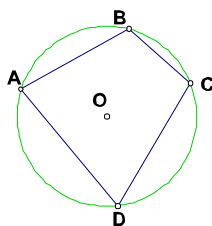


Chuyên đề: tứ giác nội tiếp

I) Các kiến thức cần nhớ

1) Khái niệm:

Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (Gọi tắt là tứ giác nội tiếp)



2) Định lý

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180°
- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn.

3) Dấu hiệu nhận biết (các cách chứng minh) tứ giác nội tiếp

- Tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° .
- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.
- Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm (mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α .

II) Bài tập

Bài tập 1

Cho $\triangle ABC$ vuông ở A. Trên AC lấy điểm M và vẽ đường tròn đường kính MC. Kẻ BM cắt đường tròn tại D. Đường thẳng DA cắt Đường tròn tại S. Chứng minh rằng:

- Tứ giác ABCD **nội tiếp**.
- $\angle ABD = \angle ACD$
- CA là phân giác của $\angle SCB$

Bài tập 2

Cho tứ giác ABCD nội tiếp nửa đường tròn đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Vẽ EF vuông góc với AD. Chứng minh:

- Tứ giác ABEF, tứ giác DCEF **nội tiếp**.
- CA là phân giác của $\angle BCF$.
- Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh tứ giác BCMF nội tiếp

Bài tập 3

Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AD . Hai đường chéo AC , BD cắt nhau tại E . Hình chiếu vuông góc của E trên AD là F . Đường thẳng CF cắt đường tròn tại điểm thứ hai là M . Giao điểm của BD và CF là N . Chứng minh :

- CEFD là **tứ giác nội tiếp** .
- Tia FA là tia phân giác của góc BFM .
- $BE \cdot DN = EN \cdot BD$

Bài tập 4

Cho tam giác ABC vuông ở A và một điểm D nằm giữa A và B . Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E . Các đường thẳng CD , AE lần lượt cắt đường tròn tại các điểm thứ hai F , G . Chứng minh :

- Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD .
- Tứ giác ADEC và AFBC **nội tiếp được trong một đường tròn** .
- AC song song với FG .
- Các đường thẳng AC , DE và BF đồng quy .

Bài tập 5

Cho tam giác vuông ABC ($\angle A = 90^\circ$; $AB > AC$) và một điểm M nằm trên đoạn AC (M không trùng với A và C). Gọi N và D lần lượt là giao điểm thứ hai của BC và MB với đường tròn đường kính MC; gọi S là giao điểm thứ hai giữa AD với đường tròn đường kính MC; T là giao điểm của MN và AB. Chứng minh:

- Bốn điểm A, M, N và B **cùng thuộc một đường tròn**.
- CM là phân giác của góc $\angle BCS$.
- $\frac{TA}{TD} = \frac{TC}{TB}$.

Bài tập 6

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Qua A dựng hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm) và một cát tuyến bất kì cắt đường tròn tại P, Q. Gọi L là trung điểm của PQ.

- Chứng minh 5 điểm: O; L; M; A; N **cùng thuộc một đường tròn**.
- Chứng minh LA là phân giác của $\angle MLN$
- Gọi I là giao điểm của MN và LA. Chứng minh $MA^2 = AI \cdot AL$
- Gọi K là giao điểm của ML với (O). Chứng minh rằng $KN \parallel AQ$.
- Chứng minh $\triangle KLN$ cân.

Bài tập 7

Cho đường tròn (O; R) tiếp xúc với đường thẳng d tại A. Tròn d lấy điểm H không trùng với điểm A và $AH < R$. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với d, đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm E và B (E nằm giữa B và H)

1. Chứng minh góc ABE bằng góc EAH và tam giác ABH đồng dạng với tam giác EAH.
2. Lấy điểm C trên đường tròn sao cho H là trung điểm của đoạn AC, đường thẳng CE cắt AB tại K. Chứng minh AHEK là tứ giác nội tiếp.
3. Xác định vị trí điểm H để $AB = R\sqrt{3}$.

Bài tập 8

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N, P.

Chứng minh rằng:

1. Các tứ giác AEHF, BFHD nội tiếp.
2. Bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.
3. $AE.AC = AH.AD$; $AD.BC = BE.AC$.
4. H và M đối xứng nhau qua BC.
5. Xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF

Bài tập 9

Cho ΔABC không cân, đường cao AH, nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi E, F thứ tự là hình chiếu của B, C lên đường kính AD của đường tròn (O) và M, N thứ tự là trung điểm của BC, AB. Chứng minh:

- a) Bốn điểm A, B, H, E cùng nằm trên đường tròn tâm N và $HE \parallel CD$.
- b) M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHEF .

Bài tập 10

Cho đường tròn tâm O và điểm A ở bên ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE với đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của DE.

- a) CMR: A, B, H, O, C cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn này.
- b) Chứng minh: HA là tia phân giác $\angle BHC$.
- c) Gọi I là giao điểm của BC và DE. Chứng minh: $AB^2 = AI.AH$
- d) BH cắt (O) tại K. Chứng minh: $AE \parallel CK$.

Bài tập 11

Từ một điểm S ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến SA, SB và cát tuyến SCD của đường tròn đó.

- a) Gọi E là trung điểm của dây CD. Chứng minh 5 điểm S, A, E, O, B cùng thuộc một đường tròn
- b) Nếu $SA = AO$ thì $\angle AOB$ là hình gì? tại sao?
- c) Chứng minh rằng: $AC.BD = BC.DA = \frac{AB.CD}{2}$

Bài tập 12

Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E).

1. Chứng minh AC. AE không đổi.
2. Chứng minh $\angle ABD = \angle DFB$.
3. Chứng minh rằng CEFD là tứ giác nội tiếp.

Bài tập 13

Trên đường thẳng d lấy ba điểm A, B, C theo thứ tự đó. Trên nửa mặt phẳng bờ d kẻ hai tia Ax, By cùng vuông góc với d. Trên tia Ax lấy I. Tia vuông góc với CI tại C cắt By tại K. Đường tròn đường kính IC cắt IK tại P.

