\perp$ AI (vì ABCD là hình chữ nhật)
$\Rightarrow$ CB là đường cao của ΔCAI. (1)
ΔFBD vuông tại F (vì F là hình chiếu của D lên BE) có:
FO là trung tuyến ứng với cạnh huyền BD nên OF = $\frac{1}{2}$BD
$\Rightarrow$ OF = $\frac{1}{2}$AC.
ΔFAC có FO là đường trung tuyến ứng với cạnh AC.
Mà FO = $\frac{1}{2}$AC nên ΔFAC vuông tại F.
Suy ra AF $\perp$ CI hay AF là đường cao của ΔCAI. (2)
K là giao điểm của AF và CB nên từ (1) và (2), suy ra K là trực tâm của ΔCAI.
Do đó IK $\perp$ AC. (3)
Mặt khác, tứ giác ABEC có:
AB = CE (cùng bằng CD) và AB // CE (vì AB // CD)
nên là hình bình hành
$\Rightarrow$ BE // AC $\Rightarrow$ BF //AC $\Rightarrow$ ABFC là hình thang.
Lại có ΔFDE vuông tại F, FC là trung tuyến ứng với cạnh DE (vì CD = CE) nên
CF = CD $\Rightarrow$ CF = AB (vì AB = CD).

Suy ra ΔBAC = ΔFCA (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow$ AF = BC.

Hình thang ABFC có hai đường chéo AF và BC bằng nhau nên là hình thang cân.

Suy ra: $\widehat{IAC} = \widehat{ICA} \Rightarrow \Delta IAC$ cân tại I

$\Rightarrow$ IO là trung tuyến đồng thời là đường cao.

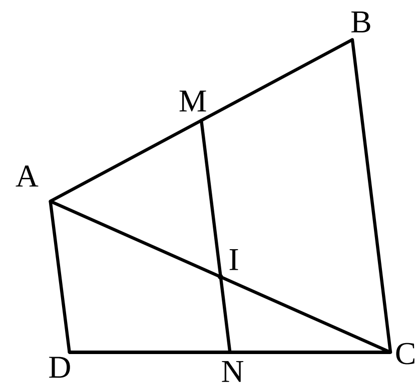
Hay IO ⊥ AC. (4)

Từ (3) và (4) suy ra I, K, O thẳng hàng (đpcm).

Bài tập 3: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, I và N theo thứ tự là trung điểm của AB, AC và CD. Chứng minh rằng nếu $MN = \dfrac{AD + BC}{2}$ thì M, I, N thẳng hàng và ABCD trở thành hình thang.

Giải

Giả sử: $MN = \dfrac{AD + BC}{2}$ (1)



Vì MA = MB, IA = IC nên MI là đường trung bình của tam giác ABC.

Suy ra: MI // BC và MI = $\dfrac{1}{2}$BC.

Chứng minh tương tự ta có: IN // AD và IN = $\dfrac{1}{2}$AD.

Mà $MN = \dfrac{AD + BC}{2} = \dfrac{1}{2}BC + \dfrac{1}{2}AD$ hay MN = MI + IN.

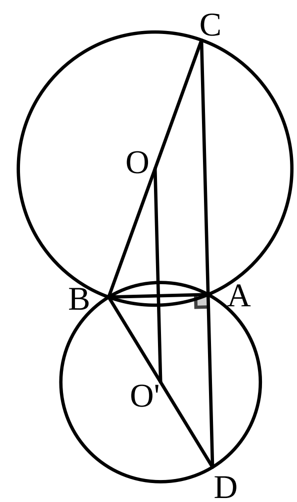
Từ đó suy ra I nằm giữa M và N, hay M, I, N thẳng hàng.

Lúc đó, ta có: BC // AD vì cùng song song với MN.

Do đó ABCD trở thành hình thang.

Vậy nếu $MN = \dfrac{AD + BC}{2}$ thì M, I, N thẳng hàng và ABCD trở thành hình thang.

Bài tập 4: Đường tròn tâm O và đường tròn tâm O' cắt nhau tại A và B. Gọi C, D lần lượt đối xứng với B qua O và O'. Chứng minh rằng C, A, D thẳng hàng.



Giải

Vì C đối xứng với B qua O nên O là trung điểm của BC. Suy ra BC là đường kính của (O).

Ta có OA = OB = OC = $\dfrac{1}{2}$BC nên tam giác ABC vuông tại A

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$.

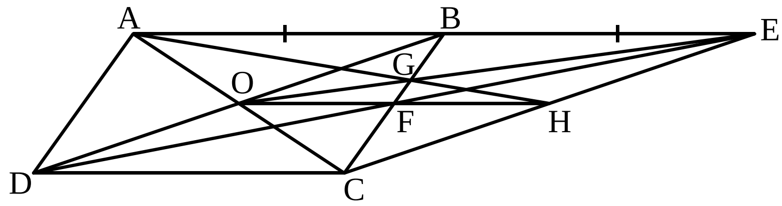
Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{BAD} = 90^0$.

Do đó : $\widehat{CAD} = \widehat{BAC} + \widehat{BAD} = 180^0$

$\Rightarrow$ C, A, D thẳng hàng.

Bài tập 5: Cho hình bình hành ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo; E là điểm đối xứng của A qua B; F là giao điểm của BC và ED; G là giao điểm của BC và OE; H là giao điểm của EC và OF. Chứng minh rằng A, G, H thẳng hàng.

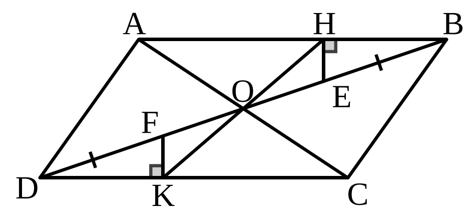
Giải



Vì O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD nên OA = OC
suy ra EO là trung tuyến của ΔEAC.
E đối xứng với A qua B nên B là trung điểm của EA.
Suy ra CB là trung tuyến của ΔEAC.
G là giao điểm của CB và EO nên G là trọng tâm của ΔEAC. (1)
Mặt khác, ABCD là hình bình hành nên CD // AB, CD = AB,
Mà B là trung điểm của AE nên suy ra CD // BE, CD = BE.
Do đó tứ giác BECD là hình bình hành.
Từ đó F là trung điểm của hai đường chéo ED và BC của hình bình hành BECD.
Ta có OF là đường trung bình của ΔCAB nên OF // AB ⇒ OH // AE ⇒ HE = HC.
Do đó AH là trung tuyến của ΔEAC. (2)
Từ (1) và (2) suy ra A, G, H thẳng hàng (đpcm).

Bài tập 6: Cho hình bình hành ABCD. Trên đường chéo BD lấy hai điểm E và F sao cho BE = DF. Kẻ EH ⊥ AB, FK ⊥ CD (H ∈ AB, K ∈ CD). Gọi O là trung điểm của EF. Chứng minh rằng ba điểm H, O, K thẳng hàng.

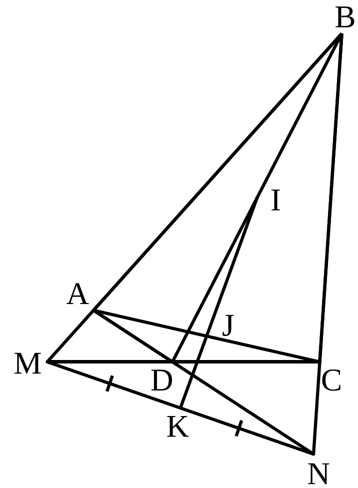
Giải



Vì EH ⊥ AB, FK ⊥ CD và AB // CD
nên EH // FK (1)
Xét ΔHBE và ΔKDF có BE = DF,
$\widehat{KDF} = \widehat{HBE},\ \widehat{DKF} = \widehat{BHE} = 90^0$
⇒ ΔHBE = ΔKDF (cạnh huyền – góc nhọn)
⇒ HE = KF (2)
Từ (1) và (2) suy ra HEKF là hình bình hành
⇒ Trung điểm của EF cũng là trung điểm của HK.
Vậy E, H, K thẳng hàng (đpcm).

Bài tập 7: Cho tứ giác ABCD. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M, các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N. Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm của BD, AC, MN. Chứng minh rằng I, J, K thẳng hàng.

Giải



Gọi K' là giao điểm của IJ với MN.
Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ N, M tới đường thẳng IJ.
Dễ thấy M, N nằm về hai phía của IJ.
Ta có :

$$S_{NIJ} = S_{NDC} - S_{NDI} - S_{NJC} - S_{NCI} - S_{CID}$$

$$S_{NIJ} = S_{NDC} - \frac{1}{2}S_{NBD} - \frac{1}{2}S_{NAC} - \frac{1}{2}S_{AIC} - \frac{1}{2}S_{CBD}$$

$$S_{NIJ} = S_{NDC} - S_{NAB} - \frac{1}{2}S_{ABD} - \frac{1}{2}S_{ABC} - \frac{1}{2}\left(S_{ADC} - S_{ADIC}\right) - \frac{1}{2}S_{CBD}$$

$$S_{NIJ} = S_{ABCD} - \frac{1}{2}\left(S_{ABD} - S_{BCD}\right) + \frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{2}\left(S_{ABC} + S_{ADC}\right) = \frac{1}{4}S_{ABCD}$$

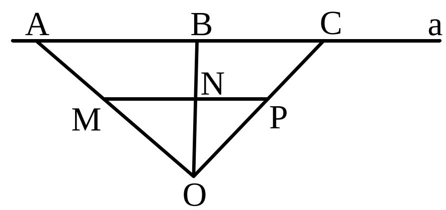
Chứng minh tương tự ta có: $S_{MIJ} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

Do đó $S_{NIJ} = S_{MIJ}$ hay $\frac{1}{2}NF.IJ = \frac{1}{2}ME.IJ \Rightarrow ME = NF \Rightarrow S_{NKJ} = S_{MKJ}$.

Hai ΔNKJ và ΔMKJ có chung chiều cao hạ từ J.
Suy ra: NK’ = MK’.
Mà MK = NK (gt) nên K ≡ K’.
Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Bài tập 8: Ba điểm A, B, C cùng thuộc đường thẳng a, điểm O không thuộc a. Chứng minh rằng nếu ba điểm M, N, P thỏa mãn hệ thức $\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} = \frac{OP}{OC}$ thì M, N, P thẳng hàng.

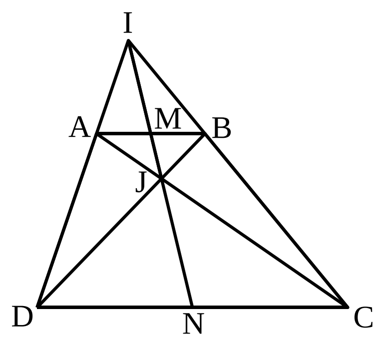
Giải



Thật vậy, theo định lí Talet đảo thì từ $\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB}$.
Suy ra: MN // AB.
Tương tự MP // AC.
Nhưng A, B, C thẳng hàng nên M, N, P thẳng hàng (tiên đề Ơ'clit).

Bài tập 9 (Bổ đề hình thang): Trong hình thang có hai đáy không bằng nhau. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng chứa hai cạnh bên, giao điểm của hai đường chéo và trung điểm của hai đáy nằm trên cùng một đường thẳng.

Giải



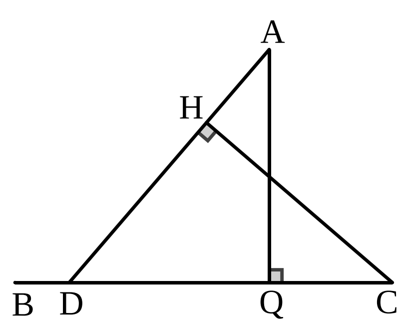
Giả sử hình thang đã cho là ABCD (AB // CD, AB < CD) có I, J tương ứng là giao điểm của hai đường thẳng chứa hai cạnh và của hai đường chéo.
Gọi M và N lần lượt là giao điểm của IJ với AB và CD.
Do AB // CD nên áp dụng hệ quả của định lí Talet ta có:

$$\frac{AM}{DN} = \frac{BM}{CN}\left(= \frac{IM}{IN}\right) \quad \text{và} \quad \frac{AM}{CN} = \frac{BM}{DN}\left(= \frac{JM}{JN}\right) \quad \text{hay}$$

$$\frac{AM}{DN} = \frac{BM}{CN}\left(= \frac{IM}{IN}\right).$$

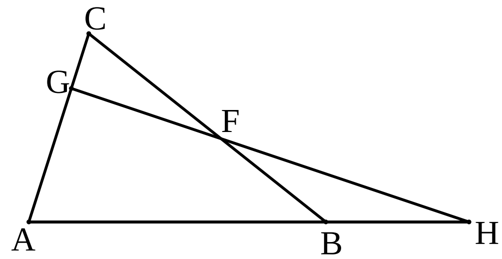
Bài tập 10: Trên mặt phẳng cho n điểm (n > 3) và bất kì đường thẳng nào đi qua hai trong những điểm đó đều chứa một điểm đã cho. Chứng minh rằng tất cả các điểm đã cho cùng nằm trên một đường thẳng.

Giải



Giả sử tất cả các điểm không cùng nằm trên một đường thẳng. Qua mỗi cặp điểm đã cho vẽ một đường thẳng (có một số hữu hạn đường này) và chọn khoảng cách khác 0 từ các điểm đã cho đến các đường thẳng này.
Giả sử khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC, trong đó A, B, C là các điểm đã cho là khoảng cách nhỏ nhất.
Trên đường thẳng BC còn có một điểm D nào đó.
Từ A kẻ AQ vuông góc với BC tại Q.
Hai trong các điểm B, C, D nằm cùng một phía đối với điểm Q, chẳng hạn C và D như hình vẽ, khi đó ta có CQ < DQ.
Hạ CH vuông góc với AD tại H.
Dễ thấy CH < AQ. Điều này mâu thuẫn với việc chọn điểm A và đường thẳng BC.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.
Bài tập 11 ***(Định lý MENELAUS):*** Là một định lý về các tam giác trong hình học phẳng.



Cho tam giác ABC. Các điểm H, F, G lần lượt nằm trên AB, BC, CA.
Khi đó: G, H, F thẳng hàng khi và chỉ khi :

$$\frac{AH}{HB}.\frac{BF}{FC}.\frac{CG}{GA} = -1.$$

Chứng minh

Phần thuận:
Sử dụng định lý sin trong các tam giác AGH , BFH, CGF, ta được:

$$\frac{AH}{GA} = \frac{\sin\widehat{AGH}}{\sin\widehat{AHG}};\frac{BF}{HB} = \frac{\sin\widehat{BHF}}{\sin\widehat{HFB}};\frac{CG}{FC} = \frac{\sin\widehat{GFC}}{\sin\widehat{CGF}}.$$

(với lưu ý rằng $\sin\widehat{AGH} = \sin\widehat{CGF}; \sin\widehat{AHG} = \sin\widehat{BHF}; \sin\widehat{HFB} = \sin\widehat{GFC}$)
Nhân từng vế ta được điều phải chứng minh .
Phần đảo:
Gọi $F' = GH \cap BC$. Hoàn toàn tương tự ta có được:

$$\frac{AH}{HB}.\frac{BF'}{F'C}.\frac{CG}{GA} = \frac{AH}{HB}.\frac{BF}{FC}.\frac{CG}{GA}(= -1).$$

Hay

$$\frac{BF'}{F'C} = \frac{BF}{FC}, \text{ suy ra } F \equiv F'.$$

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho ΔABC, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C dựng hình vuông ABDE ; trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B dựng hình vuông ACMN. Dựng hình bình hành AEIG. Gọi K là giao điểm của CD và BM. Chứng minh rằng bốn điểm I, A, K, H thẳng hàng.

Bài tập 2: Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông ABCD ta lấy lần lượt các điểm M, N, P, Q sao cho AM = BN = CP = DQ. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng M, O, P thẳng hàng.

Bài tập 3: Cho góc vuông xAy. Một điểm B cố định trên Ax, còn một điểm C chuyển động trên Ay. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB và AC lần lượt ở M và N. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định khi điểm C chuyển động trên Ay.

Bài tập 4: Trong hình vuông ABCD lấy điểm E sao cho $\widehat{EBC} = \widehat{ECB} = 15^0$. Trên nửa mặt phẳng bờ CD không chứa điểm E vẽ tam giác đều CDF. Chứng minh rằng B, E, F thẳng hàng.

Bài tập 5: Cho hình thang ABCD, đáy lớn AB. Đường thẳng kẻ từ C song song với AD cắt BD và AB lần lượt tại E và F. Đường thẳng kẻ từ D song song với BC cắt AC và AB lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

Bài tập 6: Trên một đường thẳng lấy bốn điểm theo thứ tự là A, E, F, B. Dựng các hình vuông ABCD, EFGH sao cho chúng nằm cùng ở một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng đã cho. Gọi O là giao điểm của AG và BH. Chứng minh rằng :
a) C, O, E thẳng hàng.
2. D, O, F thẳng hàng.

Bài tập 7: Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm E. Lấy điểm F điểm đối xứng với C qua E. Từ điểm F kẻ Fx và Fy lần lượt song song với AD và AB. Gọi I là giao điểm của Fx và AB ; K là giao điểm của FI và AD. Chứng minh rằng I, K, E thẳng hàng.

Bài tập 8: Cho ΔABC vuông tại A, cạnh huyền BC = 2AB. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{ABD}=\frac{1}{3}\widehat{ABC}$; trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $\widehat{ACE}=\frac{1}{3}\widehat{ACB}$. Gọi F là giao điểm của BD và CE; G và H theo thứ tự là các điểm đối xứng của F qua các cạnh BC và AC. Chứng minh rằng:

a) Ba điểm H, D, G thẳng hàng.

b) Tam giác EDF cân.

Bài tập 9: Cho góc vuông xOy tam giác. M thuộc Ox; A, B thuộc Oy. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AM cắt đường thẳng đi qua B và vuông góc với BM tại P. Gọi H là giao điểm của AP với MB; K là giao điểm của AM với BP; I, K, E lần lượt là trung điểm của MP, AB và KH. Chứng minh rằng I, E, N thẳng hàng.

Bài tập 10: Cho hình vuông EFGH. Một góc vuông xEy quay quanh đỉnh E có cạnh Ex cắt FG và GH theo thứ tự tại M và N, còn cạnh Ey cắt các đường FG và GH theo thứ tự tạ P và Q. Gọi I và K theo thứ tự là trung điểm của PN và QM. Chứng minh rằng bốn điểm F, H, K, I thẳng hàng.

Bài tập 11: Cho tứ giác ABCD và một điểm O nằm bên trong tứ giác sao cho các tam giác ABO, BCO, CDO, DAO có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng hoặc ba điểm A, O, C thẳng hàng, hoặc ba điểm B, O, D thẳng hàng.

Bài tập 12: Cho ΔABC có ba góc nhọn, các đường cao BD và CE. Gọi I là điểm thuộc đoạn BC; H là giao điểm của BD và CE; N thuộc đoạn AH ; M thuộc đoạn DE. Chứng minh rằng M, I, N thẳng hàng.

Bài tập 13: Cho hình vuông EFGH. Một góc vuông Exy quay quanh đỉnh E. Cạnh Ex cắt các đường thẳng FG và GH theo thứ tự tại M và N; cạnh Ey cắt các đường thẳng FG và GH theo thứ tự ở P và Q. Gọi I và K theo thứ tự là trung điểm của PN và QM. Chứng minh rằng 4 điểm F, H, K, I thẳng hàng.

Bài tập 14: Cho $\widehat{xOy}=90^0$. Lấy điểm M thuộc Ox, A và B cùng thuộc Oy. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AM cắt đường thẳng đi qua B và vuông góc với BM tại P. Gọi H là giao điểm của AP và MB; K là giao điểm của AM và BP; I, E, N lần lượt là trung điểm của MP, AB và KH. Chứng minh rằng I, E, N thẳng hàng.

CHỦ ĐỀ 13
ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

1. Kiến thức cơ bản:

Trong hình học THCS, chúng ta hay gặp các bài toán chứng minh các đẳng thức và các bất đẳng thức liên quan đến ba cạnh của, chu vi của tam giác, bán kính của đường tròn nội tiếp "r", bán kính đường tròn ngoại tiếp "R", … và một số yếu tố trong đường tròn.

Phương pháp:

- Vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị lớn nhất ta phải chứng tỏ được:

Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì f $\le$ m (m là hằng số)

$\rightarrow$ Xác định vị trí của hình H trên miền D sao cho f = m

- Vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị nhỏ nhất ta phải chứng tỏ được:

Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì f $\ge$ m (m là hằng số)

$\rightarrow$ Xác định vị trí của hình H trên miền D để f = m

Các hệ thức thường gặp:

(1) Diện tích tam giác:

Với a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác. $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi. h_a, h_b, h_c là độ dài 3 đường cao.

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c = \frac{1}{2}bc\sin A$$

$$= \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{abc}{4R} = (p-a)r_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(2) Độ dài đường trung tuyến:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

(3) Độ dài đường phân giác:

$$l_a = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

$$l_a = \frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$$

(4) Độ dài đường cao:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

(5) Tính diện tích tứ giác:

(a) Tính diện tích hình bình hành:

$$S = a.h_a$$

(a là độ dài đường chéo, h_a là đường cao ứng với đường chéo a)

(b) Tính diện tích hình chữ nhật:

$$S = a.b$$

(Với a và b là độ dài hai cạnh)

(c) Tính diện tích hình thoi :

$$S = a.b$$

(với a và b là độ dài hai đường chéo)

(d) Tính diện tích hình vuông:

$$S = a^2.$$

(với a là độ dài cạnh)

(6) Định lí hàm số sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

(7) Bán kính đường tròn nội tiếp, bàng tiếp:

$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2};\ r_a = p\tan\frac{A}{2}$$

(8) Công thức tính độ dài trung tuyến:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2) - a^2}{4}$$

Một số định lý hỗ trợ:

Định lí 1: Gọi R và r lần lượt là bán kính của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn ngoại tiếp ΔABC, d là khoảng cách giữa tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC.
Khi đó, ta luôn có:

$$2Rr = R^2 - d^2$$

Định lí 2: Cho ΔABC. Nếu $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ thì AC > AB và ngược lại

Định lí 3: Cho trước ΔABC và ΔA'B'C' có 2 cặp cạnh AB = A'B' và AC = A'C'. Ta có bất đẳng thức $\widehat{BAC} > \widehat{B'A'C'}$ khi và chỉ khi BC > B'C'.

Định lí 4: Trong những đường xiên nối một điểm M cho trước với điểm N trên một dường thẳng d cho trước, đường xiên nào có hình chiếu dài hơn thì dài hơn.
Định lí 5: Trong những đường xiên nối một điểm M cho trước với điểm N trên một mặt phẳng (P) cho trước, đường xiên nào có hình chiếu dài hơn thì dài hơn.
Định lí 6: 2 ΔABC và ΔA'B'C' vuông, có $\widehat{A} = \widehat{A'} = 90^0$ và AB = A'B'.
Nếu $\widehat{ABC} \geq \widehat{A'B'C'}$ thì AC ≥ A'C'
Định lí 7: Bán kính của hai đường tròn là R, r (R ≥ r), còn khoảng cách giữa tâm của chúng là d. Điều kiện cần và đủ để hai đường tròn đó cắt nhau là:

$$R - r \leq d \leq R + r$$

Định lí 8: Các số dương a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác khi và chỉ khi:

$$a + b > c,\ b + c > a \text{ và } c + a > b$$

Định lí 9: Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì thuộc miền trong của tam giác. Khi đó ta luôn có:

$$MB + MC < AB + AC$$

Định lí 10: Trong tam giác ABC ứng với cạnh dài hơn là đường cao, đường trung tuyến,đường phân giác ngắn hơn
Định lí 11: Trong tam giác ABC kí hiệu h_a là độ dài đường cao, l_a là độ dài đường phân giác, m_a là độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A thì ta có bất đẳng thức:

$$m_a \geq l_a \geq h_a$$

Định lí 12: Đường trung tuyến AM của tam giác ABC nhỏ hơn nửa tổng các cạnh AB và AC cùng xuất phát từ một đỉnh A
Định lí 13: Hình tròn nội tiếp là hình tròn lớn nhất có thể chứa trong nột tam giác.
Định lí 14: Một tứ giác lồi bị chứa trong một tứ giác khác (không nhất thiết là lồi) thì chu vi của tứ giác bị chứa sẽ nhỏ hơn chu vi của tứ giác chứa nó bên trong
Định lí 15: Trong nửa mặt phẳng bị chia ra bởi đường thẳng đi qua 2 điểm A và B có 2 đường gấp khúc $AC_1C_2\ldots C_kB$ và $AD_1D_2\ldots D_pB$ sao cho 2 đa giác $AC_1C_2\ldots C_kB$ và $AD_1D_2\ldots D_pB$ là 2 đa giác lồi. Nếu đa giác $AC_1C_2\ldots C_kB$ chứa đa giác $AD_1D_2\ldots D_pB$ bên trong nó thì đường gấp khúc $AC_1C_2\ldots C_kB$ dài hơn đường gấp khúc $AD_1D_2\ldots D_pB$
Định lí 16: Một đa giác bất kì có chu vi không nhỏ hơn chu vi của đa giác tạo bởi bao lồi của nó
Định lí 17: Nếu một đa giác lồi chứa đa giác lồi khác thì chu vi của đa giác ngoài lớn hơn chu vi của đa giác nằm trong nó
Định lí 18: Độ dài đoạn thẳng nằm trong một đa giác lồi không lớn hơn khoảng cách lớn nhất nối 2 đỉnh của nó
Định lí 19: Cho (O; r) và 1 điểm M bất kì trong nó.
Khi đó ta có:

$$R - d \leq MN \leq R + d$$

Với N là điểm bất kì trên đường tròn và d là khoảng cách từ M tới tâm đường tròn
Định lí 20: Cho (O; r) và điểm M bất kì ngoài đường tròn. Khi đó ta có:

$$d - R \leq MN \leq d + R$$

Định lí 21: Cho trước điểm M trong hình tròn tâm O. Trong các dây cung qua M, dây cung vuông góc với MO có độ dài nhỏ nhất
Định lí 22: Gọi P là giao điểm của 2 đường tròn (O_1) và (O_2).
Khi đó, ta có bất đẳng thức $MN \leq 2O_1O_2$ cho mọi dây cung qua P. Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow MN \,//\, O_1O_2$$

Định lí 23: Diện tích tam giác ABC không lớn hơn $\dfrac{AB.BC}{2}$

Định lí 24: Diện tích của tứ giác ABCD không vượt quá $\dfrac{AB.BC + AD.DC}{2}$

Định lí 25: Trong các tam giác có cùng chu vi thì tam giác đều có diện tích lớn nhất.

Nguyên lí đoạn thẳng: Đoạn thẳng AB là con đường ngắn nhất nối hai điểm A và B cho trước trên mặt phẳng.

⇒ Ta có các hệ quả sau:

(1) Tổng hai cạnh của một tam giác luôn lớn hơn cạnh thứ ba của nó.

(2) Đường gấp khúc nối hai điểm A và B cho trước luôn có độ dài lớn hơn độ dài đoạn thẳng AB.

(3) Độ dài của cung AB trên một đường tròn cho trước đi qua A và B lớn hơn độ dài đoạn thẳng AB.

Nguyên lí đường vuông góc ngắn hơn đường xiên: Đoạn vuông góc bao giờ cũng ngắn hơn đường xiên.

Định lí cạnh và góc trong tam giác: Trong một tam giác ứng với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn và ngược lại.

Một số bất đẳng thức cần dùng:

(1) Bất đẳng thức Cauchy:

Với $n \geq 2$ số dương tùy ý $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ta có trung bình cộng của chúng không nhỏ hơn trung bình nhân của chúng.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$$

(2) Bất đẳng thức BCS:

Cho trước 2 bộ $n \geq 1$ số thực tùy ý $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ta có bất đẳng thức:

$$\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n\right)^2 \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right)$$

(3) Bất đẳng thức Minkowski:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2} + \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2+b_n^2+c_n^2} \geq \sqrt{\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)^2 + \left(b_1+b_2+\ldots+b_n\right)^2 + \left(c_1+c_2+\ldots+c_n\right)^2}$$

(4) Bất đẳng thức Ploteme:

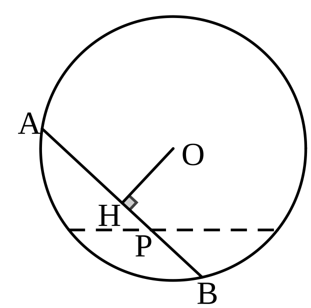
Cho 4 điểm A, B, C, D trên mặt phẳng ta luôn có: AB.CD + AD.BC ≥ AC.BD

Dấu "=" xảy ra ⇔ Tứ giác ABCD nội tiếp.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho đường tròn (O) và điểm P nằm trong đường tròn(P không trùng với O).Xác định vị trí của dây đi qua điểm P sao cho dây đó có độ dài nhỏ nhất.

Giải



Xét dây AB bất kỳ đi qua P. Kẻ $OH \perp AB$

Theo liên hệ giữa dây và khoảng cách đến tâm:

AB nhỏ nhất ⇔ OH lớn nhất

Ta lại có $OH \leq OP$

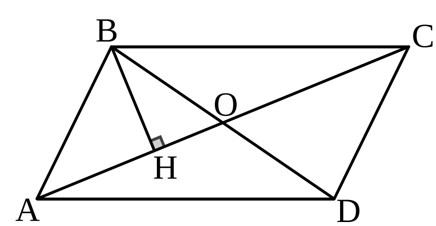
$OH = OP \Leftrightarrow H \equiv P$

Do đó maxOH = OP

Khi đó dây AB vuông góc với OP tại P.

Bài tập 2: Trong các hình bình hành có hai đường chéo bằng 6 cm và 8 cm. Hình nào có diện tích lớn nhất? Tính diện tích lớn nhất đó.

Giải



Xét hình bình hành ABCD có: AC = 8 cm; BD = 6 cm.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo.

Kẻ $BH \perp AC$.

Ta có: $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = AC.BH$

Ta có AC = 8cm, $BH \leq BO = 3$cm.

Do đó:

$S_{ABCD} \leq 8.3 = 24$ (cm^2)

$S_{ABCD} = 24$ cm^2

$\Leftrightarrow BH \equiv BO$

$\Leftrightarrow$ H $\equiv$ O

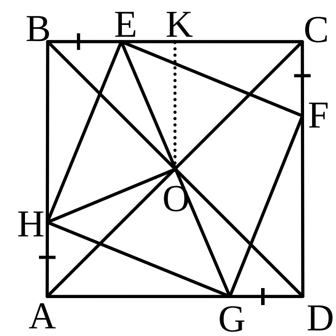
$\Leftrightarrow$ BD $\perp$AC

Vậy max $S_{ABCD} = 24\ cm^2$.

Khi đó hình bình hành ABCD là hình thoi có diện tích $24cm^2$.

Bài tập 3: Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA ta lấy theo thứ tự các điểm E, F, G, H sao cho AE = BF = CG = DH. Xác định vị trí của các điểm E, F, G, H sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất .

Giải



ΔHAE = ΔEBF = ΔFCG = ΔGHD

$\Rightarrow$ HE = EF = FG = GH

$\Rightarrow$ EFGH là hình thoi.

