CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ BẬC HAI

I. LÝ THUYẾT.

1. KHÁI NIỆM HÀM SỐ BẬC HAI

Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức: $y = ax^2 + bx + c,$

Trong đó x là biến số, a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.

Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Chú ý :

+) Khi $a = 0$, $b \neq 0$, hàm số trở thành hàm số bậc nhất $y = bx + c$.

+) Khi $a = b = 0$, hàm số trở thành hàm hằng $y = c$.

2. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ là một parabol có:

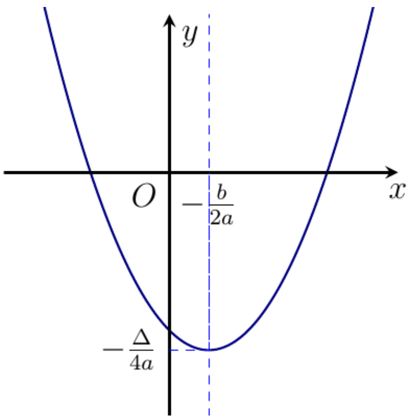
+) Đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

+) Trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$.

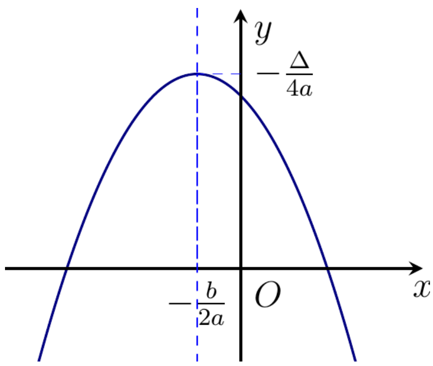
+) Bề lõm hướng lên trên nếu $a > 0$, hướng xuống dưới nếu $a < 0$.

+) Giao điểm với trục tung là $M(0; c)$.

+) Số giao điểm với trục hoành bằng số nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.



$a > 0$



$a < 0$

BẢNG BIẾN THIÊN:

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$ ↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$

+ Khi $a > 0$, hàm số ĐB trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$ và NB trên khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$.

+ Khi $a < 0$, hàm số ĐB trên khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$ và NB trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$ ta tiến hành theo các bước sau:

1. Xác định toạ độ đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$;
2. Vẽ trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a}$;
3. Xác định toạ độ các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có) và một vài điểm đặc biệt trên parabol;
4. Vẽ parabol.

II MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP

DẠNG 1. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ $y = \mathrm{ax}^2 + b\mathrm{x} + c$ ĐỒNG BIẾN HOẶC NGHỊCH BIẾN TRÊN KHOẢNG $(a;b)$.

PHƯƠNG PHÁP:

+ Trường hợp $a = 0$: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

+ Trường hợp $a > 0$: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (A;B) \subset \left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right) \end{cases}$.

+ Trường hợp $a < 0$: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ (A;B) \subset \left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right) \end{cases}$.

BÀI TẬP:

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^2 + 2mx + 1$ đồng biến trên $(-\infty;3)$.

Lời giải

Ta có $a = -1 < 0$, $-\dfrac{b}{2a} = m$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;m)$.

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty;3)$ thì $-\dfrac{b}{2a} \geq 3 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Vậy $m \geq 3$ thì hàm số $y = -x^2 + 2mx + 1$ đồng biến trên $(-\infty;3)$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^2 - (m^2 + 1)x + 3$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $a = m$, $-\dfrac{b}{2\mathrm{a}} = \dfrac{m^2 + 1}{2m}$ với $m \neq 0$.

+ Trường hợp $m = 0$: Hàm số đã cho trở thành $y = -x + 3$. Đây hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên không thể đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Vậy $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

+ Trường hợp $m < 0$: Ta có $a = m < 0$ nên hàm số có BBT như sau:

x	$-\infty$		$\frac{m^2+1}{2m}$		$+\infty$
y		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

Dựa vào BBT thấy hàm số không thể đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Vậy $m<0$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

+ Trường hợp $m>0$: Ta có $a=m>0$ nên hàm số có BBT như sau:

x	$-\infty$		$\frac{m^2+1}{2m}$		$+\infty$
y	$+\infty$				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào BBT, để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ thì $\begin{cases} m>0 \\ \dfrac{1+m^2}{2m}\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ 1+m^2\le 2m \end{cases} \Leftrightarrow$ $m=1$.