- 1) Chứng minh tứ giác CBPK **nội tiếp được đường tròn**.
- 2) Chứng minh $AI.BK = AC.CB$
- 3) Giả sử A, B, I cố định hãy xác định vị trí điểm C sao cho diện tích hình thang vuông ABKI lớn nhất.

Bài tập 14

Cho ΔABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH, vẽ đường tròn đường kính AH, đường tròn này cắt AB tại E, cắt AC tại F.

- a) Chứng minh AEHF là hình chữ nhật.
- b) Chứng minh: BEFC là **tứ giác nội tiếp**.
- c) Chứng minh: $AB.AE = AC.AF$
- d) Gọi M là giao điểm của CE và BF. Hãy so sánh diện tích của tứ giác AEMF và diện tích của tam giác BMC.

Bài tập 15

Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), các đường cao AD, BE, cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.

1. Chứng minh tứ giác CEHD **nội tiếp**.
2. Bốn điểm A, E, D, B **cùng nằm trên một đường tròn**.
3. Chứng minh $ED = \frac{1}{2} BC$.
4. Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).
5. Tính độ dài DE biết $DH = 2 \text{ cm}$, $AH = 6 \text{ cm}$.

Bài tập 16

Từ điểm M ngoài đường tròn (O) vẽ 2 tiếp tuyến MA và MB. Tròn cung nhỏ AB lấy 1 điểm C. Vẽ $CD \perp AB$; $CE \perp MA$; $CF \perp MB$. Gọi I là giao điểm của AC và DE; K là giao điểm của BC và DF. Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác AECD; BFCD **nội tiếp được**.
- b) $CD^2 = CE.CF$
- c) $IK \perp CD$

Bài tập 17

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). M là điểm di động trên cung nhỏ BC. Trên đoạn thẳng MA lấy điểm D sao cho $MD = MC$.

- a) Chứng minh ΔDMC đều.
- b) Chứng minh $MB + MC = MA$.
- c) Chứng minh tứ giác ADOC **nội tiếp được**.
- d) Khi M Di động trên cung nhỏ BC thì D di động trên đường cố định nào ?

Bài tập 18

Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

1. Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp.
2. Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B **cùng nằm trên một đường tròn**.
3. Chứng minh $OI.OM = R^2$; $OI.IM = IA^2$.
4. Chứng minh OAHB là hình thoi.

- Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.
- Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d.

Bài tập 19

Cho 3 điểm A; B; C cố định thẳng hàng theo thứ tự. Vẽ đường tròn (O) bất kỳ đi qua B và C (BC không là đường kính của (O)). Kẻ từ các tiếp tuyến AE và AF đến (O) (E; F là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC; K là trung điểm của EF, giao điểm của FI với (O) là D. Chứng minh:

- $AE^2 = AB.AC$
- Tứ giác AEIOF **nội tiếp**
- Năm điểm A; E; O; I; F **cùng nằm trên một đường tròn.**
- ED song song với AC.
- Khi (O) thay đổi tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OIK luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Bài tập 20

Cho $\triangle ABC$ có các góc đều nhọn và $\angle A = 45^\circ$. Vẽ đường cao BD và CE của $\triangle ABC$. Gọi H là giao điểm của BD và CE.

- Chứng minh tứ giác ADHE **nội tiếp**.
- Tính tỉ số $\frac{DE}{BC}$
- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh $OA \perp DE$

Bài tập 21

Cho tam giác nhọn PBC. Gọi A là chân đường cao kẻ từ P xuống cạnh BC. Đường tròn đường kính BC cắt PB, PC lần lượt ở M và N. Nối N với A cắt đường tròn đường kính BC ở điểm thứ hai E

- Chứng minh rằng: 4 điểm A, B, N, P **cùng nằm trên một đường tròn**. Hãy xác định tâm và bán kính đường tròn ấy.
- Chứng minh: EM vuông góc với BC
- Gọi F là điểm đối xứng của N qua BC. Chứng minh rằng $AM.AF = AN.AE$

Bài tập 22

Cho tam giác vuông ABC ($\angle A = 90^\circ$); trên đoạn AC lấy điểm D (D không trùng với các điểm A và C). Đường tròn đường kính DC cắt BC tại các điểm thứ hai E; đường thẳng BD cắt đường tròn đường kính DC tại điểm F (F không trùng với D). Chứng minh:

- Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EDC.
- Tứ giác ABCF **nội tiếp đường tròn**.
- AC là tia phân giác của góc EAF.

Bài tập 23

Cho hình thang cân ABCD ($AB > CD$; $AB \parallel CD$) nội tiếp trong đường tròn (O). Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A và D cắt nhau tại E. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD

- Chứng minh: Tứ giác AEDI **nội tiếp**
- Chứng minh $AB \parallel EI$
- Đường thẳng EI cắt cạnh bên AD và BC của hình thang tương ứng ở R và S. Chứng minh:

* I là trung điểm của RS

$$* \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{RS}$$

Bài tập 24

Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính AOB và COD vuông góc với nhau. Lấy điểm E bất kỳ trên OA , nối CE cắt đường tròn tại F . Qua F dựng tiếp tuyến Fx với đường tròn, qua E dựng Ey vuông góc với OA . Gọi I là giao điểm của Fx và Ey

- Chứng minh $I; E; O; F$ cùng nằm trên một đường tròn.
- Tứ giác $CEIO$ là hình gì? vì sao?
- Khi E chuyển động trên AB thì I chuyển động trên đường nào?

Bài tập 25

Cho nửa đường tròn đường kính BC bán kính R và điểm A trên nửa đường tròn (A khác B và C). Từ A hạ AH vuông góc với BC . Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E , nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F .

- Tứ giác $AFHE$ là hình gì? Tại sao?
- Chứng minh $BEFC$ là tứ giác nội tiếp.
- Hãy xác định vị trí của điểm A sao cho tứ giác $AFHE$ có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó theo R .

