

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề).
Chú ý: Đề thi gồm 02 trang. Thí sinh làm bài vào tờ giấy thi.

Bài 1 (1,5 điểm).

Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{3}{\sqrt{7}-2} + \sqrt{(\sqrt{7}-3)^2} \quad \text{và} \quad B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \quad (\text{với } x > 0; x \neq 1).$$

a) Rút các gọn biểu thức A và B .

b) Tìm các giá trị của x để giá trị của biểu thức A lớn hơn giá trị của biểu thức B .

Bài 2 (1,5 điểm).

1. Cho hai đường thẳng $y = (m-1)x + 3$ (d_1) và $y = -4x + m^2 - 6$ (d_2). Tìm m để hai đường thẳng trên cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

2. Ông Minh đầu tư 500 triệu đồng vào hai hình thức: Mua trái phiếu doanh nghiệp với lãi suất 7% một năm và gửi ngân hàng với lãi suất 6% một năm. Đúng một năm sau, ông Minh rút cả tiền vốn đầu tư và tiền lãi. Gọi x (triệu đồng) là số tiền ông Minh đầu tư mua trái phiếu, y (triệu đồng) là tổng số tiền lãi ông Minh nhận được từ hai hình thức đầu tư trên.

a) Lập công thức tính y theo x .

b) Biết rằng tổng số tiền lãi ông Minh nhận được từ hai hình thức đầu tư trên là 32,8 (triệu đồng). Tính số tiền ông Minh đã đầu tư để mua trái phiếu.

Bài 3 (2,5 điểm).

1. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - 4m = 0$ (x là ẩn số, m là tham số) (1)

a) Giải phương trình với $m = -1$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 3 < x_2$.

2. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Quãng đường AB dài 90km. Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Thực tế sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường AB với vận tốc dự định thì ô tô đó nghỉ lại 20 phút. Vì vậy để đến B đúng dự định, trên quãng đường còn lại ô tô phải tăng vận tốc thêm 6 km/h. Tính vận tốc dự định của ô tô.

Bài 4 (0,75 điểm).

Một cốc nước dạng hình trụ có bán kính đáy bằng 3 cm, chiều cao là 12 cm và đang chứa một lượng nước cao 10 cm. Người ta thả từ từ 3 viên bi sắt dạng hình cầu có cùng đường kính là 3 cm vào cốc nước. Hỏi nước trong cốc có bị tràn ra ngoài không? Vì sao? Lấy $\pi \approx 3,14$.

Bài 5. (3,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , có ba đường cao là AD, BE, CF cắt nhau tại H ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$).

a) Chứng minh tứ giác $ABDE$ và tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

b) Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại các điểm M, N (M thuộc cung nhỏ AB).

Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Chứng minh tia EB là tia phân giác của \widehat{DEF} và ΔKMN cân.

c) Đường trung trực của CE cắt MK tại Q . Chứng minh $OQ \perp MC$.

Bài 6 (0,75 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{ab + 3b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc + 3c^2}} + \frac{c}{\sqrt{ca + 3a^2}} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