Vậy $m=1$ thì hàm số $y=mx^2-(m^2+1)x+3$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Câu 3. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^2+2(m-1)x+2m+1$ nghịch biến trên $(-1;2)$.

Lời giải

Ta có $a=m$, $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1-m}{m}$ với $m\ne 0$.

+ Trường hợp $m=0$: Hàm số đã cho trở thành $y=-2x+1$, là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên cũng nghịch biến trên $(-1;2)$. Tức $m=0$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

+ Trường hợp $m<0$: Ta có $a=m<0$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(\dfrac{1-m}{m};+\infty\right)$

Do vậy yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1-m}{m}\le -1$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{m}\le 0$, đúng với $m<0$.

+ Trường hợp $m>0$: Ta có $a=m>0$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;\dfrac{1-m}{m}\right)$.

Do vậy yêu cầu của bài toán $\dfrac{1-m}{m}\ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{1-3m}{m}\ge 0 \Leftrightarrow m\le \dfrac{1}{3}$.

Vậy $m\le \dfrac{1}{3}$ thì hàm số $y=mx^2+2(m-1)x+2m+1$ nghịch biến trên $(-1;2)$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=f(x)=(m-2)x^2-2mx+m+2019$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Lời giải

+ Trường hợp $m=2 \Rightarrow y=-4x+2019$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên nghịch biến trên $(-\infty;3)$. Tức $m=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Trường hợp $m \neq 2$: Dựa vào sự biến thiên hàm bậc hai ta thấy

$f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m-2>0 \\ \dfrac{m}{m-2} \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2<m\leq 3$.

Vậy $2 \leq m \leq 3$ thì hàm số $y=f(x)=(m-2)x^2-2mx+m+2019$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Câu 5. Cho hàm số: $y=f(x)=ax^2+bx+c$ với a, b, c là các tham số, $(a>0)$. Biết rằng $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{6a^2}{5a^2+2ab+b^2}.$$

Lời giải

Do $a>0$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$

Từ đây ta có: $f(x)$ đồng biến trên $(-2;+\infty)$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{-b}{2a} \leq -2 \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} \geq 4$.

Ta có $P=\dfrac{6a^2}{5a^2+2ab+b^2}=\dfrac{6}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^2+2\left(\dfrac{b}{a}\right)+5}=\dfrac{6}{t^2+2t+5}$, với $t=\dfrac{b}{a} \geq 4$.

Có $t^2+2t+5=(t+1)^2+4 \geq 29$, $\forall t \geq 4$. Dấu bằng xảy ra khi $t=4$.

Do đó $P_{\max}=\dfrac{6}{29}$ đạt được khi $\dfrac{b}{a}=4$.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC HAI KHI BIẾT ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC.

PHƯƠNG PHÁP:

Để xác định hàm số bậc hai $y=f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ (đồng nghĩa với xác định các tham số $a,\ b,\ c$) ta cần dựa vào giả thiết để lập nên các phương trình (hệ phương trình) ẩn là $a,\ b,\ c$. Từ đó tìm được $a,\ b,\ c$. Việc lập nên các phương trình nêu ở trên thường sử dụng đến các kết quả sau:

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $M\left(x_0;\ y_0\right)\Leftrightarrow y_0=f\left(x_0\right)$.

- Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x=x_0\Leftrightarrow -\dfrac{b}{2a}=x_0$.

- Đồ thị hàm số có đỉnh là $I\left(x_I;\ y_I\right)\Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=x_I\\ -\dfrac{\Delta}{4a}=y_I\end{cases}$ $\left(\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=x_I\\ f\left(x_I\right)=y_I\end{cases}\right)$.