Bài tập 26

Cho 3 điểm M, N, P thẳng hàng theo thứ tự đó. Một đường tròn (O) thay đổi đi qua hai điểm M, N . Từ P kẻ các tiếp tuyến PT, PT' với đường tròn (O)

- Chứng minh: $PT^2 = PM \cdot PN$. Từ đó suy ra khi (O) thay đổi vẫn qua M, N thì T, T' thuộc một đường tròn cố định.
- Gọi giao điểm của TT' với PO, PM là I và J . K là trung điểm của MN . Chứng minh: Các tứ giác $OKTP, OKIJ$ nội tiếp.
- Chứng minh rằng: Khi đường tròn (O) thay đổi vẫn đi qua M, N thì TT' luôn đi qua điểm cố định.
- Cho $MN = NP = a$. Tìm vị trí của tâm O để góc $\angle TPT' = 60^\circ$.

Bài tập 27

Cho $\triangle ABC$ vuông ở A . Trên AC lấy điểm M ($M \neq A$ và C). Vẽ đường tròn đường kính MC . Gọi T là giao điểm thứ hai của cạnh BC với đường tròn. Nối BM kéo dài cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D . Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai S . Chứng minh:

- Tứ giác $ABTM$ nội tiếp
- Khi M chuyển động trên AC thì $\widehat{ADM}$ có số đo không đổi.
- $AB \parallel ST$.

Bài tập 28

Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A, B . Đường vuông góc với AB kẻ qua B cắt (O) và (O') lần lượt tại các điểm C, D . Lấy M trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) . Gọi giao điểm thứ hai của đường thẳng MB với đường tròn (O') là N và giao điểm của hai đường thẳng CM, DN là P .

- Tam giác AMN là tam giác gì, tại sao?
- Chứng minh $ACPD$ nội tiếp được đường tròn.
- Gọi giao điểm thứ hai của AP với đường tròn (O') là Q , chứng minh rằng $BQ \parallel CP$.

Bài tập 29

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$). H bất kỳ nằm giữa A và C . Đường tròn (O) đường kính HC cắt BC tại I . BH cắt (O) tại D .

- Chứng minh tứ giác ABCD **nội tiếp**.
- AB cắt CD tại M. Chứng minh 3 điểm H; I; M thẳng hàng
- AD cắt (O) tại K. Chứng minh CA là tia phân giác của $\angle KCB$

Bài tập 30

Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho $AI = \frac{2}{3} AO$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I, gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Nối AC cắt MN tại E.

- Chứng minh tứ giác IECB **nội tiếp**.
- Chứng minh tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM.
- Chứng minh $AM^2 = AE.AC$.
- Chứng minh $AE.AC - AI.IB = AI^2$.
- Hãy xác định vị trí của C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Bài tập 31

Cho nửa đường tròn (O;R) đường kính AB, dây AC. Gọi E là điểm chính giữa cung AC nối với tâm OE cắt AC tại H, vẽ CK song song với BE cắt AE tại K.

- Chứng minh tứ giác CHEK **nội tiếp**.
- Chứng minh $KH \perp AB$
- Cho $BC = R$. Tính PK.

Bài tập 32

Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A, O là trung điểm của IK.

- Chứng minh B, C, I, K **cùng nằm trên một đường tròn**.
- Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
- Tính bán kính đường tròn (O) Biết $AB = AC = 20$ cm, $BC = 24$ cm

Bài tập 33

Cho điểm A bên ngoài đường tròn (O ; R). Từ A vẽ tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE đến đường tròn (O). Gọi H là trung điểm của DE.

- Chứng minh năm điểm : A, B, H, O, C **cùng nằm trên một đường tròn**.
- Chứng minh HA là tia phân giác của $\angle BHC$.
- DE cắt BC tại I. Chứng minh : $AB^2 = AI.AH$.
- Cho $AB = R\sqrt{3}$ và $OH = \frac{R}{2}$. Tính HI theo R.

Bài tập 34

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

- Chứng minh rằng: EFMK là **tứ giác nội tiếp**.
- Chứng minh rằng: $AI^2 = IM \cdot IB$.
- Chứng minh BAF là tam giác cân.
- Chứng minh rằng : Tứ giác AKFH là hình thoi.
- Xác định vị trí của M để tứ giác AKFI **nội tiếp được một đường tròn**.

Bài tập 35

Cho hai đường tròn (O_1) , (O_2) có bán kính bằng nhau và cắt nhau ở A và B. Vẽ cát tuyến qua B khụng vuông góc với AB, nó cắt hai đường tròn ở E và F. ($E \in (O_1)$; $F \in (O_2)$).

1. Chứng minh $AE = AF$.
2. Vẽ cát tuyến CBD vuông góc với AB ($C \in (O_1)$; $D \in (O_2)$). Gọi P là giao điểm của CE và DF. Chứng minh rằng:
 - a. Góc tứ giác AEPF và ACPD **nội tiếp được đường tròn**.
 - b. Gọi I là trung điểm của EF chứng minh ba điểm A, I, P thẳng hàng.
3. Khi EF quay quanh B thì I và P di chuyển trên đường nào?

Bài tập 36

Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC, CD lần lượt lấy điểm E, F sao cho $\angle EAF = 45^\circ$. Biết BD cắt AE, AF theo thứ tự tại G, H. Chứng minh:

- a) ADFG, GHFE là các **tứ giác nội tiếp**
- b) $\triangle CGH$ và tứ giác GHFE có diện tích bằng nhau

Bài tập 37

Cho đường tròn tâm O bán kính R, hai điểm C và D thuộc đường tròn, B là trung điểm của cung nhỏ CD. Kẻ đường kính BA; trên tia đối của tia AB lấy điểm S, nối S với C cắt (O) tại M; MD cắt AB tại K; MB cắt AC tại H.

- a. Chứng minh: $\angle BMD = \angle BAC$, từ đó suy ra tứ giác AMHK **nội tiếp**.
- b. Chứng minh: $HK \parallel CD$.
- c. Chứng minh: $OK \cdot OS = R^2$.

Bài tập 38

Cho đường tròn (O), một đường kính AB cố định, một điểm I nằm giữa A và O sao cho $AI = \frac{2}{3}AO$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I. Gọi C là điểm tuỳ ý thuộc cung lớn MN, sao cho C

không trùng với M, N và B. Nối AC cắt MN tại E.

