

ĐỀ THI MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề).  
Chú ý: Đề thi gồm 02 trang. Thí sinh làm bài vào tờ giấy thi.

Bài 1 (1,5 điểm). Cho hai biểu thức:

$$A = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{7})^2} \left( \frac{\sqrt{21} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{5}} \right)$$

$$B = \left( \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} - \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right) : \frac{1}{(1-x)x\sqrt{x}} \quad (\text{với } x > 0, x \neq 1)$$

a) Rút gọn biểu thức  $A, B$ .

b) Tìm các giá trị của  $x$  để  $-\frac{1}{2}A + B = 0$ .

Bài 2 (1,5 điểm)

1. Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2(x+y) + \sqrt{x+2} = 7 \\ 5(x+y) - 2\sqrt{x+2} = 4 \end{cases}$$

2. Một ô tô có bình chứa xăng đựng được 40 lít xăng. Cứ chạy 100 km thì ô tô tiêu thụ hết 8 lít xăng. Gọi  $y$  là số lít xăng ô tô tiêu thụ khi đi quãng đường  $x$  (km) ( $x, y > 0$ ).

a) Lập công thức tính  $y$  theo  $x$ .

b) Khi ô tô chạy quãng đường từ Nhà hát lớn Hải Phòng đến thành phố Việt Trì (Phú Thọ) dài 207 km thì số lít xăng còn lại trong bình là bao nhiêu nếu lúc đầu bình đầy xăng?

Bài 3 (2,5 điểm)

1. Cho phương trình  $x^2 - (2m+1)x + m^2 - 1 = 0$  (1) ( $x$  là ẩn,  $m$  là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi  $m = 3$ .

b) Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn:

$$(x_1^2 - 2mx_1 + m^2)(x_2 + 1) = 4.$$

2. Bài toán có nội dung thực tế:

Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 12 giờ, nếu làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của đội thứ hai ít hơn đội thứ nhất là 7 giờ. Hỏi nếu làm riêng, mỗi đội phải làm trong thời gian bao lâu để hoàn thành công việc?

**Bài 4 (0,75 điểm)**

Một hộp sữa Ông Thọ dạng hình trụ có chiều cao bằng 12 cm. Biết thể tích của hộp sữa là  $192\pi \text{ cm}^3$ . Tính diện tích của vỏ hộp sữa trên (bỏ qua phần mép và các chi tiết phụ của hộp).  
(Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)



**Bài 5 (3,0 điểm).** Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC có ba góc nhọn ( $AB < AC$ ). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H. Đường thẳng EF và BC cắt nhau tại G.

- Chứng minh rằng tứ giác BFEC nội tiếp và  $GF \cdot GE = GB \cdot GC$ .
- Gọi I là hình chiếu vuông góc của H trên GA. Chứng minh  $\triangle GAF$  và  $\triangle GEI$  đồng dạng và  $\widehat{GAB} = \widehat{GCI}$ .
- Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh rằng  $GH \perp AM$ .

**Bài 6 (0,75 điểm)**

Cho ba số dương  $x, y, z$  thoả mãn  $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 2024$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $M = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}$ .

-----HẾT-----

(Thí sinh không sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM MÔN TOÁN  
(Gồm 07 trang)