Ta có: $\widehat{AHE} = \widehat{BEF}$

$\Rightarrow \widehat{AHE} + \widehat{AEH} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{BEF} + \widehat{AEH} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{HEF} = 90^0$

$\Rightarrow$ EFGH là hình vuông.

Gọi O là giao điểm của AC và EG.

Tứ giác AECG có AE = CG, AE // CG nên là hình bình hành suy ra O là trung điểm của AC và EG, do đó O là tâm của cả hai hình vuông ABCD và EFGH.

ΔHOE vuông cân: $HE^2 = 2OE^2 \Rightarrow HE = OE\sqrt{2}$

Chu vi EFGH = 4HE = $4\sqrt{2}$ OE.

Do đó chu vi EFGH nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ OE nhỏ nhất

Kẻ OK $\perp$AB $\Rightarrow$ OE $\geq$ OK (OK không đổi)

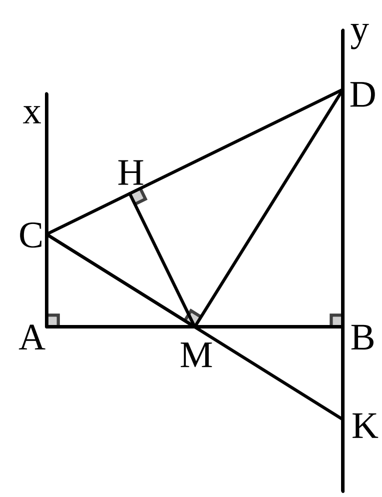
OE = OK $\Leftrightarrow$ E $\equiv$ K

Do đó: minOE = OK

Như vậy, chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất khi và chỉ khi E, F, G, H là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

Bài tập 4: Cho đoạn thẳng AB có độ dài 2a. Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB. Qua trung điểm của M của AB có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D. Xác định vị trí của các điểm C, D sao cho ΔMCD có diện tích nhỏ nhất. Tính diện tích tam giác đó?

Giải



Gọi K là giao điểm của CM và DB

MA = MB; $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^0$, $\widehat{AMC} = \widehat{BMK}$

$\Rightarrow \Delta MAC = \Delta MBK$

$\Rightarrow$ MC = MK

Mặt khác DM $\perp$ CK

$\Rightarrow \Delta$DCK cân

$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$

Kẻ MH $\perp$ CD.

ΔMHD = ΔMBD $\Rightarrow$ MH = MB = a

$\Rightarrow S_{MCD} = \frac{1}{2}CD.MH \geq \frac{1}{2}AB.MH = \frac{1}{2}2a.a = a^2$

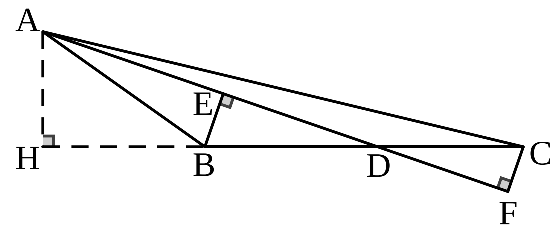
$S_{MCD} = a^2 \Leftrightarrow CD \perp Ax$.

Khi đó: $\widehat{AMC} = 45^0$; $\widehat{BMD} = 45^0$.

Vậy min $S_{MCD} = a^2$. Các điểm C, D được xác định trên Ax; By sao cho AC = BC = a.

Bài tập 5: Cho tam giác ABC có $\widehat{B}$ là góc tù. Điểm D di chuyển trên cạnh BC. Xác định vị trí của điểm D sao cho tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AD có giá trị lớn nhất .

Giải



Gọi S là diện tích ΔABC.

Khi D di chuyển trên cạnh BC ta có:

$S_{ABD} + S_{ACD} = S$

Kẻ BE $\perp$ AD, CF $\perp$ AD

$\Rightarrow \frac{1}{2}AD.BE + \frac{1}{2}AD.CF = S$

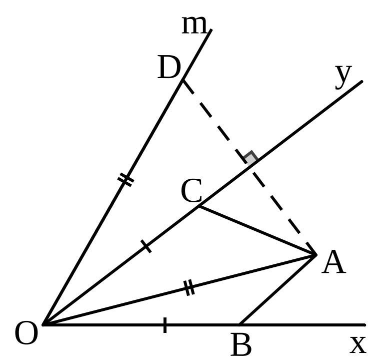
$\Rightarrow BE + CF = \frac{2S}{AD}$

Do đó BE + CF lớn nhất $\Leftrightarrow$ AD nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ hình chiếu HD nhỏ nhất.

Do HD $\geq$ HB (do $\widehat{ABD} > 90^0$) và HD = HB $\Leftrightarrow$ D $\equiv$ B.

Vậy Khi D $\equiv$ B thì tổng các khoảng cách từ B và C đến AD có giá trị lớn nhất.

Bài tập 6: Cho góc $\widehat{xOy}$ và điểm A nằm trong góc đó. Xác định điểm B $\in$ Ox, điểm C $\in$ Oy sao cho OB = OC và tổng AB + AC là nhỏ nhất.



Giải

Kẻ tia Om nằm ngoài góc xOy sao cho $\widehat{yOm} = \widehat{xOA}$. Trên tia Om lấy điểm D sao cho OD = OA. Các điểm D và A cố định.

OD = OA, OC = OB , $\widehat{COD} = \widehat{BOA}$

$\Rightarrow \Delta DOC = \Delta AOB \Rightarrow CD = AB$

Do đó: AC +AB = AC + CD

Mà AC +CD $\geq$ AD

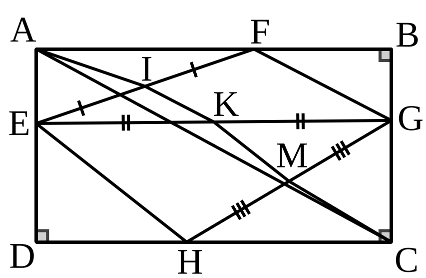
$\Rightarrow$AC + AB $\geq$ AD

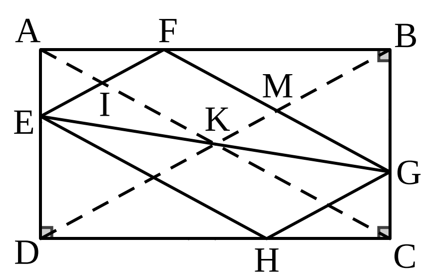
Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi C $\in$ AD.

Vậy min(AC+AB) =AD . Khi đó C là giao điểm của AD và Oy, B thuộc tia Ox sao cho OB = OC.

Bài tập 7: Cho hình chữ nhật ABCD và điểm E thuộc cạnh AD. Xác định vị trí các điểm F thuộc cạnh AB, G $\in$ BC, H $\in$ CD sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.

Giải





Gọi I, K, L theo thứ tự là trung điểm của EF, EG, EH.

ΔAEF vuông tại A có AI là trung tuyến $\Rightarrow AI = \frac{1}{2}EF$

ΔCGH vuông tại C có CM là trung tuyến $\Rightarrow CM = \frac{1}{2}GH$

IK là đường trung bình của $\Delta EFG \Rightarrow IK = \frac{1}{2}FG$

KM là đường trung bình của ΔEGH ⇒ KM = $\frac{1}{2}$EH

Do đó: chu vi EFGH = EF +FG +GH +EH = 2(AI + IK + KM + MC)

Ta lại có: AI + IK + KM + MC ≥ AC

Suy ra: Chu vi EFGH ≥ 2AC (độ dài AC không đổi)

Chu vi EFGH nhỏ nhất bằng 2AC ⇔ A, I, K, M, C thẳng hàng.

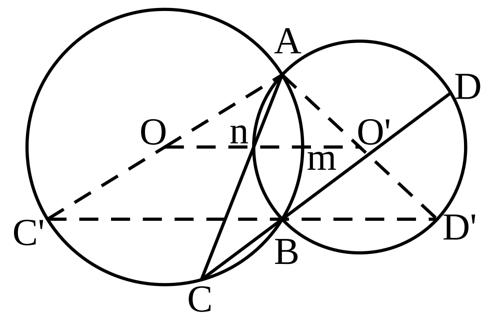
Khi đó, ta có: EH // AC, FG // AC, $\widehat{AEI} = \widehat{EAI} = \widehat{ADB}$ nên EF // DB.

Tương tự, ta có: GH // DB.

Suy ra: Tứ giác EFGH là hình bình hành có các cạnh song song với các đường chéo của hình chữ nhật ABCD.

Bài tập 8: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B. Một cát tuyến chung bất kỳ CBD (B nằm giữa C và D) cắt các đường tròn (O) và (O') tại C và D. Xác định vị trí của cát tuyến CBD để ΔACD có chu vi lớn nhất.

Giải



sđ$\hat{C} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AmB}$;

sđ$\hat{D} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AnB}$

⇒ Số đo các góc ΔACD không đổi

⇒ ΔACD có chu vi lớn nhất khi một cạnh của nó lớn nhất, chẳng hạn AC là lớn nhất.

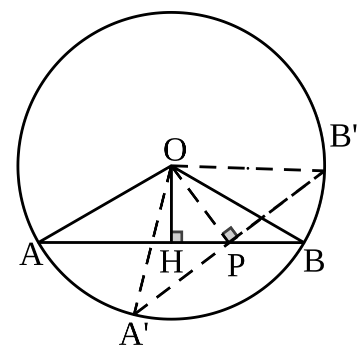
AC là dây của đường tròn (O), do đó AC lớn nhất khi AC là đường kính của đường tròn (O).

Khi đó: AD là đường kính của đường tròn (O').

Cát tuyến CBD ở vị trí C'BD' vuông góc với dây chung AB.

Bài tập 9: Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm trong đường tròn. Xác định dây AB đi qua P sao cho $\widehat{OAB}$ có giá trị lớn nhất.

Giải



Xét ΔOAB cân, góc ở đáy $\widehat{OAB}$ lớn nhất nếu góc ở đỉnh $\widehat{AOB}$ nhỏ nhất.

$\widehat{AOB} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AB}$

Góc $\widehat{AOB}$ nhỏ nhất ⇔ Cung $\overset{\frown}{AB}$ nhỏ nhất ⇔ dây AB nhỏ nhất ⇔ Khoảng cách đến tâm OH lớn nhất.

Ta có OH ≤ OP

OH = OP ⇔ H ≡ P nên maxOH = OP ⇔ AB ⊥ OP

Suy ra: Dây AB phải xác định là dây A'B' ⊥ OP tại P.

Bài tập 10: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4cm. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA, lấy theo thứ tự các điểm E, F, G, H sao cho AE = BF = CG = D. Tính độ dài AE sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.

Giải

ΔAHE = ΔBEF = ΔCFG = ΔDGH

⇒ HE = EF = FG = GH, HEF = 90^0

⇒ HEFG là hình vuông nên chu vi EFGH nhỏ nhất khi HE nhỏ nhất.

Đặt AE = x thì HA = EB = 4 - x.

ΔHAE vuông tại A nên :

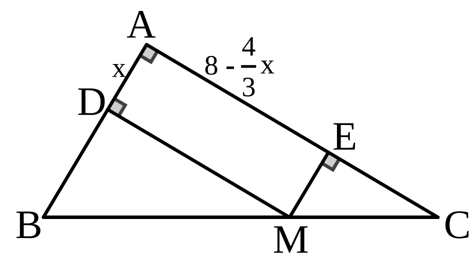
$HE^2 = AE^2 + AE^2 = x^2 + (4 - x)^2 = 2x^2 - 8x + 16 = 2(x - 2)^2 + 8 \geq 8$

$HE = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2$

Chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất bằng $8\sqrt{2}$ cm , khi đó AE = 2 cm .

Bài tập 11: Cho tam giác vuông ABC có độ dài các cạnh góc vuông AB = 6cm, AC = 8cm. M là điểm di chuyển trên cạnh huyền BC. Gọi D và E là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác ADME.

Giải



ADME là hình chữ nhật .

Đặt AD = x thì ME = x

ME //AB $\Rightarrow \frac{EM}{AB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{CE}{8} \Rightarrow CE = \frac{4}{3}x$

$\Rightarrow AE = 8 - \frac{4}{3}x$

Ta có:

$S_{ADME} = AD.AE = x\left(8 - \frac{4}{3}x\right) = 8x - \frac{4}{3}x^2 = -\frac{4}{3}(x - 3)^2 + 12 \leq 12$

$S_{ADME} = 12cm^2 \Leftrightarrow x = 3$ cm.

Diện tích lớn nhất của tứ giác ADME bằng 12 cm^2. Khi đó D là trung điểm của AB, M là trung điểm của BC và E là trung điểm của AC.

Bài tập 12: Cho đoạn thẳng AB, điểm M di chuyển trên đoạn thẳng ấy. Vẽ các đường tròn có đường kính MA và MB. Xác định vị trí của điểm M để tổng diện tích của hai hình tròn có giá trị nhỏ nhất.

Giải

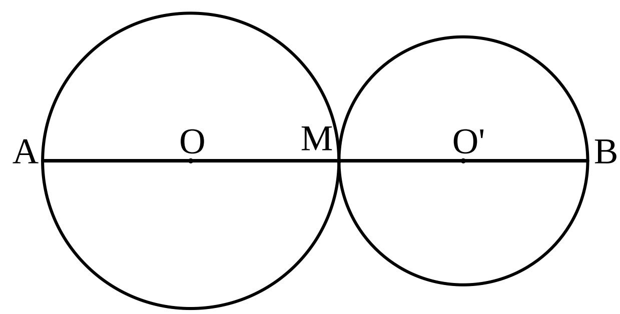
Đặt MA = x , MB = y

Ta có: x + y = AB, (0 < x, y < AB)

Gọi S và S’ theo thứ tự là diện tích của hai hình tròn có đường kính là MA và MB.

Ta có:

$$S + S' = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \pi.\frac{x^2 + y^2}{4}$$



Ta có bất đẳng thức:

$$x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$$

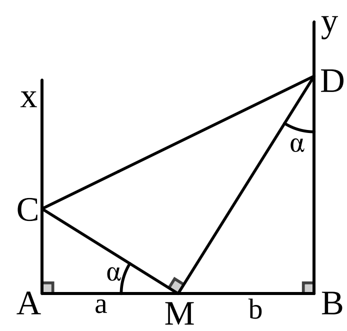
$\Rightarrow S + S' \geq \pi.\frac{(x+y)^2}{8} = \pi.\frac{AB^2}{8}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y

Do đó: $\min (S + S') = \pi.\frac{AB^2}{8}$.

Khi đó M là trung điểm của AB.

Bài tập 13: Cho điểm M nằm trên đoạn thẳng AB. Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB. Qua M có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D. Xác định vị trí của các điểm C, D sao cho ΔMCD có diện tích nhỏ nhất.



Giải

Ta có: $S_{MCD} = \frac{1}{2}MC.MD$

Đặt MA = a, MB = b, $\widehat{AMC} = \widehat{BDM} = \alpha$

MC = $\frac{a}{\cos\alpha}$, MD = $\frac{b}{\sin\alpha}$

$S_{MCD} = \frac{1}{2}\frac{ab}{\cos\alpha.\sin\alpha}$

Do a, b là hằng số nên S_{MCD} nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ 2sinα.cosα lớn nhất.

Theo bất đẳng thức $2xy \le x^2 + y^2$ ta có :

$2\sin\alpha.\cos\alpha \le \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nên $S_{MCD} \ge ab$

$S_{MCD} = ab \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \sin(90^0 - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^0 - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^0$

$\Leftrightarrow$ ΔAMC và ΔBMD vuông cân.

Vậy min S_{MCD} = ab.

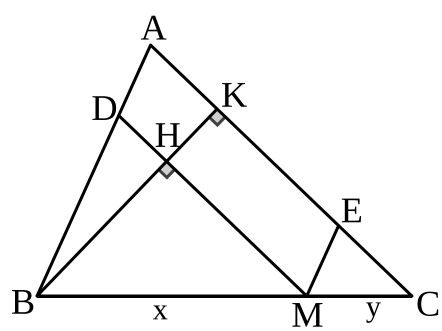
Khi đó các điểm C, D được xác định trên tia Ax; By sao cho AC = AM, BD = BM.

Bài tập 14: Cho ΔABC, điểm M di động trên cạnh BC. Qua M kẻ các đường thẳng song song với AC và với AB, chúng cắt AB và AC theo thứ tự ở D và E. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình bình hành ADME có diện tích lớn nhất.

Giải

S_{ADME} lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{S_{ADME}}{S_{ABC}}$ lớn nhất

Kẻ BK ⊥ AC cắt MD ở H.



S_{ADME} = MD . HK

$S_{ABC} = \frac{1}{2}$ AC . BK

$\frac{S_{ADME}}{S_{ABC}} = 2.\frac{MD}{AC}.\frac{HK}{BK}$

Đặt MB = x , MC = y ,

MD//AC ta có:

$\frac{MD}{AC} = \frac{BM}{BC} = \frac{x}{x+y}$;

$\frac{HK}{BK} = \frac{MC}{BC} = \frac{y}{x+y}$

Theo bất đẳng thức:

$\frac{xy}{(x+y)^2} \le \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_{ADME}}{S_{ABC}} = \frac{2xy}{(x+y)^2} \le \frac{1}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi x = y.

Vậy max$S_{ADME} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

Khi đó M là trung điểm của BC.

Bài tập 15: Cho Δ ABC vuông cân có cạnh huyền BC = a. Gọi D là trung điểm của AB. Điểm E di chuyển trên cạnh AC. Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D, E đến BC. Tính diện tích lớn nhất của hình thang DEKH. Khi đó hình thang trở thành hình gì?

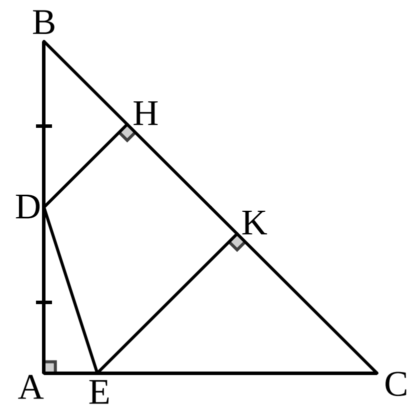
Giải

Ta có:

$2S_{DEKH}$ = (DH + EK).HK = (BH + KC).HK

Mà (BH + KC) + HK = BC = a không đổi.

Nên (BH + KC).HK lớn nhất $\Leftrightarrow$BH + KC) = HK $= \frac{a}{2}$



Do đó:

max $S_{DEKH} = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$

Khi đó: Đường cao HK $= \frac{a}{2}$.

Suy ra: KC = BC – BH – HK $= a - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{4}$

Do đó: DH = HB = $\frac{a}{4}$, EK = KC = $\frac{a}{4}$.

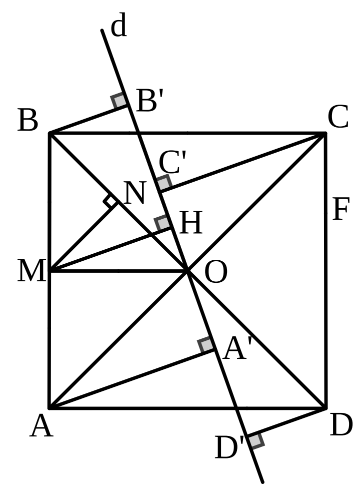
Hình thang DEKH là hình chữ nhật, E là trung điểm của AC.

Bài tập 16: Cho hình vuông ABCD. Hãy xác định đường thẳng d đi qua tâm hình vuông sao cho tổng các khoảng cách từ bốn đỉnh của hình vuông đến đường thẳng đó là:

a) Lớn nhất

b) Nhỏ nhất

Giải



Xét trường hợp d cắt hai cạnh đối BC và AD

Gọi m là tổng các khoảng cách từ bốn đỉnh hình vuông đến D.

m = 2(AA’ + BB’)

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và A’B’

Suy ra: m = 4MN. Do đó:

m lớn nhất $\Leftrightarrow$ MN lớn nhất

m nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MN nhỏ nhất

a) MN $\le$ MO $\Rightarrow$ m lớn nhất $\Leftrightarrow$ M $\equiv$ O $\Leftrightarrow$ d // AB

b) Kẻ MH $\perp$ OB.

Chứng minh: MN $\ge$ MH

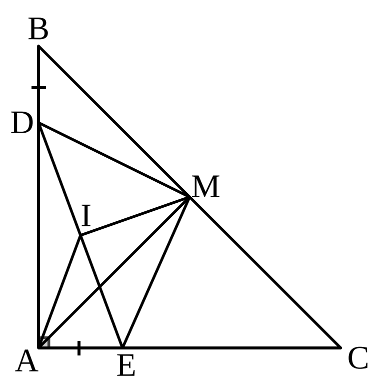
$\Rightarrow$ MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ N $\equiv$ H $\Leftrightarrow$ d $\equiv$ BD hoặc d $\equiv$ AC.

Bài tập 17: Cho ΔABC vuông cân tại A các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB, AC sao cho BD = AE. Xác định vị trí các điểm D, E sao cho:

a) DE có độ dài nhỏ nhất.

b) Tứ giác BDEC có diện tích lớn nhất.

Giải



a) Gọi M là trung điểm của BC.

$\Delta BDM = \Delta AEM \Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{AME}$

$\Rightarrow \widehat{DME} = \widehat{DMA} + \widehat{AME} = \widehat{DMA} + \widehat{BMD} = \widehat{BMA} = 90^0$

Gọi I là trung điểm của DE.

DE = DI+IE =AI + IM $\ge$ AM

Min DE = AM $\Leftrightarrow$ I là trung điểm của AM

$\Leftrightarrow$ D là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC

b)Đặt AE = x, AB =AC =a thì AD = a – x, $S_{ADE} = \frac{x(a - x)}{2}$

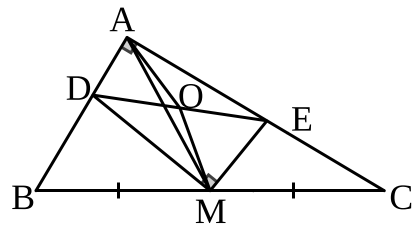
S_{BDEC} nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ S_{ADE} lớn nhất $\Leftrightarrow$ x(a – x) lớn nhất

Do x + (a – x) = a không đổi nên x(a – x) lớn nhất $\Leftrightarrow$ x = a – x $\Leftrightarrow$ x $= \frac{a}{2}$

Khi đó D là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC.

Bài tập 18: Cho ΔABC vuông tại A, có BC = a, diện tích là S. Gọi m là trung điểm của BC. Hai đường thẳng thay đổi qua M và vuông góc với nhau cắt các cạnh AB, AC ở D, E. Tìm:
a) Giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng DE.
b) Giá trị nhỏ nhất của diện tích ΔMDE.

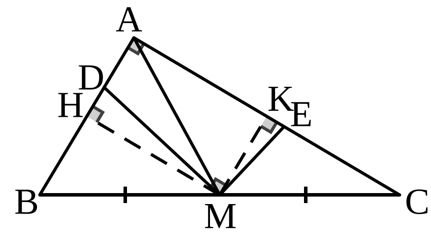
Giải



a) Gọi O là trung điểm của DE
Ta có OA = OD = OE = OM

$\Rightarrow DE = OA + OM \geq AM = \frac{a}{2}$

$\min DE = \frac{a}{2} \Leftrightarrow$ O là trung điểm của AM



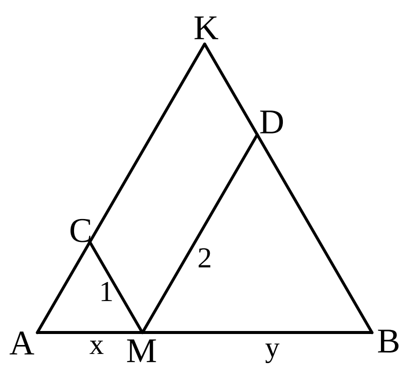
$\Leftrightarrow$ D là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC
b) Kẻ $MH \perp AB$, $MK \perp AC$
$ME \geq MK$, $MD \geq MH$.

$2S_{MDE} = MD.ME \geq MH.MK = \frac{AC}{2}.\frac{AB}{2} = \frac{S}{2}$

$\min S_{MDE} = \frac{S}{4} \Leftrightarrow D \equiv H$ và $E \equiv K$

Bài tập 19: Cho điểm m di chuyển trên đoạn thẳng AB. Vẽ các tam giác đều AMC và BMD về một phía của AB. Xác định vị trí của M để tổng diện tích hai tam giác đều trên là nhỏ nhất.

Giải



Gọi K là giao điểm của AC và BD.
Các tam giác AMC, BMD đồng dạng với ΔAKB
Đặt AM = x , BM = y, AB = a, ta có:

$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{x}{a}\right)^2$; $\frac{S_2}{S} = \left(\frac{y}{a}\right)^2$

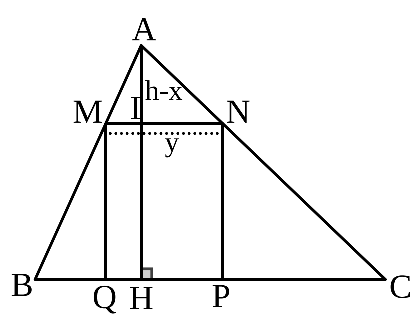
$\Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{x^2 + y^2}{a^2} \geq \frac{(x+y)^2}{2a^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y

Do đó: $\min (S_1 + S_2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ M là trung điểm của AB.

Bài tập 20: Cho tam giác nhọn ABC có các cạnh a, b, c tương ứng đường cao AH = h. Hãy dựng hình chữ nhật MNPQ nội tiếp trong tam giác ABC sao cho nó có diện tích lớn nhất. Biết $M \in AB$; $N \in AC$; $P, Q \in BC$.

Giải



Gọi I là giao điểm của AH và MN
Đặt NP = x ; MN = y; AI = h – x
ΔAMN ∽ ΔABC

$\Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AI}{AH} \Rightarrow \frac{y}{a} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow y = a.\frac{h-x}{h}$

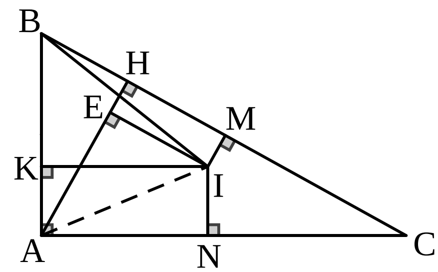
$\Rightarrow S_{MNPQ} = xy = \frac{a}{h}.x(h-x)$

$\Rightarrow S_{MNPQ}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ x(h – x) lớn nhất x + (h – x) = h không đổi nên x(h – x) lớn nhất
$\Leftrightarrow$ x = h – x $\Leftrightarrow$ x = h/2

Khi đó MN là đường trung bình của ΔABC.

Bài tập 21: Cho ΔABC vuông tại A. Từ một điểm I nằm trong tam giác, kẻ IM ⊥ BC, IN ⊥ AC, IK⊥AB. Tìm vị trí của I sao cho tổng $IM^2 + IN^2 + IK^2$ nhỏ nhất.

Giải



Kẻ AH ⊥ BC, IE ⊥ AH

ANIK, IMHE là các hình chữ nhật.

$IK^2 + IN^2 = IK^2 + AK^2 = AI^2 \geq AE^2$

IM = EH

nên $IK^2 + IN^2 + IM^2 = AI^2 + EH^2 \geq AE^2 + EH^2$

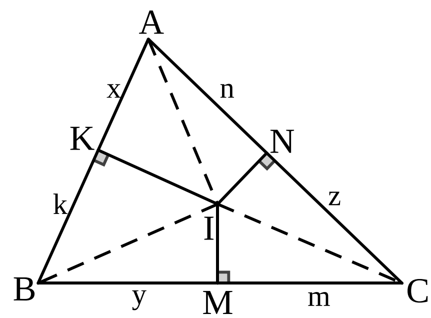
Đặt AE = x, EH = y ta có: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{AH^2}{2}$

$\Rightarrow IK^2 + IN^2 + IM^2 \geq \frac{AH^2}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi I là trung điểm của đường cao AH.

Bài tập 22: Cho ΔABC nhọn. Từ một điểm I nằm trong tam giác ta kẻ IM ⊥ BC, IN ⊥ AC, IK⊥AB. Đặt AK = x; BM = y; CN = z. Tìm vị trí của I sao cho tổng $x^2 + y^2 + z^2$ nhỏ nhất.

Giải



Đặt:

BK = k, CM = m, AN = n, BC = a, AC = b, AB = c.

$x^2 + y^2 + z^2 = (IA^2 - IK^2) + (IB^2 - IM^2) + (IC^2 - IN^2)$

$= (IA^2 - IN^2) + (IB^2 - IK^2) + (IC^2 - IM^2)$

$= n^2 + k^2 + m^2$

$\Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) = x^2 + y^2 + z^2 + n^2 + k^2 + m^2$

$= (x^2 + k^2) + (y^2 + m^2) + (z^2 + n^2)$

$x^2 + k^2 \geq \frac{(x+k)^2}{2} = \frac{AB^2}{2} = \frac{c^2}{2}$

$y^2 + m^2 \geq \frac{(y+m)^2}{2} = \frac{BC^2}{2} = \frac{a^2}{2}$

$z^2 + n^2 \geq \frac{(z+n)^2}{2} = \frac{AC^2}{2} = \frac{b^2}{2}$

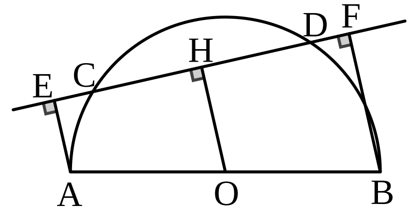
$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$.

$\min(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \Leftrightarrow x = k, y = m, z = n.$

⇔ I là giao điểm của các đường trung trực của ΔABC.

Bài tập 23: Cho nửa đường tròn có đường kính AB = 10 cm. Một dây CD có độ dài 6cm có hai đầu di chuyển trên nửa đường tròn. Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu của A và B trên CD. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác ABFE.

Giải



Kẻ OH ⊥ CD, ta tính được: OH = 4cm.

$S_{ABFE} = \frac{1}{2}(AE + BF).EF$

$= OH.EF \leq OH.AB = 4.10 = 40$

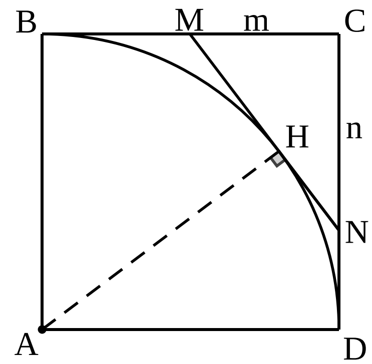
max $S_{ABEF} = 40cm^2$

⇔ EF // AB.

Khi đó: OH ⊥ AB

Bài tập 24: Cho hình vuông ABCD cạnh a. Vẽ cung BD tâm A bán kính a (nằm trong hình vuông). Một tiếp tuyến bất kỳ với cung đó cắt BC, CD theo thứ tự ở M và N. Tính độ dài nhỏ nhất của MN.