- a. Chứng minh tứ giác IECB **nội tiếp được trong một đường tròn**.
- b. Chứng minh $\square AME$ đồng dạng với $\square ACM$ và $AM^2 = AE \cdot AC$.
- c. Chứng minh $AE \cdot AC - AI \cdot IB = AI^2$.
- d. Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Bài tập 39

Cho ba điểm A, B, C trên một đường thẳng theo thứ tự ấy và đường thẳng d vuông góc với AC tại A. Vẽ đường tròn đường kính BC và trên đó lấy điểm M bất kì. Tia CM cắt đường thẳng d tại D; Tia AM cắt đường tròn tại điểm thứ hai N; Tia DB cắt đường tròn tại điểm thứ hai P.

- a) Chứng minh: Tứ giác ABMD **nội tiếp được**.
- b) Chứng minh: Tích CM. CD không phụ thuộc vào vị trí điểm M.
- c) Tứ giác APND là hình gì? Tại sao?
- d) Chứng minh trọng tâm G của tam giác MAB chạy trên một đường tròn cố định.

Bài tập 40

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Các tiếp tuyến với đường tròn kẻ từ A tiếp xúc với đường tròn ở B và C. Gọi M là điểm tuỳ ý trên đường tròn (M khác B và C). Gọi H; K; I lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M xuống BC; CA; AB.

- a/ Chứng minh: Tứ giác MHBI, MHCK **nội tiếp**.
- b/ Chứng minh: $MHI = MKH$.

c/ Chứng minh: $MH^2 = MI.MK$.

Bài tập 41

Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Đường thẳng (d) tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. M và Q là hai điểm trên (d) sao cho $M \neq A$, $M \neq Q$, $Q \neq A$. Các đường thẳng BM và BQ lần lượt cắt đường tròn (O) tại các điểm thứ hai là N và P. Chứng minh:

1. Tích $BN.BM$ không đổi.
2. Tứ giác MNPQ **nội tiếp**.
3. Bất đẳng thức: $BN + BP + BM + BQ > 8R$

Bài tập 42

Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn tâm O và P là trung điểm của cung AB không chứa C và D. Hai dây PC và PD lần lượt cắt dây AB tại E và F. Các dây AD và PC kéo dài cắt nhau tại I, các dây BC và PD kéo dài cắt nhau tại K. Chứng minh rằng:

- a. Góc CID bằng góc CKD.
- b. Tứ giác CDFE **nội tiếp được một đường tròn**.
- c. $IK \parallel AB$.

Bài tập 43

Trên đường tròn (O; R) đường kính AB, lấy hai điểm M, E theo thứ tự A, M, E, B (hai điểm M, E khác hai điểm A, B). AM cắt BE tại C; AE cắt BM tại D.

- a. Chứng minh MCED là một **tứ giác nội tiếp** và CD vuông góc với AB.
- b. Gọi H là giao điểm của CD và AB. Chứng minh $BE.BC = BH.BA$.
- c. Chứng minh các tiếp tuyến tại M và E của đường tròn (O) cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng CD.
- d. Cho biết $\angle BAM = 45^\circ$ và $\angle BAE = 30^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC theo R.

Bài tập 44

Cho đường tròn (O) đường kính AB. Một cát tuyến MN quay xung quanh trung điểm H của OB. Gọi I là trung điểm của MN. Từ A kẻ Ax vuông góc với MN tại K. Gọi C là giao điểm của Ax với tia BI.

- a/ Chứng minh rằng: $BN \parallel MC$
- b/ Chứng minh rằng: Tứ giác OIKC là hình chữ nhật
- c/ Tiếp tuyến Bt với đường tròn (O) cắt tia AM ở E, cắt tia Ax ở F. Gọi D là giao điểm thứ hai của tia Ax với (O). Chứng minh rằng: tứ giác DMEF **nội tiếp**

Bài tập 45

Cho ΔABC cân ($AB = AC$) và góc A nhỏ hơn 60° ; trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$.

- a) Tam giác BCD là tam giác gì? tại sao?
- b) Kéo dài đường cao CH của ΔABC cắt BD tại E. Vẽ đường tròn tâm E tiếp xúc với CD tại F. Qua C vẽ tiếp tuyến CG của đường tròn này. Chứng minh: Bốn điểm B, E, C, G **thuộc một đường tròn**.
- c) Các đường thẳng AB và CG cắt nhau tại M, tứ giác AFGM là hình gì? Tại sao?
- d) Chứng minh: ΔMBG cân.

Bài tập 46

Cho đường tròn (O) bán kính R, đường thẳng d không qua O và cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Từ một điểm C trên d (C nằm ngoài đường tròn), kẻ hai tiếp tuyến CM, CN với đường tròn (M, N thuộc (O)). Gọi H là trung điểm của AB, đường thẳng OH cắt tia CN tại K.

- Chứng minh bốn điểm C, O, H, N **cùng nằm trên một đường tròn**.
- Chứng minh $KN.KC = KH.KO$.
- Đoạn thẳng CO cắt đường tròn (O) tại I, chứng minh I cách đều CM, CN và MN.
- Một đường thẳng đi qua O và song song với MN cắt các tia CM, CN lần lượt tại E và F. Xác định vị trí của C trên d sao cho diện tích tam giác CEF là nhỏ nhất.

Bài tập 47

Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O; R) ($0 < BC < 2R$). A là một điểm di động trên cung lớn BC sao cho $\triangle ABC$ nhọn. Các đường cao AD; BE; CF cắt nhau tại H ($D \in BC$; $E \in CA$; $F \in AB$)

- Chứng minh: Tứ giác BCEF **nội tiếp**. Từ đó suy ra $AE.AC = AF.AB$
- Gọi A' là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: $AH = 2OA'$
- Kẻ đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. Đặt S là diện tích $\triangle ABC$, $2p$ là chu vi $\triangle DEF$. Chứng minh:
 - $d \parallel EF$
 - $S = p.R$

Bài tập 48

Cho hình thang ABCD có đáy lớn AD và đáy nhỏ BC nội tiếp trong đường tròn tâm O; AB và CD kéo dài cắt nhau tại I. Các tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại B và D cắt nhau tại điểm K.