----- Hết -----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

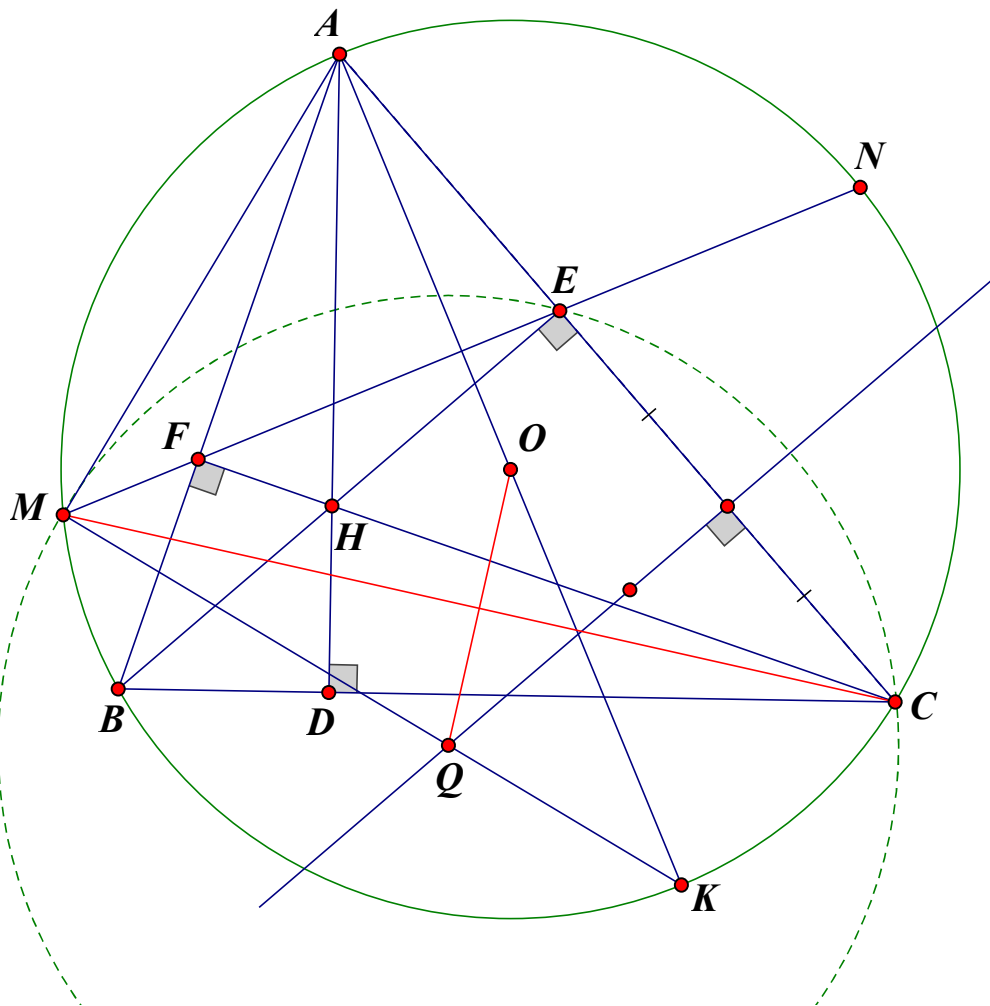
Họ và tên thí sinh:Số báo danh:
Cán bộ coi thi 1:Cán bộ coi thi 2:

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM MÔN TOÁN

| Bài | Nội dung cần đạt | Điểm |
|---|--|-------------|
| | 1. (0,5 điểm) | |
| | Ta có: $A = \frac{3}{\sqrt{7}-2} + \sqrt{(\sqrt{7}-3)^2} = \frac{3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)} + \sqrt{7}-3 $ | 0,25 |
| | $A = \sqrt{7} + 2 + 3 - \sqrt{7} = 5$ (vì $\sqrt{7} - 3 < 0$) | 0,25 |
| | $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} = \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right] \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}$ | 0,25 |
| | $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot (\sqrt{x}-1) = \sqrt{x}-1.$ | 0,25 |
| | 2. (0,5 điểm) | |
| | Điều kiện: $x > 0; x \neq 1.$ | 0,25 |
| Ta có $A > B \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 6 \Leftrightarrow x < 36.$ | 0,25 | |
| Kết hợp với điều kiện $x > 0; x \neq 1$ ta được: | | |
| Với $0 < x < 36$ và $x \neq 1$ thì $A > B.$ | 0,25 | |
| 2 (1,5đ) | 1. (0,75 điểm) | |
| | (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm trên trục tung $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$ | 0,25 |
| | $\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq -4 \\ m^2-6=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m = \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$ | 0,25 |
| | Vậy $m = 3$ thì (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm trên trục tung. | ,25 |
| | 2. (0,75 điểm) | |
| | Lập được công thức $y = 7\%.x + 6\%.(500-x)$ (triệu đồng) (1) | 0,25 |
| | Vì tổng số tiền lãi là 32,8 triệu đồng nên $y = 32,8.$ | 0,25 |
| Thay $y = 32,8$ vào công thức (1) ta tìm được $x = 280.$ | 0,25 | |
| Vậy ông Minh đã đầu tư 280 triệu đồng để mua trái phiếu. | | |
| | 1a. (0,5 điểm) | |
| | Với $m = -1$ ta có phương trình : | 0,25 |
| | $x^2 - 2(-1-1)x - 4(-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$ | |
| | $\Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$ | 025 |
| | Vậy với $m = -1$ thì phương trình (1) có tập nghiệm là $S = \{-2\}.$ | |
| 1b. (1,0 điểm) | | |
| Xét phương trình $x^2 - 2(m-1)x - 4m = 0$ (1) | | |
| $(a = 1, b = -2(m-1), c = -4m)$ | 0,25 | |
| Phương trình (1) là phương trình bậc hai vì $a = 1 \neq 0.$ | | |