- Trên $\mathbb{R}$, ta có:

1. $f\left(x\right)$ có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow a<0$. Lúc này giá trị lớn nhất của $f\left(x\right)$ là $-\dfrac{\Delta}{4a}=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

2. $f\left(x\right)$ có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow a>0$. Lúc này giá trị nhỏ nhất $f\left(x\right)$ là $-\dfrac{\Delta}{4a}=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

BÀI TẬP:

Câu 1. Xác định parabol $\left(P\right):y=ax^2+bx+2$, biết rằng $\left(P\right)$ đi qua điểm $M\left(1;5\right)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x=-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}a+b+2=5\\ -\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ a=2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$.

Vậy $\left(P\right)$ có phương trình là $y=2x^2+x+2$.

Câu 2. Xác định parabol $\left(P\right):y=ax^2+2x+c$, biết rằng $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{11}{2}\right)$ là đỉnh của $\left(P\right)$.

Lời giải

Ta có : $\begin{cases}-\dfrac{2}{2a}=\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{4+8c}{-8}=\dfrac{11}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ c=5\end{cases}$.

Vậy $\left(P\right)$có phương trình là $y=-2x^2-2x+5$.

Câu 3. Tìm parabol $\left(P\right):y=ax^2+bx+c$, biết rằng $\left(P\right)$ đi qua ba điểm $A\left(1;-1\right)$, $B\left(2;3\right)$, $C\left(-1;-3\right)$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} a.1^2+b.1+c=-1 \\ a.2^2+b.2+c=3 \\ a.(-1)^2+b(-1)+c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-3 \end{cases} \Rightarrow (P): y=x^2+x-3$.

Vậy (P) có phương trình là $y=x^2+x-3$.

Câu 4. Xác định hàm số $y=ax^2+bx+c$ với a, b, c là các tham số, biết rằng hàm số ấy đạt giá trị lớn nhất bằng 5 tại $x=-2$ và có đồ thị đi qua điểm $M(1;-1)$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Trên $\mathbb{R}$, do hàm số $A(1;-1)$ đạt giá trị lớn nhất nên $a<0$.

Do đó theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=-2 \\ 4a-2b+c=5 \\ a+b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{2}{3} \\ b=-\dfrac{8}{3} \\ c=\dfrac{7}{3} \end{cases}$ (nhận).

Vậy hàm số cần tìm là $y=-\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{8}{3}x+\dfrac{7}{3}$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y=mx^2-2mx-3m-2$ $(m\neq 0)$ cắt đường thẳng $y=3x-1$ tại đỉnh của nó.

Lời giải

Đỉnh của (P) là $I(1;-4m-2)$.

Theo giả thiết, I thuộc đường thẳng $y=3x-1$ nên $-4m-2=3.1-1 \Leftrightarrow m=-1.$

Vậy $m=-1$ parabol $(P): y=mx^2-2mx-3m-2$ cắt đt $y=3x-1$ tại đỉnh của nó.

Câu 6. Tìm các tham số a, b, c sao cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ đạt giá trị nhỏ nhất là 4 tại $x=2$ và đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ là 6.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Trên $\mathbb{R}$ hàm số có giá trị nhỏ nhất nên $a>0$.

Lại có đồ thị hàm số có đỉnh $I(2;4)$. Do đó ta có:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=2 \\ 4a+2b+c=4 \\ c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-4a \\ 4a+2b=-2 \\ c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-2 \\ c=6 \end{cases}$$

Vậy $a=\dfrac{1}{2}; b=-2; c=6.$

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của ham số m sao cho parabol $(P): y=x^2-4x+m$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA=3OB.$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Ox là: $x^2-4x+m=0.$ (*)

(P) cắt Ox tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4.$

Gọi x_A, x_B là hai nghiệm của (*). Ta có $OA = 3OB \Rightarrow |x_A| = 3|x_B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = 3x_B \\ x_A = -3x_B \end{array}\right.$.

- TH1: $x_A = 3x_B \Rightarrow \begin{cases} x_A = 3x_B \\ x_A + x_B = 4 \\ x_A.x_B = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ x_B = 1 \\ x_A.x_B = m \end{cases} \Rightarrow m = x_A.x_B = 3 < 4.$

- TH2: $x_A = -3x_B \Rightarrow \begin{cases} x_A = -3x_B \\ x_A + x_B = 4 \\ x_A.x_B = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 6 \\ x_B = -2 \\ x_A.x_B = m \end{cases} \Rightarrow m = x_A.x_B = -12 < 4.$

Vậy $m \in \{-12; 3\}$.