- Chứng minh các tứ giác OBID và OBKD là **các tứ giác nội tiếp**.
- Chứng minh IK song song với BC.
- Hình thang ABCD phải thỏa mãn điều kiện gì để tứ giác AIKD là hình bình hành.

Bài tập 49

Cho đường tròn (O;R) và một điểm A nằm trên đường tròn. Một góc $\angle xAy = 90^\circ$ quay quanh A và luôn thỏa mãn Ax, Ay cắt đường tròn (O). Gọi các giao điểm thứ hai của Ax, Ay với (O) tương ứng là B, C. Đường tròn đường kính AO cắt AB, AC tại các điểm thứ hai tương ứng là M, N. Tia OM cắt đường tròn tại P. Gọi H là trực tâm tam giác AOP. Chứng minh rằng

- AMON là hình chữ nhật
- $MN \parallel BC$
- Tứ giác PHOB **nội tiếp**
- Xác định vị trí của góc $\angle xAy$ sao cho tam giác AMN có diện tích lớn nhất.

Bài tập 50

Cho đường tròn (O) đường kính AB. điểm I nằm giữa A và O (I khác A và O). Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I. Gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN (C khác M, N khác B). Nối AC cắt MN tại E. Chứng minh:

- Tứ giác IECB **nội tiếp**.
- $AM^2 = AE.AC$
- $AE.AC - AI.IB = AI^2$

Bài tập 51

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và hai điểm C, D thuộc nửa đường tròn sao cho cung AC nhỏ hơn 90° và góc $\angle COD = 90^\circ$. Gọi M là một điểm trên nửa đường tròn sao cho C là điểm chính giữa cung AM. Các dây AM, BM cắt OC, OD lần lượt tại E, F

- Tứ giác OEMF là hình gì? Tại sao?

- b) Chứng minh: D là điểm chính giữa cung MB.
 c) Một đường thẳng d tiếp xúc với nửa đường tròn tại M và cắt các tia OC, OD lần lượt tại I, K. Chứng minh các tứ giác OBKM và OAIM **nội tiếp** được.
 d) Giả sử tia AM cắt tia BD tại S. Hãy xác định vị trí của C và D sao cho 5 điểm M, O, B, K, S cùng thuộc một đường tròn.

Bài tập 52

Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B phân biệt thuộc (O) sao cho đường thẳng AB không đi qua tâm O. Trên tia đối của tia AB lấy điểm lấy điểm M khác A, từ M kẻ hai tiếp tuyến phân biệt ME, MF với đường tròn (O) (E, F là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của dây cung AB. Các điểm K và I theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng EF với các đường thẳng OM và OH.

- Chứng minh 5 điểm M, O, H, E, F **cùng nằm trên một đường tròn**.
- Chứng minh: $OH.OI = OK.OM$
- Chứng minh: IA, IB là các tiếp tuyến của đường tròn (O)

Bài tập 53

Cho đường tròn (O) đường kính AC. Trên bán kính OC lấy điểm B tùy ý (B khác O, C). Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Qua M kẻ dây cung DE vuông góc với AB. CD cắt đường tròn đường kính BC tại I.

- Chứng minh tứ giác BMDI **nội tiếp**.
- Chứng minh tứ giác ADBE là hình thoi.
- Chứng minh $BI \parallel AD$.
- Chứng minh I, B, E thẳng hàng.
- Chứng minh MI là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC.

Bài tập 54

Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN với đường tròn (B, C, M, N thuộc đường tròn và $AM < AN$). Gọi E là trung điểm của dây MN, I là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE với đường tròn.

- Chứng minh: Bốn điểm A, O, E, C **cùng thuộc một đường tròn**.
- Chứng minh: góc AOC bằng góc BIC
- Chứng minh: $BI \parallel MN$
- Xác định vị trí cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.

Bài tập 55

Cho đường tròn (O) có tâm O, đường kính AB. Trên tiếp tuyến của đường tròn O tại A lấy điểm M (M không trùng với A). Từ M kẻ cát tuyến MCD (C nằm giữa M và D; tia MC nằm giữa tia MA và tia MO) và tiếp tuyến thứ hai MI (I là tiếp điểm) với đường tròn (O). Đường thẳng BC và BD cắt đường thẳng OM lần lượt tại E và F. Chứng minh:

- Bốn điểm A, M, I và O **nằm trên một đường tròn**.
- $\angle IAB = \angle AMO$.
- O là trung điểm của FE

Bài tập 56

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, M thuộc cung AB, C thuộc OA. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa M kẻ tia Ax, By vuông góc với AB. Đường thẳng qua M vuông góc với MC cắt Ax, By tại P và Q. AM cắt CP tại E, BM cắt CQ tại F.

- Chứng minh: Tứ giác APMC, EMFC **nội tiếp**
- Chứng minh: $EF \parallel AB$
- Tìm vị trí của điểm C để tứ giác AEFC là hình bình hành

Bài tập 57

Cho đường tròn (O) và đường thẳng xy ngoài đường tròn. Đường thẳng đi qua O vuông góc với xy tại H cắt đường tròn (O) tại A và B. M là điểm trên (O), đường thẳng AM cắt xy tại E, đường thẳng BM cắt xy tại F, tiếp tuyến tại M cắt xy tại I, đường thẳng AF cắt (O) tại K. Nối E với K.

- Chứng minh: $IM = IF$
- Chứng minh: 4 điểm E, M, K, F cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh: IK là tiếp tuyến của (O).
- Tìm tập hợp tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AMH$ khi M di động trên (O)

Bài tập 58

Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB; điểm I nằm giữa hai điểm A và O. Kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại I, đường thẳng này cắt đường tròn (O; R) tại M và N. Gọi S là giao điểm BM và AN. Qua S kẻ đường thẳng song song với MN, đường thẳng này cắt các đường thẳng AB và AM lần lượt ở K và H. Hãy chứng minh:

- Tứ giác SKAM là tứ giác nội tiếp và $HS \cdot HK = HA \cdot HM$.
- KM là tiếp tuyến của đường tròn (O; R)
- Ba điểm H; N; B thẳng hàng

Bài tập 59

Cho đường tròn (O; R), một dây CD có trung điểm M. Trên tia đối của tia DC lấy điểm S, qua S kẻ các tiếp tuyến SA, SB với đường tròn. Đường thẳng AB cắt các đường thẳng SO ; OM tại P và Q.

