UBND THỊ XÃ HOÀI NHƠN
PHÒNG GD – ĐT

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THỊ XÃ

Năm học: **2023 – 2024**
Môn: **TOÁN 8** – *Ngày thi:* **13/04/2024**
Thời gian làm bài: ***150 phút*** *(không kể thời gian phát đề)*

---------- oOo ----------

Bài 1. (*4,0 điểm*) Cho biểu thức: $A=\dfrac{x^4+2}{x^6+1}+\dfrac{x^2-1}{x^4-x^2+1}-\dfrac{x^2+3}{x^4+4x^2+3}$.

a) Tìm điều kiện xác định của A. b) Rút gọn A.

c) Tính giá trị lớn nhất của A.

Bài 2. (*4,0 điểm*)

a) Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện:

$$4a^2+2b^2+2c^2-4ab-4ac+2bc-6b-10c+34=0.$$

Tính giá trị của biểu thức: $B=(a-4)^{2024}+(b-4)^{2024}+(c-4)^{2024}$.

b) Biết m, n, p là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $\left(m^2+n^2-p^2\right)^2-4m^2n^2<0$.

Bài 3. (*4,0 điểm*)

a) Cho a, b là bình phương của hai số nguyên lẻ liên tiếp.

Chứng minh rằng $ab-a-b+1$ chia hết cho 48.

b) Cho a và b là các số tự nhiên của hai số tự nhiên thỏa mãn $2a^2+a=3b^2+b$.

Chứng minh rằng: $a-b$ và $3a+3b+1$ là các số chính phương.

Bài 4. (*4,0 điểm*)

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên đường chéo BD lấy điểm P, gọi M là điểm đối xứng của điểm C qua P.

a) Tứ giác $AMDB$ là hình gì?

b) Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của điểm M lên đường thẳng AB, AD. Chứng minh $EF \parallel AC$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng tỷ số hai cạnh liên tiếp của hình chữ nhật $MEAF$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm P.

d) Giả sử $CP\perp BD$ và $CP=2,4$ cm; $\dfrac{PD}{PB}=\dfrac{9}{16}$. Tính chu vi và diện tích hình chữ nhật $ABCD$.

Bài 5. (*3,0 điểm*)

Gọi O là giao điểm ba đường trung trực của ba cạnh tam giác ABC. Tia AO cắt BC tại D. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $DE=DB$; trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $DF=DC$.

a) Chứng minh: DA là tia phân giác của $\widehat{EDF}$.

b) DE cắt OB tại I; DF cắt OC tại K. Tam giác IOK là tam giác gì? Vì sao?

Bài 6. (*1,0 điểm*)

Cho tam giác OAB có $\widehat{O}=120^\circ$, $OA=a$, $OB=b$ và đường phân giác của góc O là $OC=c$.

Chứng minh: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$.

---------- ꩜ HẾT ꩜ ----------

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – HSG TOÁN 8 – HOÀI NHƠN 2023

Bài 1. (*4,0 điểm*) Cho biểu thức: $A=\dfrac{x^4+2}{x^6+1}+\dfrac{x^2-1}{x^4-x^2+1}-\dfrac{x^2+3}{x^4+4x^2+3}$.

a) Tìm điều kiện xác định của A. b) Rút gọn A.

c) Tính giá trị lớn nhất của A.

a) Ta có
- $x^6+1>0$, với mọi x
- $x^4-x^2+1=\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$, với mọi x.
- $x^4+4x^2+3>0$, với mọi x.

➢ Do đó A xác định với mọi x.

b) Ta có:
$$\begin{aligned}A&=\frac{x^4+2}{x^6+1}+\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}-\frac{x^2+3}{x^4+4x^2+3}\\&=\frac{x^4+2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}+\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}-\frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+3)}\\&=\frac{x^4+2+(x^2-1)(x^2+1)-(x^4-x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\frac{x^4+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\\&=\frac{x^2(x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\frac{x^2}{x^4-x^2+1}.\end{aligned}$$

➢ Vậy $A=\dfrac{x^2}{x^4-x^2+1}$.

c) Ta có: $x^4+1\geq 2\sqrt{x^4\cdot 1}=2x^2 \Rightarrow x^4-x^2+1\geq x^2$. Dấu "=" xảy ra khi $x^4=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Do đó $A=\dfrac{x^2}{x^4-x^2+1}\leq\dfrac{x^2}{x^2}=1$.