Bài	Phần	Nội dung cần đạt	Điểm
1 (1,5 điểm)		$\text{a) } A = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{7})^2} \left( \frac{\sqrt{21} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{5}} \right)$ $=  \sqrt{5} - \sqrt{7}  \left[ \frac{-\sqrt{7}(1 - \sqrt{3})}{1 - \sqrt{3}} - \sqrt{5} \right]$ $= (\sqrt{7} - \sqrt{5})(-\sqrt{7} - \sqrt{5}) \text{ (vì } \sqrt{5} - \sqrt{7} < 0)$	0,25
		$= -(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})$ $= -2$	0,25
	a (1,0đ)	$B = \left( \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} - \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right) : \frac{1}{(1 - x)x\sqrt{x}} \text{ (với } x > 0, x \neq 1)$ $= \frac{(1 - \sqrt{x})^2 - (1 + \sqrt{x})^2}{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})} \cdot (1 - x)x\sqrt{x}$ $= \frac{(1 - \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x} - 1 - \sqrt{x})}{1 - x} \cdot (1 - x)x\sqrt{x}$ $= 2(-2\sqrt{x})x\sqrt{x}$ $= -4x^2$	0,2
		<p>Với <math>x &gt; 0, x \neq 1</math> thì <math>B = -4x^2</math></p> <p>Đề <math>-\frac{1}{2}A + B = 0</math> thì: <math>-\frac{1}{2}(-2) - 4x^2 = 0</math></p> $\Leftrightarrow 1 - 4x^2 = 0$ $\Leftrightarrow 4x^2 = 1$	0,25
	b (0,5đ)	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ 2x = -1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ (TMĐK)} \\ x = -\frac{1}{2} \text{ (Không TMĐK)} \end{cases}$ <p>Vậy <math>x = \frac{1}{2}</math> là giá trị cần tìm.</p>	0,25

2  
(1,5  
điểm)

1

(0,75đ)

$$\begin{cases} 2(x+y) + \sqrt{x+2} = 7 \\ 5(x+y) - 2\sqrt{x+2} = 4 \end{cases} \quad (\text{Điều kiện: } x \geq -2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+y) + 2\sqrt{x+2} = 14 \\ 5(x+y) - 2\sqrt{x+2} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9(x+y) = 18 \\ 5(x+y) - 2\sqrt{x+2} = 4 \end{cases}$$

0,25

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2 \\ \sqrt{x+2} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2 \\ x+2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 \\ x = 7 \text{ (TMĐK)} \end{cases}$$

0,25

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x; y) = (7; -5)$

0,25

a) Công thức tính  $y$  theo  $x$  là:

$$y = \frac{8}{100}x \Leftrightarrow y = \frac{2}{25}x$$

0,25

b) Khi ô tô chạy quãng đường dài 207km  $\Rightarrow x = 207$  (km)

Thay  $x = 207$  vào công thức  $y = \frac{2}{25}x$  ta được:

$$y = \frac{2}{25} \cdot 207 = 16,56 \text{ (lít)}$$

0,25

Số lít xăng còn lại trong bình của ô tô sau khi đi quãng đường 207km là:

$$40 - 16,56 = 23,44 \text{ (lít)}$$

0,25

a) Thay  $m = 3$  vào phương trình (1) có:

$$x^2 - (2 \cdot 3 + 1)x + 3^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 8 = 0 \text{ (2)}$$

0,25

Phương trình (2) có:  $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 17 > 0$  nên có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{17}}{2}; x_2 = \frac{7 - \sqrt{17}}{2}$$

Vậy với  $m = 3$  thì phương trình (1) có hai nghiệm:  $x_1 = \frac{7 + \sqrt{17}}{2};$

$$x_2 = \frac{7 - \sqrt{17}}{2}$$

0,25

3  
(2,5  
điểm)

1

(1,5đ)

