PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ VINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm có 01 trang)

KỲ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2023-2024
Môn thi: Toán lớp 8
Thời gian: 120 phút *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho a,b là các số nguyên dương sao cho $a+1$ và $b+2025$ đều chia hết cho 6. Chứng minh rằng $M=4^n+a+b$ chia hết cho 6 (với $n\in\mathbb{N}^*$)

b) Chứng minh rằng với mọi n là số tự nhiên lớn hơn 1 thì $A=n^4+4^n$ là hợp số.

Câu 2. *(3,0 điểm)*

1. Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x-4}{x^3-1}-\dfrac{1}{1-x}\right):\left(1+\dfrac{8-x}{x^2+x+1}\right)$ với $x\neq 1$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị là một số nguyên.

2. Cho x,y,z là các số thực khác 0 thỏa mãn $x^2-yz=\dfrac{3y^2}{2};y^2-zx=\dfrac{3z^2}{2};z^2-xy=\dfrac{3x^2}{2}$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\left|\dfrac{2024xyz}{x^2z+y^2x+z^2y}\right|$

Câu 3. *(3,0 điểm)* a) Biết đa thức $P(x)$ chia cho $(x-1)$ dư 1, $P(x)$ chia cho (x^3+1) dư x^2+x+1 Tìm đa thức dư của phép chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $(x-1)(x^3+1)$.

b) Giải phương trình $(x-3)(x-5)(x-6)(x-10)-24x^2=0$.

c) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=2024$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^3}{x^2+xy+y^2}+\dfrac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\dfrac{z^3}{z^2+zx+x^2}$

Câu 4. *(3,0 điểm)*

1. Một người mua một căn hộ chung cư dành cho người có thu nhập thấp với giá 500 triệu đồng. Người đó trả trước số tiền là 100 triệu đồng, số tiền còn lại người đó thanh toán theo hình thức trả góp với lãi suất tính trên tổng số tiền còn nợ là 0,5% mỗi tháng. Kể từ ngày mua, sau mỗi tháng người đó trả số tiền cố định là 4 triệu đồng.

a) Tính số tiền người đó còn nợ sau 3 tháng.

b) Với việc trả góp như trên, hỏi sau 1 năm người đó còn nợ bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

2. Trong một hộp kín có 6 viên bi đỏ, 4 viên bi xanh, 8 viên bi vàng (*có kích thước và hình dạng như nhau chỉ khác màu sắc*). Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ trong hộp.

a) Tính xác suất lấy được viên bi mỗi màu.

b) Thêm vào hộp một số viên bi màu đỏ, màu xanh và màu vàng sao cho xác suất chọn được một viên bi mỗi màu không đổi. Cần thêm ít nhất bao nhiêu viên bi mỗi màu?

Câu 5. *(8,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC) có ba đường cao AD, BE và CF đồng quy tại H. Điểm I là giao điểm của BE và DF.

a) Chứng minh tam giác ABC đồng dạng với tam giác AEF.

b) Chứng minh IH.BE = BI.HE.

c) Vẽ AK vuông góc với EF (K $\in$ EF). Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của EF và DK. Chứng minh A, P, Q thẳng hàng.

Câu 6. *(1,0 điểm)*

Một con Robot di chuyển trên một mặt phẳng tọa độ, chỉ đi qua các điểm nguyên (*điểm có hoành độ và tung độ đều là số nguyên*) theo nguyên tắc sau: Từ điểm (x,y) con Robot chỉ có thể di chuyển đến bất kì điểm nào đó trong số các điểm $(y,x);(3x,-2y);\ (-2x,3y);\ (x+1,y+4);\ (x-1,y-4)$ Ban đầu con Robot đang ở điểm $A(2023;2024)$ hỏi con robot có thể di chuyển đến gốc tọa độ $O(0,0)$ được hay không?