➢ Vậy $A_{\max}=1$ khi $x=\pm 1$.

Bài 2. (*4,0 điểm*)

a) Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện:
$$4a^2+2b^2+2c^2-4ab-4ac+2bc-6b-10c+34=0.$$
Tính giá trị của biểu thức: $B=(a-4)^{2024}+(b-4)^{2024}+(c-4)^{2024}$.

b) Biết m, n, p là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $\left(m^2+n^2-p^2\right)^2-4m^2n^2<0$.

a) Ta có: $4a^2+2b^2+2c^2-4ab-4ac+2bc-6b-10c+34=0$
$$\Leftrightarrow 4a^2+b^2+c^2-4ab-4ac+2bc+b^2-6b+9+c^2-10c+25=0$$
$$\Leftrightarrow (2a-b-c)^2+(b-3)^2+(c-5)^2=0\ (*).$$

Vì $(2a-b-c)^2\geq 0$, $(b-3)^2\geq 0$, $(c-5)^2\geq 0$ với mọi a, b, c.

Do đó $(*)\Rightarrow\begin{cases}(2a-b-c)^2=0\\(b-3)^2=0\\(c-5)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b-c=0\\b-3=0\\c-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=3\\c=5\end{cases}.$

➢ Vậy $B=(4-4)^{2024}+(3-4)^{2024}+(5-4)^{2024}=0^{2024}+(-1)^{2024}+1^{2024}=2$.

b) Ta có $A=\left(m^2+n^2-p^2\right)^2-4m^2n^2=\left(m^2+n^2-p^2-2mn\right)\left(m^2+n^2-p^2+2mn\right)$

$$=\left[(m-n)^2-p^2\right]\left[(m+n)^2-p^2\right]=(m-n-p)(m-n+p)(m+n-p)(m+n+p).$$

Vì m, n, p là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $\begin{cases} m-n-p<0 \\ m-n+p>0 \\ m+n-p>0 \\ m+n+p>0 \end{cases} \Rightarrow A<0$.

➢ Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 3. *(4,0 điểm)*

a) Cho a, b là bình phương của hai số nguyên lẻ liên tiếp.

Chứng minh rằng $ab-a-b+1$ chia hết cho 48.

b) Cho a và b là các số tự nhiên của hai số tự nhiên thỏa mãn $2a^2+a=3b^2+b$.

Chứng minh rằng: $a-b$ và $3a+3b+1$ là các số chính phương.

a) Theo đề $a=(2k-1)^2$, $b=(2k+1)^2$ với $k\in\mathbb{Z}$.

Ta có: $ab-a-b+1=(a-1)(b-1)=\left[(2k-1)^2-1\right]\left[(2k+1)^2-1\right]=16(k-1)k^2(k+1)$

Vì $k-1$; k; $k+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên $(k-1)k(k+1)\,\vdots\,3 \Rightarrow 16(k-1)k^2(k+1)\,\vdots\,48$.

➢ Vậy bài toán được chứng minh.

b) Ta có: $2a^2+a=3b^2+b \Leftrightarrow 3\left(a^2-b^2\right)+(a-b)=a^2 \Leftrightarrow (a-b)(3a+3b+1)=a^2$.

Gọi $d=\text{ƯCLN}(a-b,3a+3b+1)$ (với d là số tự nhiên).

Khi đó: • $3(a-b)+(3a+3b+1)\,\vdots\,d \Rightarrow 6a+1\,\vdots\,d$ (1).

• $a^2\,\vdots\,d^2 \Rightarrow a\,\vdots\,d$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra: $1\,\vdots\,d \Rightarrow d=1$, nên $(a-b,3a+3b+1)=1$ $(**)$.