	<p>b) Xét phương trình (1) có:</p> $a = 1 \neq 0$ $b = -(2m + 1)$ $c = m^2 - 1$ $\Delta = (2m + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 - 1)$ $= 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 + 4$ $= 4m + 5$ <p>Phương trình (1) có hai nghiệm</p> $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ $\Leftrightarrow 4m + 5 \geq 0$ $\Leftrightarrow m \geq \frac{-5}{4}$	0,25
	<p>Với <math>m \geq \frac{-5}{4}</math> thì phương trình (1) có hai nghiệm <math>x_1, x_2</math></p> <p>Theo hệ thức Vi-ét, có: <math>\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 x_2 = m^2 - 1 \end{cases}</math></p> <p>Vì <math>x_1</math> là nghiệm của phương trình (1) nên:</p> $x_1^2 - (2m + 1)x_1 + m^2 - 1 = 0$ $\Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 - x_1 + m^2 - 1 = 0$ $\Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 + m^2 = x_1 + 1 \quad (2)$	0,25
	<p>Có: <math>(x_1^2 - 2mx_1 + m^2)(x_2 + 1) = 4 \quad (3)</math></p> <p>Từ (2) và (3) suy ra: <math>(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 4</math></p> $x_1 x_2 + (x_1 + x_2) = 3$ $\Leftrightarrow m^2 - 1 + 2m + 1 = 3$ $\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0$ $\Leftrightarrow (m - 1)(m + 3) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (TMĐK)} \\ m = -3 \text{ (Không TMĐK)} \end{cases}$ <p>Vậy <math>m = 1</math> là giá trị cần tìm.</p>	0,25
2 (1,0đ)	<p>Gọi thời gian đội I làm riêng hoàn thành công việc là <math>x</math> (giờ)</p> <p>Điều kiện: <math>x &gt; 12</math></p>	0,25
	<p>Thời gian đội II làm riêng hoàn thành công việc là: <math>x - 7</math> (giờ)</p> <p>Trong 1 giờ đội I làm được: <math>\frac{1}{x}</math> (công việc)</p> <p>Trong 1 giờ đội II làm được: <math>\frac{1}{x - 7}</math> (công việc)</p> <p>Trong 1 giờ cả hai đội làm được: <math>\frac{1}{12}</math> (công việc)</p>	

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-7} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow 12(x-7) + 12x = x(x-7)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 31x + 84 = 0 \quad (4)$$

Giải phương trình (4) ta được:

$$x_1 = 28 \text{ (TMĐK)}$$

$$x_2 = 3 \text{ (Không TMĐK)}$$

Vậy thời gian đội I làm riêng hoàn thành công việc là 28 giờ.

Thời gian đội II làm riêng hoàn thành công việc là:  $28 - 7 = 21$  giờ.

0,25

Hộp sữa Ông Thọ có:

$$\text{Chiều cao: } h = 12 \text{ (cm)}$$

$$\text{Thể tích: } V = 192\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\text{Có: } V = \pi R^2 h$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{V}{\pi h}$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{192\pi}{12\pi} = 16$$

$$\Rightarrow R = 4 \text{ (vì } R > 0\text{)}$$

$\Rightarrow$  Bán kính đáy của hộp sữa Ông Thọ là 4 cm

Diện tích của vỏ hộp sữa Ông Thọ là:

$$S = 2\pi R h + 2\pi R^2$$

$$= 2\pi \cdot 4 \cdot 12 + 2\pi \cdot 4^2$$

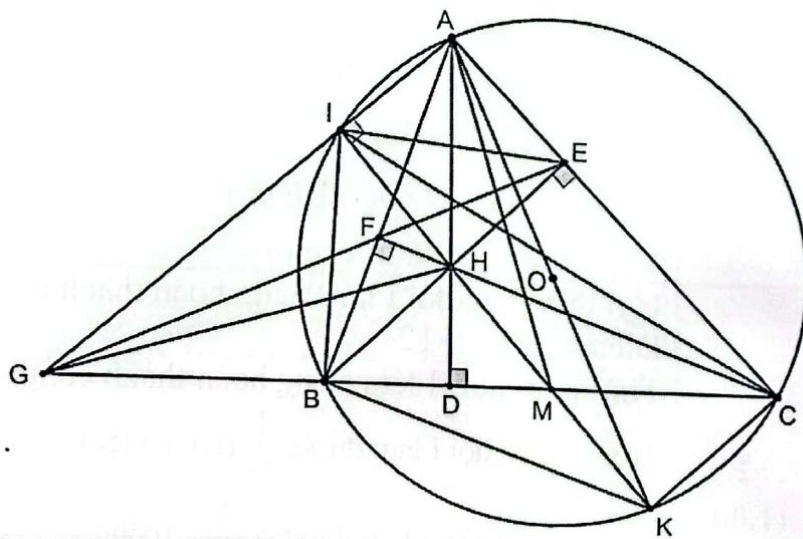
$$= 128\pi$$

$$\approx 402,12 \text{ (cm}^2\text{)}$$

0,25

0,25

Vẽ hình đúng đến ý a



0,25

a  
(1,0đ)

**Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp**

+ Có  $BE \perp AC$  ( $BE$  là đường cao của  $\triangle ABC$ )  $\Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ$

0,25

	<p>+ Có <math>CF \perp AB</math> (<math>CF</math> là đường cao của <math>\Delta ABC</math>) <math>\Rightarrow \widehat{CFB} = 90^\circ</math></p> <p>+ Có: <math>\widehat{BEC} = \widehat{CFB} = 90^\circ</math></p> <p><math>\Rightarrow</math> Bốn điểm <math>B, C, E, F</math> cùng thuộc đường tròn đường kính <math>BC</math></p> <p><math>\Rightarrow</math> Tứ giác <math>BFEC</math> nội tiếp</p>	0,25
	<p><b>Chứng minh <math>GF.GE = GB.GC</math></b></p> <p>+ Có tứ giác <math>BCEF</math> nội tiếp (cmt)</p> <p><math>\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{BCF}</math> (hai góc nội tiếp cùng chắn cung <math>BF</math>)</p> <p>Hay <math>\widehat{BEG} = \widehat{FCG}</math></p> <p>+ Xét <math>\Delta GBE</math> và <math>\Delta GFC</math> có:</p> <p><math>\widehat{CGE}</math> chung</p> <p><math>\widehat{BEG} = \widehat{FCG}</math> (cmt)</p> <p><math>\Rightarrow \Delta GBE</math> và <math>\Delta GFC</math> đồng dạng (g.g)</p>	0,25
	<p><math>\Rightarrow \frac{GB}{GF} = \frac{GE}{GC}</math></p> <p><math>\Rightarrow GF.GE = GB.GC</math></p>	0,25
	<p><b>Chứng minh <math>\Delta GAF</math> và <math>\Delta GEI</math> đồng dạng</b></p> <p>+ Có <math>\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = \widehat{AIH} = 90^\circ</math> (vì <math>BE \perp AC, CF \perp AB, HI \perp AG</math>)</p> <p><math>\Rightarrow</math> Năm điểm <math>A, F, H, E, I</math> cùng thuộc đường tròn đường kính <math>AH</math></p>	0,25
	<p>+ Xét đường tròn đường kính <math>AH</math> có:</p> <p><math>\widehat{IAF} = \widehat{IEF}</math> (hai góc nội tiếp cùng chắn cung <math>IF</math>)</p> <p>Hay <math>\widehat{GAF} = \widehat{GEI}</math></p> <p>+ Xét <math>\Delta GAF</math> và <math>\Delta GEI</math> có:</p> <p><math>\widehat{AGE}</math> chung</p> <p><math>\widehat{GAF} = \widehat{GEI}</math> (cmt)</p> <p><math>\Rightarrow \Delta GAF</math> và <math>\Delta GEI</math> đồng dạng (g.g)</p>	0,25
b (1,0đ)	<p><b>Chứng minh góc <math>GAB</math> bằng góc <math>GCI</math></b></p> <p>Có <math>\Delta GAF</math> và <math>\Delta GEI</math> đồng dạng (cmt)</p> <p><math>\Rightarrow \frac{GA}{GE} = \frac{GF}{GI}</math></p> <p><math>\Rightarrow GF.GE = G.A.GI</math></p> <p>Mà <math>GF.GE = GB.GC</math> (cmt)</p> <p><math>\Rightarrow G.A.GI = GB.GC</math></p> <p><math>\Rightarrow \frac{GA}{GC} = \frac{GB}{GI}</math></p>	0,25
	<p>Xét <math>\Delta GAB</math> và <math>\Delta GCI</math> có:</p> <p><math>\frac{GA}{GC} = \frac{GB}{GI}</math> (cmt)</p> <p><math>\widehat{AGC}</math> chung</p> <p><math>\Rightarrow \Delta GAB</math> và <math>\Delta GCI</math> đồng dạng (c.g.c)</p>	