Giải



Đặt:

CM = m, CN = n, MN = x

m + n + x = 2CD = 2a và $m^2 + n^2 = x^2$

Do đó : $x^2 = m^2 + n^2 \geq \dfrac{(m+n)^2}{2}$

$\Rightarrow 2x^2 \geq (2a - x)^2 \Rightarrow x\sqrt{2} \geq 2a - x$

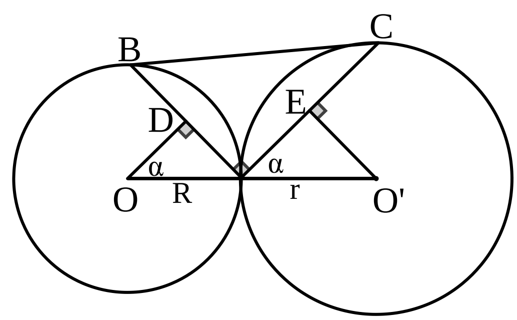
$\Rightarrow x \geq \dfrac{2a}{\sqrt{2}+1} = 2a(\sqrt{2} - 1)$

min MN = $2a\left(\sqrt{2} - 1\right) \Leftrightarrow m = n$.

Khi đó: Tiếp tuyến MN // BD, AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$, AN là phân giác của $\widehat{DAC}$

Bài tập 25: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Qua A vẽ hai tia vuông góc với nhau, chúng cắt các đường tròn (O), (O') lần lượt tại B và C. Xác định vị trí của các tia đó để Δ ABC có diện tích lớn nhất.

Giải



Kẻ OD ⊥ AB; O'E ⊥ AC ta có:

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}.2AD.2AE = 2.AD.AE$

Đặt: OA = R; O'A = r; $\widehat{AOD} = \widehat{O'AE} = \alpha$

AD = R sinα; AE = r cosα

$\Rightarrow S_{ABC} = Rr.2\sin\alpha.\cos\alpha$

$2\sin\alpha.\cos\alpha \leq \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\Rightarrow S_{ABC} \leq Rr$

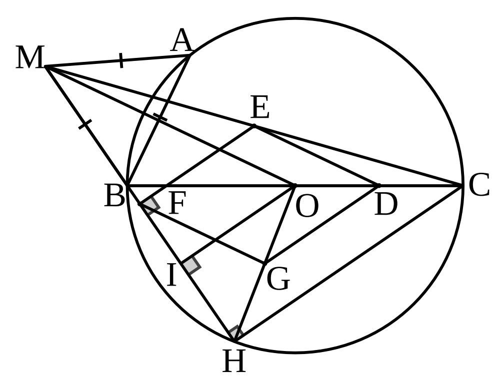
Do đó:

max $S_{ABC} = Rr \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \sin(90^0 - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^0 - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^0$.

Vậy nếu ta vẽ các tia AB, AC lần lượt tạo với các tia AO, AO' thành các góc $\widehat{OAB} = \widehat{O'AC} = 45^0$ thì ΔABC có diện tích lớn nhất.

Bài tập 26: Cho đường tròn (O; R) đường kính BC, A là một điểm di động trên đường tròn. Vẽ tam giác đều ABM có A và M nằm cùng phía đối với BC. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C xuống MB. Gọi D, E, F, G theo thứ tự là trung điểm của OC, CM, MH, OH. Xác định vị trí của điểm A để diện tích tứ giác DEFG đạt giá trị lớn nhất.

Giải



DEFG là hình bình hành.

Kẻ OI ⊥ FH, ta có OI là đường trung bình của Δ BHC nên

OI = $\dfrac{1}{2}$HC = GD

MO là đường trung trực của AB nên $\widehat{IMO} = 30^0$

$\Rightarrow OI = \dfrac{1}{2}OM \Rightarrow GD = \dfrac{1}{2}OM$

Mà ED = $\dfrac{1}{2}$OM $\Rightarrow$ EG = GD

$\Rightarrow$ DEFG là hình thoi

$\widehat{HFG} = \widehat{HMO} = 30^0 \Rightarrow \widehat{EFG} = 60^0 \Rightarrow \Delta EFG$ đều

$$\Rightarrow S_{DEFG} = 2S_{EFG} = 2.\frac{EF^2\sqrt{3}}{4} = \frac{EF^2\sqrt{3}}{2} = \frac{\left(\frac{HC}{2}\right)^2\sqrt{3}}{2} \le \frac{\left(\frac{BC}{2}\right)^2\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

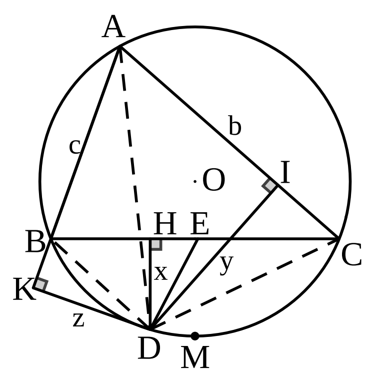
maxS = $\frac{R^2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow H \equiv B \Leftrightarrow \widehat{MBC} = 90^0 \Leftrightarrow \widehat{ABC} = 30^0 \Leftrightarrow AC = R$.

Bài tập 27: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). D là điểm bất kỳ thuộc cung BC không chứa A và không trùng với B, C. Gọi H, I, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến các đường thẳng BC, AC, AB. Đặt BC = a, AC = b, AB = c, DH = x, DI = y, DK = z.

a) Chứng minh rằng: $\frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{a}{x}$

b) Tìm vị trí của điểm D để tổng $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ nhỏ nhất.

Giải



a) Lấy E trên BC sao cho $\widehat{CDE} = \widehat{ADB}$

ΔCDE đồng dạng với Δ ADB

$\Rightarrow \frac{DH}{DK} = \frac{CE}{AB} \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{CE}{c} \Rightarrow \frac{c}{z} = \frac{CE}{x}$

Tương tự ΔBDE đồng dạng với Δ ADC

$\Rightarrow \frac{DH}{DI} = \frac{BE}{AC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{BE}{b} \Rightarrow \frac{b}{y} = \frac{BE}{x}$

$\Rightarrow \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{BE + CE}{x} = \frac{a}{x}$

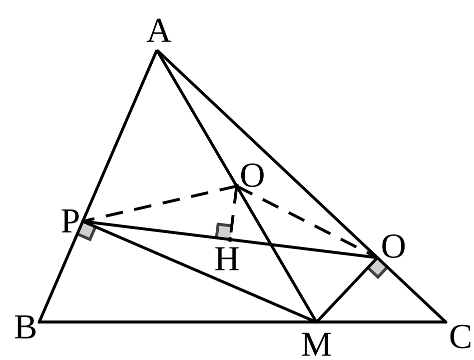
b) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{a}{x} + \frac{a}{x} = \frac{2a}{x}$.

Do đó S nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ x lớn nhất $\Leftrightarrow D \equiv M$ (M là điểm chính giữa của cung BC không chứa A).

Bài tập 28: Cho ΔABC nhọn, điểm M di chuyển trên cạnh BC. Gọi P, Q là hình chiếu của M trên AB, AC. Xác định vị trí của điểm M để PQ có độ dài nhỏ nhất.

Giải

Tứ giác APMQ là tứ giác nội tiếp. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ.



Kẻ OH $\perp$ PQ. Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$ thì $\widehat{POH} = \alpha$

PQ = 2PH = 2.OP.sinα = AM.sinα

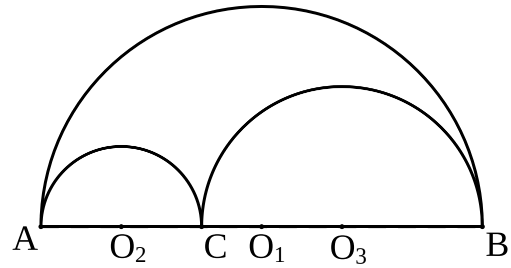
Do α không dổi nên

PQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AM nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AM $\perp$ BC.

Bài tập 29: Cho đoạn thẳng AB và một điểm C trên AB. Vẽ trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB các nửa đường tròn có đường kính AB, AC, BC. Xác định vị trí của điểm C trên đoạn AB để diện tích phần giới hạn bởi ba nửa đường tròn đó dạt giá trị lớn nhất.

Giải

Gọi $(O_1; r_1)$; $(O_2; r_2)$; $(O_3; r_3)$ là các đường tròn có đường kính là AB, AC, BC



Đặt: AB = 2a, AC = 2x thì $r_1 = a$, $r_2 = x$.

Suy ra: BC = 2a – 2x và $r_3 = a - x$

Gọi S là diện tích giới hạn bởi ba đường tròn

Ta có :

$$S = \frac{\pi r_1^2}{2} - \left(\frac{\pi r_2^2}{2} + \frac{\pi r_3^2}{2}\right) = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi x^2}{2} - \frac{\pi(a-x)^2}{2} = \pi x(a-x)$$

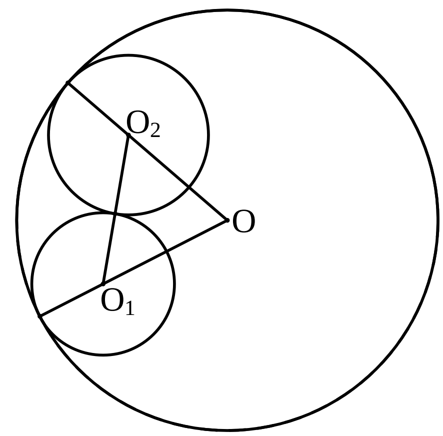
S lớn nhất ⇔ x(a – x) lớn nhất

Mặt khác x + (a – x) = a không đổi nên

$x(a-x)$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = a - x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow C \equiv O_1$

Lúc đó ta có $S = \frac{\pi a^2}{4}$.

Bài tập 30: Cho đường tròn (O; R). Trong đường tròn (O) vẽ hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau và tiếp xúc trong với (O) trong đó bán kính đường tròn (O_2) gấp đôi bán kính đường tròn (O_1). Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài các hình tròn (O_1) và(O_2).



Giải

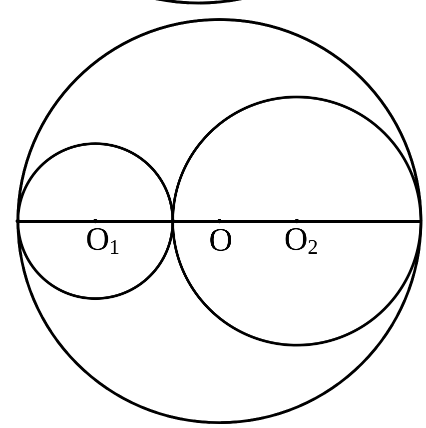
Gọi x là bán kính đường tròn (O_1).

Khi đó 2x là bán kính đường tròn (O_2)

Xét ΔOO_1O_2, ta có: $O_1O_2 \le OO_1 + OO_2$

$\Rightarrow 3x \le (R - x) + (R - 2x) \Rightarrow 6x \le 2R \Rightarrow x \le \frac{R}{3}$

Gọi S là phần diện tích hình tròn (O) nằm ngoài các đường tròn (O_1) và (O_2), ta có:



$$S = \pi R^2 - \pi x^2 - \pi 4x^2 = \pi\left(R^2 - 5x^2\right)$$

Do $x \le \frac{R}{3}$ nên $x^2 \le \frac{R^2}{9} \Rightarrow S \ge \frac{4\pi R^2}{9}$;

$\min S = \frac{4\pi R^2}{9} \Leftrightarrow x = \frac{R}{3}$.

Khi đó: O_1, O, O_2 thẳng hàng và bán kính các đường tròn (O_1) và (O_2) là $\frac{R}{3}$ và $\frac{2R}{3}$.

Bài tập 31: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1, điểm M nằm trên đường chéo BD.

a) Nếu cách dựng đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với hai cạnh AD và CD. Nêu cách dựng đường tròn (K) đi qua M và tiếp xúc với hai cạnh AB, BC.

b) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường chéo BD thì tổng chu vi hai đường tròn không đổi.

c) Xác định vị trí của điểm M trên BD để tổng diện tích của hai hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

a) Qua M kẻ đường vuông góc với BD cắt AB, BC, CD, DA tại P, Q, F, E.

Do AB, BC tiếp xúc với (K) nên K ∈ MB

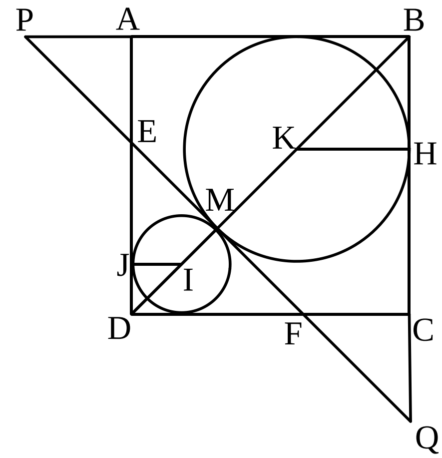
PQ ⊥ KM nên PQ là tiếp tuyến của (K)

Vậy (K) là đường tròn nội tiếp ΔPBQ

Tương tự (I) là đường tròn nội tiếp ΔEDF.

b) Tổng chu vi hai đường tròn (I) và (K) bằng:

$2\pi.IM + 2\pi.MK = 2\pi.IK$



$MD = ID + IM = \sqrt{2}.IJ + IM = \sqrt{2}.IM + IM = (\sqrt{2}+1).IM$

MB = KB +MK =

$\sum\sqrt{2}.KH + KM = \sqrt{2}.KM + KM = (\sqrt{2}+1).KM$

$\Rightarrow BD = MD + MB = \left(\sqrt{2}+1\right)\left(IM + MK\right) = \left(\sqrt{2}+1\right)IK$

$\Rightarrow IK = \dfrac{BD}{\sqrt{2}+1} = BD\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Do $BD = AB\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow IK = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 2 - \sqrt{2}$

Vậy tổng chu vi hai đường tròn bằng $2\pi(2 - \sqrt{2})$

c) Gọi x và y là bán kính các đường tròn (I) và (K)

Ta có: $x + y = 2 - \sqrt{2}$

Gọi S_1, S_2 là diện tích các hình tròn trên

$S_1 + S_2 = \pi x^2 + \pi y^2 = \pi(x^2 + y^2) \geq \pi\dfrac{(x+y)^2}{2} = \pi\dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2}$

$S_1 + S_2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow$ M là trung điểm của BD.

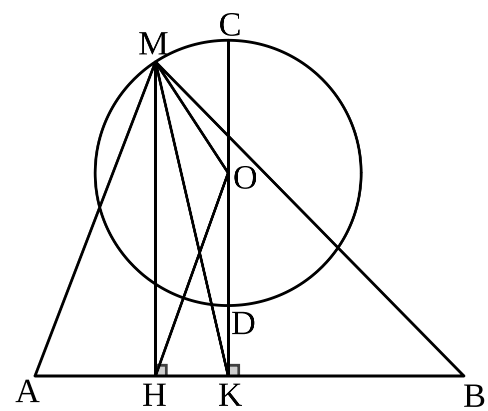
Bài tập 32: Cho đường tròn (O; R), A và B là hai điểm cố định nằm ngoài đường tròn. M là điểm cố định trên đường tròn (O). Xác định vị trí của điểm M để diện tích tam giác MAB có giá trị:

a) Lớn nhất b) nhỏ nhất

Giải

Vẽ đường thẳng d qua O và vuông góc AB tại K

d cắt đường tròn (O) tại C và D.



Hạ $AH \perp AB$

$\Rightarrow S_{MAB} = \dfrac{MH.AB}{2}$

a) Ta có: $MH \leq MK$

Xét 3 điểm M, O, K, ta có: $MK \leq OM + OK$

$\Leftrightarrow MK \leq OC + OK$

$\Leftrightarrow MH \leq CK$

$\Rightarrow S_{MAB} \leq \dfrac{CK.AB}{2}$ (không đổi)

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv K \Leftrightarrow M \equiv C$.

b) Xét 3 điểm M, O, H, ta có: $MH \geq |OH - OM|$

Mà $OK \leq OH$ và $OK - OM = OK - OD = DK \Rightarrow MH \geq DK$

$\Rightarrow S_{MAB} \geq \dfrac{DK.AB}{2}$ (không đổi). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \in [OH]$

Và $M \equiv K \Leftrightarrow M \equiv D$

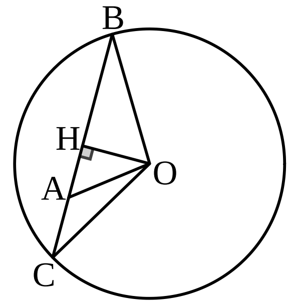
Bài tập 33: Cho đường tròn (O; R); A là điểm cố định trong đường tròn ($A \neq O$). Xác định vị trí của điểm B trên đường tròn O sao cho góc OBA lớn nhất.

Giải

Giả sử có $B \in (O)$.

Vẽ dây BC của đường tròn (O) qua A ta có OB = OC = R.

$\Rightarrow \Delta OBC$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OBC} = \dfrac{180^0 - COB}{2}$



Nên $\widehat{OBA}$ max $\Leftrightarrow$ $\widehat{COB}$ min.

Trong ΔCOB, có: CO = OB = R không đổi

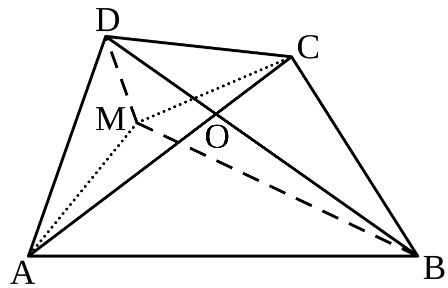
$\Rightarrow$ $\widehat{COB}$ min $\Leftrightarrow$ BCmin = OHmax

Mà OH $\leq$ OA nên OHmax $\Leftrightarrow$ H $\equiv$ A $\Leftrightarrow$ BC $\perp$ OA tại A

Vậy $\widehat{OBA}$ max $\Leftrightarrow$ B $\in$ (O) sao cho BC $\perp$ OA tại A.

Bài tập 34: Cho tứ giác lồi ABCD. Tìm điểm M trong tứ giác đó sao cho AM + MB + MC + MD đạt cực trị nhỏ nhất.

Giải



Với 3 điểm M, A, C, ta có: MA + MC $\geq$ AC

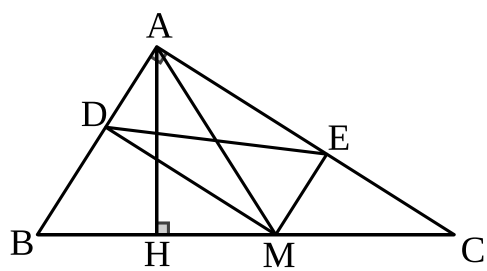
Ta có: MB + MD $\geq$ BD.

AM + MB + MC + MD $\geq$ AC + BD (không đổi).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} M \in AC \Leftrightarrow M \equiv O \\ M \in BD \end{cases}$

Vậy min(AM + MB + MC + MD) = AC + BD $\Leftrightarrow$ M $\equiv$ O

Bài tập 35: Cho ΔABC ($\widehat{A} = 90^0$) M là điểm chuyển động trên cạnh BC. Vẽ MD $\perp$ AB; ME $\perp$ AC (D $\in$ AB, E $\in$ AC). Xác định vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất.



Giải

Vẽ AH $\perp$ BC (H $\in$ BC), H cố định và AH không đổi, tứ giác AEMD có $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{D} = 90^0$

$\Rightarrow$ AEMD là hình chữ nhật.

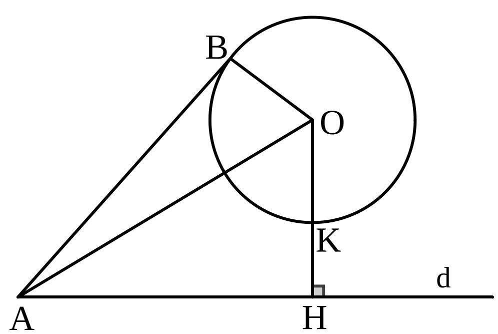
$\Rightarrow$ DE = AM mà AM $\geq$ AH (không đổi)

(Theo tính chất đường xiên và đường vuông góc).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ M $\equiv$ H.

Vậy khi M $\equiv$ H thì DE nhỏ nhất.

Bài tập 36: Cho đường thẳng d và đường tròn (O; R) có khoảng cách từ tâm đến d là OH $\geq$ R. Lấy hai điểm bất kỳ A $\in$ d; B $\in$ (O; R). Hãy chỉ ra vị trí của A và B sao cho độ dài của AB ngắn nhất? Chứng minh điều đó.



Giải

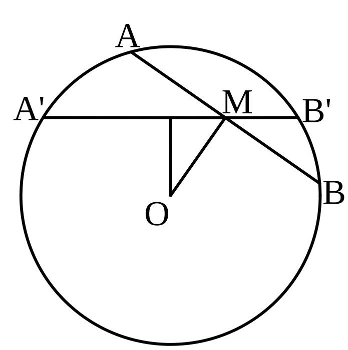
Từ tâm (O) kẻ OH $\perp$ d, OH cắt đường tròn (O) tại K. Xét ba điểm A, B, O, ta có:

AB + OB $\leq$ OA mà OA $\geq$ OH (quan hệ đường xiên và đường vuông góc).

$\Rightarrow$ AB $\geq$ OH - OB = HK không đổi

Vậy min AB = KH $\Leftrightarrow \begin{cases} A \equiv H \\ B \equiv K \end{cases}$

Bài tập 37: Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm trong đường tròn đó (M $\neq$ O). Xác định vị trí của dây cung AB của đường tròn (O) qua M sao cho độ dài AB ngắn nhất.



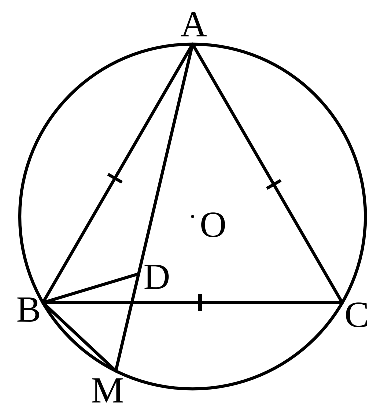
Giải

Ta có dây AB $\perp$ OM tại M là dây cung có độ dài nhỏ nhất.

Thật vậy:
Qua M vẽ dây A'B' bất kỳ của (O), A'B' không vuông góc với OM. Vẽ OM' $\perp$ A'B'.
M' $\in$ A'B'; M' $\neq$ M
$\Rightarrow$ OM' $\perp$ MM'
$\Rightarrow$ OM > OM'
$\Rightarrow$ AB < A'B' (theo định lý khoảng cách từ tâm đến dây).

Bài tập 38: Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn (O; R). M là điểm di động trên đường tròn (O). Xác định vị trí của M để MA + MB + MC đạt giá trị lớn nhất.

Giải

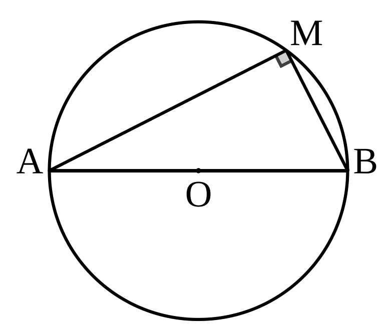


Ta xét M $\in$ cung BC. Trên MA lấy D sao cho MB = MD.
Ta chứng minh được: ΔBMD là tam giác đều.
$\Rightarrow \widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 = 60^0$.
Mà $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 60^0 \Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{B}_3 = 60^0$.
Chứng minh cho ΔBAD = ΔBCM (g-c-g)
$\Rightarrow$ AD = MC
$\Rightarrow$ MA + MB + MC = MA + MD + DA = 2MA
Mà MA là dây cung của đường tròn (O; R) $\Rightarrow$ MA = 2R
$\Rightarrow$ max (MA + MB + MC) = 2.2R = 4R
$\Leftrightarrow$ MA là đường kính của đường tròn (O) $\Leftrightarrow$ M là điểm chính giữa của cung BC.
Tương tự ta xét M thuộc cung AB và M thuộc cung AC
$\Rightarrow$ M là điểm chính giữa cung AB hoặc cung AC thì MA + MB + MC đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 39: Cho đường tròn (0; R), đường kính AB, M là điểm chuyển động trên đường tròn. Xác định vị trí của M trên đường tròn, để MA + $\sqrt{3}$MB đạt giá trị lớn nhất

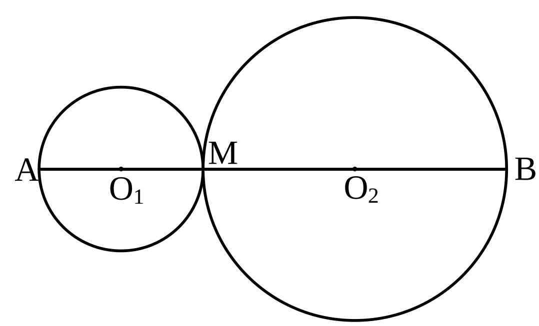
Giải

Ta có: $\widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
Δ MAB, có: $\widehat{M} = 90^0$. Theo định lý Pitago ta có:
$MA^2 + MB^2 = AB^2 = 4R^2$
Áp dụng BĐT Bunhiacopski, ta có:



MA + $\sqrt{3}$MB $\leq \sqrt{(1+3)(MA^2+MB^2)} = \sqrt{4.4R^2}$ = 4R
MA + $\sqrt{3}$MB $\leq$ 4R
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{1}{MA} = \dfrac{\sqrt{3}}{MB} \Leftrightarrow \dfrac{MB}{MA} = \sqrt{3}$
$\Leftrightarrow$ tanA = $\dfrac{MB}{MA} = \sqrt{3}$ = tg60^0
$\Leftrightarrow \widehat{MAB} = 60^0$ nên max(MA + $\sqrt{3}$.MB) = 4R
$\Leftrightarrow \widehat{MAB} = 60^0$

Bài tập 40: Cho đoạn thẳng AB, điểm M di chuyển trên đoạn ấy. Vẽ các đường tròn đường kính MA, MB. Xác định vị trí của M để tổng diện tích của hai hình tròn có giá trị nhỏ nhất.



Giải

Đặt MA = x, MB = y.
Ta có: x + y = AB (0 < x < y < AB)
Gọi S và S'thứ tự là diện tích của 2 hình tròn có đường kính là MA và MB

Ta có: $S + S' = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \pi.\frac{x^2+y^2}{4}$

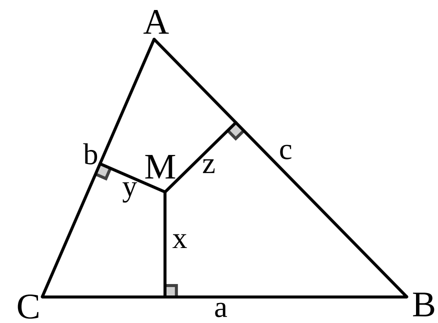
Áp dụng BĐT: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow S + S' \geq \pi.\frac{(x+y)^2}{8} = \pi.\frac{AB^2}{8}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Vậy $\text{Min}(S + S') = \pi.\frac{AB^2}{8} \Leftrightarrow$ M là trung điểm của AB.

Bài tập 41: Cho ΔABC có BC = a, AC = b, AB = c. Tìm điểm M nằm bên trong tam giác ABC sao cho $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$ có giá trị nhỏ nhất. Trong đó x, y, z là khoảng cách từ M đến BC, AC, AB.

Giải



Gọi diện tích Δ ABC là S.

Ta có $ax + by + cz = 2S$ (không đổi)

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có:

$$(ax+by+cz)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) \geq \left(\sqrt{ax}\sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{by}\sqrt{\frac{b}{y}}+\sqrt{cz}\sqrt{\frac{c}{z}}\right)^2$$

$$\Rightarrow (ax+by+cz)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) \geq (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) \geq \frac{(a+b+c)^2}{2S}$$

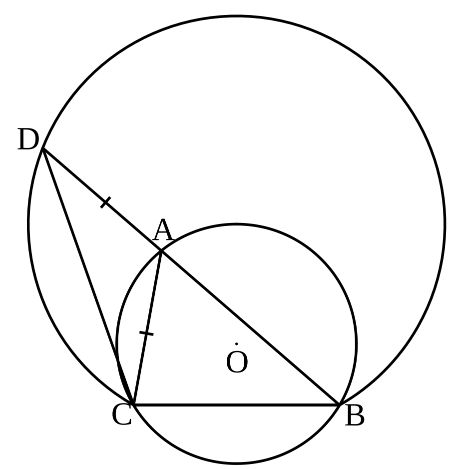
Vậy $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) = \frac{(a+b+c)^2}{2S}$$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{\frac{a}{x}}} = \frac{\sqrt{by}}{\sqrt{\frac{b}{y}}} = \frac{\sqrt{cz}}{\sqrt{\frac{c}{z}}} \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Bài tập 42: Cho đường tròn (O; R), dây BC cố định. Tìm vị trí của A trên cung lớn BC để tam giác ABC có chu vi lớn nhất.

Giải



BC cố định nên $\widehat{CAB}$ không đổi, độ dài BC không đổi

Chu vi ΔABC chỉ còn phụ thuộc vào AB + AC.

Trên tia đối của tia AB lấy D sao cho AC = AD.

Vậy chu vi của ΔABC phụ thuộc vào độ dài của BD.

Ta có:

$\widehat{CDB}$ cũng không đổi hay BD là dây của cung chứa góc $\frac{1}{2}\widehat{A}$ dựng trên BC.

Vậy BD lớn nhất bằng đường kính của cung chứa góc $\frac{1}{2}\widehat{A}$.

Dựng trên BC $\Leftrightarrow$ A là điểm chính giữa của cung lớn BC.

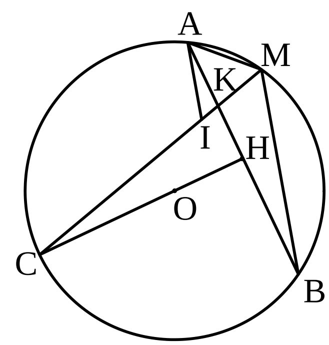
Bài tập 43: Cho đường tròn (O; R) với dây AB cố định sao cho khoảng cách từ O tới AB bằng $\frac{R}{2}$. Gọi H là trung điểm của AB, tia HO cắt đường tròn (O; R) tại C. Trên cung nhỏ AB lấy M tùy ý (khác A, B). Đường thẳng qua A và song song với MB cắt CM tại I. Dây CM cắt dây AB tại K.

a) So sánh góc AIM với góc ACB.

b) Chứng minh: $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}=\frac{1}{MK}$.

c) Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMAK và ΔMBK. Hãy xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ AB để tích $R_1.R_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải



a) Xét ΔAOH có $\cos O = \frac{OH}{OA}=\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOH}=60^0$

$\Rightarrow \widehat{AOB}=120^0 \Rightarrow sđ\overset{\frown}{AB}=120^0 \Rightarrow \widehat{ACB}=60^0$

ΔABC có đường cao CH đồng thời là trung tuyến.

Vậy tam giác ABC đều $\Rightarrow \widehat{ACB}=60^0$

AI // MB $\Rightarrow \widehat{AIM}=\widehat{CMB}=\widehat{CAB}=60^0$

Vậy $\widehat{AIM}=\widehat{ACB}$.

b) ΔAIM đều (có hai góc bằng 60^0) $\Rightarrow$ AM = MI.