➢ Từ $(*)$ và $(**)$, suy ra: $a-b$ và $3a+3b+1$ đều là các số chính phương.

Bài 4. *(4,0 điểm)*

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên đường chéo BD lấy điểm P, gọi M là điểm đối xứng của điểm C qua P.

a) Tứ giác $AMDB$ là hình gì?

b) Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của điểm M lên đường thẳng AB, AD. Chứng minh $EF \,//\, AC$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng tỷ số hai cạnh liên tiếp của hình chữ nhật $MEAF$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm P.

d) Giả sử $CP\perp BD$ và $CP=2{,}4$ cm; $\dfrac{PD}{PB}=\dfrac{9}{16}$. Tính chu vi và diện tích hình chữ nhật $ABCD$.

Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$.

a) Vì O, P lần lượt là trung điểm của AC và CM $\Rightarrow$ OP là đường trung bình của ΔACM $\Rightarrow OP \,//\, AM \Rightarrow AM \,//\, BD \Rightarrow$ tứ giác $AMDB$ là hình thang.

b) ❖ Ta có: $\widehat{FEA}=\widehat{MAE}$ (vì $AEMF$ là hình chữ nhật)

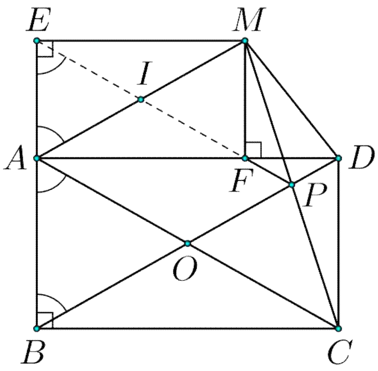
$\widehat{DBA}=\widehat{BAC}$ (vì $ABCD$ là hình chữ nhật)

$\widehat{MAE}=\widehat{DBA}$ (vì $AM \,//\, BD$ và cặp góc $\widehat{MAE}$, $\widehat{DBA}$ so le trong)

Do đó $\widehat{FEA}=\widehat{BAC}$, mà $\widehat{FEA}$ và $\widehat{BAC}$ là cặp góc đồng vị $\Rightarrow$ $EF\,//\,AC$ (1).

❖ Gọi I là tâm hình chữ nhật $AEMF$.

Vì I, P lần lượt là trung điểm của MA và MC $\Rightarrow$ IP là đường trung bình của ΔACM $\Rightarrow$ $IP\,//\,AC$ (2).



Lại có E, I, F thẳng hàng (3).

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow$ ba điểm E, F, P thẳng hàng.

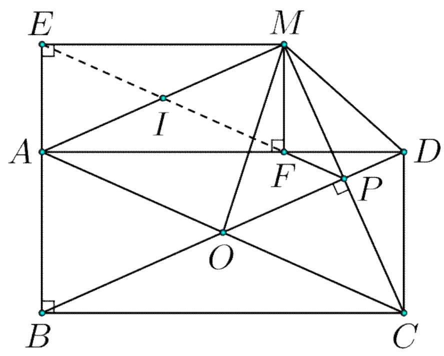
c) Xét ΔAEF và ΔBAC, ta có:

$\widehat{AEF}=\widehat{BAC}$ (cmt); $\widehat{EAF}=\widehat{ABC}\left(=90^\circ\right)$.

Suy ra $\Delta AEF \backsim \Delta BAC$ (g - g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AF}=\dfrac{BA}{BC}$

Mà $\dfrac{BA}{BC}$ không đổi $\Rightarrow \dfrac{AE}{AF}$ không đổi.

➢ Vậy yêu cầu bài toán được chứng minh.



d) Ta có $\Delta CBD \backsim \Delta DCP$ (g - g)

$\Rightarrow \dfrac{CP}{PD}=\dfrac{PB}{CP} \Rightarrow CP^2=PB\cdot PD \Rightarrow CP^2=PB\cdot\dfrac{9PB}{16}$

$\Rightarrow PB^2=\dfrac{16CP^2}{9} \Rightarrow PB^2=\dfrac{16\cdot 2,4^2}{9}=10,24$

$\Rightarrow PB=3,2$ cm $\Rightarrow PD=1,8$ cm $\Rightarrow BD=5$ cm.