----------- ***HẾT*** ----------

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ VINH

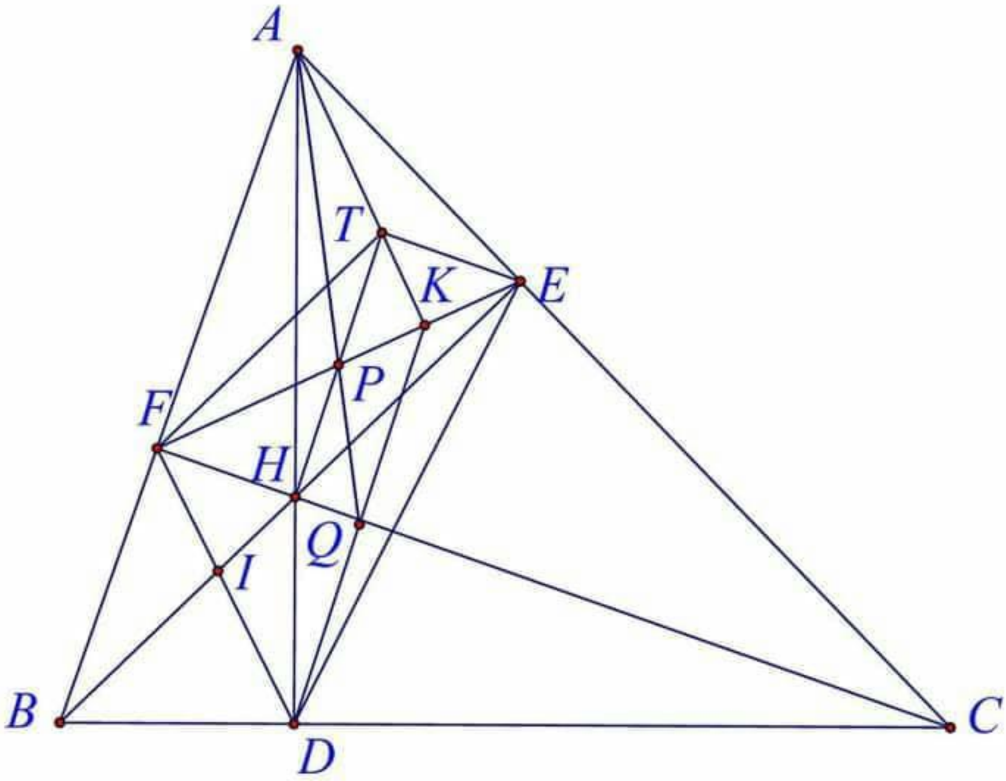
KỲ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2023-2024

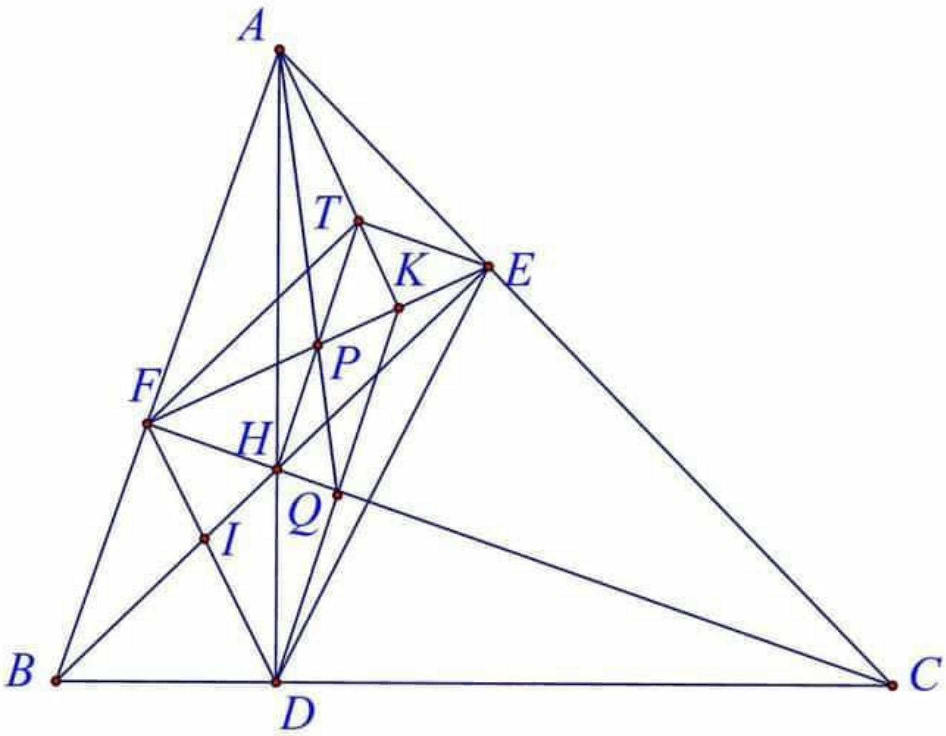
(HƯỚNG DẪN CHẤM THI)