$\Delta AIC = \Delta AMB (c-g-c) \Rightarrow CI = MB$

ΔMKA ∽ ΔMBC nên $\frac{MK}{MA}=\frac{MB}{MC}$

ΔMKB ∽ ΔMAC nên $\frac{MK}{MB}=\frac{MA}{MC}$

Vậy $\frac{MK}{MA}+\frac{MK}{MB}=\frac{MB}{MC}+\frac{MA}{MC}=\frac{MB+MA}{MC}=1$

hay $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}=\frac{1}{MK}$.

c)

Trong ΔAKM: $R_1=\frac{AK}{2\sin M}=\frac{AK}{2\sin 60^0}=\frac{AK}{\sqrt{3}}$

Trong ΔBKM: $R_2=\frac{BK}{2\sin M}=\frac{BK}{2\sin 60^0}=\frac{BK}{\sqrt{3}}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số không âm R_1, R_2 có:

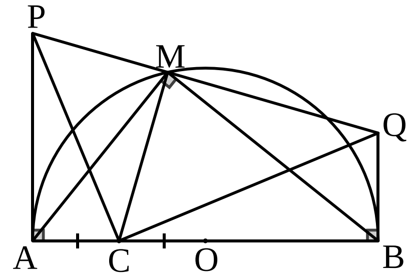
$$\sqrt{R_1R_2}\le\frac{R_1+R_2}{2}=\frac{AK+BK}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}R}{2\sqrt{3}}=\frac{R}{2}=\text{const}$$

dấu "=" xay ra khi $R_1 = R_2 \Leftrightarrow$ AK = BK $\Leftrightarrow$ M là điểm chính giữa của cung AB.

Vậy $R_1R_{2\,max}=\frac{R^2}{4}$ khi M là điểm chính giữa của cung AB.

Bài tập 44: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Lấy điểm C là trung điểm của AO. Kẻ hai tia Ax và By vuông góc với AB và ở cùng một phía với nửa đường tròn. Điểm M di động trên nửa đường tròn (M ≠ A, B). Một đường thẳng vuông góc với CM tại M cắt Ax ở P, cắt By ở Q. Tìm vị trí của điểm M trên nửa đường tròn để tứ giác APQB có diện tích nhỏ nhất. Tìm giá trị diện tích nhỏ nhất đó.

Giải



Tứ giác APMC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PCA} = \widehat{PMA}$

Có $\widehat{AMB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{PMA} + \widehat{BMQ} = 90^0$

Tứ giác BQMC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BMQ} = \widehat{BCQ}$.

Có $\widehat{CAQ} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BCQ} + \widehat{BQC} = 90^0$.

Vậy $\widehat{PCA} = \widehat{BQC}$.

Do đó: $\Delta APC \backsim \Delta BCQ$:

$\Rightarrow \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{BC}{BQ} \Rightarrow AP.BQ = AC.BC$

$= \dfrac{R}{2}.\dfrac{3R}{2} = \dfrac{3R^2}{4} = \text{const}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$\dfrac{AP + BQ}{2} \ge \sqrt{AP.BQ} = \sqrt{\dfrac{3R^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$ dấu "=" xảy ra khi AP = BQ.

$\Leftrightarrow CM \perp AB$.

Hay $S_{ABQP} = \dfrac{1}{2}AB(AP + BQ)_{min} = \dfrac{1}{2}.2R.\sqrt{3}R = \sqrt{3}R^2$ khi sđ $\overset{\frown}{AM} = 60^0$.

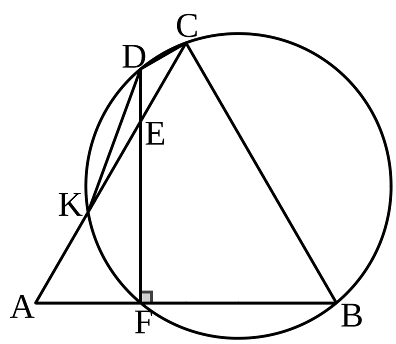
Bài tập 45: Cho tam giác đều ABC, E là một điểm trên cạnh AC (E ≠ A), K là trung điểm của đoạn AE. Đường thẳng EF đi qua E và vuông góc với đường thẳng AB (F ∈ AB) cắt đường thẳng đi qua C và vuông góc với đường thẳng BC tại D. Xác định vị trí của E sao cho đoạn KD có độ dài nhỏ nhất.

Giải

ΔAEF vuông tại F, $\widehat{A} = 60^0$, FK là trung tuyến ứng với cạnh huyền

$\Rightarrow \Delta AKF$ đều $\Rightarrow \widehat{FKC} = 120^0$.

Vậy tứ giác BCKF nội tiếp.



Tứ giác BCDF có $\widehat{F} = \widehat{C} = 90^0$

Vậy tứ giác BCDF nội tiếp hay 5 điểm B, C, D, K, F cùng thuộc một đường tròn đường kính BD.

sđ $\overset{\frown}{DK} = 2\,\widehat{DFK} = 60^0$

$\Rightarrow KD = \dfrac{1}{2}DB \le \dfrac{1}{2}CB$ dấu "=" xảy ra khi E ≡ C.

Vậy $KD_{min} = \dfrac{1}{2}CB$ khi E ≡ C.

Bài tập 46: Cho ΔABC cân ở B có $\widehat{ABC} = \beta$, O là trung điểm của cạnh AC, K là chân đường vuông góc hạ từ O xuống cạnh AB, (ω) là đường tròn tâm O bán kính OK. E là một điểm thay đổi trên cạnh BA sao cho góc AOE bằng α ($20^0 < \alpha < 90^0$). F là điểm trên cạnh BC sao cho EF tiếp xúc với (ω). Tìm α để AE + CF nhỏ nhất.

Giải

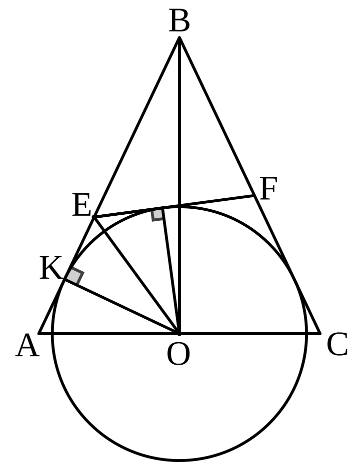
Trong ΔOEF:

$\widehat{EOF} = 180^0 - \widehat{OEF} - \widehat{OFE} = 180^0 - \dfrac{1}{2}\widehat{AEF} - \dfrac{1}{2}\widehat{CFE}$

Trong tứ giác AEFC:

$\widehat{AEF} + \widehat{AFE} = 360^0 - \left(\widehat{A} + \widehat{C}\right) = 360^0 - \left(180^0 - \beta\right) = 180^0 + \beta$

Vậy: $\widehat{EOF} = 90^0 - \frac{1}{2}\beta$



ΔABC cân $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C} = \frac{1}{2}\left(180^0 - \beta\right) = 90^0 - \frac{1}{2}\beta$

Vậy $\widehat{EOF} = \widehat{A} = \widehat{C}$.

$\Rightarrow \Delta AEO \backsim \Delta OEF$ và $\Delta OEF \backsim \Delta COF$.

Vậy $\Delta AEO \backsim \Delta COF$.

$\Rightarrow \frac{AE}{AO} = \frac{CO}{CF} \Rightarrow AE.CF = AO.CO = const$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$AE + CF \geq 2\sqrt{AE.AF} = 2\sqrt{AO.CO} = const$.

Dấu "=" xảy ra khi AE = CF

$\Leftrightarrow \Delta OEF$ cân tại O

$\Leftrightarrow \Delta AEO$ cân tại A

$\Leftrightarrow \widehat{AOE} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{A} = 90^0 - \frac{1}{2}\left(90^0 - \frac{1}{2}\beta\right) = 45^0 + \frac{1}{4}\beta$ thì AE + CF nhỏ nhất

Bài tập 47: Cho hai đường tròn$(O_1; r_1)$ và $(O_2; r_2)$ cắt nhau tại hai điểm A và B. Biết rằng $r_1 = 1$cm; $r_2 = 2$cm; AB = 1cm và hai điểm O_1, O_2 ở hai phía của đường thẳng AB. Xét đường thẳng (d) đi qua A, cắt $(O_1; r_1)$ và $(O_2; r_2)$ lầm lượt tại các điểm M và N sao cho A nằm trong đoạn MN. Tiếp tuyến của $(O_1; r_1)$ tại M và tiếp tuyến của $(O_2; r_2)$ tại N cắt nhau tại điểm E.

a) Chứng minh tứ giác EMBN là tứ giác nội tiếp.

b) Tính O_1O_2

b) Tìm giá trị lớn nhất của 2EM + EN.

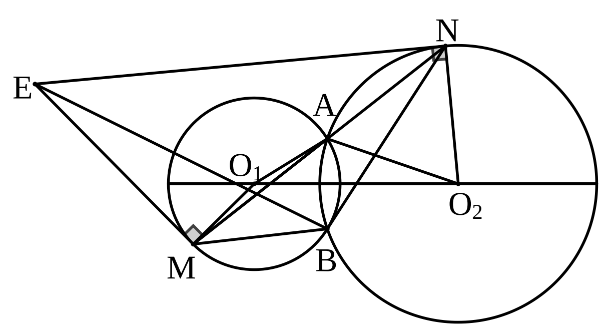
Giải

a) $\widehat{ABN} = \widehat{ANE}$; $\widehat{ABM} = \widehat{AME}$

$\Rightarrow \widehat{MBN} = \widehat{EMN} + \widehat{ENM} = 180^0 - \widehat{MEN}$

Vậy $\widehat{MBN} + \widehat{MEN} = 180^0$ nên tứ giác EMBN nội tiếp.

b) $O_1O_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{15})$



c) $\Delta O_1O_2A \backsim \Delta MNB$.

$\Rightarrow \frac{BN}{BM} = \frac{AO_2}{AO_1} = 2$ (vì $R_1 = 1$cm, $R_2 = 2$cm)

$\Rightarrow BN = 2BM$

$\Delta EMB \backsim \Delta NAB$

$\Rightarrow \frac{EM}{MB} = \frac{AN}{AB} \Rightarrow EM = MB.AN$ (vì AB = 1cm)

Tương tự, ta cũng chỉ ra: EN = NB.AM

Vậy

2.EM + EN = 2.MB.AN + NB.AM
= 2. MB.AN + 2.MB.AM
= 2.MB.(AM + AN)
= 2MB.MN

Lại có $\Delta MBN \backsim \Delta O_1AO_2$ đồng dạng theo tỉ số $\frac{MN}{O_1O_2} = \frac{MB}{r_1} \leq 2$

Vậy $2MB.MN \le 2.2r_1.2O_1O_2 = 8.\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{15}) = 4\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)$ dấu "=" xảy ra khi MB = $2r_1$ hay M đối xứng với B qua O_1.

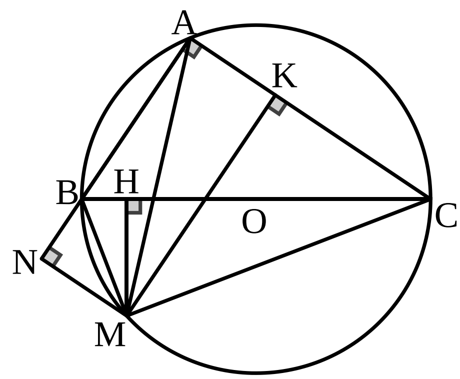
Bài tập 48: Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O). M là điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A. Gọi N, H, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, CA. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{BC}{MH}+\frac{AB}{MN}+\frac{AC}{MK}$

Giải

Nhận thấy: Nếu K nằm ngoài AC thì N nằm trong AB.

$$\frac{AB}{MN}=\frac{BN}{MN}+\frac{AN}{MN}$$

$$\frac{AC}{MK}=\frac{AK}{MK}-\frac{CK}{MK}$$



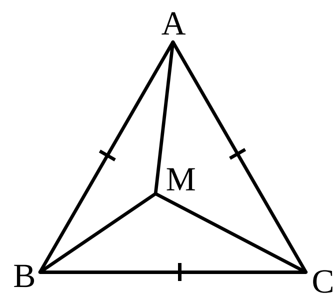
$\Delta MCK \backsim \Delta MBN \Rightarrow \frac{BN}{MN}=\frac{CK}{MK}$

$\Delta MAK \backsim \Delta MBH \Rightarrow \frac{AK}{MK}=\frac{BH}{MH}$

$\Delta MAN \backsim \Delta MCH \Rightarrow \frac{AN}{MN}=\frac{CH}{HM}$

Vậy $\frac{BC}{MH}+\frac{AB}{MN}+\frac{AC}{MK}=\frac{BC}{MH}+\frac{CH}{MH}+\frac{BH}{MH}=2\frac{BC}{MH}$

Vậy $\frac{BC}{MH}+\frac{AB}{MN}+\frac{AC}{MK}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MH lớn nhất $\Leftrightarrow$ MH = R $\Leftrightarrow$ M là điểm chính giữa của cung BC.



Bài tập 49: Trên mặt phẳng cho trước tam giác đều ABC và điểm M bất kì. Chứng minh rằng:

$$MA + MB \ge MC$$

Chứng minh

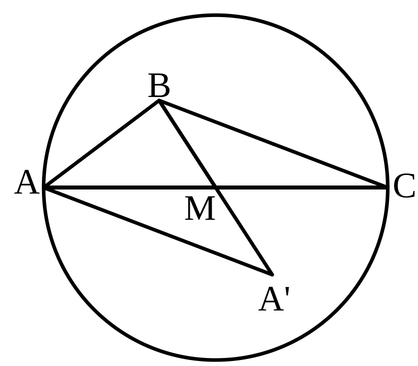
Sử dụng bất đẳng thức Plotemy vào tứ giác MABC ta có:

$MA.BC + MB.AC \ge MC.AB$

Nên $MA + MB \ge MC$ (đpcm)

Bài tập 50: Chứng minh rằng điểm B nằm trong đường tròn đường kính AC khi và chỉ khi ta có $\widehat{ABC} > 90^0$

Chứng minh



Cần và đủ để điểm B nằm trong hình tròn đường kính AC là $BM < \frac{AC}{2}$.

Gọi A' là điểm đối xứng với B qua trung điểm M của cạnh AC.

Theo định lí 3, ta có BC > AA' khi và chỉ khi $\widehat{BAC} > \widehat{ABA'}$.

Do $\widehat{BAC} > \widehat{ABA'}$ bù nhau nên $\widehat{BAC} > \widehat{ABA'}$ khi và chỉ khi $\widehat{ABC}$ là góc tù.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho góc vuông xOy; điểm A thuộc miền trong của góc. Các diểm M, N theo thứ tự chuyển động trên các tia Ox, Oy sao cho $\widehat{MAB} = 90^0$. Xác định vị trí của M, N để MN có độ dài nhỏ nhất.

Bài tập 2: Cho 2 đường tròn ở ngoài nhau (O; R) và (O'; R'). A nằm trên (O), B nằm trên (O'). Xác định vị trí của điểm A, B để đoạn thẳng AB có độ dài lớn nhất.

Bài tập 3: Chứng minh rằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác vuông ABC không vượt quá $AD\left(\sqrt{2}-1\right)$, với AD là độ dài đường phân giác của góc vuông A.

Bài tập 4: Trên cạnh BC, AC của tam giác đều ABC lấy tương ứng hai điểm M và N sao cho BM = CN. Tìm vị trí của M để MN có giá trị lớn nhất.

Bài tập 5: Cho nửa đường tron (O; R) đường kính AB. M là một điểm trên nửa đường tròn, kẻ MH⊥HB. Xác định vị trí của M để:

a) SΔABC lớn nhất.

b) Chu vi của ΔMAB lớn nhất.

Bài tập 6: Trên cạnh BC, AC của tam giác đều ABC lấy tương ứng hai điểm M và N sao cho BM = CN. Tìm vị trí của M để MN có giá trị lớn nhất.

Bài tập 7: Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O; R) cho trước. Tìm tứ giác có tổng AB.CD + AD.BC đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 8: Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng a. Trên hai cạnh AB và AD lần lượt lấy 2 điểm M, N sao cho chu ΔAMN = 2a. Tìm vị trí của M và N để $S_{\Delta AMN}$ lớn nhất.

Bài tập 9: Cho ΔABC ngoại tiếp đường tròn (O; R). Kẻ các tiếp tuyến của đường tròn (O; R) song song với các cạnh của tam giác. Các tiếp tuyến này tạo với các cạnh của tam giác thành 3 tam giác nhỏ có diện tích là S_1, S_2, S_3. Gọi S là diện tích của ΔABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỷ số $\frac{S_1+S_2+S_3}{S}$

Bài tập 10: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn O và D là điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A. Xác định vị trí của D sao cho DA + DB + DC lớn nhất.

Bài tập 11: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B sao cho hai tâm O và O' nằm về hai phía khác nhau đối với đường thẳng AB. Đường thẳng (d) quay quanh B cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và D (C ≠ A, B và D ≠ A, B). Xác định vị trí của (d) sao cho đoạn thẳng CD có độ dài lớn nhất.

Bài tập 12: Cho đường tròn (O; R) đường kính AB, điểm M di động trên đường tròn sao cho $MA \le MB$. Trong tam giác AMB kẻ đường cao MH. Gọi r_1, r_2, r_3 theo thứ tự là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác AMB, AMH và BMH. Hãy xác định vị trí của M để tổng: $r_1 + r_2 + r_3$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 13: Cho ΔABC có $\widehat{A} = 30^0$, AB = c, AC = b, M là trung điểm của BC. Một đường thẳng (d) quay xung quanh trọng tâm G của tam giác ABC sao cho (d) cắt đoạn AB tại P và (d) cắt đoạn AC tại Q.

a) Đặt AP = x, hãy tìm tập hợp các giá trị của x.

b) Tính giá trị của biểu thức $\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}$.

c) Hãy tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của diện tích tam giác APQ theo b, c.

Bài tập 14: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R và M là một điểm thuộc nửa đường tròn (khác A và B). Tiếp tuyến của (O) tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) lần lượt tại các điểm C và D. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai ΔACM và ΔBDM.

Bài tập 15: Cho đường tròn (O) và dây BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC của đường tròn (O), (A khác B và C). Tia phân giác của $\widehat{ACB}$ cắt đường tròn (O) tại D khác C, lấy I thuộc đoạn CD sao cho DI = DB. Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại điểm K khác B.

a) Chứng minh: ΔKAC cân.

b) Xác định vị trí của A để độ dài đoạn AI là lớn nhất.

Bài tập 16: Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O; R). Điểm M lưu động trên cung nhỏ BC. Từ M kẻ các đường thẳng MH, MK lần lượt vuông góc với AB, AC ($H \in AB$, $\in AC$). Tìm vị trí của M để độ dài đoạn HK lớn nhất.

Bài tập 17: Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2; R_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Đường thẳng (d) đi qua A cắt đường tròn (O_1, R_1) tại M và cắt đường tròn (O_2; R_2) tại N (các điểm M, N khác A).
Xác định vị trí của đường thẳng (d) để độ dài đoạn thẳng MN lớn nhất.

Bài tập 18: Đường tròn tâm O có dây AB cố định và I là điểm chính giữa của cung lớn AB. Lấy điểm M bất kì trên cung lớn AB, dựng tia $Ax \perp MI$ tại H và cắt BM tại C.

a) Chứng minh: ΔAIB và ΔAMC cân.

b) Khi M di động trên cung lớn AB. Chứng minh rằng điểm C di động trên một cung tròn cố định.

c) Xác định vị trí của điểm M để chu vi ΔAMC đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 19: Cho ΔABC nhọn. Điểm D di động trên cạnh BC. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các ΔABD, ΔACD tương ứng.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp ΔAO_1O_2 luôn đi qua một điểm cố định khác A.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAO_1O_2. Hãy xác định vị trí của D trên BC sao cho IO nhỏ nhất.

Bài tập 20: Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Gọi C là điểm tùy ý trên nửa đường tròn, D là hình chiếu vuông góc của C trên AB. Tia phân giác của $\widehat{ACD}$ cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai là E, cắt tia phân giác $\widehat{ABC}$ tại H.

a) Chứng minh: AE // BH.

b) Tia phân giác $\widehat{CAB}$ cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai là F, cắt CE tại I. Tính diện tích ΔFID trong trường hợp tam giác đó là đều.

c) Trên đoạn BH lấy K sao cho HK = HD, gọi J là giao của AF và BH. Xác định vị trí của C để tổng khoảng cách từ các điểm I, J, K đến đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 21: Cho đường tròn tâm O, bán kính R và dây BC < 2R, các tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau tại A. M là điểm bất kì trên cung nhỏ BC và không trùng với B, C. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. BM cắt HK tại P, CM cắt HI tại Q.

a) Chứng minh: PQ // BC.

b) Xác định vị trí của M để tích MH.MI.MK đạt giá trị lớn nhất.

CHỦ ĐỀ 14
QUỸ TÍCH - TẬP HỢP ĐIỂM

1. Kiến thức cơ bản:

1.1. Để giải bài toán quỹ tích, ta thực hiện các bước sau:

Phần thuận: Phân tích các yếu tố cố định và thay đổi để chỉ ra tập hợp mà điểm cần tìm quỹ tích phải thuộc vào (thường là đường tròn, đường thẳng). Ta sẽ sử dụng các quỹ tích cơ bản (như cung chứa góc, trung trực, đường tròn Appolonius …) để xác định và chứng minh quỹ tích. Để dự đoán quỹ tích, có thể phải vẽ một số vị trí (trong đó có các vị trí đặc biệt) của cấu hình.

Phần đảo: Sau khi đã làm phần thuận, tức là xác định tập hợp M những điểm mà quỹ tích thuộc vào, ta cần xem xét xem với những điểm P nào thuộc M thì tồn tại một cấu hình có vị trí điểm cần tìm quỹ tích trùng với P. Bước này sẽ loại bỏ những điểm không tương ứng với một cấu hình nào.

Giới hạn: Sau khi thực hiện phần đảo, ta có thể sẽ thấy rằng chỉ một phần của M thuộc về quỹ tích. Bước này mô tả rõ phần đó. Ví dụ mặc dù điểm P thuộc đường tròn (C) nhưng quỹ tích có thể chỉ là một cung của (C).

Kết luận: Dựa trên các phần trên kết luận quỹ tích là tập hợp những điểm như thế nào.

2.2. Một số quỹ tích cơ bản

(1) Quỹ tích những điểm cách đều hai điểm A và B là *đường trung trực* của đoạn thẳng đó, tức là đường thẳng qua trung điểm M của AB và vuông góc với AB.
(2) Quỹ tích những điểm A cách một điểm I cố định một đoạn AI = R không đổi là *đường tròn* tâm I bán kính R.
(3) Quỹ tích những điểm cách đều hai đường thẳng cắt nhau a và b là hai *đường phân giác* của góc tạo bởi hai đường thẳng đó.
(4) Quỹ tích những điểm cách một đường thẳng a cho trước một đoạn d không đổi là *hai đường thẳng* song song với a và cách a một khoảng cách bằng d.
(5) Quỹ tích những điểm nhìn đoạn AB cố định một góc α cố định là *hai cung chứa góc* α nhận AB làm dây cung. Đặc biệt, nếu $\alpha = 90^0$ thì quỹ tích là đường tròn đường kính AB.
(6) Cho hai điểm A, B và số thực k. Quỹ tích những điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = k$ là một đường thẳng vuông góc với AB tại H, trong đó H xác định bởi hệ thức:

$$(\overline{HA} + \overline{HB})\overline{BA} = k$$

(7) Cho hai điểm A, B với AB = 2a và số thực dương k.
Quỹ tích những điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = 2k^2$ là tập rỗng nếu $k^2 < a^2$ và là đường tròn tâm I, bán kính $R = \sqrt{k^2 - a^2}$.
(8) Cho hai điểm A, B và số thực dương $k \neq 1$. Quỹ tích những điểm M sao cho $\frac{MA}{MB} = k$ là đường tròn đường kính EF, trong đó E và F là các điểm thuộc đường thẳng AB sao cho

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = k \quad \text{và} \quad \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -k$$

(Đường tròn Appolonius)

Lưu ý: Ta phải rèn cách giải bài toán quỹ tích:
- Các quỹ tích cơ bản.
- Đoán quỹ tích.
- Chứng minh quỹ tích đoán nhận là đúng.

Phương pháp 1: Chứng minh quỹ tích (tập hợp điểm) dựa vào tính chất của trục đối xứng, đối xứng tâm, phép tịnh tiến, phép quay, phép vị tự.
Phương pháp 2: Chứng minh quỹ tích nhanh và chính xác học sinh cần phải luyện :
- Xác định yếu tố cố định.
- Xác định yếu không đổi.
- Xác định yếu tố thay đổi.

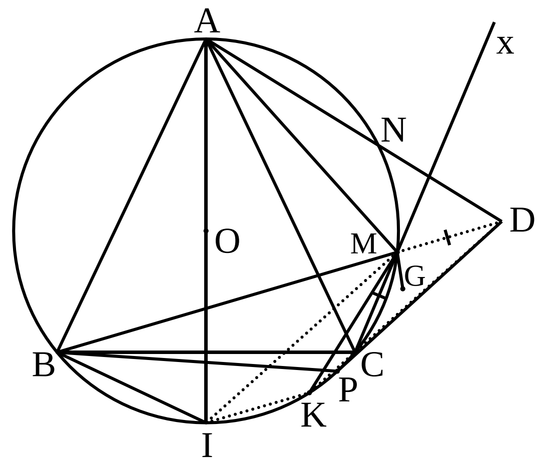
Lưu ý: Phải rèn phán đoán quỹ tích.
Các dạng quỹ tích thường gặp:
(1) Quỹ tích các điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.
(2) Quỹ tích các điểm cách đều hai cạnh của một góc là đường phân giác của góc đó.
(3) Tập hợp các điểm cách đều một điểm O cho trước một khoảng không đổi R là đường tròn (O; R).
(4) Quỹ tích các điểm cách đều một đường thẳng cố định một khoảng bằng h là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đường thẳng đó một khoảng bằng h.
(5) Quỹ tích các điểm nhìn một cạnh dưới một góc bằng 90^0 là một đường tròn có tâm là trung điểm của cạnh đó và đường kính là độ dài của cạnh đã cho.
(6) Quỹ tích các điểm nhìn đoạn AB dưới một góc không đổi là hai cung chứa góc đi qua A, B và đối xứng với nhau qua AB.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho đường tròn (O; R) và tam giác cân ABC có AB = AC nội tiếp đường tròn (O; R) Kẻ đường kính AI. Gọi M là một điểm bất kì trên cung nhỏ AC. Mx là tia đối của tia MC. Trên tia đối của tia MB lấy điểm D sao cho MD = MC.

a) Chứng minh rằng MA là tia phân giác của của góc BMx.
b) Gọi K là giao thứ hai của đường thẳng DC với đường tròn (O). Tứ giác MIKD là hình gì? vì sao?
c) Gọi G là trọng tâm của tam giác MDK. Chứng minh rằng khi M di động trên cung nhỏ AC thì G luôn nằm trên một đường tròn cố định.
d) Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AD với đường tròn (O). P là giao điểm thứ hai của phân giác góc IBM với đường tròn (O). Chứng minh rằng, đường thẳng DP luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên cung nhỏ AC.

Hướngdẫn



a) $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$ (góc nội tiếp (O) chắn $\overset{\frown}{AB}$)

$\widehat{AMx} = 180^0 - \widehat{AMC} = 180^0 - \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{ABC}$ = $\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AC}$ = $\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$

Vậy: $\widehat{AMB} = \widehat{AMx}$ hay MA là tia phân giác của $\widehat{BMx}$

b) ΔMCD cân $\Rightarrow$ $\widehat{MCD} = \widehat{MDC}$ = $\frac{1}{2}\widehat{BMC}$ (góc ngoài của tam giác)

Ta lại có: ΔABC cân $\Rightarrow$ I là điểm chính giữa của cung BC

Suy ra: $\widehat{IMC} = \widehat{IMB} = \frac{1}{2}\widehat{BMC}$

Vậy $\widehat{MCD} = \widehat{IMC}$, suy ra: IM // CD.

$\widehat{MCD} = \widehat{MDC} = \widehat{BMI} \Rightarrow$ BI = MK $\Rightarrow$ $\widehat{MIK} = \widehat{IMB}$

Suy ra: IK // MD.

Vậy MIKD là hình bình hành.

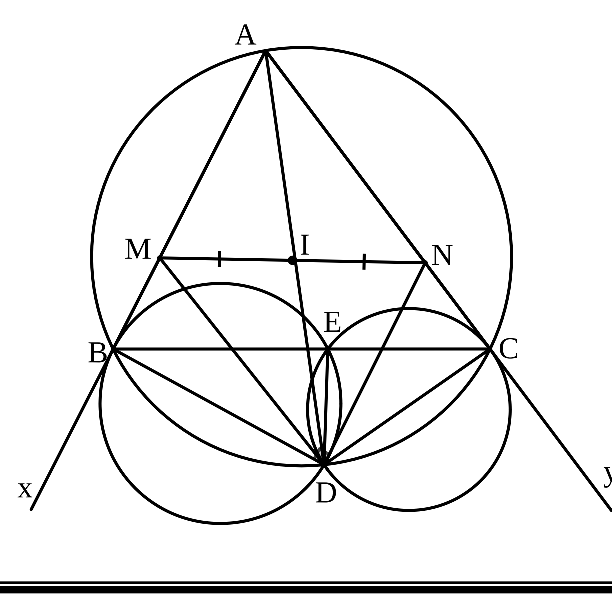
c) D thuộc đường tròn (A; AC)

Gọi N là điểm trên AI sao cho NA = $\frac{1}{3}$AI.

$\Rightarrow$ NG = $\frac{2}{3}$AD = $\frac{2}{3}$AC = const

$\Rightarrow$ G thuộc đường tròn $\left(N; \frac{2}{3}AC\right)$.

Bài tập 2: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi D là điểm chính giữa của cung BC không chứa A. Vẽ đường tròn qua D và tiếp xúc với AB tại B. Vẽ đường tròn qua D và tiếp xúc với AC tại C. Gọi E là giao điểm thứ hai của hai đường tròn này.

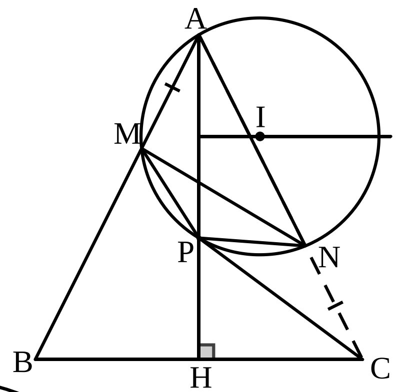


a) Chứng minh 3 điểm B, C, E thẳng hàng.
b) Một đường tròn tâm K di động luôn đi qua A và D, cắt AB, AC theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng BM = CN.
c) Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng MN.