| | | |
|---|---|-------------|
| 3 (2,5đ) | $\Delta = b^2 - 4ac = \left[-2(m-1)^2\right] - 4.1.(-4m) = 4(m-1)^2 + 16m$ $= 4m^2 - 8m + 4 + 16m = 4m^2 + 8m + 4 = (2m+2)^2 \geq 0 \text{ với mọi } m.$ <p>Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2.</p> | |
| | Theo hệ thức Viète ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = -4m \end{cases}$ | 0,25 |
| | Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 3 < x_2$ là : $(x_1 - 3)(x_2 - 3) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 < 0$ | 0,25 |
| | $\Rightarrow -4m - 6(m-1) + 9 < 0 \Leftrightarrow -4m - 6m + 6 + 9 < 0 \Leftrightarrow -10m + 15 < 0$ $\Leftrightarrow m > \frac{3}{2}.$ <p>Vậy với $m > \frac{3}{2}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 3 < x_2$.</p> | 0,25 |
| | 2. (1,0 điểm) | |
| Đổi 20 phút = $\frac{1}{3}$ (giờ) Gọi vận tốc dự định của ô tô đi từ A đến B là x (km/h) (điều kiện $x > 0$). Thời gian dự định đi hết quãng đường AB là $\frac{90}{x}$ (giờ). Thời gian thực tế ô tô đi từ A đến B tính cả thời gian nghỉ là: $\frac{30}{x} + \frac{1}{3} + \frac{60}{x+6}$ (giờ) Vì ô tô đến B đúng giờ, nên ta có phương trình: $\frac{90}{x} = \frac{30}{x} + \frac{1}{3} + \frac{60}{x+6} \Leftrightarrow \frac{60}{x} = \frac{1}{3} + \frac{60}{x+6} \Rightarrow x^2 + 6x - 1080 = 0.$ | 0,25 | |
| $\Leftrightarrow (x+36)(x-30) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+36=0 \\ x-30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-36(KTM) \\ x=30(TM) \end{cases}$ | 0,25 | |
| Vậy vận tốc dự định của ô tô đi từ A đến B là 30 km/h. | 0,25 | |
| 4 (0,75đ) | (0,75 điểm) | |
| | Bán kính viên bi sắt là $3 : 2 = 1,5$ (cm) | 0,25 |
| | Tổng thể tích của ba viên bi sắt là: $V_1 = 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 1,5^3 = 42,39$ (cm ³) | 0,25 |
| | Thể tích cốc còn lại (không tính thể tích nước) là: $V_2 = 3,14 \cdot 3^2 \cdot 2 = 56,52$ (cm ³) Vì $V_2 > V_1$ nên nước trong cốc không bị tràn ra ngoài. | 0,25 |

Hình vẽ cho câu a



5
(3,0đ)

0,25

a. (1,0 điểm)

Vì BE là đường cao $\triangle ABC$ nên $\widehat{BEA} = 90^\circ$

0,25

Vì AD là đường cao $\triangle ABC$ nên $\widehat{ADB} = 90^\circ$

Xét tứ giác $ABDE$ có $\widehat{BEA} = \widehat{ADB} = 90^\circ$ mà hai đỉnh E, D liên tiếp nên $ABDE$ là tứ giác nội tiếp.