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	1.1 (1,0đ)	Vì 1; 2025 là các số lẻ nên a, b là các số lẻ, suy ra a + b chia hết cho 2 và $4^n \vdots 2$. Do đó M chia hết cho 2	0.25
		Vì 2025 chia hết cho 3 nên b chia hết cho 3.	0,25
		Theo giả thiết a + 1 chia hết cho 3 và $\left(4^n-1\right)\vdots\left(4-1\right)\vdots 3$.	0,25
		Do đó $M=4^n+a+b=\left(4^n-1\right)+\left(a+1\right)+b\vdots 3$	
		Vì (2;3) = 1. Suy ra $M\vdots 6$.	0,25
	1.2 (1,0đ)	Trường hợp 1: Với $n=2.m \Rightarrow A=16.m^4+4^{2m}$ $\left(m\in\mathbb{N}^*\right)$ là hợp số.	0,25
		Trường hợp 2: Với $n=2.m+1 \Rightarrow A=n^4+2.2^n+2^{2n}-2.2^n$	0,25
		$A=\left(n^2+2^n\right)^2-2.2^{2m+1}=\left(n^2+2^n\right)^2-2^{2m+2}$	0,25
		$A=\left(n^2+2^n+2^{m+1}\right)\left(n^2+2^n-2^{m+1}\right)$ suy ra A là hợp số	0,25
2	2.1a (1,5đ)	với $x\neq 1$ ta có $A=\left(\dfrac{x-4}{x^3-1}+\dfrac{x^2+x+1}{x^3-1}\right):\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{x-8}{x^2+x+1}\right)$	0,25
		$A=\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^3-1}\right):\dfrac{x^2+9}{x^2+x+1}$	0,5
		$A=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}.\dfrac{x^2+x+1}{x^2+9}$	0,5
		$A=\dfrac{x+3}{x^2+9}$	0,25
	2.1b (0,5đ)	A nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x^2+9}$ là số nguyên. Khi đó $(x+3)\vdots\left(x^2+9\right)$	0,25
		Suy ra $\left(x^2-9\right)\vdots\left(x^2+9\right)\Rightarrow\left(x^2+9-18\right)\vdots\left(x^2+9\right)\Rightarrow 18\vdots\left(x^2+9\right)$	
		Do $x^2+9\geq 9\Rightarrow x^2+9\in\{9;18\}$	0,25
		$x=\{-3;0;3\}$	
		Thử lại nhận được $x=-3$	
	2.2 (1,0đ)	Điều kiện: $x^2z+y^2x+z^2y\neq 0$ (*) Cộng các hệ thức vế theo vế $x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)=\dfrac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)\Leftrightarrow(x+y+z)^2=0$ Suy ra $x+y+z=0$	0,75
		Theo giả thiết ta có $\begin{cases}x^2-yz=\dfrac{3y^2}{2}\\ y^2-zx=\dfrac{3z^2}{2}\\ z^2-xy=\dfrac{3x^2}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-xyz=\dfrac{3y^2x}{2}\\ y^3-xyz=\dfrac{3z^2y}{2}\\ z^3-xyz=\dfrac{3x^2z}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3-3xyz=\dfrac{3}{2}\left(x^2z+y^2x+z^2y\right)$	0,25