Áp dụng định lí Pytago cho các tam giác vuông BCP và CDP, tính được:

$$BC=4\text{ cm};\ CD=3\text{ cm}.$$

Khi đó
- $C_{ABCD}=2\left(BC+CD\right)=2\left(4+3\right)=24$ cm
- $S_{ABCD}=BC\cdot CD=4\cdot 3=12$ cm^2.

Bài 5. *(3,0 điểm)*

Gọi O là giao điểm ba đường trung trực của ba cạnh tam giác ABC. Tia AO cắt BC tại D. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $DE=DB$; trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $DF=DC$.

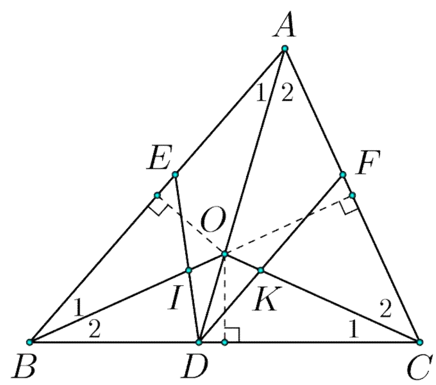
a) Chứng minh: DA là tia phân giác của $\widehat{EDF}$.

b) DE cắt OB tại I; DF cắt OC tại K. Tam giác IOK là tam giác gì? Vì sao?

a) Vì O là giao điểm ba đường trung trực $\Rightarrow$ $OA=OB=OC$ $\Rightarrow$ ΔAOB, ΔBOC, ΔCOA là các tam giác cân tại O $\Rightarrow$ $\widehat{A_1}=\widehat{B_1}$ (1); $\widehat{B_2}=\widehat{C_1}$ (2); $\widehat{C_2}=\widehat{A_2}$ (3).

Vì $DE=DB$ $\Rightarrow$ ΔDBE cân tại D $\Rightarrow$ $\widehat{DBE}=\widehat{DEB}$

$\Rightarrow$ $\widehat{B_1}+\widehat{B_2}=\widehat{A_1}+\widehat{ADE}$ (4).



Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{B_2}=\widehat{ADE}$ (5).

Tương tự ta chứng minh được $\widehat{C_1}=\widehat{ADF}$ (6).

Từ (5) và (6) $\Rightarrow$ DA là tia phân giác của $\widehat{EDF}$.

b) Chứng minh được: $\Delta OBD \backsim \Delta ODI$ $\Rightarrow$ $OD^2=OI\cdot OB$.

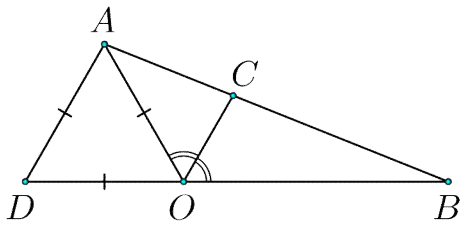
$\Delta OCD \backsim \Delta ODK$ $\Rightarrow$ $OD^2=OK\cdot OC$

$\Rightarrow$ $OI\cdot OB=OK\cdot OC$ mà $OB=OC$ $\Rightarrow$ $OI=OK$ $\Rightarrow$ ΔIOK cân tại O.

Bài 6. (*1,0 điểm*)

Cho tam giác OAB có $\widehat{O}=120^\circ$, $OA=a$, $OB=b$ và đường phân giác của góc O là $OC=c$.

Chứng minh: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$.



Qua A vẽ đường thẳng song song với OC cắt OB tại D

$\Rightarrow$ ΔOAD đều $\Rightarrow$ $AD=DO=a$.

Vì $AD \,//\, CO$ nên $\dfrac{BD}{BO}=\dfrac{AD}{CO}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{a}{c}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{a}{b}+1=\dfrac{a}{c}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$.

---------- ꕥ CHÚC CÁC EM MAY MẮN ꕥ ----------