Hướngdẫn

a) $\widehat{BED} = \widehat{DBx} = \widehat{ACB}$, $\widehat{CED} = \widehat{DCy} = \widehat{ABD}$

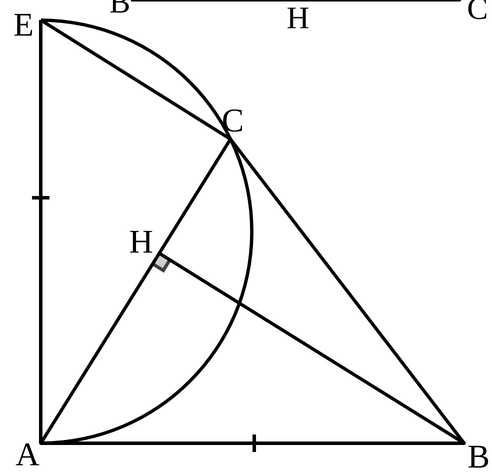
Suy ra: $\widehat{BEC} = \widehat{ABD} + \widehat{ACD} = 180^0$.
Suy ra: B, E, C thẳng hàng.
b) $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAD} \Rightarrow \overset{\frown}{DN} = \overset{\frown}{DM} \Rightarrow$ DM = DN.
$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC} \Rightarrow$ DB = DC
$\widehat{DCN} = \widehat{DBM}$
$\Rightarrow \Delta BMD = \Delta CND \Rightarrow$ BM = CN.
c) Tính được DI = 2KD $\sin^2\dfrac{A}{2} \Rightarrow \dfrac{DI}{DK} = 2\sin^2\dfrac{A}{2} = \text{const}$
K thuộc trung trực của AD $\Rightarrow$ I thuộc đường thẳng vuông góc với AD cắt AD tại P sao cho $\dfrac{DP}{DA} = \sin^2\dfrac{A}{2}$



Bài tập 3: Cho ΔABC cân tại A. Các điểm M, N theo thứ tự chuyển động trên các cạnh AB, AC sao cho AM = CN.
a) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔAMN luôn đi qua một điểm cố định khác A.
b) Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMN.

Giải

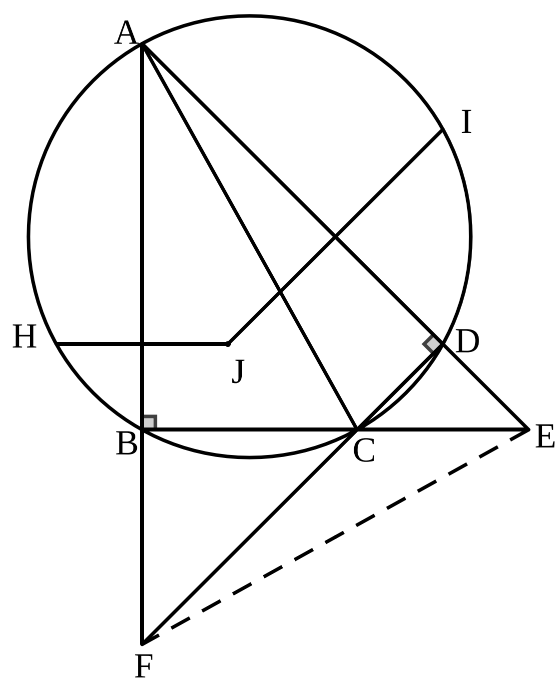
a) Đường cao AH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tại P
$\Rightarrow \Delta AMP = \Delta CNP$
$\Rightarrow$ PA = PC
$\Rightarrow$ P là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC
$\Rightarrow$ P cố định.
b) Tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔAMN nằm trên đường trung trực của AP.



Bài tập 4: Tìm quỹ tích đỉnh C các ΔABC có AB cố định, đường cao BH bằng cạnh AC.

Hướngdẫn

Kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại A, trên đó lấy E sao cho AE = AB
$\Rightarrow \Delta ACE = \Delta BHA$
$\Rightarrow \widehat{ACE} = 90^0 \Rightarrow$ C thuộc cung chứa góc 90 độ dựng trên AE.



Bài tập 5: Tứ giác lồi ABCD có AC cố định, góc $\widehat{A} = 45^0$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^0$.
a) Chứng minh rằng BD cố độ dài không đổi.
b) Gọi E là giao của BC và AD, F là giao của DC và AB. Chứng minh EF có độ dài không đổi?
c) Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAEF.

Hướngdẫn

a) $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^0 \Rightarrow$ B, D thuộc đường tròn đường kính AC

$\widehat{A} = 45^0 \Rightarrow BD = R\sqrt{2}$ = const.

b) ΔCDE vuông cân $\Rightarrow$ CD = ED.

ΔADF vuông cân $\Rightarrow$ DA = DF.

$\Rightarrow \Delta ACD = \Delta FED$

$\Rightarrow$ EF = AC = const

c) Trung trực của AF cắt trung trực của AE tại J, cắt (O) tại H. Trung trực của AE cắt (O) tại I

$\Rightarrow$ H, I là điểm chính giữa của hai cung AC $\Rightarrow$ H, I cố định.

$\widehat{HJI} = \widehat{BCD} = 135^0$

$\Rightarrow$ J thuộc cung chứa góc 135 độ dựng trên HI.

Bài tập 6: Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại A và D có các đường kính AOB và AO'C vuông góc với nhau tại A. Một đường thẳng d đi qua A và cắt các nửa đường tròn không chứa điểm D của (O), (O') tương ứng tại các điểm M, N khác A.

a) Chứng minh: $\Delta ABM \backsim \Delta CAN$.

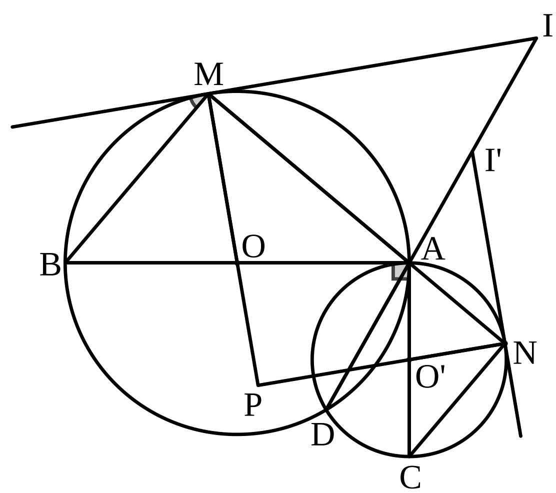
b) Tìm quỹ tích giao điểm P của OM và O'N khi d di động.

c) Tiếp tuyến tại M của (O) cắt AD tại I. Chứng minh rằng: IM^2 = IA. ID.

d) Tìm vị trí của cát tuyến d để cho tiếp tuyến tại M của (O) và tiếp tuyến tại N của (O') cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng AD.

e) Xác định vị trí của d sao cho tứ giác MNCB có diện tích lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó theo R và R'.

Hướngdẫn



a) $\Delta AMB \backsim \Delta CAN$.

b) $\widehat{PMA} = \widehat{PNA} = \widehat{OAM} + \widehat{O'AN} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{OPO'} = 90^0 \Rightarrow$ P thuộc đường tròn đường kính OO'.

c) $\Delta IMA \backsim \Delta IDM \Rightarrow IM^2$ = IA.ID

d) Tương tự câu c giả sử tiếp tuyến tại N của (O') cắt AD tại I' $\Rightarrow$ $I'M^2$ = I'A.I'D.

Vậy I trùng I' $\Leftrightarrow$ IM = I'N $\Leftrightarrow$ I thuộc trung trực của NM.

Vậy khi I là giao của AD và trung trực của MN thì tiếp tuyến tại M của (O) và tiếp tuyến tại N của (O') cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng AD.

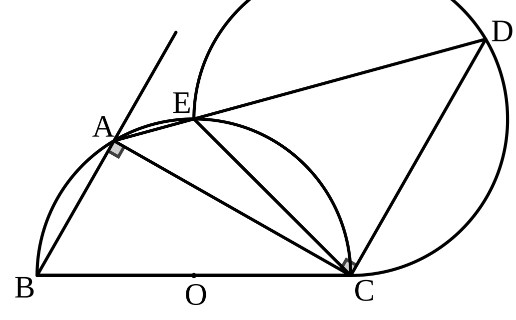
e) Diện tích tứ giác BMNC lớn nhất $\Leftrightarrow (S_{BMA} + S_{ANC})_{min} \Leftrightarrow (S_{BMA})_{min} \Leftrightarrow (BM.AM)_{min}$

Ta lại có: $BM^2 + AM^2 = R^2$.

Vậy: $BM.AM \le \dfrac{R^2}{2}$ dấu bằng khi BM = AM $\Leftrightarrow$ d tạo với AB một góc 45^0.

Khi đó diện tích tứ giác BMNC là: $\dfrac{1}{2}\left(R.R' + R^2 + R'^2\right)$.

Bài tập 7: Một điểm A đi động trên nửa đường tròn đường kính BC cố định. Đường thẳng qua C song song với BA cắt đường phân giác ngoài của góc BAC của tam giác ABC tại D. Tìm quỹ tích D.



Hướngdẫn

AD cắt (O) tại E $\Rightarrow$ E cố định

Ta lại có: $\widehat{CDE} = 45^0$.

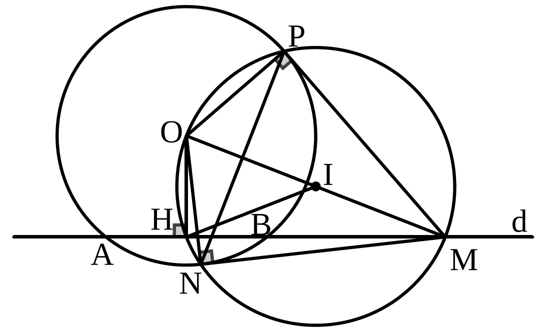
Vậy D thuộc cung chứa góc 45^0 dựng trên CE.

Bài tập 8: Cho đường tròn (O; R) cố định và đường thẳng d cắt (O; R) tại hai điểm A, B cố định. Một điểm M di động trên d và ở bên ngoài đoạn AB. Vẽ các tiếp tuyến MP và MN với (O; R). Gọi N, P là hai tiếp điểm.

a) Chứng minh rằng khi M di động, đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua hai điểm cố định.

b) Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

c) Trình bày cách dựng điểm M sao cho tam giác MNP là tam giác đều.



Hướngdẫn

a) Giả sử (I) cắt AB tại H khác M $\Rightarrow \widehat{OHM} = 90^0$

$\Rightarrow$ HA = HB hay H cố định.

Vậy (I) đi qua O và H cố định.

b) IO = IH $\Rightarrow$ I thuộc trung trực của OH.

c) Tam giác MNP đều $\Leftrightarrow \widehat{OMN} = 30^0$

$\Leftrightarrow$ OM = 2ON = 2R.

Vậy M thuộc đường tròn (O; 2R).

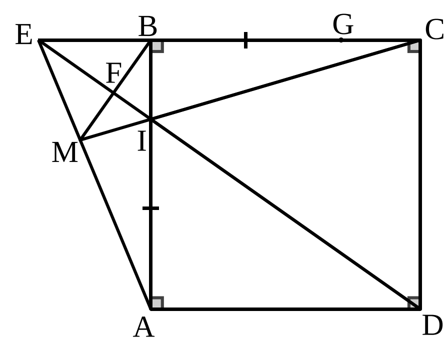
Bài tập 9: Cho hình vuông ABCD cố định. Một điểm I di động trên cạnh AB (I khác A và B). Tia DI cắt tia CB tại E. Đường thẳng CI cắt đường thẳng AE tại M. Đường thẳng BM cắt đường thẳng DE tại F. Tìm quỹ tích điểm F.

Hướngdẫn

Trên BC lấy G sao cho AI = BG $\Rightarrow$ AI $\perp$ EG.

Áp dụng định lí Menelauyt trong tam giác AEB với 3 điểm thẳng hàng C, I, M, ta có:

$$\frac{CB}{CE}\frac{IA}{IB}\frac{ME}{MA} = 1 \qquad (1)$$



Lại có $\frac{CB}{CE} = \frac{CD}{CE} = \frac{IB}{BE}$

Thay vào (1) $\Rightarrow \frac{ME}{MA} = \frac{BE}{IA} = \frac{BE}{BG}$

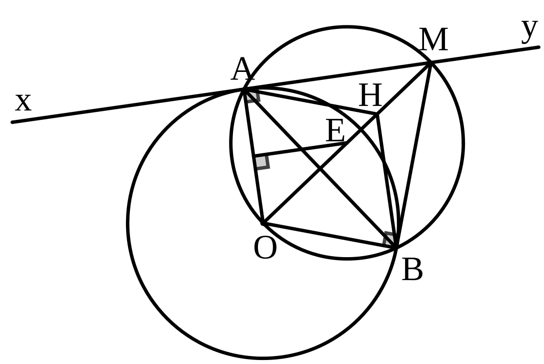
$\Rightarrow$ MB // AG hay $\widehat{DFB} = 90^0$.

Vậy F thuộc đường tròn đường kính BD (cung nhỏ AB).

Bài tập 10: Cho đường tròn (O; R) và một điểm A cố định trên đường tròn. Điểm M luôn động trên tiếp tuyến xy tại A của (O; R). Qua M vẽ tiếp tuyến thứ hai với (O; R). Gọi tiếp điểm là B.

a) Tìm quỹ tích tâm các đường tròn ngoại tiếp ΔAMB.

b) Tìm quỹ tích trực tâm H của ΔAMB.



Hướngdẫn

a) Đường tròn ngoại tiếp ΔAMB là đường tròn tâm E, đường kính OM.

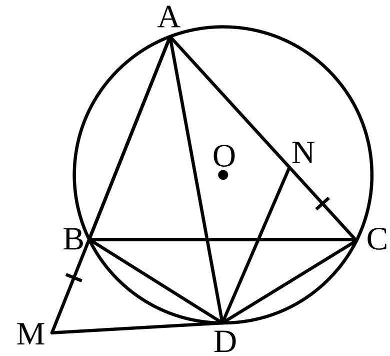
$\Rightarrow$ E thuộc trung trực của OA

b) Tứ giác AOBH là hình thoi

$\Rightarrow$ AH = R.

Vậy H thuộc đường tròn (A; R) (thuộc nửa mặt phẳng bờ xy chứa B).

Bài tập 11: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Đường phân giác của góc A cắt đường tròn tại điểm D. Một đường tròn (L) thay đổi nhưng luôn đi qua hai điểm A và D. (L) cắt hai đường thẳng AB, AC ở giao điểm thứ hai là M, N (có thể trùng với A).



a) Chứng minh rằng: BM = CN.
b) Tìm quỹ tích trung điểm K của MN.

Hướngdẫn

a) $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$

$\Rightarrow$ DB = DC; DM = DN.

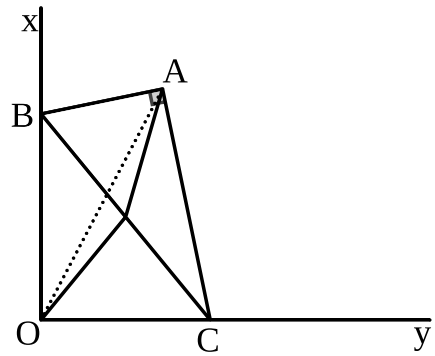
Ta lại có: $\widehat{MBD} = \widehat{NCD}$; $\widehat{BMD} = \widehat{NCD}$

$\Rightarrow$ $\widehat{BDM} = \widehat{CDN}$.

Vậy ΔBDM = ΔCDN $\Rightarrow$ BM = CN.

b) Tương tự câu c bài b)

Bài tập 12: Cho góc vuông xOy. Một chiếc êke ABC trượt trong mặt phẳng của góc xOy sao cho đỉnh B di chuyển trên cạnh Ox, đỉnh C di chuyển trên cạnh Oy và đỉnh góc vuông A di chuyển trong góc xOy. Tìm quỹ tích điểm A.



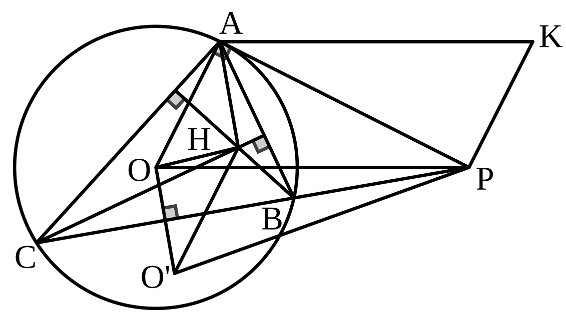
Hướngdẫn

Tứ giác OBAC nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{yOA} = \widehat{CBA} = \alpha$.

Vậy A thuộc tia tạo với tia Oy một góc α (phần nằm trong góc xOy)

Bài tập 13: Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm P cố định ở ngoài đường tròn. Vẽ tiếp tuyến PA và cát tuyến PBC bất kì (A, B, C trên (O; R)). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Khi cát tuyến PBC quay quanh P.

a) Tìm quỹ tích điểm đối xứng của O qua BC.
b) Tìm quỹ tích điểm H.



Hướngdẫn

a) Ta có: PO' = PO = const; P cố định

$\Rightarrow$ O' thuộc đường tròn (P; PO)

b) Tứ giác OO'HA là hình bình hành. Vẽ hình bình hành AOPK.

$\Rightarrow$ K cố định $\Rightarrow$ HO'PK cũng là hình bình hành

$\Rightarrow$ HK = O'P = OP = const.

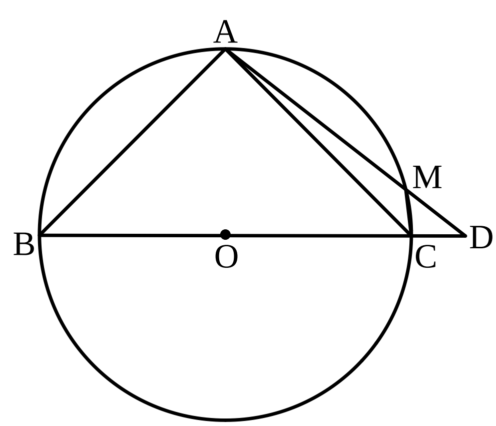
Vậy H thuộc đường tròn (K; OP).

Bài tập 14: Cho tam giác cân ABC nội tiếp đường tròn (O; R) có AB = AC = $R\sqrt{2}$.

a) Tính độ dài BC theo R

b) M là một điểm di động trên cung nhỏ AC, đường thẳng AM cắt đường thẳng BC tại D. Chứng minh rằng: AM.AD luôn luôn là hằng số

c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMCD di động trên một đường cố định khi M di động trên cung nhỏ AC.



Hướngdẫn

a) BC là đường kính của (O).

b) Tam giác AMC đồng dạng với tam giác ACD

$\Rightarrow$ AM.AD = AC^2 = $R\sqrt{2}$.

c) $\widehat{ACM} = \widehat{MDC} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{CM}$ $\Rightarrow$ AC là tiếp tuyến của (I)

$\Rightarrow$ IC vuông góc với AC cố định

$\Rightarrow$ I thuộc đường thẳng qua C và vuông góc với CA.

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho tam giác ABC cân tại A. Một điểm P di động trên cạnh BC. Vẽ PQ song song với AC (Q thuộc AB), vẽ PR song song với AB (R thuộc AC). Tìm quỹ tích các điểm D đối xứng với P qua QR.

Bài tập 2: Cho góc vuông xOy. Các điểm A và B tương ứng thuộc tia Ox, Oy sao cho OA = OB. Một đường thẳng d đi qua A và cắt OB tại M nằm giữa O và B. Từ B hạ đường thẳng vuông góc với AM cắt AM tại H và cắt đường thẳng OA tại I.

a) Chứng minh rằng OI = OM và tứ giác OMHI nội tiếp.

b) Gọi K là hình chiếu của O lên BI. Chứng minh rằng OK = HK.

c) Tìm quỹ tích điểm K khi M di động trên đoạn OB.

Bài tập 2: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) và M di động trên cung BC.

a) Trên tia đối của tia CM, lấy đoạn CE = MB. Tìm tập hợp các điểm E khi M di động.

b) Trên tia đối của tia MC, lấy đoạn MF = MB. Tìm tập hợp các điểm F khi M di động.

Bài tập 3: Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một cát tuyến (d) bất kì qua B cắt (O0 tại C và (O') tại C'. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn CC' khi d quay quanh B.

Bài tập 4: Cho hai đường thẳng xx' và yy' vuông góc với nhau tại O và một điểm P cố định. Một góc vuông đỉnh P quay quanh P. các cạnh của góc vuông này cắt xx' tại A và yy' tại B. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn AB.

Bài tập 5: Trên mỗi bán kính OM của đường tròn (O) lấy đoạn OI bằng khoảng cách từ M đến đường kính cố định AB. Tìm tập hợp các điểm I.

Bài tập 6: Cho đường tròn (O) cố định và một dây AB cố định. Trên cung nhỏ AB, ta lấy điểm C di động. Tìm tập hợp tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài tập 7: Cho đường tròn (O) và một dây AB cố định. Kẻ một dây AC. Trên đường thẳng AC lấy hai điểm M, M' sao cho CM = CM' = CB, M nằm ngoài đường tròn. Tìm tập hợp các điểm M và M' khi C vạch cung AB.

Bài tập 8: Cho đường tròn (O; R), 2 điểm B, C cố định trên (O) và một điểm A di động trên (O). Tìm tập hợp các trực tâm H của tam giác ABC.

Bài tập 9: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M trong mặt phẳng sao cho hình chiếu của M trên ba cạnh của tam giác là ba điểm thẳng hàng.

Bài tập 10: Cho đoạn thẳng AB và M là điểm tuỳ ý trên đoạn AB. Dựng trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB các hình vuông ANCD và BMEF. Các đường tròn ngoại tiếp chúng tâm P và Q cắt nhau tại M và N.

a) Chứng minh rằng: AE, BC đi qua N.

b) Chứng minh rằng: MN đi qua một điểm cố định khi M di động.

c) Tìm tập hợp trung điểm I của PQ khi M di động.

Bài tập 11: Cho đường tròn (O; R) và một điểm P cố định trong đường tròn không trùng với O. Qua P dựng dây cung APB, các tiếp tuyến của (O) tại A và B cắt nhau tại M. Tìm tập hợp các điểm M khi dây AB quay quanh P.

Bài tập 12: Hai đường tròn (O) và (O') giao nhau tại A và B. Một cát tuyến di động qua A cắt (O) tại C và (O') tại D. Tìm tập hợp tâm I của các đường tròn nội tiếp tam giác BCD.

Bài tập 13: Cho hình vuông ABCD có tâm O. Vẽ đường thẳng (d) quay quanh O cắt AD, BC tại E, F. Từ E, F lần lượt vẽ các đường thẳng song song với DB, AC chúng cắt nhau tại I.

a) Chứng minh rằng I thuộc một đường thẳng cố định

b) Từ I kẻ IH vuông góc với EF tại H. Chứng minh H thuộc một đường cố định và IH đi qua một điểm cố định.

Bài tập 14: Cho tam giác ABC có BC cố định còn A di động sao cho góc BAC bằng 60^0. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài tập 15: Cho đường tròn (C) tâm O. P là một điểm cố định nằm trong (C) nhưng không trùng với O. Một đường thẳng (d) thay đổi qua P cắt (C) tại A và B. Tìm quỹ tích trung điểm M của đoạn BC khi (d) quay quanh P.

Bài tập 16: Cho hai điểm A, B cố định. C là một điểm thay đổi trên đoạn AB, C khác A và B. Dựng các hình vuông ACDE và BCFG nằm về cùng một phía đối với đường thẳng AB. Tìm quỹ tích trung điểm I của EG.

Bài tập 17: Cho một góc nhọn Oxy và một điểm M nằm trong góc ấy. Từ M ta kẻ các đường vuông góc MH xuống cạnh Ox và MK xuống cạnh Oy. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện MH + MK = a, trong đó a là một độ dài cho trước.

Bài tập 18: Cho tam giác đều ABC và một điểm P nằm trong tam giác. Hạ PA_1, PB_1, PC_1 vuông góc với BC, CA, AB tương ứng. Tìm tập hợp các điểm P sao cho $A_1B_1C_1$ là tam giác cân.

Bài tập 19: Cho tam giác đều ABC. P là một điểm nằm trong tam giác. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ P đến cạnh BC, CA, AB tương ứng.

a) Biết rằng x = 1, y = 2, z = 3. Hãy tính diện tích tam giác ABC.

b) Tìm quỹ tích những điểm P trong tam giác sao cho x + y = z. Từ đó suy ra tập hợp những điểm P trong tam giác sao cho x, y, z lập thành 3 cạnh của một tam giác.

Bài tập 20: Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng (d) thay đổi nhưng luôn đi qua A cắt (C_1), (C_2) tại các điểm thứ hai C và D tương ứng. Tìm quỹ tích trung điểm M của CD khi (d) quay quanh A.

Bài tập 21: Cho đường tròn (C) tâm O bán kính R. Đường tròn (C_1) có bán kính R/2 tiếp xúc trong với (C) tại A. Bây giờ ta cố định vị trí điểm A trên đường tròn (C_1) là cho (C_1) lăn nhưng luôn tiếp xúc trong với (C). Hãy tìm quỹ tích điểm A.

Bài tập 22 (*): Cho hai điểm A, B cố định, AB = 2a.
Tìm quỹ tích những điểm M sao cho MA + MB = 2c không đổi, với c > a.

Bài tập 23: Cho hình vuông ABCD. M là một điểm di động trên cạnh CD. AM và BM kéo dài cắt BC và AD kéo dài tại P và Q. DP cắt CQ tại N. Tìm quỹ tích điểm N khi M di động trên cạnh BC.

Bài tập 24: Cho tam giác ABC. Trên AB kéo dài về phía B lấy điểm M và trên AC kéo dài về phía C lấy điểm N sao cho BM = CN. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN.

Bài tập 25: Cho hai điểm A, B cố định. C là một điểm thay đổi trên đoạn AB, C khác A và B. Dựng các hình vuông ACDE và BCFG nằm về cùng một phía đối với đường thẳng AB. Gọi I, J là tâm các hình vuông ACDE và BCFG. Tìm quỹ tích trung điểm K của IJ.

Bài tập 26: Tìm quỹ tích những điểm cách đều một điểm đã cho và một đường thẳng đã cho.

Hướng dẫn

Bài toán tưởng như rất đơn giản này không thể giải bằng phương pháp hình học thuần túy. Ta có thể dựng một số vị trí để thấy rằng quỹ tích không phải là đường thẳng. Một đặc điểm đáng chú ý nữa là trên 1 đường thẳng vuông góc với đường thẳng đã cho sẽ tìm được duy nhất 1 điểm thỏa mãn tính chất.

Bài này có thể giải được dễ dàng bằng phương pháp tọa độ. Gọi điểm đã cho là P và đường thẳng đã cho là P. Xét hệ trục tọa độ có Ox là đường thẳng d và Oy là đường thẳng qua điểm P và vuông góc với d. Giả sử P có tung độ là p > 0.

Xét điểm M(x, y) bất kỳ nằm trên quỹ tích. Dễ thấy y > 0. Khi đó khoảng cách từ M đến d là y và từ M đến P là $\sqrt{x^2+(y-p)^2}$.

Từ đó ta có $y=\sqrt{x^2+(y-p)^2} \Leftrightarrow y^2=x^2+y^2-2py+p^2 \Leftrightarrow y=\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{p}{2}$.

Đó là phương trình của một parabol!

CHỦ ĐỀ 15
DỰNG HÌNH

1. Kiến thức cơ bản:

Dựng hình bằng thước và com-pa là dạng toán khó đòi hỏi người giải phải nắm vững các kiến thức cơ bản, kỹ năng cũng như sự sáng tạo trong việc kẻ thêm các yếu tố phụ để kết nối các dữ kiện. Vì thế nắm vững kỹ năng dựng hình sẽ có ý nghĩa quan trọng trong việc giải toán hình học nói chung. Bài toán dựng hình bằng thước và compa có ý nghĩa toán học rất sâu sắc và nội dung của nó nhiều lúc vượt ra khỏi lĩnh vực hình học. Ông Vua của các nhà Toán học Carl Friederich Gauss rất tự hào với kết quả tìm ra cách dựng đa giác đều 17 cạnh của mình. Kết quả này có được nhờ vào lượng giác, cụ thể Gauss đã tính được $\cos\frac{360^0}{17}$ chỉ thông qua các phép tính số học và phép khai căn bậc 2.

Để giải bài toán dựng hình, ta đi theo các bước cơ bản sau:

Phân tích: Giả sử hình đã dựng được, tìm cách kết nối các đối tượng đã biết với các đối tượng cần dựng bằng những cầu nối để tìm ra quy trình dựng: Bắt đầu từ một thành phần có thể dựng được, tiếp tục dựng ra các thành phần khác cho đến khi hoàn thành yêu cầu. Ví dụ phép dựng một tam giác sẽ hoàn thành khi ta dựng được 3 đỉnh của nó.

Cách dựng: Nêu ra các bước để dựng được cấu hình thỏa mãn yêu cầu bài toán. Mỗi bước dựng phải là những động tác có thể thực hiện được bằng thước và compa (kẻ đường thẳng nối hai điểm, vẽ một đường tròn có tâm và bán kính xác định, tìm giao điểm của hau đường thẳng, hai đường tròn …).

Chứng minh: Chứng minh cách dựng vừa nêu ở phần trên sẽ cho ta cấu hình cần dựng.

Biện luận: Biện luận số nghiệm của bài toán theo các điều kiện ban đầu cho. Khi nào vô nghiệm, khi nào đó nghiệm duy nhất, khi nào có 2 nghiệm hình …

Kết luận: Tổng kết lại các bước trên để đưa ra kết luận.

Ta đã biết vẽ hình bằng nhiều dụng cụ: thước (thước thẳng), compa, êke, thước đo góc, …

Ta xét các bài toán vẽ hình mà chỉ sử dụng hai dụng cụ là thước và compa, chúng được gọi là các bài toán dựng hình.

Với thước, ta có thể:

- Vẽ được một đường thẳng khi biết hai điểm của nó.
- Vẽ được một đoạn thẳng khi biết hai đầu mút của nó.
- Vẽ được một tia khi biết góc và một điểm của tia.
- Với compa, ta có thể vẽ được một đường tròn khi biết tâm và bán kính của nó.

Ở hình học lớp 6 và hình học lớp 7, với thước và compa, ta đã biết cách giải các bài toán dựng hình sau :

(1) Dựng trung trực của một đoạn thẳng.
   Dựng trung điểm của một đoạn thẳng.
   Dựng một đường thẳng đi qua một điểm đã cho và vuông góc với một điểm đã cho.
(2) Dựng một đường thẳng đi qua một điểm đã cho và song song với một điểm đã cho.
(3) Dựng một đoạn thẳng bằng n lần đoạn thẳng đã cho.
   Dựng một đoạn thẳng bằng 1/n đoạn thẳng đã cho.
(4) Dựng một góc bằng góc đã cho. Chia đôi một góc.
   Dựng tổng và hiệu của hai góc.
(5) Cho hai đoạn thẳng có độ dài a, b, dựng đoạn thẳng có độ dài $\sqrt{ab}$.
(6) Dựng tiếp tuyến kẻ từ một điểm đến một đường tròn.
(7) Dựng đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của một tam giác.
(8) Dựng tam giác biết ba cạnh, hoặc biết hai cạnh và góc xen giữa, hoặc biết một cạnh và hai góc kề.