	$\Rightarrow \widehat{GAB} = \widehat{GCI}$ <b>Chứng minh GH vuông góc với AM</b> + Kẻ đường kính AK của (O) + Chứng minh tứ giác BCI nội tiếp $\Rightarrow I \in (O) \Rightarrow \widehat{AIK} = 90^\circ$ $\Rightarrow KI \perp GA$ Mà $HI \perp GA$ $\Rightarrow$ Ba điểm K, H, I thẳng hàng + Xét (O) có: $\widehat{ABK} = \widehat{ACK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AB \perp KB, AC \perp KC$ + Từ $AB \perp KB, AB \perp CH \Rightarrow KB \parallel CH$ + Từ $AC \perp KC, AC \perp BH \Rightarrow KC \parallel BH$ Do đó tứ giác BHCK là hình bình hành $\Rightarrow BC$ và $KH$ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường Mà M là trung điểm của đoạn thẳng BC $\Rightarrow M$ là trung điểm của đoạn thẳng KH $\Rightarrow$ Ba điểm K, M, H thẳng hàng Mà K, H, I thẳng hàng (cmt) $\Rightarrow$ Ba điểm M, H, I thẳng hàng + Xét $\triangle AGM$ có: $AD \perp GM, MI \perp AG$ H là giao điểm của AD và MI $\Rightarrow H$ là trực tâm của $\triangle AGM$ $\Rightarrow GH \perp AM$	0,25
c (0,75d)		0,25
	Có BĐT: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ với mọi $x, y > 0; a, b \in R$ (*) Thật vậy: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ $\Leftrightarrow a^2y(x+y) + b^2x(x+y) \geq xy(a+b)^2$ (vì $x, y > 0$ ) $\Leftrightarrow a^2y^2 + b^2x^2 \geq 2abxy$ $\Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0$ (luôn đúng với mọi $x, y > 0; a, b \in R$ )	0,25
6 (0,75 điểm)	Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x} \\ b = \sqrt{y} \\ c = \sqrt{z} \end{cases} \Rightarrow a, b, c > 0$ $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 2024 \Rightarrow ab + bc + ca = 2024$ Có $M = \frac{a^4}{a^2 + b^2} + \frac{b^4}{b^2 + c^2} + \frac{c^4}{c^2 + a^2}$ Áp dụng BĐT (*), ta có:	0,25



$$\begin{aligned}
 M &= \frac{a^4}{a^2+b^2} + \frac{b^4}{b^2+c^2} + \frac{c^4}{c^2+a^2} \\
 &\geq \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2+b^2+b^2+c^2} + \frac{c^4}{c^2+a^2} \\
 &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2} \\
 &= \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} \\
 &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2}
 \end{aligned}$$

0,25

$$\left. \begin{aligned}
 a^2 + b^2 &\geq 2ab \\
 \text{Có: } b^2 + c^2 &\geq 2bc \\
 c^2 + a^2 &\geq 2ac
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$\text{Mà } ab + bc + ca = 2024$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 2024$$

$$\text{Do đó } M \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \geq \frac{2024}{2} = 1012$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{\frac{2024}{3}}$$

$$\Rightarrow x = y = z = \frac{2024}{3}$$

$$\text{Vậy GTNN của } M \text{ là } 1012 \text{ khi } x = y = z = \frac{2024}{3}.$$

0,25

**\* Chú ý:**

- Trên đây chỉ trình bày một cách giải, nếu học sinh làm cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa ứng với điểm của câu đó.

- Học sinh làm đúng đến đâu cho điểm đến đó theo đúng biểu điểm.

- Trong một câu:

+ Có nhiều ý mà các ý phụ thuộc nhau, học sinh làm phần trên sai phần dưới đúng thì không cho điểm.

+ Có nhiều ý mà các ý không phụ thuộc nhau, học sinh làm đúng ý nào thì cho điểm ý đó.

- Bài hình học, học sinh vẽ sai hình thì không chấm điểm. Học sinh không vẽ hình mà vẫn làm đúng thì cho nửa số điểm của các câu làm được.

- Bài làm có nhiều ý liên quan đến nhau, nếu học sinh công nhận ý trên mà làm đúng ý dưới thì cho điểm ý đó.

- Điểm của bài thi là tổng điểm các câu làm đúng và không được làm tròn.