0,25

Ta có $\widehat{AEH} = 90^\circ (gt) \Rightarrow E$ thuộc đường tròn đường kính AH

0,25

$\widehat{AFH} = 90^\circ (gt) \Rightarrow F$ thuộc đường tròn đường kính AH

0,25

\Rightarrow tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

b. (1,0 điểm)

Tứ giác $AEHF$ nội tiếp nên $\widehat{FEB} = \widehat{FAH}$ (2 góc nội tiếp chắn cung \widehat{FD})

0,25

Tứ giác $ABDE$ nội tiếp nên $\widehat{BAD} = \widehat{BED}$ (2 góc nội tiếp chắn cung \widehat{BD})

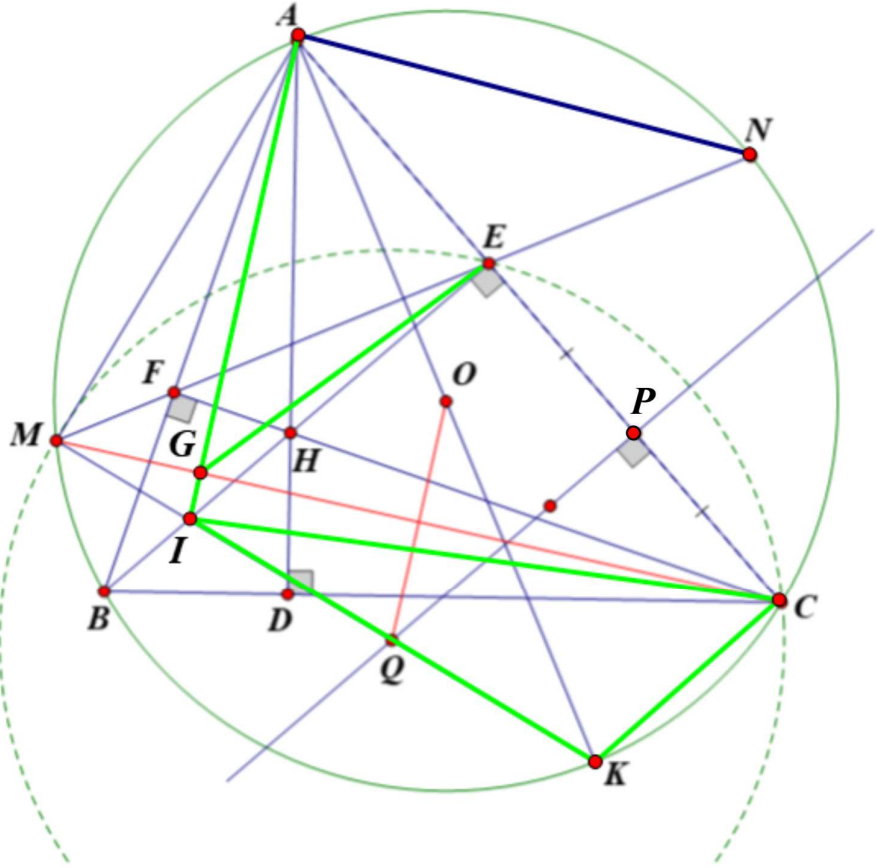
0,25

Suy ra $\widehat{FEB} = \widehat{BED}$ hay tia EB là tia phân giác của \widehat{DEF}

Ta có tứ giác $BFEC$ nội tiếp $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$

0,25

| | |
|--|-------------|
| <p>Ta có: $\widehat{AFE} = \frac{1}{2}sd(\widehat{AN} + \widehat{MB})$; $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}sd(\widehat{AM} + \widehat{MB})$</p> <p>$\Rightarrow \widehat{AN} = \widehat{AM} \Rightarrow A$ là điểm chính giữa cung \widehat{MN}</p> <p>$\Rightarrow AK \perp MN$ tại trung điểm của $MN \Rightarrow AK$ là trung trực MN</p> <p>$\Rightarrow KM = KN \Rightarrow \Delta KMN$ cân.</p> | 0,25 |
| c. (0,75 điểm) | |
| <p>Ta có $\widehat{AM} = \widehat{AN} \Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{ACM} = \frac{1}{2}sd\widehat{ME}$</p> <p>Mà ME là dây cung của đường tròn ngoại tiếp $\Delta MEC \Rightarrow MA$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMEC</p> | 0,25 |
| <p>Mặt khác $\widehat{AMK} = 90^0 \Rightarrow MK \perp MA$ tại $M \Rightarrow$ tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔMEC thuộc MK</p> <p>Mà Q là giao điểm của MK và trung trực của EC</p> <p>$\Rightarrow Q$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\Delta MEC \Rightarrow QM = QC$</p> | 0,25 |
| <p>Mà $OM = OC (= bk(O)) \Rightarrow OQ$ là trung trực MC</p> <p>Vậy $OQ \perp MC$.</p> | 0,25 |