		Do $x+y+z=0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3-3xyz$ $=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=0$ Nên $x^2z+y^2x+z^2y=0$ Không thỏa mãn điều kiện (*) Vậy không tồn tại giá trị của P.	
3	**3.a (1,0đ)**	Đặt $P(x)=(x-1)(x^3+1).Q(x)+ax^3+bx^2+cx+d$ với mọi x Vì $ax^3+bx^2+cx+d=a(x^3+1)+bx^2+cx+d-a$	0,25
		Từ $P(x)$ chia cho x^3+1 dư x^2+x+1 suy ra $bx^2+cx+d-a=x^2+x+1$.Do đó $b=1;c=1;d-a=1$	0,25
		Lại có $P(x)$ chia cho $x-1$ dư 1 Nên $P(1)=1$ hay $a+b+c+d=1 \Rightarrow a+d=-1 \Rightarrow d=0;\ a=-1$	0,25
		Vậy đa thức dư là: $-x^3+x^2+x$	0,25
	3.b (1,0đ)	Với $x=0$, ta có $(0-3)(0-5)(0-6)(0-10)-24.0^2=0$ (vô lí) $\Rightarrow x=0$ không t/m.	0,25
		Với $x\neq 0$, Ta có: $\left(x^2-11x+30\right)\left(x^2-13x+30\right)-24x^2=0$ $\Leftrightarrow \left(x-11+\dfrac{30}{x}\right)\left(x-13+\dfrac{30}{x}\right)-24=0$. Đặt $y=x+\dfrac{30}{x}$ khi đó ta có phương trình: $(y-11)(y-13)-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=7 \\ y=17 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{30}{x}=7\ \ (1) \\ x+\dfrac{30}{x}=17\ \ (2) \end{array}\right.$	0,25
		+) Giải (1) $\Leftrightarrow x^2-7x+30=0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{71}{4}>0$ đúng $\forall x$ $\Rightarrow$ không có giá trị của x thỏa mãn.	0,25
		+) Giải (2) $\Leftrightarrow x^2-17x+30=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-15)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=15 \end{array}\right.$ (T/m) Vậy $x\in\{2;15\}$	0,25
		Vậy PT có nghiệm $x=2;x=15$	
	3.c (1,0đ)	$(x-y)^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2\ge 2xy \Leftrightarrow x^2+xy+y^2\ge 3xy$. Dấu = xảy ra khi $x=y$	0,25
		$\dfrac{x^3}{x^2+xy+y^2}=\dfrac{x^3+x^2y+xy^2-x^2y-xy^2}{x^2+xy+y^2}$ $=\dfrac{x\left(x^2+xy+y^2\right)-xy(x+y)}{x^2+xy+y^2}\ge x-\dfrac{xy(x+y)}{3xy}=x-\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{2x}{3}-\dfrac{y}{3}$	0,25
		Tương tự ta có $\dfrac{y^3}{y^2+yz+z^2}\ge\dfrac{2y}{3}-\dfrac{z}{3}$; $\dfrac{z^3}{z^2+zx+x^2}\ge\dfrac{2z}{3}-\dfrac{x}{3}$	0,25
		Cộng 3 BĐT ta được $P\ge\dfrac{2}{3}(x+y+z)-\dfrac{1}{3}(x+y+z)=\dfrac{2024}{3}$ Vậy GTNN của $P=\dfrac{2024}{3}$. Dấu = xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{2024}{3}$. (Nếu học sinh sử dụng BĐT AM-GM dạng cộng mẫu cho 0,75/1,0)	0,25
4	**4.1a (1,0đ)**	Tổng số tiền người đó còn nợ là $A_0=400$ triệu đồng.	0,25
		Số tiền người đó còn nợ hết tháng thứ nhất là: $A_1=A_0+0,5\%.A_0-4=1,005.A_0-4$	0,25

		Số tiền người đó còn nợ hết tháng thứ hai là: $A_2 = A_1 + 0,5\%.A_1 - 4 = 1,005^2.A_0 - 4(1,005+1)$ Số tiền người đó còn nợ hết tháng thứ ba là: $A_3 = A_2 + 0,5\%.A_2 - 4 = (1,005)^3.A_0 - 4\left[(1,005)^2 + 1,005 + 1\right]$ $A_3 \approx 393,970$ (triệu đồng)	0,5
	4.1b (0,5đ)	Số tiền người đó còn nợ hết tháng thứ n là: $A_n = (1,005)^n.A_0 - 4\left[(1,005)^{n-1} + ... + 1,005 + 1\right]$ $A_n = (1,005)^n.A_0 - 4\dfrac{(1,005)^n - 1}{1,005 - 1} = (1,005)^n.A_0 - 800\left[(1,005)^n - 1\right]$	0,25
		Sau 1 năm = 12 tháng số tiền người đó còn nợ là: $A_{12} = (1,005)^{12}.400 - 800\left[(1,005)^{12} - 1\right] \approx 375,329$ (triệu đồng) Người đó còn nợ 375.329 triệu đồng.	0,25
	4.2a (1,0đ)	Trong hộp có tổng số viên bi là 18 viên bi, lấy ngẫu nhiên 1 viên bi trong hộp có 18 kết quả có thể xảy ra là 18.	0,25
		Số kết quả thuận lợi để lấy được viên bi đỏ là 6 nên $P(D) = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$	0,25
		Số kết quả thuận lợi để lấy được viên bi xanh là 4 nên $P(X) = \dfrac{4}{18} = \dfrac{2}{9}$	0,25
		Số kết quả thuận lợi để lấy được viên bi vàng là 8 nên $P(V) = \dfrac{8}{18} = \dfrac{4}{9}$	0,25
	4.2b (0,5đ)	Gọi số bi đỏ, xanh, vàng cần thêm vào là x, y, z $\left(x, y, z \in \mathbb{N}^*\right)$ ta có $P(D) = \dfrac{6+x}{18+x+y+z} = \dfrac{1}{3}$ (1); $P(X) = \dfrac{4+y}{18+x+y+z} = \dfrac{2}{9}$ (2); $P(V) = \dfrac{8+z}{18+x+y+z} = \dfrac{4}{9}$ (3). Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2x = 3y$; từ (1) và (3) $\Rightarrow 4x = 3z$; từ (2) và (3) $2z = 4y$ $\begin{cases} x = 3k \\ y = 2k \\ z = 4k \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}^*$	0,25
		Do số bi cần thêm vào là ít nhất nên $x = 3, y = 2, z = 4$ Thử lại: $P(D) = \dfrac{6+3}{18+3+2+4} = \dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{3}$ (1); $P(X) = \dfrac{4+2}{18+3+2+4} = \dfrac{6}{27} = \dfrac{2}{9}$ (2); $P(V) = \dfrac{8+4}{18+3+2+4} = \dfrac{12}{27} = \dfrac{4}{9}$ (3). Vậy phải thêm 3 đỏ, 2 xanh và 4 vàng.	0,25