- Chứng minh tứ giác SPMQ, tứ giác ABOM nội tiếp.
- Chứng minh $SA^2 = SD \cdot SC$.
- Chứng minh OM. OQ không phụ thuộc vào vị trí điểm S.
- Khi $BC \parallel SA$. Chứng minh tam giác ABC cân tại A
- Xác định vị trí của điểm S trên tia đối của tia DC để C, O, B thẳng hàng và $BC \parallel SA$.

Bài tập 60

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, M là một điểm chính giữa cung AB. K thuộc cung BM (K khác M và B). AK cắt MO tại I.

- Chứng minh : Tứ giác OIKB nội tiếp được trong một đường tròn.
- Gọi H là hình chiếu của M lên AK. Chứng minh : Tứ giác AMHO nội tiếp .
- Tam giác HMK là tam giác gì ?
- Chứng minh : OH là phân giác của góc MOK.
- Xác định vị trí của điểm K để chu vi tam giác OPK lớn nhất (P là hình chiếu của K lên AB)

Bài tập 61

Cho tam giác ABC với ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác trong của góc B, góc C cắt đường tròn này thứ tự tại D và E, hai tia phân giác này cắt nhau tại F. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của dây DE với các cạnh AB, AC.

- Chứng minh: các tam giác EBF, DAF cân.
- Chứng minh tứ giác DKFC nội tiếp và $FK \parallel AB$
- Tứ giác AIFK là hình gì ? Tại sao ?
- Tìm điều kiện của tam giác ABC để tứ giác AEFD là hình thoi đồng thời có diện tích gấp 3 lần diện tích tứ giác AIFK.

Bài tập 62

Cho đường tròn (O), một đường kính AB cố định, trên đoạn OA lấy điểm I sao cho

$AI = \frac{2}{3}.OA$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I. Gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN (C

không trùng với M, N, B). Nối AC cắt MN tại E.

- Chứng minh : Tứ giác IECB **nội tiếp**.
- Chứng minh : Các tam giác AME, ACM đồng dạng và $AM^2 = AE \cdot AC$
- Chứng minh : $AE \cdot AC - AI \cdot IB = AI^2$.
- Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

Bài tập 63

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn $(O;R)$ ($AB < CD$). Gọi P là điểm chính giữa của cung nhỏ AB ; DP cắt AB tại E và cắt CB tại K ; CP cắt AB tại F và cắt DA tại I.

- Chứng minh: Tứ giác CKID **nội tiếp** được
- Chứng minh: $IK \parallel AB$.
- Chứng minh: Tứ giác CDFE **nội tiếp** được
- Chứng minh: $AP^2 = PE \cdot PD = PF \cdot PC$
- Chứng minh : AP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AED.
- Gọi R_1, R_2 là các bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác AED và BED. Chứng minh:

$$R_1 + R_2 = \sqrt{4R^2 - PA^2}$$

Bài tập 54

Cho hình vuông ABCD cố định , có độ dài cạnh là a. E là điểm di chuyển trên đoạn CD (E khác D), đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

- Chứng minh $\triangle ABF = \triangle ADK$ từ đó suy ra $\triangle AFK$ vuông cân .
- Gọi I là trung điểm của FK, Chứng minh I là tâm **đường tròn đi qua A , C, F , K**.
- Tính số đo góc AIF, suy ra 4 điểm A, B, F, I **cùng nằm trên một đường tròn** .

Bài tập 65

Cho góc vuông xOy , trên Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm A và B sao cho $OA = OB$. M là một điểm bất kỳ trên AB. Dựng đường tròn tâm O_1 đi qua M và tiếp xúc với Ox tại A, đường tròn tâm O_2 đi qua M và tiếp xúc với Oy tại B , (O_1) cắt (O_2) tại điểm thứ hai N .

- Chứng minh tứ giác OANB là **tứ giác nội tiếp** và ON là phân giác của góc ANB .
- Chứng minh M nằm trên một cung tròn cố định khi M thay đổi .
- Xác định vị trí của M để khoảng cách O_1O_2 là ngắn nhất .

Bài tập 66

Cho điểm A bên ngoài đường tròn $(O ; R)$. Từ A vẽ tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE đến đường tròn (O). Gọi H là trung điểm của DE.

- Chứng minh năm điểm : A, B, H, O, C **cùng nằm trên một đường tròn**.
- Chứng minh HA là tia phân giác của $\angle BHC$.
- DE cắt BC tại I. Chứng minh : $AB^2 = AI \cdot AH$.

Bài tập 67

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Đường phân giác trong của góc A , B cắt đường tròn tâm O tại D và E , gọi giao điểm hai đường phân giác là I , đường thẳng DE cắt CA, CB lần lượt tại M , N .

- Chứng minh tam giác AIE và tam giác BID là tam giác cân .
- Chứng minh tứ giác AEMI là **tứ giác nội tiếp** và $MI \parallel BC$.

3) Tứ giác CMIN là hình gì ?

Bài tập 68

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Đường thẳng EF song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự tại E và F . Biết BF cắt CE tại H và AH cắt BC tại D .

a) Chứng minh tứ giác $BEFC$ nội tiếp và AH vuông góc với BC .

b) Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.

c) Gọi O là trung tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và K là trung điểm của

BC . Tính tỉ số $\frac{OK}{BC}$ khi tứ giác $BHOC$ nội tiếp.

d) Cho $HF = 3\text{cm}$, $HB = 4\text{cm}$, $CE = 8\text{cm}$ và $HC > HE$. Tính HC .

Bài tập 69

Cho (O) đường kính $AB = 2R$, C là trung điểm của OA và dây MN vuông góc với OA tại C . Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BM , H là giao điểm của AK và MM .

a) CMR: $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Tính $AH \cdot AK$ theo R .

Xác định vị trí của điểm K để $(KM + KN + KB)$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó

Bài tập 70

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B . Một đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O_1) , (O_2) lần lượt tại C, D , gọi I, J là trung điểm của AC và AD .

1) Chứng minh tứ giác $O_1 I J O_2$ là hình thang vuông.