DẠNG 3. TÌM CÁC YẾU TỐ CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI

Dạng 3.1. Cho parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$.

+ Xác định trục đối xứng, tọa độ đỉnh của (P).

+ Tương giao của (P) với trục Ox.

+ Tìm điều kiện để các giao điểm của (P) và trục Ox thỏa mãn điều kiện nào đó.

PHƯƠNG PHÁP:

Thường dùng đến các kết quả sau:

+ Đường thẳng $x = \frac{-b}{2a}$ là trục đối xứng của (P), điểm $I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$ là đỉnh của (P).

+ Nghiệm (nếu có) của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox.

+ Giả sử $A(x_A; y_A), B(x_B; y_A)$ là hai giao điểm của (P) và trục Ox. Khi đó:

- A, B cùng ở bên trái đối với trục Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_A + x_B < 0 \\ x_A.x_B > 0 \end{cases}$.

- A, B cùng ở bên phải đối với trục Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_A + x_B > 0 \\ x_A.x_B > 0 \end{cases}$.

- A, B cùng ở một bên đối với trục Oy $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_A.x_B > 0 \end{cases}$.

- A, B không ở cùng một bên đối với trục Oy $\Leftrightarrow x_A.x_B < 0$.

BÀI TẬP:

Câu 1. Cho parabol $(P): y = x^2 + 5x - 6.$ Xác định trục đối xứng, tọa độ đỉnh của parabol (P), tọa độ giao điểm của parabol (P) với trục hoành.

Lời giải

+ Ta có $-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2}$, $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{49}{4}$, do vậy:

(P) có trục đối xứng là $x=-\frac{5}{2}$;

(P) có đỉnh là $I\left(-\frac{5}{2};-\frac{49}{4}\right)$.

+ Hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành là nghiệm của phương trình

$x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-6 \end{array}\right.$.

Vậy tọa độ giao điểm của (P) với trục hoành là $(1;0),(-6;0)$.

Câu 2. Cho parabol $(P): y=ax^2+bx+c$ với $a<0$. Xét dấu của Δ, b, c biết rằng (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ âm.

Lời giải

(P) đã cho cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ S<0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ \frac{-b}{a}<0 \\ \frac{c}{a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ b<0 \\ c<0 \end{cases}.$$

Dạng 3.2. Cho parabol $(P): y=ax^2+bx+c$ và đường thẳng $d: y=mx+n$

+ Biện luận số điểm chung của (P) và trục hoành.

+ Tìm điều kiện để đường thẳng d tiếp xúc với (P) .

PHƯƠNG PHÁP:

+ Xét phương trình $ax^2+bx+c=0$ (*).

- (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt.

- (P) và trục hoành có một điểm chung (còn gọi là tiếp xúc với nhau) $\Leftrightarrow$ (*) có một nghiệm.

- (P) và trục hoành không có điểm chung $\Leftrightarrow$ (*) vô nghiệm.

+ d và (P) tiếp xúc với nhau $\Leftrightarrow$ $ax^2+bx+c=mx+n$ có nghiệm kép.

BÀI TẬP:

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y=x^2+3x+m$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục hoành là $x^2+3x+m=0$ (*).

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $\Delta=9-4m>0 \Leftrightarrow m<\frac{9}{4}$.

Vậy $m<\frac{9}{4}$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y=x^2-2x+m-1$ và trục Ox không có điểm chung.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là $x^2-2x+m-1=0$ (*)

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow$ (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ $\Delta'<0 \Leftrightarrow 2-m<0 \Leftrightarrow m>2$. Vậy $m>2$.

Câu 3. Cho parabol $(P): y=x^2+x+2$ và đường thẳng $d: y=ax+1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để d tiếp xúc với (P).

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là: $x^2+x+2=ax+1$

$\Leftrightarrow x^2+(1-a)x+1=0 \quad (1)$.

d tiếp xúc với $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow (1-a)^2-4=0$

$$\Leftrightarrow a^2-2a-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=3 \end{array}\right..$$

Vậy $a\in\{-1;3\}$.