Dựng hình bằng phương pháp đại số:

Giải một bài toán dựng hình bằng phương pháp đại số thường được quy về dựng một số đoạn thẳng. Ta gọi các độ dài các đoạn thẳng phải tìm là x, y, z. Sau đó ta lập phương trình để biểu thị mối tương quan giữa các đoạn thẳng đã biết là a, b, c. Sau đó giải hệ phương trình để được các ẩn x, y, z.

Một vài đoạn thẳng dựng được biểu thị bằng biểu thức đơn giản là:

$x = a \pm b$; $x = \dfrac{a.b.c}{e.f}$

$x = na, n \in N$; $x = \sqrt{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}$ $(a^2 + d^2 > b^2 + c^2)$

$x = \dfrac{a}{n}, n \in N$; $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$

$x = \dfrac{na}{m}$; $m, n \in N$; $x = \sqrt{ab}$

$x = \dfrac{ab}{c}$; $x = a\sqrt{n}$; $n \in N$

Dựng hình bằng phương pháp biến hình:

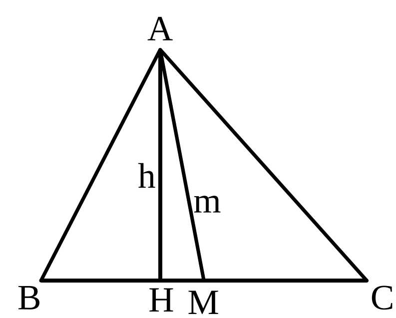
Dựng hình bằng phương pháp biến hình là áp dụng phép đối xứng, phép tịnh tiến, phép quay, đồng dạng. Ta quy việc dựng một hình về việc dựng một điểm M. Dựng trực tiếp điểm M đôi khi gặp khó khăn. Trong trường hợp này ta chọn một phép biến hình là một song ánh f (để f có ánh xạ ngược) biến điểm M thành điểm M' mà điểm M' này ta có thể dựng được một cách dễ dàng. Sau khi đã dựng được điểm M' ta được phép biến hình ngược: $f^{-1}(M') = M$. Ví dụ như tịnh tiến $\vec{a}$.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Dựng ΔABC biết cạnh BC = a, đường cao AH = h, trung tuyến AM = m.

Giải

Phân tích



Giả sử ta dựng được ΔABC thoả mãn:

BC = a; AH = h; AM = m.

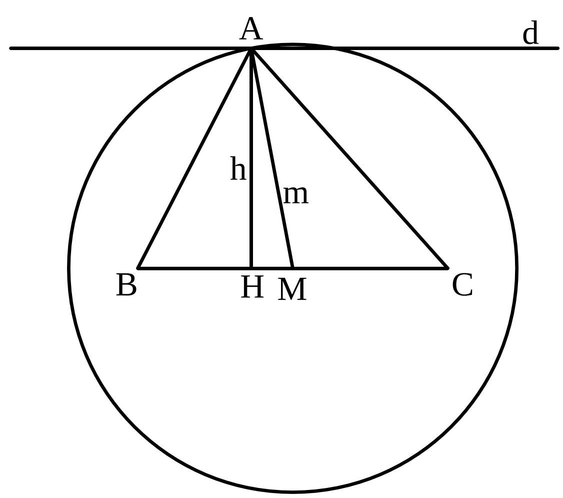
Ta phải xác định đỉnh A thoả mãn 2 điều kiện:

- A cách BC một khoảng bằng h, suy ra A $\in$ đường thẳng d// BC và cách BC một khoảng h.
- A cách điểm M là trung điểm của BC một khoảng m.

Cách dựng

- Dựng BC bằng a
- Dựng đường thẳng d // BC và cách BC một khoảng bằng h.
- Dựng đường tròn tâm M bán kính m cắt d tại A.

$\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác cần dựng.



Chứng minh

ΔABC có BC = a (cách dựng)

Đường cao AH = h (cách dựng)

Trung tuyến AM = m (cách dựng)

$\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác cần dựng.

Biện luận

* m > h $\Rightarrow$ bài toán có 4 nghiệm (4 điểm A)
* m = h $\Rightarrow$ bài toán có 2 nghiệm (2 điểm A)
* m < h $\Rightarrow$ bài toán vô nghiệm (không có điểm A)

Bài tập 2: Cho đường thẳng m song song với đường thẳng n và điểm A không thuộc 2 đường thẳng đó. Dựng điểm B $\in$ m, C $\in$ n sao cho ΔABC là tam giác đều.

Giải

Phân tích

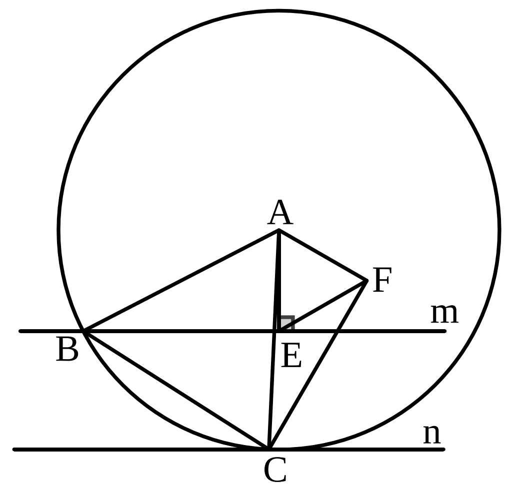
Giả sử đã dựng được điểm B $\in$ m, điểm C $\in$ n để ΔABC đều.
Dựng hình chiếu vuông góc của A trên điểm M là E
Dựng tam giác đều AEF.
Xét ΔAEB và ΔAFC ta có:
AE = AF (ΔABF đều)

$\widehat{CAF} = \widehat{BAE}\left(= 60^0 + \widehat{CAE}\right)$

AB = AC (ΔABC đều)

$\Rightarrow$ ΔAEB = ΔAFC (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BEA} = \widehat{CFA} = 90^0$ (vì AE $\perp$ BE)



Cách dựng

Từ A hạ AE $\perp$ m tại E
- Dựng ΔAEF đều
- Từ F dựng đường vuông góc với AF cắt n tại C
- Nối A với C, dựng đường tròn tâm A bán kính AC cắt m tại B.
- Nối A với B, B với C ta được ΔABC cần dựng

Chứng minh

Xét Δ vuông ABE và Δ vuông ACF có:

$\left.\begin{matrix} AB = AC \\ AE = AF \end{matrix}\right\}$ (Cách dựng) $\Rightarrow$ ΔABF = ΔACF (c.g.c)

$\Rightarrow$ AE = AF

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{CAF}$

Mà $\widehat{CAF} = \widehat{EAF} + \widehat{CAE} = 60^0 + \widehat{CAE}$

Và $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE}$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 60^0$

ΔABC có: AB = AC và $\widehat{BAC} = 60^0$

$\Rightarrow$ ΔABC đều

d) Biện luận

Bài toán có 2 nghiệm vì ta có thể dựng được 2 Δ đều

Bài tập 3: Dựng ΔABC biết BC = a; AB + AC = d; $\widehat{ABC} = \alpha$.

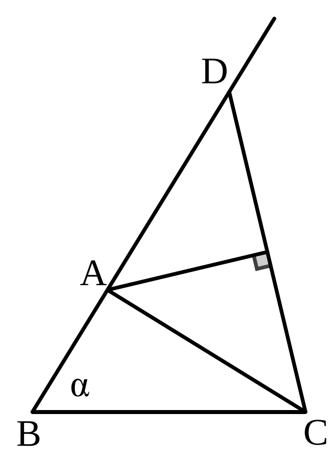
Giải

a) Phân tích

Giả sử ta đã dựng được ΔABC thoả mãn các điều kiện của đầu bài.
Kéo dài BA và trên đường kéo dài lấy điểm D sao cho AD = AC.
Suy ra: BD = AB + AD = AB + AC = d
$\Rightarrow$ ΔDAC cân $\Rightarrow$ A = BD $\cap$ đường trung trực của CD

b) Cách dựng

- Dựng đoạn BC = a
- Dựng tia Bx sao cho $\widehat{xBC} = \alpha$.
- Dựng điểm D trên Bx sao cho BD = d
- Nối D với C.



- Dựng điểm A là giao của BD và đường trung trực của CD.
- Nối A với C ta được ΔABC cần dựng.

c) Chứng minh

ABC = α (cách dựng)
BC = a (cách dựng)
A ∈ đường trung trực của DC ⇒ AD = AC
A, D ∈ Bx; BD = d (cách dựng)
⇒ BD = AB + AD = AB + AC = d
⇒ ΔABC là Δ cần dựng.

d) Biện luận

- d < a ⇒ bài toán vô nghiệm
- d > a ⇒ Bài toán có một nghiệm

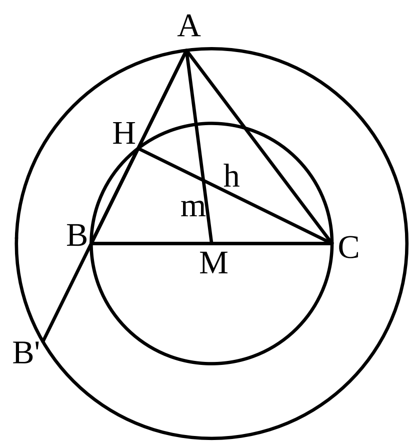
Bài tập 4: Dựng ΔABC biết BC = a, trung tuyến AM = m, đường cao CH = h.

Giải

Phân tích:

Giả sử đã dựng được ΔABC thoả mãn điều kiện của đầu bài
⇒ A ∈ đường tròn tâm M bán kính m.
H ∈ đường tròn đường kính BC
CH = h; B, H, A thẳng hàng

Cách dựng:



- Dựng BC = a, trung điểm M của BC
- Dựng đường tròn (M, m)
- Dựng đường tròn đường kính BC
- Dựng điểm H ∈ đường tròn đường kính BC sao cho HC = h
- Dựng điểm A là giao điểm của BH và (M, m)

Chứng minh:

BC = a
CH = h (cách dựng)
⇒ A ∈ (M, m) ⇒ AM = m
⇒ ΔABC là tam giác cần dựng

Biện luận:

Bài toán có nghiệm khi $\begin{cases} h < BC = a \\ 2m > h \end{cases}$

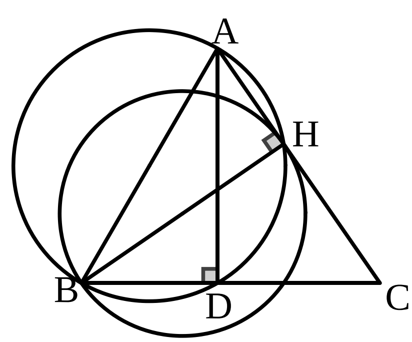
Bài toán có hai nghiệm do BH cắt (M, m) tại hai điểm là A và A'.

Bài tập 5: Dựng ΔABC biết B = β < 90^0, đường cao BH và đường cao AD.

Giải

Phân tích:

Giả sử ΔABC đã dựng được.
Δ vuông ABD là dựng được
⇒ ta chỉ cần dựng điểm C.
Muốn vậy ta phải đi dựng điểm H: H ∈ giao của hai đường tròn đường kính AB và đường tròn tâm B bán kính BH ⇒ C = AH ∩ BD



Cách dựng:

- Dựng ΔABD vuông tại D sao cho ABD < 90^0 và AD cho trước.
- Dựng điểm H là giao điểm

của hai đường tròn: (B, BH)
và đường tròn đường kính AB (BH cho trước).
- Dựng điểm C là giao của BD và AH ⇒ΔABC là Δ ta cần dựng.

Chứng minh:

ABD = β < 90^0 (cách dựng)
AD là đường cao có độ dài cho trước (cách dựng)
BH bằng đoạn cho trước (cách dựng)
⇒ ΔABC thoả mãn yêu cầu của đề bài

Biện luận:

Bài toán luôn có nghiệm
Bài toán có một nghiệm

Bài tập 6: Dựng hình bình hành ABCD biết 2 đỉnh đối diện A và C còn 2 đỉnh B và D thuộc một đường tròn (O, R) cho trước.

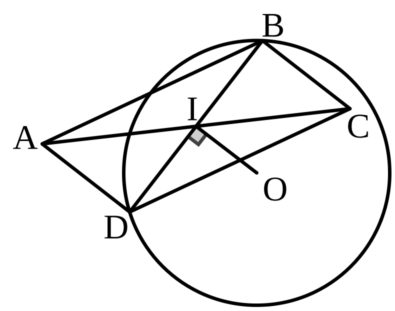
Giải

Phân tích:

Giả sử đã dựng được hình bình hành thoả mãn điều kiện của đề bài là ABCD. Nếu I là giao điểm của 2 đường chéo của ABCD thì: I ∈ AC và IA = IC, I ∈ BD và IB = ID; B, D ∈ (O,R) ⇒ OI ⊥ BD

Cách dựng:

- Dựng I là trung điểm của AC
- Dựng đường thẳng qua I
  và ⊥ OI cắt (O) tại B và D
  ⇒ ABCD là hình bình hành cần dựng.



Chứng minh:

OI ⊥ BD ⇒ IB = ID
IA = IC (cách dựng); B, D ∈ (O, R) (cách dựng)
ΔAIB = ΔDIC (c.g.c) ⇒ ABI = IDC ⇒ AB // CD
⇒ ABCD là hình bình hành thoả mãn đầu bài.

Biện luận:

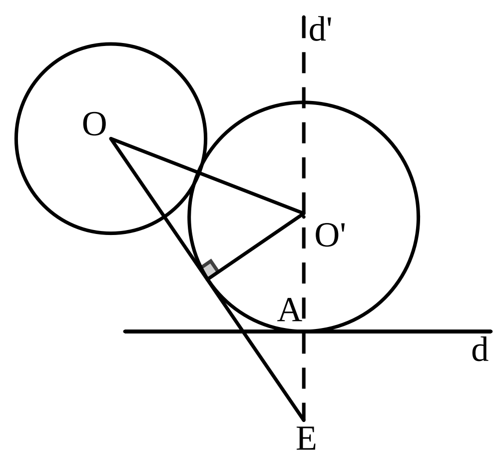
Bài toán có nghiệm khi điểm I ở trong đường tròn (O) khi đó bài toán có 1 nghiệm.

Bài tập 7: Cho đường tròn (O, R) và điểm A ∈ đường thẳng d.
Dựng đường tròn tiếp xúc với C(O,R) và tiếp xúc với d tại A.

Giải

Phân tích:

Giả sử đã dựng được (O',R') tiếp xúc với (O, R) và tiếp xúc với d tại A ⇒ O' ∈ d' là đường thẳng qua A và ⊥ với d. Dựng điểm E sao cho O'E = O'O (AE = R).
⇒ O' nằm trên đường trung trực của OE
⇒ O' là giao của đường trung trực của OE & p



Cách dựng:

- Dựng đường thẳng d' ⊥ d tại A
- Dựng điểm E ∈ d' sao cho AE = R
- Dựng đường trung trực của
  OE là m, m ∩ d' ≡ O'
- Dựng đường tròn (O',O'A)
  Đó là đường tròn cần dựng

Chứng minh:

(O', O'A) tiếp xúc với d tại A (cách dựng)
Nối O với O'. Vì O' ∈ đường trung trực của OE
⇒ OO' = O'E

Mà O'E = O'A + AE $\Rightarrow$ OO' = OA + AE = O'A +R

$\Rightarrow$ (O, R) & (O', O'A) tiếp xúc với nhau

$\Rightarrow$ (O') là đường tròn cần dựng

Biện luận:

Trên p có thể lấy E_1 ở trong đường tròn (O') sao cho $AE_1 = R$.

Vậy bài toán có 2 nghiệm hình.

Bài tập 8: Cho hình thang ABCD, AD // BC. Dựng đường thẳng EF//BC chia đôi diện tích hình thang.

Giải

Phân tích:

Giả sử đã dựng được EF//BC chia đôi diện tích hình thang kéo dài BC, CD cắt nhau tại O.

Suy ra:

$\Delta OBC \backsim \Delta OEF \backsim \Delta OAD$

Đặt OB = a, OA = b, OE = x

Ta có: $\dfrac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OEF}} = \dfrac{a^2}{x^2}; \quad \dfrac{S_{\Delta OAD}}{S_{\Delta OEF}} = \dfrac{b^2}{x^2}$

$\Rightarrow \dfrac{S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OAD}}{S_{\Delta OEF}} = \dfrac{a^2+b^2}{x^2}$

Mà: $S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OAD} = S_{\Delta OEF} + S_{\text{hình thang EBCF}} + S_{\Delta OAD}$

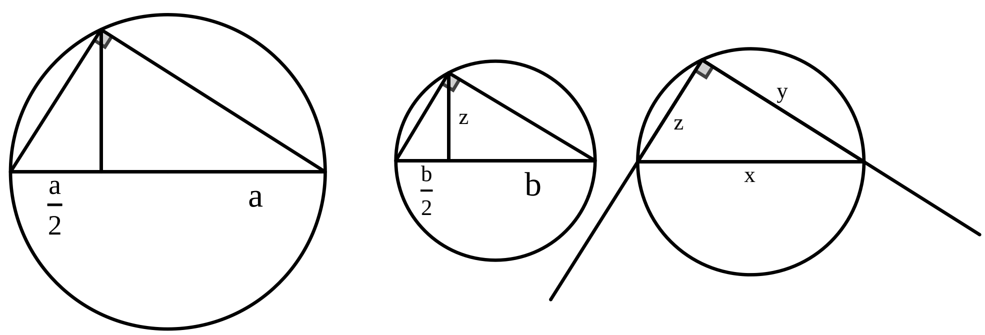
$= S_{\Delta OEF} + S_{\text{hình thang AEFD}} + S_{\Delta OAD}$

$= 2S_{\Delta OEF}$

$\Rightarrow \dfrac{a^2+b^2}{x^2} = \dfrac{2}{1} \Leftrightarrow 2x^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow x^2 = \sqrt{\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}}$

Đặt $y = \sqrt{\dfrac{a^2}{2}}; z = \sqrt{\dfrac{b^2}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{y^2+z^2}$



Cách dựng:

- Kéo dài BA, CD cắt nhau ở O
- Dựng đoạn trung bình nhân của a, $\dfrac{a}{2}$ ta được y.
- Dựng đoạn trung bình nhân của $\dfrac{b}{2}$, b ta được z.
- Dựng Δ vuông có y, z là 2 cạnh góc vuông
  $\Rightarrow$ độ dài cạnh huyền của Δ đó là x.
- Trên OB lấy OE = x, dựng EF // BC ta sẽ được đoạn EF cần dựng.

Chứng minh:

Gọi hình thang ADEF diện tích là S_1 và hình thang EBCF có diện tích là S_2

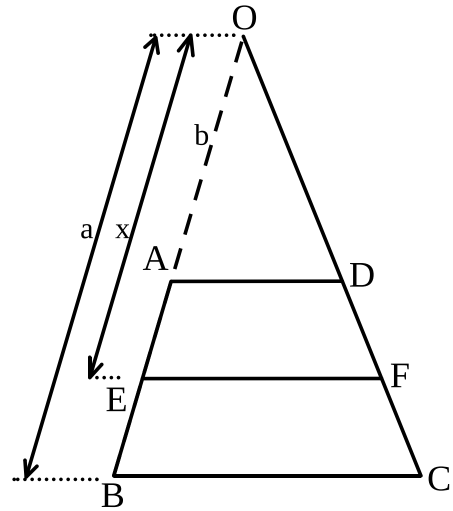
Ta phải chứng minh $S_1 = S_2$

Ta có $\Delta OAD \backsim \Delta DEF$ (vì AD//EF)

$\Rightarrow$ Tỉ số đồng dạng là: $\frac{a}{x}$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta OAD}}{S_{\Delta OEF}} = \frac{a^2}{x^2} = \frac{S_0}{S_0 + S_1}$$

$$\Delta OEF \backsim \Delta OBC \Rightarrow \frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OEF}} = \frac{b^2}{x^2} = \frac{S_0 + S_1 + S_2}{S_0 + S_1}$$



$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{x^2} = \frac{2S_0 + S_1 + S_2}{S_0 + S_1} \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \frac{2S_0 + S_1 + S_2}{S_0 + S_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2S_0 + S_1 + S_2}{S_0 + S_1} = 2 \Rightarrow 2S_0 + S_1 + S_2 = 2S_0 + 2S_1 \Leftrightarrow S_1 = S_2$$

$\Rightarrow S_{\text{hình thang ADEF}} = S_{\text{hình thang EBCF}}$

Biện luận:

Bài toán luôn có một nghiệm hình.

Bài tập 9: Cho hình bình hành ABCD. Dựng hai đường thẳng đi qua đỉnh A và chia hình bình hành thành 3 phần có diện tích bằng nhau.

Giải

Phân tích:

Giả sử đã dựng được đường thẳng qua A cắt BC tại E, cắt CD tại F thoả mãn:

S $_{\Delta ABE}$ = S™BECF = S $_{\Delta AFD}$ = $\frac{1}{3}$ S™ABCD

Gọi độ dài: BE = x, đường cao AH = h $\Rightarrow$ S $_{\Delta ABE}$ = $\frac{1}{2}$h.x

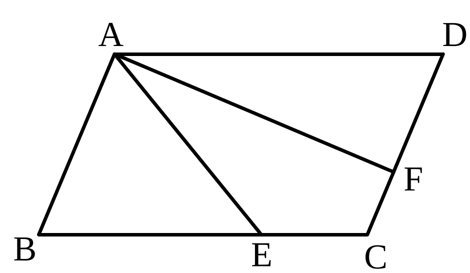
S™ABCD = AH.BC = h.BC. Mà S™ABCD = 3 S $_{\Delta ABE}$

$\Rightarrow$ h.BC = 3. $\frac{1}{2}$hx <=> BC = $\frac{3}{2}$x $\Rightarrow$ x = $\frac{2}{3}$BC

Tương tự ta gọi: DF = y $\Rightarrow$ y = $\frac{2}{3}$DC

Cách dựng:

- Dựng đoạn BE = $\frac{2}{3}$BC
- Dựng đoạn DF = $\frac{2}{3}$DC
- Nối A với E, A với F ta được:



S $_{\Delta ABE}$ = S $_{\Delta AFD}$ = S™AECF = $\frac{1}{3}$ S™ABCD

Chứng minh:

Ta có: S $_{\Delta ABE}$ = $\frac{1}{2}$hx = $\frac{1}{2}$h. $\frac{2}{3}$BC = $\frac{1}{3}$h.BC = $\frac{1}{3}$ S™ABCD

Tương tự: $S_{\Delta ADF} = \frac{1}{3} S_{\text{™}ABCD}$

$\Rightarrow S_{\text{™}AECF} = \frac{1}{3} S_{\text{™}ABCD} \Rightarrow$ Điều phải chứng minh

Biện luận:

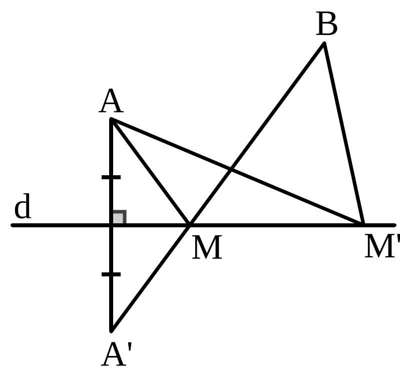
Bài toán có một nghiệm hình

Bài tập 10: Cho 2 điểm A, B nằm về một phía của đường thẳng d.
Tìm điểm $M \in d$ sao cho AM + MB là nhỏ nhất.

Giải

Phân tích:

Giả sử đã dựng được điểm $M \in d$ để (AM + MB) ngắn nhất.
Ta lấy điểm A' đối xứng với A qua d.
$\Rightarrow$ IA = IA'; MA = MA' $\Rightarrow$ (AM + MB) ngắn nhất khi: A, M, B thẳng hàng.
$\Rightarrow M \in$ giao của đường thẳng nối 2 điểm A', B và đường thẳng d.



Cách dựng:

- Dựng điểm A' đối xứng A qua d
- Nối A' với B
- Dựng $M = A'B \cap d$

Đó là điểm M cần dựng

Chứng minh:

- Lấy $M' \in d$ (M' tuỳ ý) và ta chứng minh:

M'A + M'B > MA + MB

Theo cách dựng thì A', M, B thẳng hàng và AM = A'M

Xét ΔA'BM' ta có: M'A + M'B > A'B (1)

Mà theo cách dựng thì A'B = MA' + MB = MA + MB (2)

Từ (1) và (2), suy ra:

MA' + MB' > MA + MB $\Rightarrow$ (MA + MB) min (đpcm)

Biện luận:

Bài toán có 1 nghiệm hình vì điểm A' dựng được là duy nhất.

Bài tập 11: Cho 2 đường thẳng b // c, điểm $A \notin$ b, c. Dựng ΔABC đều sao cho $B \in b$, $C \in c$.

Giải

Phân tích:

Giả sử ta dựng được ΔABC đều thoả mãn điều kiện của bài toán.

$B \in b$, $C \in c$.

Ta thực hiện phép quay theo chiều kim đồng hồ ta có:

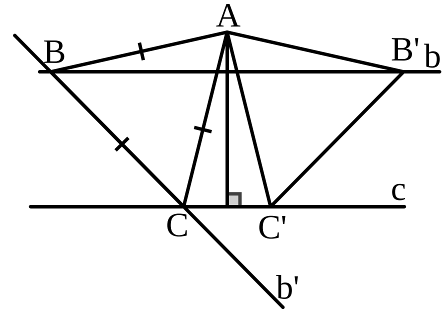
$r(A, 60^0)(B) = C$;

$r(A, 60^0)(b) = b'$

Mà $B \in b \Rightarrow C \in b'$.

Mặt khác: $C \in c$

$\Rightarrow c \cap b' = C$



Cách dựng:

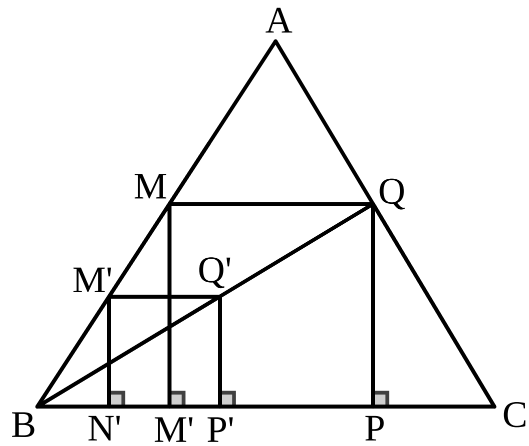
- Dựng đường thẳng
 $b' = r(A, 60^0)(b)$
- Dựng điểm C
 là giao điểm của b' và c
- Dựng điểm B bằng cách:
 $r(A, 60^0)(C) = B$

Chứng minh:
r(A, -60^0)(C) = B;   r(A, -60^0)(b') = b
Mà C $\in$ b' $\Rightarrow$ B $\in$ b $\Rightarrow$ (đpcm).
Biện luận:
Bài toán có 2 nghiệm hình

Bài tập 12: Cho ΔABC. Dựng hình vuông MNPQ sao cho M $\in$ AB; N,P $\in$ BC, Q $\in$ AC.

Giải

Phân tích:
Giả sử đã dựng được hình vuông MNPQ thoả mãn điều kiện của bài toán.
Nối B với Q và thực hiện phép vị tự: V(B, k = $\frac{BQ'}{BQ}$) (Q' $\in$ BQ): Q $\to$ Q'; M $\to$ M'; N $\to$ N'; P $\to$ P'



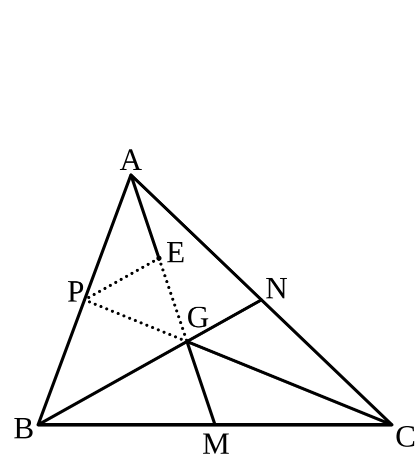
$$\frac{M'Q'}{MQ}=\frac{N'M'}{NM}=\frac{N'P'}{NP}=\frac{P'Q'}{PQ}$$
Mà MQ = MN = NP = PQ và NMQ = 90^0
$\Rightarrow$ M'Q' = M'N' = N'P' = P'Q'; N'M'Q' = 90^0
$\Rightarrow$ ™M'N'P'Q' là hình vuông.
Cách dựng:
- Lấy M' $\in$ AB, dựng M'N' $\perp$ BC
- Dựng hình vuông M'N'P'Q'
- Kẻ BQ' cắt AC tại Q
- Thực hiện phép vị tự:

V(B; k = $\frac{BQ'}{BQ}$) (Q') = Q; p' $\mapsto$ p; M' $\mapsto$ M; N' $\mapsto$ N ta dựng được hình vuông MNPQ cần dựng.
Chứng minh:
Theo cách dựng ta có: $\frac{MQ}{M'Q'}=\frac{NM}{N'M'}=\frac{NP}{N'P'}=\frac{PQ}{P'Q'}$ và tứ giác M'N'P'Q' là hình vuông;
$\widehat{N'M'P'}=90^0$.
$\Rightarrow$ MN = NP = PQ = MQ & NMP = 90^0
$\Rightarrow$ ◊MNPQ là hình vuông
Biện luận:
Bài toán có 1 nghiệm hình

Bài tập 13: Dựng tam giác biết độ dài ba đường trung tuyến.

Giải

Phân tích:



Giả sử ΔABC đã dựng xong và có trung tuyến:
AM = m_a, BN = m_b, CP = m_c.
Nhìn vào hình vẽ ta chưa thấy có yếu tố nào có thể dựng được, trừ các đoạn thẳng AM, BN, CP một cách riêng lẻ.
Và dĩ nhiên, nếu ta đã dựng, chẳng hạn AM thì có thể xác định thêm được G.
Tuy nhiên, nếu ta gọi E là trung điểm của AG thì do $PE=\frac{BG}{2}=\frac{BN}{3}$; $EG=\frac{AG}{2}=\frac{AM}{3}$ và $PG=\frac{CP}{3}$ (tính chất đường trung tuyến và tính chất đường trung bình) nên các cạnh của ΔPEG hoàn toàn xác định.
Khi đã xác định được ΔPEG, ta dễ dàng xác định được các điểm C, A, M và cuối cùng là B.

Từ đó suy ra cách dựng.

Cách dựng:

- Dựng ΔPEG có: $PE = \frac{m_b}{3}$; $PG = \frac{m_c}{3}$; $EG = \frac{m_a}{3}$.
- Nối dài PG về phía G, trên đó dựng C sao cho GC = 2GP;
- Nối dài GE về phía E, trên đó dựng A sao cho EA = EG;
- Nối dài EG về phía G, trên đó dựng M sao cho GM = GE;
- Nối AP và MC cắt nhau tại B.

ΔABC chính là tam giác cần dựng.

Chứng minh:

Theo cách dựng ở trên thì $AM = m_a$ và $CP = m_c$.

Cũng theo cách dựng và tính chất đường trung tuyến thì G chính là trọng ΔABC.

Do đó BG là đường trung tuyến.

Vì PE là đường trung bình trong tam giác ABG nên $BG = 2PE = \frac{2m_b}{3}$.