| | | |
|----------------------------|---|-------------|
| | <p>Cách 2</p> <p>Gọi $I = BE \cap MK, AI \cap CM \equiv G$. Suy ra $AMIE$ nội tiếp</p> <p>$\Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{AIE} = \widehat{ANM} = \widehat{ACM} \Rightarrow$ Tứ giác $CEGI$ nội tiếp</p> <p>$\Rightarrow AI \perp CM$</p> <p>Mà tứ giác $ECKI$ là hình thang vuông</p> <p>QP là đường trung bình hình thang $ECKI \Rightarrow Q$ là trung điểm IK</p> <p>$\Rightarrow OQ$ là đường trung bình $\Delta KAI \Rightarrow OQ \parallel AI$</p> <p>Mặt khác $AI \perp CM \Rightarrow OQ \perp CM$</p> | |
| | <p>(0,75 điểm)</p> <p>HS chứng minh một trong ba BĐT sau:</p> <p>+) $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} (x, y > 0)$</p> <p>+) $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} (a, b, c, x, y, z > 0)$</p> <p>+) $ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} (a, b, c > 0)$</p> | 0,25 |
| 6 (0,75đ) | <p>Từ $ab + bc + ca = 3abc \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$</p> <p>Áp dụng ba BĐT trên ta được:</p> $P = \frac{2a}{\sqrt{4b(a+3b)}} + \frac{2b}{\sqrt{4c(b+3c)}} + \frac{2c}{\sqrt{4a(c+3a)}}$ $P \geq \frac{2a}{\frac{4b+a+3b}{2}} + \frac{2b}{\frac{4c+b+3c}{2}} + \frac{2c}{\frac{4a+c+3a}{2}} = 4 \left(\frac{a}{a+7b} + \frac{b}{b+7c} + \frac{c}{c+7a} \right)$ $P \geq 4 \cdot \left(\frac{a^2}{a^2+7ab} + \frac{b^2}{b^2+7bc} + \frac{c^2}{c^2+7ca} \right) \geq 4 \cdot \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + 5(ab+bc+ca)}$ $P \geq 4 \cdot \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + \frac{5(a+b+c)^2}{3}}$ | 0,25 |
| | $P \geq \frac{12 \cdot (a+b+c)^2}{8(a+b+c)^2} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ <p>Vậy $\frac{a}{\sqrt{ab+3b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc+3c^2}} + \frac{c}{\sqrt{ca+3a^2}} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ (đpcm)</p> <p>Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.</p> | 0,25 |

* **Chú ý:**

- Trên đây chỉ trình bày một cách giải, nếu học sinh làm cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa ứng với điểm của câu đó.
- Học sinh làm đúng đến đâu cho điểm đến đó theo đúng biểu điểm.
- Trong một câu:
 - + Có nhiều ý mà các ý phụ thuộc nhau, học sinh làm phần trên sai phần dưới đúng thì không cho điểm.
 - + Có nhiều ý mà các ý không phụ thuộc nhau, học sinh làm đúng ý nào thì cho điểm ý đó.
- Bài hình học, học sinh vẽ sai hình thì không chấm điểm. Học sinh không vẽ hình mà vẫn làm đúng thì cho nửa số điểm của các câu làm được.
- Bài làm có nhiều ý liên quan đến nhau, nếu học sinh công nhận ý trên mà làm đúng ý dưới thì cho điểm ý đó.
- Điểm của bài thi là tổng điểm các câu làm đúng và không được làm tròn.