2) Gọi M là giao điểm của CO_1 và DO_2 . Chứng minh O_1, O_2, M, B nằm trên một đường tròn.

3) E là trung điểm của IJ , đường thẳng CD quay quanh A . Tìm tập hợp điểm E .

4) Xác định vị trí của dây CD để dây CD có độ dài lớn nhất.

Bài tập 71

Cho tam giác ABC , góc B và góc C nhọn. Các đường tròn đường kính AB, AC cắt nhau tại D . Một đường thẳng qua A cắt đường tròn đường kính AB, AC lần lượt tại E và F .

1) Chứng minh B, C, D thẳng hàng.

2) Chứng minh B, C, E, F nằm trên một đường tròn.

3) Xác định vị trí của đường thẳng qua A để EF có độ dài lớn nhất.

Bài tập 72

Cho đường tròn tâm O và cát tuyến CAB (C ở ngoài đường tròn). Từ điểm chính giữa của cung lớn AB kẻ đường kính MN cắt AB tại I , CM cắt đường tròn tại E , EN cắt đường thẳng AB tại F .

1) Chứng minh tứ giác $MEFI$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh góc CAE bằng góc MEB .

3) Chứng minh: $CE \cdot CM = CF \cdot CI = CA \cdot CB$

Bài tập 73

Cho ΔABC có 3 góc nhọn $AC > BC$ nội tiếp (O) . Vẽ các tiếp tuyến với (O) tại A và B , các tiếp tuyến này cắt nhau tại M . Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên MC . CMR

a/ $MAOH$ là tứ giác nội tiếp

b/ Tia HM là phân giác của góc AHB

c/ Qua C kẻ đường thẳng song song với AB cắt MA, MB lần lượt tại E, F. Nối EH cắt AC tại P, HF cắt BC tại Q. Chứng minh rằng $QP \parallel EF$.

Bài tập 74

Cho tam giác ABC vuông ở A và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại các điểm thứ hai F, G. Chứng minh:

- Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD.
- Tứ giác ADEC và AFBC **nội tiếp được trong một đường tròn**.
- AC song song với FG.
- Các đường thẳng AC, DE và BF đồng quy.

Bài tập 75

Cho đường tròn tâm O. Từ một điểm P ở ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến phân biệt PA, PC (A, C là tiếp điểm) với đường tròn (O).

- Chứng minh PAOC là **tứ giác nội tiếp đường tròn**.
- Tia AO cắt đường tròn (O) tại B; đường thẳng qua P song song với AB cắt BC tại D. Tứ giác AODP là hình gì?
- Gọi I là giao điểm của OC và PD; J là giao điểm của PC và DO; K là trung điểm của AD. Chứng tỏ rằng các điểm I, J, K thẳng hàng.

Bài tập 76

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. M là một điểm trên cung AC (không chứa B) kẻ MH vuông góc với AC; MK vuông góc với BC.

- Chứng minh tứ giác MHKC là **tứ giác nội tiếp**.
- Chứng minh $\widehat{AMB} = \widehat{HMK}$
- Chứng minh ΔAMB đồng dạng với ΔHMK .

Bài tập 77

Cho nửa đường tròn đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Bx với nửa đường tròn. Gọi C là điểm trên nửa đường tròn sao cho cung AC bằng cung CB. Tròn cung CB lấy điểm D khác C và B. Cắt tia AC, AD cắt Bx lần lượt tại E và F.

- Chứng minh ΔABE vuông cân
- Chứng minh $\Delta ABF \sim \Delta BDF$
- Chứng minh tứ giác CEFD **nội tiếp**
- Chứng minh $AC \cdot AE = AD \cdot AF$

Bài tập 78

Cho tứ giác ABCD có hai đỉnh B và C ở trên nửa đường tròn đường kính AD, tâm O. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD và I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng:

- Các tứ giác ABEH, DCEH **nội tiếp được**;
- E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCH;
- Năm điểm B, C, I, O, H **nằm trên một đường tròn**

Bài tập 79

Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AD. Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại E. Hình chiếu vuông góc của E trên AD là F. Đường thẳng CF cắt đường tròn tại điểm thứ hai là M. Giao điểm của BD và CF là N. Chứng minh:

- a) CEFD là **tứ giác nội tiếp**.
- b) Tia FA là tia phân giác của góc BFM.
- c) $BE \cdot DN = EN \cdot BD$

Bài tập 80

Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$; $\angle B > 45^\circ$), một đường tròn (O) tiếp xúc với AB và AC lần lượt tại B và C. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M (M không trùng với B và C) rồi hạ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, CA, AB.

- a. Chỉ ra cách dựng đường tròn (O).
- b. Chứng minh tứ giác BIMK **nội tiếp**.
- c. Gọi P là giao điểm của MB và IK; Q là giao điểm của MC và IH. Chứng minh $PQ \perp MI$.

Bài tập 81

Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Hạ các đường cao AD, BE của tam giác. Các tia AD, BE lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai là M, N. Chứng minh rằng:

- Bốn điểm A, E, D, B **nam trên một đường tròn**. Tìm tâm I của đường tròn đó.
- $MN \parallel DE$
- Cho (O) và dây AB cố định, điểm C di chuyển trên cung lớn AB. Chứng minh rằng độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle CDE$ không đổi.

Bài tập 82

Cho điểm A ở ngoài đường tròn tâm O. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC ($M \neq B$; $M \neq C$). Gọi D, E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng AB, AC, BC; H là giao điểm của MB và DF; K là giao điểm của MC và EF.

- Chứng minh :
 - a) MECF là **tứ giác nội tiếp**.
 - b) MF vuông góc với HK.
- 2) Tìm vị trí của M trên cung nhỏ BC để tích $MD \cdot ME$ lớn nhất.

Bài tập 83

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A. AD là trung tuyến thuộc cạnh BC. Lấy M bất kỳ thuộc đoạn AD (M không trùng A, D). Gọi I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, AC. H là hình chiếu vuông góc của I trên đoạn DK.

- a/ Tứ giác AIMK là hình gì?
- b/ A, I, M, H, K **thuộc một đường tròn**. Tìm tâm đường tròn đó.
- c/ B, M, H thẳng hàng.