Suy ra đường trung tuyến kẻ từ B bằng m_b.

Như vậy ta có ΔABC có ba trung tuyến bằng với m_a, m_b, m_c.

Biện luận:

Bước dựng thứ nhất dựng được khi $\frac{m_a}{3}; \frac{m_b}{3}; \frac{m_c}{3}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Điều này tương đương với m_a, m_b, m_c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Các bước dựng tiếp theo đều thực hiện được một cách duy nhất.

Suy ra nếu độ dài 3 đoạn thẳng đã cho là độ dài 3 cạnh của một tam giác thì bài toán có 1 nghiệm hình.

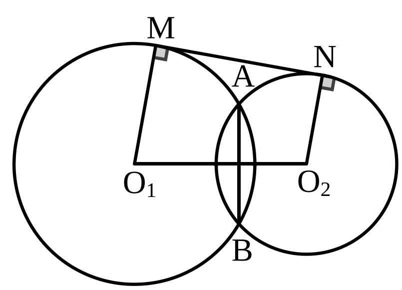
Trong trường hợp ngược lại bài toán vô nghiệm.

Ghi chú: Từ bài toán dựng hình nói trên, ta suy ra một kết quả thú vị sau: "Ba đường trung tuyến của tam giác ABC là độ dài 3 cạnh của một tam giác có diện tích bằng 3/4 diện tích tam giác ABC".

Bài tập 14: Cho hai đường tròn (C_1), (C_2) có bán kính $R_1 < R_2$ cắt nhau tại A và B. Hãy dựng tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Giải

Phân tích:



Giả sử tiếp tuyến chung tiếp xúc (C_1) tại M và (C_2) tại N.

Nối dài NM cắt đường thẳng O_1O_2 tại P.

Vì O_1M và O_2N đều vuông góc với MN nên chúng song song với nhau.

Theo định lý Talet ta có $\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{O_1M}{O_2N} = \frac{R_1}{R_2}$ nên từ đây ta dựng được điểm P.

Vì $PMO_1 = 90^0$ nên M nằm trên đường tròn đường kính PO_1.

Như vậy M là giao điểm của đường tròn đường kính PO_1 và (C_1).

Cách dựng:

- Dựng điểm P trên O_2 sao cho $\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{R_1}{R_2}$
- Dựng đường tròn đường kính PO_1;
- Đường tròn đường kính PO_1 cắt (C_1) tại M;
- Nối PM, đó là tiếp tuyến chung cần dựng.

Chứng minh:

Theo bước 2, 3 thì PM vuông góc với MO_1.

Suy ra PM là tiếp tuyến của (C_1).
Từ O_2 kẻ O_2N vuông góc với PM thì $O_2N//O_1M$.
Áp dụng định lý Talet ta có: $\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{O_1M}{O_2N}$.
Theo bước 1 thì ta có: $\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{R_1}{R_2}$.
Từ hai đẳng thức cuối, với chú ý $O_1M = R_1$, ta có $O_2N = R_2$, tức là điểm N nằm trên (C_2).
Suy ra PM tiếp xúc (C_2) tại N, tức là PM chính là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.
Biện luận: Bài toán luôn có 2 nghiệm hình (HS tự chứng minh).

3. Bài tập tự luyện:

Bài tập 1: Cho trước một đoạn thẳng có độ dài bằng 1, hãy dựng các đoạn thẳng có độ dài bằng
a) 2; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{1}{5}$; e) $\sqrt{2}$; f) $\sqrt{5}$; g) $\sqrt[4]{2}$

Bài tập 2: Dựng ΔABC có $\hat{A} = 52^0$, AB = 5cm, AC = 7 cm

Bài tập 3: Dựng ΔABC có $\hat{A}$ - 60^0, AB = 3cm, AC + BC = 7,5 cm.

Bài tập 4: Dựng ΔABC có $\hat{A} = 90^0$, phân giác AD = 10 cm, đường cao AH = 6 cm.

Bài tập 5: Dựng ΔABC có $\hat{A} = 60^0$, AB = 3cm, đường cao AH = 2cm.

Bài tập 6: Dựng tam giác biết b, a + c và C.
Phân tích: Giả sử ΔABC đã dựng được. Nối dài CB về phía B tới điểm D sao cho BD = BA. Khi đó tam giác ACD có góc C đã cho, AC = b và CD = a + c nên hoàn toàn xác định. Đỉnh B là đỉnh của tam giác cân BDA, do đó là giao điểm của trung trực đoạn AD với CD.

Bài tập 7: Cho hai đường thẳng a // b và một điểm C. Hãy dựng tam giác đều ABC có A nằm trên a và B nằm trên b.
Gợi ý: Hãy chọn một số điểm A tùy ý trên A rồi dựng tam giác đều ABC. Chú ý xem B sẽ vạch ra đường gì?

Bài tập 8: Dựng tam giác ABC biết độ dài đường trung tuyến, đường phân giác và đường cao kẻ từ đỉnh A.
Câu hỏi gợi ý: Đường phân giác góc A và đường trung trực cạnh BC cắt nhau ở đâu?

Bài tập 9: Cho tứ giác ABCD. Từ A hãy kẻ một đường thẳng chia đôi diện tích tam giác.
Câu hỏi gợi ý: Nếu tứ giác ABCD suy biến thành tam giác ABC thì vẽ như thế nào?

Bài tập 10: Dựng tam giác biết a, b và m_a.

Bài tập 11: Dựng tam giác có chu vi 2p, góc A và đường cao h_a.

Bài tập 12: Dựng tứ giác biết độ dài 4 cạnh liên tiếp và đoạn nối trung điểm hai đường chéo.

Bài tập 13: Cho biết $\cos(72^0) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Hãy nêu cách dựng ngũ giác đều cạnh bằng a cho trước.

Bài tập 14: Cho đường thẳng (d) và hai điểm A, B nằm cùng một phía đối với d. Hãy dựng đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với (d).

Bài tập 15: Nêu cách dựng trục đẳng phương của hai đường tròn trong các trường hợp sau
a) Hai đường tròn cắt nhau
b) Hai đường tròn ngoài nhau
c) Hai đường tròn chứa nhau

Bài tập 16: Cho tam giác ABC. Hãy nêu cách dựng đường thẳng chia tam giác thành 2 phần có diện tích và chu vi bằng nhau.

Bài tập 17: Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) và phương Δ. Dựng đoạn AB = a song song với Δ sao cho $A \in (O_1, R_1)$, $B \in (O_2, R_2)$.

Bài tập 18: Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) cùng đường thẳng d. Dựng hình vuông ABCD sao cho $A \in (O_1, R_1)$, $C \in (O_2, R_2)$; B, D $\in$ d.

Bài tập 19: Dựng một Δ đều sao cho diện tích của nó bằng diện tích một Δ cho trước

Bài tập 20: Cho hai điểm A, B nằm cùng phía với đường thẳng d. Dùng đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với d.

Bài tập 21: Cho hai điểm A, B $\notin$ đường thẳng d cho trước. Dựng đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng d.

Bài tập 22: Dựng hai đường thẳng đi qua A chia hình bình hành thành 3 phần bằng nhau về diện tích.

Bài tập 23: Cho ΔABC, dựng đường thẳng song song với BC chia ΔABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Bài tập 24: Cho đường tròn (O, R) và hai điểm A, B $\in$ (O, R) cùng một đoạn thẳng đã biết l. Dựng hai dây cung song song đi qua A và B sao cho tổng của chúng bằng l.

Bài tập 25: Cho điểm A ở ngoài (O, R).
Dựng cát tuyến đi qua A cắt (O, R) tại B và C sao cho AB = BC.

Bài tập 26: Cho đường tròn (O) và một dây cung AB cố định. Dựng Δ đều MNP thoả mãn: M & P $\in$ (O); N $\in$ AB và MN $\perp$ AB.

Bài tập 27: Cho hình vuông ABCD có giao điểm hai đường chéo là 0. hãy dựng ảnh của các điểm A, B, C, D trong phép quay tâm O một góc 45^0 ngược chiều kim đồng hồ.

Bài tập 28: Dựng một hình vuông nội tiếp một đường tròn bán kính R, dựng một lục giác và một tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R.

BÀI TẬP TỔNG HỢP KIẾN THỨC

Bài tập 1: Cho ΔABC có các đường cao BD và CE.Đường thẳng DE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại hai điểm M và N.

a) Chứng minh: Tứ giác BEDC nội tiếp.

b) Chứng minh: $\widehat{DEA} = \widehat{ACB}$.

c) Chứng minh: DE // với tiếp tuyến tai A của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

d) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh: OA là phân giác của góc MAN

e) Chứng tỏ: AM^2 = AE.AB.

Bài tập 2: Cho đường tròn (O), đường kính AC. Trên đoạn OC lấy điểm B và vẽ đường tròn (O'), đường kính BC. Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Từ M vẽ dây cung DE $\perp$ AB; DC cắt đường tròn (O') tại I.

a) Tứ giác ADBE là hình gì?

b) Chứng minh: Tứ giác DMBI nội tiếp.

c) Chứng minh: Ba điểm B; I; C thẳng hàng và MI = MD.

d) Chứng minh: MC.DB = MI.DC.

e) Chứng minh: MI là tiếp tuyến của đường tròn (O').

Bài tập 3: Cho ΔABC có góc A = 90^0. Trên AC lấy điểm M sao cho AM < MC. Vẽ đường tròn (O), đường kính CM. Đường thẳng BM cắt (O) tại D. Kéo dài AD cắt (O) tại S.

a) Chứng minh: Tứ giác BADC nội tiếp.

b) Kẻ BC cắt (O) tại E. Chứng minh rằng: MR là phân giác của $\widehat{AED}$.

c) Chứng minh: CA là phân giác của góc $\widehat{BCS}$.

Bài tập 4: Cho ΔABC có góc A = 90^0. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho AM>MC. Dựng đường tròn (O) đường kính MC. Đường tròn này cắt BC tại E. Đường thẳng BM cắt (O) tại D và đường thẳng AD cắt (O) tại S.

a) Chứng minh: Tứ giác ADCB nội tiếp.

b) Chứng minh: ME là phân giác của $\widehat{AED}$.

c) Chứng minh: Góc $\widehat{ASM} = \widehat{ACD}$.

d) Chứng tỏ ME là phân giác của $\widehat{AED}$.

e) Chứng minh: Ba đường thẳng BA; EM; CD đồng quy.

Bài tập 5: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn và AB < AC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Kẻ đường cao AD và đường kính AA'. Gọi E; F theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ B và C xuống đường kính AA'.

a) Chứng minh: Tứ giác AEDB nội tiếp.

b) Chứng minh: DB.A'A = AD.A'C.

c) Chứng minh: DE $\perp$ AC.

d) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh: MD = ME = MF.

Bài tập 6: Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC. Gọi E và F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến BC và AC. Gọi P là trung điểm AB; Q là trung điểm FE.

a) Chứng minh: Tứ giác MFEC nội tiếp.

b) Chứng minh: BM.EF = BA.EM.

c) Chứng minh: $\Delta AMP \backsim \Delta FMQ$.

d) Chứng minh: $\widehat{PQM} = 90^0$.

Bài tập 7: Cho (O) đường kính BC. Lấy điểm A bất kỳ nằm trên cung BC. Trên tia AC lấy điểm D sao cho AB = AD. Dựng hình vuông ABED; AE cắt (O) tại điểm thứ hai F. Tiếp tuyến tại B cắt đường thẳng DE tại G.

a) Chứng minh: Tứ giác BGDC nội tiếp. Xác định tâm I của đường tròn này.

b) Chứng minh: ΔBFC vuông cân và F là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

c) Chứng minh: Tứ giác GEFB nội tiếp.

d) Chứng tỏ: C; F; G thẳng hàng và G cũng nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔBCD. Có nhận xét gì về I và F?

Bài tập 8: Cho ΔABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn cắt nhau tại D. Từ D kẻ đường thẳng song song với AB, đường này cắt đường tròn ở E và F, cắt AC ở I (E nằm trên cung nhỏ BC).

a) Chứng minh: Tứ giác BDCO nội tiếp.

b) Chứng minh: DC^2 = DE.DF.

c) Chứng minh: Tứ giác DOIC nội tiếp.

d) Chứng tỏ I là trung điểm EF.

Bài tập 9: Cho đường tròn (O), có dây cung AB. Từ điểm M bất kỳ trên cung AB (M $\neq$ A và M $\neq$ B). Kẻ dây cung MN $\perp$ AB tại H. Gọi MQ là đường cao của tam giác MAN.

a) Chứng minh: 4 điểm A; M; H; Q cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh: NQ.NA = NH.NM.

c) Chứng minh: MN là phân giác của góc BMQ.

d) Hạ đoạn thẳng MP vuông góc với BN. Xác định vị trí của M trên cung AB để MQ.AN+MP.BN có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn

d) Xác định vị trí của M trên cung AB để MQ.AN + MP.BN có giá trị lớn nhất:

Ta có:

$$\begin{array}{r} 2S_{\Delta MAN} = MQ.AN \\ 2S_{\Delta MBN} = MP.BN \\ \hline 2S_{\Delta MAN} + 2S_{\Delta MBN} = MQ.AN + MP.BN \end{array}$$

Ta lại có:

$$2S_{\Delta MAN} + 2S_{\Delta MBN} = 2(S_{\Delta MAN} + S_{\Delta MBN}) = 2S_{AMBN} = 2.\frac{AB.MN}{2} = AB.MN.$$

Vậy: MQ.AN + MP.BN = AB.MN

Mà AB không đổi nên tích AB.MN lớn nhất $\Leftrightarrow$ MN lớn nhất $\Leftrightarrow$ MN là đường kính $\Leftrightarrow$ M là điểm chính giữa cung AB.

Bài tập 10: Cho đường tròn (O; R) và (I; r) tiếp xúc ngoài tại A (R > r). Dựng tiếp tuyến chung ngoài BC (B nằm trên đường tròn (O) và C nằm trên đường tròn (I)). Tiếp tuyến BC cắt tiếp tuyến tại A của hai đường tròn ở E.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông ở A.

b) Kẻ OE cắt AB ở N; IE cắt AC tại F.

Chứng minh: N; E; F; A cùng nằm trên một đường tròn.

c) Chứng tỏ rằng: $BC^2 = 4Rr$.

d) Tính diện tích tứ giác BCIO theo R; r.

Hướng dẫn

c) Chứng minh: $BC^2 = 4Rr$.

Ta có tứ giác FANE có 3 góc vuông (cmt)

$\Rightarrow$ FANE là hình vuông

$\Rightarrow$ ΔOEI vuông ở E và EA $\perp$ OI (tính chất tiếp tuyến).

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông có:

$AH^2 = OA.AI$ (bình phương đường cao bằng tích hai hình chiếu)

Mà $AH = \dfrac{BC}{2}$ và OA = R; AI = r $\Rightarrow \dfrac{BC^2}{4} = Rr \Rightarrow BC^2 = Rr$.

d) $S_{BCIO} = ?$

Ta có BCIO là hình thang vuông

$\Rightarrow S_{BCIO} = \dfrac{OB + IC}{2}.BC$

$\Rightarrow S = \dfrac{(r+R)\sqrt{rR}}{2}$.

Bài tập 11: Trên hai cạnh góc vuông xOy lấy hai điểm A và B sao cho OA = OB. Một đường thẳng qua A cắt OB tại M (M nằm trên đoạn OB). Từ B hạ đường vuông góc với AM tại H, cắt AO kéo dài tại I.

a) Chứng minh: Tứ giác OMHI nội tiếp.

b) Tính $\widehat{OMI}$.

c) Từ O vẽ đường vuông góc với BI tại K. Chứng minh: OK = KH.

d) Tìm tập hợp các điểm K khi M thay đổi trên OB.

Hướng dẫn

d) Tập hợp các điểm K:

Do OK $\perp$ KB

Suy ra: $\widehat{OKB} = 90^0$.

OB không đổi khi M di động $\Rightarrow$ K nằm trên đường tròn đường kính OB.

Khi M $\equiv$ O thì K $\equiv$ O.

Khi M $\equiv$ B thì K là điểm chính giữa cung AB.

Vậy quỹ tích điểm K là $\dfrac{1}{4}$ đường tròn đường kính OB.

Bài tập 12: Cho đường tròn (O) đường kính AB và dây CD vuông góc với AB tại F. Trên cung BC lấy điểm M. Nối A với M cắt CD tại E.

a) Chứng minh: AM là phân giác của góc CMD.

b) Chứng minh: Tứ giác EFBM nội tiếp.

c) Chứng tỏ: $AC^2 = AE.AM$.

d) Gọi giao điểm CB với AM là N; MD với AB là I. Chứng minh: NI // CD.

e) Chứng minh: N là tâm đường tròn nội tiếp ΔCIM

Hướng dẫn

e) Chứng tỏ N là tâm đường tròn nội tiếp ΔICM:

Ta phải chứng minh N là giao điểm 3 đường phân giác của ΔCIM.

Theo chứng minh, ta có MN là phân giác của $\widehat{CMI}$.

Do MNIB nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{NIM} = \widehat{NBM}$ (cùng chắn cung MN)

Góc $\widehat{MBC} = \widehat{MAC}$ (cùng chắn cung CM)

Ta lại có:

$\widehat{CAN} = 90^0$ (góc nội tiếp $\widehat{ACB} = 90^0$);

$\widehat{NIA} = 90^0$ (vì $\widehat{NIB} = 90^0$)

Suy ra: ACNI nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CAN} = \widehat{CIN}$ (cùng chắn cung CN)

$\Rightarrow \widehat{CIN} = \widehat{NIM}$

$\Rightarrow$ IN là phân giác $\widehat{CIM}$.

Vậy N là tâm đường tròn nội tiếp ΔICM.

Bài tập 13: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AB;AC và cát tuyến ADE. Gọi H là trung điểm DE.

a) Chứng minh: A; B; H; O; C cùng nằm trên 1 đường tròn.

b) Chứng minh: HA là phân giác của góc $\widehat{BHC}$.

c) Gọi I là giao điểm của BC và DE. Chứng minh: AB^2 = AI.AH.

d) Kẻ BH cắt (O) ở K. Chứng minh: AE//CK.

Bài tập 14: Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R; xy là tiếp tuyến với (O) tại B. CD là 1 đường kính bất kỳ. Gọi giao điểm của AC; AD với xy theo thứ tự là M; N.

a) Chứng minh: Tứ giác MCDN nội tiếp.

b) Chứng tỏ: AC.AM = AD.AN

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCDN và H là trung điểm MN. Chứng minh: AOIH là hình bình hành.

d) Khi đường kính CD quay xung quanh điểm O thì I di động trên đường nào?

Hướng dẫn

d) Quỹ tích điểm I:

Do AOIH là hình bình hành.

Suy ra: IH = AO = R không đổi

$\Rightarrow$ CD quay xung quanh O thì I nằm trên đường thẳng song song với xy và cách xy một khoảng bằng R.

Bài tập 15: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi D là 1 điểm trên cung nhỏ BC. Kẻ DE; DF; DG lần lượt vuông góc với các cạnh AB; BC; AC. Gọi H là hình chiếu của D lên tiếp tuyến Ax của (O).

a) Chứng minh: Tứ giác AHED nội tiếp.

b) Gọi giao điểm của AH với HB và với (O) là P và Q; ED cắt (O) tại M.

Chứng minh: HA.DP = PA.DE.

c) Chứng minh: QM = AB.

d) Chứng minh: DE.DG = DF.DH.

e) Chứng minh: E; F; G thẳng hàng. (đường thẳng Sim sơn)

Hướng dẫn

e) Chứng minh: E; F; G thẳng hàng:

Ta có: $\widehat{BFE} = \widehat{BDE}$ (cmt) và $\widehat{GFC} = \widehat{CDG}$ (cmt)

Do ABCD nội tiếp.

Suy ra: $\widehat{BAC} = \widehat{BMC} = 180^0$

Do GDEA nội tiếp

Suy ra: $\widehat{EDG} + \widehat{EAG} = 180^0$.

$\Rightarrow \widehat{EDG} = \widehat{BDC}$

Mà $\widehat{EDG} = \widehat{EDB} + \widehat{BDG}$ và $\widehat{BCD} = \widehat{BDG} + \widehat{CDG}$

$\Rightarrow \widehat{EDB} = \widehat{CDG}$

$\Rightarrow \widehat{GFC} = \widehat{BEF}$

Vậy E; F; G thẳng hàng.

Bài tập 16: Cho tam giác ABC có A = 90^0; AB < AC. Gọi I là trung điểm BC. Qua I kẻ IK⊥BC (K nằm trên BC). Trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho MA = AK.

a) Chứng minh: Tứ giác ABIK nội tiếp được trong đường tròn (O).

b) Chứng minh: $\widehat{BMC} = 2\widehat{ACB}$.

c) Chứng tỏ rằng: BC^2 = 2AC.KC.

d) Kéo dài AI cắt đường thẳng BM tại N. Chứng minh AC = BN.

e) Chứng minh: Tứ giác NMIC nội tiếp.

Bài tập 17: Cho (O) đường kính AB cố định. Điểm C di động trên nửa đường tròn. Tia phân giác của $\widehat{ACB}$ cắt (O) tai M. Gọi H; K là hình chiếu của M lên AC và AB.

a) Chứng minh: Tứ giác MOBK nội tiếp.

b) Chứng minh: Tứ giác CKMH là hình vuông.

c) Chứng minh: Ba điểm H; O; K thẳng hàng.

d) Gọi giao điểm HK và CM là I. Khi C di động trên nửa đường tròn thì I chạy trên đường nào?

Hướng dẫn

c) Chứng minh: Ba điểm H, O, K thẳng hàng.

Gọi I là giao điểm HK và MC.

Do MHCK là hình vuông

$\Rightarrow$ HK $\perp$ MC tại trung điểm I của MC.

Do I là trung điểm MC

$\Rightarrow$ OI $\perp$ MC (t/c đường kính và dây cung)

Vậy HI $\perp$ MC; OI $\perp$ MC và KI $\perp$ MC

Suy ra: H; O;I thẳng hàng.

d) Do $\widehat{OIM} = 90^0$; OM cố định

Suy ra: I nằm trên đường tròn đường kính OM.

Giới hạn:

Khi C ≡ B thì I ≡ Q;

Khi C ≡ A thì I ≡ P.

Vậy khi C di động trên nửa đường tròn (O) thì I chạy trên cung tròn PHQ của đường tròn đường kính OM.

Bài tập 18: Cho hình chữ nhật ABCD có chiều dài AB = 2a, chiều rộng BC = a. Kẻ tia phân giác của $\widehat{ACD}$. Từ A hạ AH vuông góc với đường phân giác nói trên.

a) Chứng minh: Tứ giác AHDC nội tiếp trong đường tròn (O). Khi đó xác định tâm và bán kính của đường tròn theo a.

b) Kẻ HB cắt AD tại I và cắt AC tại M; HC cắt DB tại N.

Chứng tỏ rằng: HB = HC và AB.AC = BH.BI.

c) Chứng tỏ MN song song với tiếp tuyến tại H của (O)

d) Từ D kẻ đường thẳng song song với BH; đường này cắt HC ở K và cắt (O) ở J.

Chứng minh: Tứ giác HOKD nội tiếp.

Bài tập 19: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, bán kính OC $\perp$ AB. Gọi M là 1 điểm trên cung BC. Kẻ đường cao CH của ΔACM.

a) Chứng minh: Tứ giác AOHC nội tiếp.

b) Chứng tỏ ΔCHM vuông cân và OH là phân giác của $\widehat{COM}$.

c) Gọi giao điểm của OH với BC là I. MI cắt (O) tại D. Chứng minh rằng: Tứ giác CDBM là hình thang cân.
d) Kẻ BM cắt OH tại N. Chứng minh: $\Delta BNI \backsim \Delta AMC$. Từ đó suy ra: BN.MC = IN.MA.

Bài tập 20: Cho ΔABC đều nội tiếp trong (O; R). Trên cạnh AB và AC lấy hai điểm M; N sao cho BM = AN.
a) Chứng tỏ rằng: ΔOMN cân.
b) Chứng minh: Tứ giác OMAN nội tiếp.
c) Kéo dài BO cắt AC tại D và cắt (O) ở E. Chứng minh: $BC^2 + DC^2 = 3R^2$.
d) Đường thẳng CE và AB cắt nhau ở F. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt FC tại I; AO kéo dài cắt BC tại J. Chứng minh: BI đi qua trung điểm của AJ.

Hướng dẫn

c) Chứng minh: $BC^2 + DC^2 = 3R^2$.
Do BO là phân giác của Δ đều
$\Rightarrow BO \perp AC$ hay ΔBOD vuông ở D.
Áp dụng định lý Pi-ta-go, ta có:
$BC^2 = DB^2 + CD^2 = (BO + OD)^2 + CD^2 = BO^2 + 2.OB.OD + OD^2 + CD^2$. (1)
Mà OB = R.
ΔAOC cân ở O có $\widehat{OAC} = 30^0$.
$\Rightarrow \widehat{AOC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{AOE} = 60^0$
$\Rightarrow$ ΔAOE là tam giác đều, có $AD \perp OE \Rightarrow OD = ED = \frac{R}{2}$
Áp dụng định lý Pi-ta-go, ta có: $OD^2 = OC^2 - CD^2 = R^2 - CD^2$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra: $BC^2 = R^2 + 2.R.\frac{R}{2} + CD^2 - CD^2 = 3R^2$.

Bài tập 21: Cho ΔABC, ($A = 90^0$) nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi M là trung điểm cạnh AC. Đường tròn (I) đường kính MC cắt cạnh BC ở N và cắt (O) tại D.
a) Chứng minh: Tứ giác ABNM nội tiếp và CN.AB = AC.MN.
b) Chứng tỏ rằng: B, M, D thẳng hàng và OM là tiếp tuyến của (I).
c) Tia IO cắt đường thẳng AB tại E. Chứng minh: Tứ giác BMOE là hình bình hành.
d) Chứng minh: NM là phân giác của $\widehat{AND}$.

Bài tập 22: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Gọi I là điểm bất kỳ trên đường chéo AC. Qua I kẻ các đường thẳng song song với AB; BC. Các đường này cắt AB; BC; CD; DA lần lượt ở P; Q; N; M.
a) Chứng minh: Tứ giác INCQ là hình vuông.
b) Chứng tỏ rằng: NQ // DB.
c) Kéo dài BI cắt MN tại E; MP cắt AC tại F. Chứng minh: Tứ giác MFIN nội tiếp được trong đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.
d) Chứng tỏ tứ giác MPQN nội tiếp. Tính diện tích của nó theo a.
e) Chứng minh: Tứ giác MFIE nội tiếp.

Bài tập 23: Cho hình vuông ABCD. Gọi N là trung điểm DC; Kẻ BN cắt AC tại F. Vẽ đường tròn (O) đường kính BN. (O) cắt AC tại E. Kéo dài BE cắt AD ở M; MN cắt (O) tại I.
a) Chứng minh: Tứ giác MDNE nội tiếp.
b) Chứng tỏ rằng: ΔBEN vuông cân.
c) Chứng minh: MF đi qua trực tâm H của ΔBMN.
d) Chứng minh: BI = BC và ΔIEF vuông.
e) Chứng minh: ΔFIE là tam giác vuông.

Bài tập 24: Cho ΔABC có 3 góc nhọn(AB < AC). Vẽ đường cao AH. Từ H kẻ HK; HM lần lượt vuông góc với AB; AC. Gọi J là giao điểm của AH và MK.

a) Chứng minh: Tứ giác AMHK nội tiếp.
b) Chứng minh: JA.JH = JK.JM
c) Từ C kẻ tia Cx ⊥ AC và Cx cắt AH kéo dài ở D. Vẽ HI ⊥ DB và HN ⊥ DC. Chứng minh rằng: $\widehat{HKM} = \widehat{HCN}$.
d) Chứng minh: M; N; I; K cùng nằm trên một đường tròn.

Bài tập 25: Cho ΔABC (A = 90^0). Đường cao AH. Đường tròn tâm H, bán kính HA cắt đường thẳng AB tại D và cắt AC tại E; Trung tuyến AM của ΔABC cắt DE tại I.
a) Chứng minh: D; H; E thẳng hàng.
b) Chứng minh: Tứ giác BDCE nội tiếp. Xác định tâm O của đường tròn này.
c) Chứng minh: AM ⊥ DE.
d) Chứng minh: Tứ giác AHOM là hình bình hành.

Bài tập 26: Cho ΔABC có 2 góc nhọn. Đường cao AH. Gọi K là điểm đối xứng của H qua AB; I là điểm đối xứng của H qua AC. Gọi E; F là giao điểm của KI với AB và AC.
a) Chứng minh: Tứ giác AICH nội tiếp.
b) Chứng minh: AI = AK.
c) Chứng minh: Các điểm A; E; H; C; I cùng nằm trên một đường tròn.
d) Chứng minh: CE; BF là các đường cao của ΔABC.
e) Chứng tỏ giao điểm 3 đường phân giác của ΔHFE chính là trực tâm của ΔABC.

Bài tập 27: Cho ΔABC, (AB = AC) nội tiếp trong (O). Gọi M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC. Trên tia BM lấy MK = MC và trên tia BA lấy AD = AC.
a) Chứng minh: $\widehat{BAC} = 2\widehat{BKC}$.
b) Chứng minh: Tứ giác BCKD nội tiếp. Xác định tâm của đường tròn này.
c) Gọi giao điểm của DC với (O) là I. Chứng minh: B; O; I thẳng hàng.
d) Chứng minh: DI = BI.

Bài tập 28: Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong(O). Gọi I là điểm chính giữa cung AB (cung AB không chứa điểm C; D). IC và ID cắt AB ở M; N.
a) Chứng minh: D; M; N; C cùng nằm trên một đường tròn.
b) Chứng minh: NA.NB = NI.NC.
c) Kéo dài DI cắt đường thẳng BC ở F; đường thẳng IC cắt đường thẳng AD ở E.
Chứng minh: EF // AB.
d) Chứng minh: IA^2 = IM.ID.

Bài tập 29: Cho hình vuông ABCD, trên cạh BC lấ để E. Dựng tia Ax ⊥ AE, Ax cắt cạnh CD kéo dài tại F. Kẻ trung tuyến AI của ΔAEF. Kéo dài AIcắt CD tại K. Qua E dựng đường thẳng song song với AB, cắt AI tại G.
a) Chứng minh: Tứ giác AECF nội tiếp.
b) Chứng minh: AF^2 = KF.CF.
c) Chứng minh: Tứ giác EGFK là hình thoi.
d) Chứng minh rằng: Khi E di động trên BC thì EK = BE + DK và chu vi ΔCKE có giá trị không đổi.
e) Gọi giao điểm của EF với AD là J. Chứng minh: GJ ⊥ JK.

Hướng dẫn

d) Chứng minh: EK = BE + DK.
Xét ΔADF và ΔABE có:
AD = AB;
AF = AE (ΔAEF vuông cân)
⇒ ΔADF = ΔABE
⇒ BE = DF
Mà FD + DK = FK và FK = KE (t/c hình thoi)
⇒ KE = BE + DK.