5	5a (3,5đ)	 (Hình vẽ đến hết câu b cho 0,5)	0,5
		ΔABE vuông tại E và ΔACF vuông tại F có góc A chung $\Delta BAE \sim \Delta ACF \qquad (g-g) \Rightarrow \dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AB}{AC}$	1,5
		ΔAEF và ΔABC có góc A chung và $\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AB}{AC}$ Suy ra $\Delta AEF \sim \Delta ABC \qquad (g-g)$	1,5
	5b (2,5đ)	$\Delta HFA \sim \Delta HDC(g-g) \Rightarrow \dfrac{HF}{HD}=\dfrac{HA}{HC} \Rightarrow \Delta FHD \sim \Delta AHC(c-g-c)$ $\Rightarrow \widehat{HDF}=\widehat{HCA}$	0,5
		Tương tự $\widehat{HDE}=\widehat{HBA}$	0,25
		Mà $\widehat{HBA}=\widehat{HCA}$ do cùng phụ với $\widehat{BAC}$	0,25
		Suy ra DH là tia phân giác $\widehat{EDF}$	0,5
		Ta có $\dfrac{HI}{HE}=\dfrac{DI}{DE}$ (Tính chất đường phân giác trong tam giác) (1)	0,25
		Mặt khác $DH \perp DB$ nên DB là tia phân giác ngoài tại đỉnh D của tam giác IDE. Do đó $\dfrac{BI}{BE}=\dfrac{DI}{DE}$ (2)	0,25
		Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{HI}{HE}=\dfrac{BI}{BE} \Rightarrow HI.BE=HE.BI$	0,5

	5c (2,0đ)		
		Gọi T là trực tâm của tam giác AEF, ta có tứ giác TEHF là hình hình hành. Do P là trung điểm của EF nên P là trung điểm của TH. (3)	0,5
		$\Delta AKH \sim \Delta ADB(g-g) \Rightarrow \dfrac{AK}{AD} = \dfrac{AE}{AB}$ (*)	0,25
		Lại có $\widehat{BAH} = \widehat{EAT}, \widehat{AET} = \widehat{ACF} = \widehat{ABH} \Rightarrow \Delta ATE \sim \Delta AHB(g-g)$ $\Rightarrow \dfrac{AT}{AH} = \dfrac{AE}{AB}$ (**)	0,5
		Từ (*) và (**) suy ra $\dfrac{AK}{AD} = \dfrac{AT}{AH} \Rightarrow \dfrac{AT}{AK} = \dfrac{AH}{AD} \Rightarrow HT//DK$ (Thales đảo) (4)	0,5
		Từ (3) và (4) suy ra A, P, Q thẳng hàng theo bổ đề hình thang.	0,25
6 (1,0đ)	6 (1,0đ)	Xét tổng tọa độ theo modulo 5 $y + x \equiv x + y \pmod 5$	0,25
		$3x - 2y \equiv 3(x+y) - 5y \equiv 3(x+y) - 5y \equiv -2x + 3y \equiv x + y \pmod 5$	0,25
		$x + 1 + y + 4 \equiv x + y + 5 \equiv x + y - 5 \equiv x - 1 + y - 4 \equiv x + y \pmod 5$	0,25
		Lúc đầu robot ở vị trí có tổng tọa độ là $2023 + 2024 = 4047 \equiv 2 \pmod 5$ Mà $0 + 0 = 0 \equiv (\bmod 5)$. Nên robot không thể di chuyển đến điểm O.	0,25