Bài tập 84

Cho tam giác ABC (có ba góc nhọn). Hai đường cao AD và BF gặp nhau tại H

- a/ Chứng minh tứ giác DHFC **nội tiếp được đường tròn**. Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác
- b/ Gọi EK là đường cao còn lại của tam giác ABC; KD cắt đường tròn ngoại tiếp tứ giác DHCF tại E. Chứng minh rằng $\angle EFH = \angle KBH$
- c/ Giả sử $CH = AB$. Tính số đo của góc ACB

Bài tập 85

Cho tứ giác ABCD ($AB \parallel CD$) nội tiếp trong đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A và tiếp tuyến tại D của đường tròn (O) cắt nhau tại E. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh:

- $\angle CAB = \frac{1}{2} \angle AOD$.
- Tứ giác AEDO **nội tiếp**.
- $EI \parallel AB$.

Bài tập 86

Cho đường tròn tâm O đường kính AC. Trên AC lấy điểm B, vẽ đường tròn tâm O' đường kính BC. Gọi M là trung điểm của AB. Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt đường tròn tâm O tại D và E. Nối DC cắt đường tròn tâm O' tại I. Chứng minh:

- $AD \parallel BI$.
- $BE \parallel AD$; I, B, E thẳng hàng.
- $MD = MI$.
- $DM^2 = AM.MC$.
- Tứ giác DMBI **nội tiếp**.

Bài tập 87

Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên AC lấy một điểm D, dựng CE vuông góc với BD.

- Chứng minh tứ giác ABCE **nội tiếp đường tròn**.
- Chứng minh $AD.CD = ED.BD$.
- Từ D kẻ DK vuông góc với BC. Chứng minh rằng AB, DK, EC đồng quy tại một điểm và $\angle DKE = \angle ABE$.

Bài tập 88

Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O), ta kẻ các tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). M là một điểm trên cung nhỏ BC, ($M \neq B; M \neq C$). Từ M hạ các đường vuông góc MI, MH, MK tương ứng xuống BC, AC, AB. Gọi P là giao của MB và IK; Q là giao của MC và IH.

- Chứng minh các tứ giác BIMK, CIMH **nội tiếp được đường tròn**.
- Chứng minh rằng tia đối của tia MI là phân giác của góc KMH.
- Chứng minh $PQ \parallel BC$.

Bài tập 89

Cho đường tròn tâm O, bán kính R và hai đường kính vuông góc AB và CD. Trên AO lấy điểm E mà $OE = \frac{1}{3} AO$, CE cắt (O) ở M.

- Tính CE theo R.
- Chứng minh tứ giác MEOD **nội tiếp được**. Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
- Chứng minh hai tam giác CEO và CDM đồng dạng. Tính độ dài đường cao MH của tam giác CDM.

Bài tập 90

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B, tiếp tuyến chung với hai đường tròn (O_1) và (O_2) về phía nửa mặt phẳng bờ O_1O_2 chứa điểm B, có tiếp điểm thứ tự là E và F. Qua A kẻ cát tuyến song song với EF cắt đường tròn (O_1), (O_2) thứ tự tại C, D. Đường thẳng CE và đường thẳng DF cắt nhau tại I.

- Chứng minh IA vuông góc với CD.
- Chứng minh tứ giác IEBF là **tứ giác nội tiếp**.

c. Chứng minh đường thẳng AB đi qua trung điểm của EF

Bài tập 91

Cho đường tròn tâm O và cát tuyến CAB (C ở ngoài đường tròn). Từ điểm chính giữa của cung lớn AB kẻ đường kính MN cắt AB tại I, CM cắt đường tròn tại E, EN cắt đường thẳng AB tại F.

- 1) Chứng minh tứ giác MEFI là **tứ giác nội tiếp**.
- 2) Chứng minh góc CAE bằng góc MEB.
- 3) Chứng minh: $CE \cdot CM = CF \cdot CI = CA \cdot CB$

Bài tập 92

Cho tam giác ABC vuông ở A và có $AB > AC$, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, vẽ nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F.

- a. Chứng minh tứ giác AEHF là hình chữ nhật.
- b. Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$
- c. Chứng minh BEFC là **tứ giác nội tiếp**.

Bài tập 93

Cho đường tròn (O) đường kính BC. Điểm A thuộc đoạn OB (A không trùng với O và B), vẽ đường tròn (O') đường kính AC. Đường tròn đi qua trung điểm M của đoạn thẳng AB và vuông góc với AB cắt đường tròn (O) tại D và E. Gọi F là giao điểm thứ hai của CD với đường tròn (O'), K là giao điểm thứ hai của CE với đường tròn (O'). Chứng minh:

- a. Tứ giác ADBE là hình thoi.
- b. $AF \parallel BD$.
- c. Ba điểm E, A, F thẳng hàng.
- d. Bốn điểm M, F, C và E **cùng thuộc một đường tròn**.
- e. Ba đường thẳng CM, DK, EF đồng quy

Bài tập 94

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Đường tiếp tuyến với (O') vẽ từ A cắt (O) tại điểm M; đường tiếp tuyến với (O) vẽ từ A cắt (O') tại N. Đường tròn tâm I ngoại tiếp tam giác MAN cắt AB kéo dài tại P.

- a. Chứng minh rằng tứ giác OAO'I là hình bình hành.
- b. Chứng minh rằng bốn điểm O, B, I, O' **nhằm trên một đường tròn**.
- c. Chứng minh rằng: $BP = BA$.

Bài tập 95

Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến PM và PN với đường tròn (O) (M, N là tiếp điểm). Đường thẳng đi qua điểm P cắt đường tròn (O) tại hai điểm E và F. Đường thẳng qua O song song với PM cắt PN tại Q. Gọi H là trung điểm của đoạn EF. Chứng minh rằng:

- a. Tứ giác PMON nội tiếp đường tròn.
- b. Các điểm P, N, O, H **cùng nằm trên một đường tròn**.
- c. Tam giác PQO cân.
- d. $PM^2 = PE \cdot PF$.
- e. $\angle PHM = \angle PHN$.