Chứng minh chu vi ΔCKE không đổi:
Gọi chu vi là **C** = KC + EC + KE = KC + EC + BE + DK = (KC + DK) + (BE + EC) = 2BC không đổi.
e) Chứng minh: IJ ⊥ JK.
Do $\widehat{JIK} = \widehat{JDK} = 90^0$
⇒ Tứ giác IJDK nội tiếp
⇒ $\widehat{JIK} = \widehat{IDK}$ (cùng chắn cung IK),
$\widehat{IDK} = 45^0$ (t/c hình vuông)
⇒ $\widehat{JIK} = 45^0$ ⇒ ΔJIK vuông cân ở I
⇒ JI = IK, mà IK = GI
⇒ JI = IK = GI = $\frac{1}{2}$GK
⇒ ΔGJK vuông ở J hay GJ ⊥ JK.

Bài tập 30: Cho ΔABC. Gọi H là trực tâm của tam giác. Dựng hình bình hành BHCD. Gọi I là giao điểm của HD và BC.
a) Chứng minh: Tứ giác ABDC nội tiếp trong đường tròn tâm O, nêu cách dựng (O).
b) So sánh $\widehat{BAH}$ và $\widehat{OAC}$.
c) Kẻ CH cắt OD tại E. Chứng minh: AB.AE = AH.AC.
d) Gọi giao điểm của AI và OH là G. Chứng minh: G là trọng tâm của ΔABC.

Bài tập 31: Cho đường tròn (O) và $\overset{\frown}{AB} = 90^0$. C là một để tuỳ ý trên cung lớn AB. Các đường cao AI; BK; CJ của ΔABC cắt nhau ở H. Kẻ BK cắt (O) ở N; AH cắt (O) tại M. BM và AN gặp nhau ở D.
a) Chứng minh: B; K; C; J cùng nằm trên một đường tròn.
b) Chứng minh: BI.KC = HI.KB.
c) Chứng minh: MN là đường kính của đường tròn (O).
d) Chứng minh: Tứ giác ACBD là hình bình hành.
e) Chứng minh: OC // DH.

Bài tập 32: Cho hình vuông ABCD. Gọi N là một để bất kỳ trên CD sao cho CN < ND; Vẽ đường tròn tâm O đường kính BN. Đường tròn (O) cắt AC tại F; BF cắt AD tại M; BN cắt AC tại E.
a) Chứng minh: ΔBFN vuông cân.
b) Chứng minh: MEBA nội tiếp.
c) Gọi giao điểm của ME và NF là Q. Kẻ MN cắt (O) ở P.
Chứng minh: B; Q; P thẳng hàng.
d) Chứng tỏ: ME // PC và BP = BC.
e) Chứng minh: ΔFPE là tam giác vuông.

Bài tập 33: Trên đường tròn tâm O lần lượt lấy bốn để A; B; C; D sao cho AB = DB.AB và CD cắt nhau ởc E. Kẻ BC cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) ở Q; DB cắt AC tại K.
a) Chứng minh: CB là phân giác của $\widehat{ACE}$.
b) Chứng minh: Tứ giác AQEC nội tiếp.
c) Chứng minh: KA.KC = KB.KD.
d) Chứng minh: QE // AD.

Bài tập 34: Cho (O) và tiếp tuyến Ax. Trên Ax lấy hai để B và C sao cho AB = BC. Kẻ cát tuyến BEF với đường tròn. Kẻ CE và CF cắt (O) lần lượt ở M và N. Dựng hình bình hành AECD.
a) Chứng minh: D nằm trên đường thẳng BF.
b) Chứng minh: Tứ giác ADCF nội tiếp.
c) Chứng minh: CF.CN = CE.CM.
d) Chứng minh: MN // AC.

e) Gọi giao điểm của AF với MN là I. Chứng minh rằng: DF đi qua trung điểm của NI.

Bài tập 35: Cho (O; R) và đường kính AB; CD vuông góc với nhau. Gọi M là một điểm trên cung nhỏ CB.

a) Chứng minh: Tứ giác ACBD là hình vuông.

b) Kẻ AM cắt CD; CB lần lượt ở P và I. Gọi J là giao điểm của DM và AB.

Chứng minh: IB.IC = IA.IM.

c) Chứng tỏ rằng: IJ // PD và IJ là phân giác của $\widehat{CJM}$.

d) Tính diện tích ΔAID theo R.

Hướng dẫn

d) Tính diện tích ΔAID theo R:

$\Rightarrow S_{IAD} = S_{CAD}$.

Mà $S_{ACD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

$\Rightarrow S_{IAD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.S_{ABCD} = \frac{1}{2}$ AB.CD (diện tích có 2 đường chéo vuông góc)

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} 2R.2R = 2R^2$

$\Rightarrow S_{IAD} = R^{b)}$

Bài tập 36: Cho (O; R). Một cát tuyến xy cắt (O) ở E và F. Trên xy lấy điểm A nằm ngoài đoạn EF. Vẽ 2 tiếp tuyến AB và AC với (O). Gọi H là trung để EF.

a) Chứng tỏ 5 điểm: A; B; C; O; H cùng nằm trên một đường tròn.

b) Đường thẳng BC cắt OA ở I và cắt đường thẳng OH ở K. Chứng minh: OI.OA = OH.OK = R^2.

c) Khi A di động trên xy thì I di động trên đường nào?

d) Chứng minh: KE và KF là hai tiếp tuyến của (O).

Bài tập 37: Cho ΔABC ($A = 90^0$); AB = 15; AC = 20 (cùng đơn vị đo độ dài). Dựng đường tròn tâm O đường kính AB và đường tròn (O') đường kính AC. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại điểm thứ hai D.

a) Chứng tỏ D nằm trên BC.

b) Gọi M là để chính giữa cung nhỏ DC. AM cắt DC ở E và cắt (O) ở N.

Chứng minh: DE.AC = AE.MC

c) Chứng minh: AN = NE và O; N; O' thẳng hàng.

d) Gọi I là trung để MN. Chứng minh: $\widehat{OIO'} = 90^0$.

e) Tính diện tích ΔAMC.

Hướng dẫn

c) Chứng minh: AN = NE.

Do BA ⊥ AO'(ΔABC vuông ở A)

⇒ BA là tiếp tuyến của (O')

$\Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AE} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AM}$

Sđ$\overset{\frown}{ED}$ = sđ$\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{MC} + \overset{\frown}{AD}\right)$

Mà $\overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{DM} \Rightarrow \overset{\frown}{MC} + \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AM}$

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{BAC}$

⇒ ΔBAE cân ở B, mà BM ⊥ AE

⇒ NA = NE.

Chứng minh: O; N; O' thẳng hàng:

Ta có: ON là đường trung bình của ΔABE

$\Rightarrow$ ON // BE và OO' // BE

$\Rightarrow$ O, N, O' thẳng hàng.

Bài tập 38: Cho ΔABC đều, có cạnh bằng a. Gọi D là giao điểm hai đường phân giác góc A và góc B của ΔABC. Từ D dựng tia $Dx \perp DB$. Trên Dx lấy điểm E sao cho ED = DB (D và E nằm hai phía của đường thẳng AB). Từ E kẻ $EF \perp BC$. Gọi O là trung điểm của EB.

a) Chứng minh: Tứ giác AEBC và EDFB nội tiếp. Xác định tâm và bán kính của các đường tròn ngoại tiếp các tứ giác trên theo a.

b) Kéo dài FE về phía F, cắt (D) tại M. Kẻ EC cắt (O) ở N.

Chứng minh: Tứ giác EBMC là thang cân. Tính diện tích.

c) Chứng minh: EC là phân giác của $\widehat{DAC}$.

d) Chứng minh: FD là đường trung trực của MB.

e) Chứng tỏ A; D; N thẳng hàng.

f) Tính diện tích phần mặt trăng được tạo bởi cung nhỏ EB của hai đường tròn.

Hướng dẫn

e) Chứng minh: A; N; D thẳng hàng:

Ta có: $\widehat{BND} = \widehat{BED} = 45^0$ (cùng chắn $\overset{\frown}{DB}$) và $\widehat{ENB} = 90^o$ (cmt); $\widehat{ENA}$ là góc ngoài ΔANC

$\Rightarrow \widehat{ENA} = \widehat{NAC} + \widehat{CAN} = 45^0$

$\Rightarrow \widehat{ENA} + \widehat{ENB} + \widehat{BND} = 180^0$

$\Rightarrow$ A, N, D thẳng hàng.

f) Gọi diện tích mặt trăng cần tính là S.

Ta có: S = $S_{\text{nửa (O)}}$ - $S_{\text{viên phân EDB}}$

$S_{(O)} = \pi.OE^2 = \pi.\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{a^2\pi}{6}$

$\Rightarrow S_{\frac{1}{2}(O)} = \frac{a^2\pi}{12}$

$S_{\text{quạt EBD}} = \frac{\pi.BD^2.90^o}{360^o} = \frac{\pi}{4}.\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{a^2\pi}{12}$

$S_{\Delta EBD} = \frac{1}{2}DB^2 = \frac{a^2}{6}$

$S_{\text{viên phân}} = S_{\text{quạt EBD}} - S_{\Delta EDB} = \frac{a^2\pi}{12} - \frac{a^2}{6} = \frac{a^2(\pi-2)}{12}$

$S = \frac{a^2\pi}{12} - \frac{a^2(\pi-2)}{12} = \frac{a^2}{6}$.

Bài tập 39: Cho hình vuông ABCD, E là một điểm thuộc cạnh BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE, đường này cắt các đường thẳng DE và DC theo thứ tự ở H và K.

a) Chứng minh: Tứ giác BHCD nội tiếp.

b) Tính $\widehat{CHK}$.

c) Chứng minh: KC.KD = KH.KB.

d) Khi E di động trên BC thì H di động trên đường nào?

Hướng dẫn

d) Do $\widehat{BHD} = 90^0$ không đổi

Suy ra: E di chuyển trên BC thì H di động trên đường tròn đường kính DB.

Bài tập 40: Cho đường tròn (O;R) đường kính AB. Gọi C là điểm bất kỳ thuộc đường tròn đó (C $\neq$ A và B). Hai điểm M, N lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ AC và BC. Các đường thẳng BN và AC cắt nhau tại I, các dây cung AN và BC cắt nhau ở P.
a) Chứng minh: Tứ giác ICPN nội tiếp. Xác định tâm K của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.
b) Chứng minh: KN là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).
c) Chứng minh rằng khi C di động trên đường tròn (O; R) thì đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Hướng dẫn

c) Chứng minh rằng khi C di động trên đường tròn (O) thì đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định:

Ta có $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MC}$ (gt) nên $\widehat{AOM} = \widehat{MOC}$.

Vậy OM là phân giác của $\widehat{AOC}$.

Tương tự ON là phân giác của $\widehat{COB}$, mà $\widehat{AOC}$ và $\widehat{COB}$ kề bù nên $\widehat{MON} = 90^0$.
Vậy tam giác MON vuông cân ở O.

Kẻ OH $\perp$ MN, ta có OH = OM.sinM = R. $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ không đổi.

Vậy khi C di động trên đường tròn (O) thì đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định $\left(O;\ \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$.

Bài tập 41: Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB. Trên đường tròn (O; R) lấy điểm M sao cho $\widehat{MAB} = 60^0$. Vẽ đường tròn (B; BM) cắt đường tròn (O; R) tại điểm thứ hai là N.
a) Chứng minh AM và AN là các tiếp tuyến của đường tròn (B; BM).
b) Kẻ các đường kính MI của đường tròn (O; R) và MJ của đường tròn (B; BM). Chứng minh N, I và J thẳng hàng và JI.JN = $6R^2$
c) Tính phần diện tích của hình tròn (B; BM) nằm bên ngoài đường tròn (O; R) theo R.

Hướng dẫn

b) Chứng minh: N; I; J thẳng hàng và JI.JN = $6R^2$.
$\widehat{MNI} = \widehat{MNJ} = 90^0$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O và tâm B).
Nên $IN \perp MN$ và $JN \perp MN$.
Vậy ba điểm N; I và J thẳng hàng.
ΔMJI có BO là đường trung bình nên IJ = 2BO = 2R.
ΔAMO cân ở O (vì OM = OA), $\widehat{MAO} = 60^0$ nên ΔMAO đều.
AB $\perp$ MN tại H (tính chất dây chung của hai đường tròn (O) và (B) cắt nhau).

Nên OH = $\frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}R$.

Vậy HB = HO + OB = $\frac{R}{2} + R = \frac{3R}{2}$

$\Rightarrow NJ = 2.\frac{3R}{2} = 3R$.

Vậy JI.JN = 2R.3R = $6R^2$.
c) Tính diện tích phần hình tròn (B; BM) nằm ngoài đường tròn (O; R) theo R:
Gọi S là diện tích phần hình tròn nằm (B; BM) nằm bên ngoài hình tròn (O; R).
S_1 là diện tích hình tròn tâm (B; BM).
S_2 là diện tích hình quạt MBN.
S_3, S_4 là diện tích hai viên phân cung MB và NB của đường tròn (O; R).
Ta có : $S = S_1 - (S_2 + S_3 + S_4)$.

Tính S_1: $\widehat{MAB} = 60^0 \Rightarrow \widehat{MB} = 120^0$

$\Rightarrow MB = R\sqrt{3}$.

Vậy: $S_1 = \pi\left(R\sqrt{3}\right)^2 = 3\pi R^2$.

Tính S_2:

$$\widehat{MBN} = 60^0 \Rightarrow S_2 = \frac{\pi\left(R\sqrt{3}\right)^2 60^0}{360^0} = \frac{\pi R^2}{2}$$

Tính S_3: $S_3 = S_{\text{quạt MOB}} - S_{MOB}$.

$$\widehat{MOB} = 120^0 \Rightarrow S_{\text{quạt MOB}} = \frac{\pi R^2.120^0}{360^0} = \frac{\pi R^2}{3}.$$

$$OA = OB \Rightarrow S_{MOB} = \frac{1}{2}S_{AMB} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.AM.MB = \frac{1}{4}R.R\sqrt{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

Vậy $S_3 = \dfrac{\pi R^2}{3} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = S_4$ (do tính chất đối xứng).

Từ đó $S = S_1 - (S_2 + 2S_3) = 3\pi R^2 - \left(\dfrac{\pi R^2}{2} + \dfrac{2\pi R^2}{3} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{11\pi R^2 + 3R^2\sqrt{3}}{6}$ (đvdt).

Bài tập 42: Cho ba điểm A, B, C nằm trên đường thẳng xy theo thứ tự đó. Vẽ đường tròn (O) đi qua B và C. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AM và AN. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BC và MN.

a) Chứng minh $AM^2 = AN^2 = AB.\ AC$

b) Đường thẳng ME cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh IN // AB

c) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF nằm trên một đường thẳng cố định khi đường tròn (O) thay đổi.

Bài tập 43: Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R và dây MN có độ dài bằng bán kính (M thuộc cung AN). Các tia AM và BN cắt nhau ở I. Các dây AN và BM cắt nhau ở K.

a) Tính $\widehat{MIN}$ và $\widehat{AKB}$.

b) Tìm quỹ tích điểm I và quỹ tích điểm K khi dây MN thay đổi vị trí .

c) Chứng minh I là trực tâm của tam giác KAB .

d) AB và IK cắt nhau tại H . Chứng minh HA.HB = HI.HK .

e) Với vị trí nào của dây MN thì tam giác IAB có diện tích lớn nhất? Tính giá trị diện tích lớn nhất đó theo R.

Bài tập 44: Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax , By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

a) Chứng minh AC + BD = CD.

b) Chứng minh: $\widehat{COD} = 90^0$.

c) Chứng minh: $AC.BD = \dfrac{AB^2}{4}$.

d) Chứng minh: OC // BM

e) Chứng minh: AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

f) Chứng minh: $MN \perp AB$.

g) Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

g) Ta có:

Chu vi tứ giác: ACDB = AB + AC + CD + BD.

Mà AC + BD = CD.

Suy ra chu vi tứ giác ACDB = AB + 2CD.

Mà AB không đổi nên chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất.
Và CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữ Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By.
Khi đó CD // AB.
Suy ra: M phải là trung điểm của cung AB.

Bài tập 45: Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP. Kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$. Gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh: Tứ giác AMBO nội tiếp.
b) Chứng minh: Năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .
c) Chứng minh: $OI.OM = R^2$; $OI.\ IM = IA^2$.
d) Chứng minh: Tứ giác OAHB là hình thoi.
e) Chứng minh: Ba điểm O, H, M thẳng hàng.
f) Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d.

Hướng dẫn

e) Theo trên OAHB là hình thoi.
Suy ra: $OH \perp AB$; cũng theo trên $OM \perp AB$
Suy ra: O, H, M thẳng hàng (vì qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).
f) Theo trên OAHB là hình thoi.
Suy ra: AH = AO = R.
Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R. Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính AH = R.

Bài tập 46: Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax , By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

a) Chứng minh: AC + BD = CD.
b) Chứng minh: $\widehat{COD} = 90^0$.
c) Chứng minh: AC. BD = $\dfrac{AB^2}{4}$.
d) Chứng minh: OC // BM
e) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.
e) Chứng minh: $MN \perp AB$.
f) Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

f) Ta có chu vi tứ giác ACDB = AB + AC + CD + BD mà AC + BD = CD.
Suy ra chu vi tứ giác ACDB = AB + 2CD mà AB không đổi.
Chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất.
Mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữ Ax và By, tức là CD vuông góc với Ax và By.
Khi đó CD // AB $\Rightarrow$ M phải là trung điểm của cung AB.

Bài tập 47: Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP. Gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$. Gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp.
b) Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .
c) Chứng minh: $OI.OM = R^2$; $OI.\ IM = IA^2$.
d) Chứng minh OAHB là hình thoi.
e) Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.

f) Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d

Hướng dẫn

e) Theo trên OAHB là hình thoi. Suy ra: OH $\perp$ AB; cũng theo trên OM $\perp$ AB.
Suy ra: O, H, M thẳng hàng (vì qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).
f) Theo trên OAHB là hình thoi. Suy ra: AH = AO = R.
Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R. Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính AH = R.

Bài tập 48: Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho AP > R. Từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.
a) Chứng minh rằng tứ giác APMO nội tiếp được một đường tròn.
b) Chứng minh BM // OP.
c) Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác OBNP là hình bình hành.
d) Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Hướng dẫn

d) Tứ giác OBNP là hình bình hành.
Suy ra: PN // OB hay PJ // AB.
Mà ON $\perp$ AB $\Rightarrow$ ON $\perp$ PJ.
Ta cũng có PM $\perp$ OJ (PM là tiếp tuyến).
Mà ON và PM cắt nhau tại I nên I là trực tâm tam giác POJ.
Dễ thấy tứ giác AONP là hình chữ nhật.
Vì có $\widehat{PAO} = \widehat{AON} = \widehat{ONP} = 90^0$.
Suy ra: K là trung điểm của PO (tính chất đường chéo hình chữ nhật). (6)
Ta có: AONP là hình chữ nhật $\Rightarrow$ $\widehat{APO} = \widehat{NOP}$ (so le) (7)
Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì:
PO là tia phân giác của góc $\widehat{APM} \Rightarrow \widehat{APO} = \widehat{MPO}$ (8)
Từ (7) và (8) $\Rightarrow$ ΔIPO cân tại I có IK là trung tuyến đông thời là đường cao.
Suy ra: IK $\perp$ PO. (9)
Từ (6) và (9) $\Rightarrow$ I, J, K thẳng hàng.

Bài tập 49: Cho đường tròn (O) bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (M khác O). CM cắt (O) tại N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ở P. Chứng minh :
a) Tứ giác OMNP nội tiếp.
b) Tứ giác CMPO là hình bình hành.
c) CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.
d) Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên đoạn thẳng cố định nào.

Hướng dẫn

d) Dễ thấy ΔOMC = ΔDPO (c.g.c).
Suy ra: $\widehat{ODP} = 90^0$.
Suy ra: P chạy trên đường thẳng cố định vuông góc với CD tại D.
Vì M chỉ chạy trên đoạn thẳng AB nên P chỉ chạy trên doạn thẳng A'B' song song và bằng AB.

Bài tập 50: Cho ΔABC vuông ở A.và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại F, G.
a) Chứng minh: $\Delta ABC \backsim \Delta EBD$.
b) Chứng minh: Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp .
c) Chứng minh: AC // FG.
d) Chứng minh: Các đường thẳng AC, DE, FB đồng quy.

Hướng dẫn

d) Dễ thấy CA, DE, BF là ba đường cao của ΔDBC nên CA, DE, BF đồng quy tại S.

Bài tập 51: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H bất kì (H không trùng O, B); trên đường thẳng vuông góc với OB tại H, lấy một điểm M ở ngoài đường tròn; MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) tại C và D. Gọi I là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh MCID là tứ giác nội tiếp .

b) Chứng minh các đường thẳng AD, BC, MH đồng quy tại I.

c) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCID. Chứng minh KCOH là tứ giác nội tiếp.

Bài tập 52: Cho hình vuông ABCD. Lấy B làm tâm, bán kính AB, vẽ 1/4 đường tròn phía trong hình vuông. Lấy AB làm đường kính, vẽ 1/2 đường tròn phía trong hình vuông. Gọi P là điểm tuỳ ý trên cung AC (không trùng với A và C). H và K lần lượt là hình chiếu của P trên AB và AD, PA và PB cắt nửa đường tròn lần lượt ở I và M.

a) Chứng minh I là trung điểm của AP.

b) Chứng minh PH, BI, AM đồng qui.

c) Chứng minh PM = PK = AH

d) Chứng minh tứ giác APMH là hình thang cân.

e) Tìm vị trí điểm P trên cung AC để tam giác APB là đều.

Bài tập 53: Cho đường tròn (O) và một dây AB. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Vẽ đường kính MN Cắt AB tại I. Gọi D là một điểm thuộc dây AB. Tia MD cắt đường tròn (O) tại C.

a) Chứng minh rằng tứ giác CDIN nội tiếp được

b) Chứng minh rằng tích MC. MD có giá trị không đổi khi D di động trên dây AB.

c) Gọi O' là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD. Chứng minh rằng: $\widehat{MAB} = \frac{1}{2}\widehat{AO'D}$.

d) Chứng minh rằng ba điểm A, O', N thẳng hàng và MA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.

Bài tập 54: Cho tam giác vuông cân ABC ($\widehat{A} = 90^0$), trung điểm I của cạnh BC. Xét một điểm D trên tia AC. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB, BD, DA tại các điểm tương ứng M, N, P.

a) Chứng minh rằng 5 điểm B, M, O, I, N nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng ba điểm N, I, P thẳng hàng.

c) Gọi giao điểm của tia BO với MN, NP lần lượt là H, K. Tam giác HNK là tam giác gì, tại sao?

d) Tìm tập hợp điểm K khi điểm D thay đổi vị trí trên tia AC.

Bài tập 55: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và C'. Đường thẳng AO' cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại D và D'.

a) Chứng minh C, B, D' thẳng hàng

b) Chứng minh tứ giác ODC'O' nội tiếp

c) Đường thẳng CD và đường thẳng D'C' cắt nhau tại M. Chứng minh tứ giác MCBC' nội tiếp.

Bài tập 56: Từ một điểm C ở ngoài đường tròn (O) kể cát tuyến CBA. Gọi IJ là đường kính vuông góc với AB. Các đường thẳng CI, CJ theo thứ tự cắt đường tròn (O) tại M, N.

a) Chứng minh rằng IN, JM và AB đồng quy tại một điểm D.

b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M, N đi qua trung điểm E của CD.

Bài tập 57: Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') tiếp xúc ngoài tại A (R > R'). Đường nối tâm OO' cắt đường tròn (O) và (O') theo thứ tự tại B và C (B và C khác A). EF là dây cung của đường tròn (O) vuông góc với BC tại trung điểm I của BC, EC cắt đường tròn (O') tại D.

a) Tứ giác BEFC là hình gi?

b) Chứng minh ba điểm A, D, F thẳng hàng.

c) CF cắt đường tròn (O’) tại G. Chứng minh ba đường EG, DF và CI đồng quy.

d) Chứng minh ID tiếp xúc với đường tròn (O’).

Bài tập 58: Cho đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc ngoài tại C. AC và BC là đường kính của (O) và (O’), DE là tiếp tuyến chung ngoài (D $\in$ (O), E $\in$ (O’)). AD cắt BE tại M.

a) ΔMAB là tam giác gì?
b) Chứng minh: MC là tiếp tuyến chung của (O) và (O').
c) Kẻ Ex, By vuông góc với AE, AB. Ex cắt By tại N. Chứng minh: D, N, C thẳng hàng.
d) Về cùng phía của nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ nửa đường tròn đường kính AB và OO'. Đường thẳng qua C cắt hai nửa đường tòn trên tại I, K. Chứng minh OI // AK.

Bài tập 59: Cho đường tròn (O ; R). Đường thẳng d cắt (O) tại A, B. C thuộc d ở ngoài (O). Từ điểm chính giữa P của cung lớn AB kẻ đường kính PQ cắt AB tại D. CP cắt (O) tại điểm thứ hai I, AB cắt IQ tại K.
a) Chứng minh tứ giác PDKI nội tiếp.
b) Chứng minh: CI.CP = CK.CD.
c) Chứng minh IC là phân giác ngoài của tam giác AIB.
d) A, B, C cố định, (O) thay đổi nhưng vẫn luôn qua A, B. Chứng minh rằng IQ luôn đi qua điểm cố định.

Bài tập 60: Cho tam giác đều ABC nội tiếp (O ; R). M di động trên AB. N di động trên tia đối của tia CA sao cho BM = CN.
a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt (O) tại A và D. Chứng minh rằng D cố định.
b) Tính góc MDN.
c) MN cắt BC tại K. Chứng minh DK vuông góc với MN.
d) Đặt AM = x. Tính x để diện tích tam giác AMN là lớn nhất.

Bài tập 61: Cho (O; R). Điểm M cố định ở ngoài (O). Cát tuyến qua M cắt (O) tại A và B. Tiếp tuyến của (O) tại A và B cắt nhau tại C.
a) Chứng minh tứ giác OACB nội tiếp đường tròn tâm K.
b) Chứng minh: (K) qua hai điểm cố định là O và H khi cát tuyến quay quanh M.
c) CH cắt AB tại N, I là trung điểm AB. Chứng minh: MA.MB = MI.MN.
d) Chứng minh: $IM.IN = IA^2$

Bài tập 62: Cho nửa đường tròn đường kính AB tâm O. C là điểm chính giữa cung AB. M di động trên cung nhỏ AC. Lấy N thuộc BM sao cho AM = BN.
a) So sánh ΔAMC và ΔBCN.
b) ΔCMN là tam giác gì?
c) Kẻ dây AE//MC. Chứng minh tứ giác BECN là hình bình hành.
d) Đường thẳng d đi qua N và vuông góc với BM. Chứng minh d luôn đi qua điểm cố định.

Bài tập 63: Cho đường tròn (O ; R), đường thẳng d cắt (O) tại hai điểm C và D. Điểm M tuỳ ý trên d, kẻ tiếp tuyến MA, MB. I là trung điểm của CD.
a) Chứng minh 5 điểm M, A, I, O, B cùng thuộc một đường tròn.
b) Gọi H là trực tâm của ΔMAB, tứ giác OAHB là hình gì?
c) Khi M di đồng trên d. Chứng minh rằng AB luôn qua điểm cố định.
d) Đường thẳng qua C vuông góc với OA cắt AB, AD lần lượt tại E và K. Chứng minh: EC = EK.

Bài tập 64: Cho ΔABC cân (AB = AC) nội tiếp trong đường tròn (O) và M là điểm di động trên đường tròn đó. Gọi D là hình chiếu của B trên AM và P là giao điểm của BD với CM.
a) Chứng minh ΔBPM cân.
b) Tìm quỹ tích của điểm D khi M di chuyển trên đường tròn (O).

Bài tập 65: Đường tròn (O ; R) cắt một đường thẳng d tại hai điểm A, B. Từ một điểm M trên d và ở ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến MP, MQ.
a) Chứng minh rằng: $\widehat{QMO} = \widehat{QPO}$ và đường tròn ngoại tiếp ΔMPQ đi qua hai điểm cố định khi M di động trên d.
b) Xác định vị trí của M để MQOP là hình vuông?
c) Tìm quỹ tích tâm các đường tròn nội tiếp ΔMPQ khi M di động trên d.

Bài tập 66: Hai đường tròn tâm O và tâm I cắt nhau tại hai điểm A và B. Đường thẳng d đi qua A cắt các đường tròn (O) và (I) lần lượt tại P, Q. Gọi C là giao điểm của hai đường thẳng PO và QI.

a) Chứng minh rằng các tứ giác BCQP, OBCI nội tiếp.
b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AP, AQ, K là trung điểm của EF. Khi đường thẳng d quay quanh A thì K chuyển động trên đường nào?
c) Tìm vị trí của d để ΔPQB có chu vi lớn nhất.

Bài tập 67: Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D'. Biết AB = 4 cm; AC = 5 cm và A'C = 13 cm. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật đó.

Bài tập 68: Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' có diện tích mặt chéo ACC'A' bằng $25\sqrt{2}$ cm^2. Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình lập phương đó.

Bài tập 69: Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D'. Biết AB = 15 cm, AC' = 20 cm và $\widehat{A'AC'} = 60^0$. Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật đó.

Bài tập 70: Cho lăng trụ đứng tam giác đều ABCA'B'C'. Tính diện tích xung quanh và thể tích của nó biết cạnh đáy dài 6 cm và góc AA'B bằng 30^0.

Bài tập 71: Cho ΔABC đều cạnh a. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại trọng tâm G của ΔABC. Trên đường thẳng d lấy một điểm S. Nối SA, SB, SC.
a) Chứng minh rằng: SA = SB = SC.
b) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp S.ABC, cho biết SG = 2a.

Bài tập 72: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy là a và đường cao là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
a) Chứng minh các mặt bên của hình chóp là các tam giác đều.
b) Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình chóp.

Bài tập 73: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a.
a) Tính diện tích toán phần của hình chóp.
b) Tính thể tích của hình chóp.

Bài tập 74: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiếu cao 15cm và thể tích là $1280cm^3$.
a) Tính độ dài cạnh đáy.
b) Tính diện tích xung quanh của hình chóp.

Bài tập 75: Một hình chóp cụt diện tích đáy nhỏ là $75cm^2$, diện tích đáy lớn gấp 4 lần diện tích đáy nhỏ và chiều cao là 6 cm. Tính thể tích của hình chóp cụt đó.

Bài tập 76: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = a và SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD).
a) Tính thể tích hình chóp.
b) Chứng minh rằng bốn mặt bên là những tam giác vuông.
c) Tính diện tích xung quanh của hình chóp.

Bài tập 77: Một hình trụ có đường cao bằng đường kính đáy. Biết thể tích hình trụ là $128\pi cm^3$, tính diện tích xung quanh của nó.

Bài tập 78: Một hình nón có bán kính đáy bằng 5 cm và diện tích xung quanh bằng $65\pi cm^2$. Tính thể tích của hình nón đó.

Bài tập 79: Cho hình nón cụt, bán kính đáy lớn bằng 8 cm, đường cao bằng 12cm và đường sinh bằng 13 cm.
a) Tính bán kính đáy nhỏ.
b) Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón cụt đó.

Bài tập 80: Một hình cầu có diện tích bề mặt là 36π cm^2. Tính thể tích của hình cầu đó.