DẠNG 4. TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ

Dạng 4.1. Dựa vào đồ thị của hàm số $f(x)$ để biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $f(x)=g(m)$.

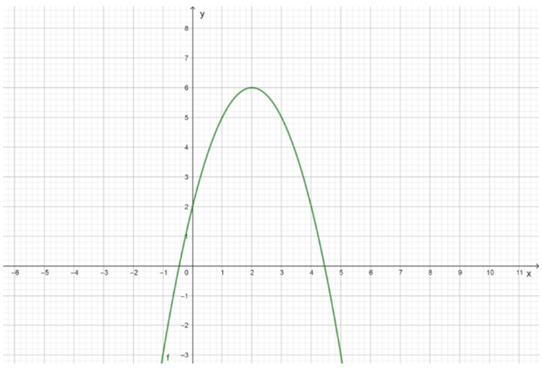
PHƯƠNG PHÁP:

- Vẽ đồ thị (C) của hàm số $f(x)$.
- Tùy vào giá trị của $g(m)$ để chỉ ra số giao điểm của đường thẳng $d: y=g(m)$ và (C).
- Số giao điểm của d và (C) cũng chính là số nghiệm của phương trình $f(x)=g(m)$.

***Lưu ý:** Đường thẳng $d: y=g(m)$ là đường thẳng có phương ngang và cắt trục tung tại điểm có tung độ $g(m)$.

BÀI TẬP:

Câu 1. Cho hàm số $y=-x^2+4x+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Dựa vào đồ thị tìm các giá trị của tham số m để phương trình $-x^2+4x+2=m$ có 2 nghiệm phân biệt.



Lời giải

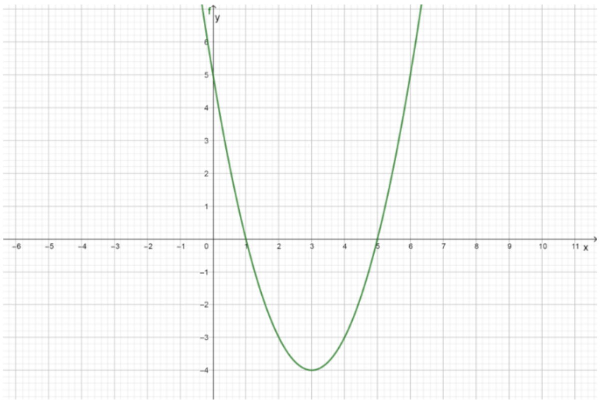
Phương trình $-x^2+4x+2=m$ (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (P) của hàm số $y=-x^2+4x+2$ và đường thẳng $d: y=m$.

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của (P) và (d).

Dựa vào đồ thị ta thấy, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m<6$.

Vậy $m<6$.

Câu 2. Cho hàm số $y=x^2-6x+5$ có đồ thị (P) như nhình vẽ bên dưới. Dựa vào đồ thị, tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $2x^2-12x+6m-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt dương.



Lời giải

Phương trình: $2x^2-12x+6m-1=0 \Leftrightarrow x^2-6x+5=-3m+\dfrac{11}{2}$ (1).

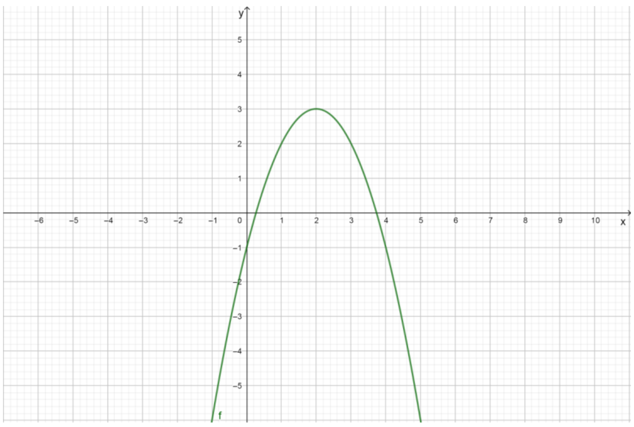
Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (P) $y=x^2-6x+5$ và đường thẳng $(d)\, y=-3m+\dfrac{11}{2}$.

Số nghiệm của phương trình (1) chính bằng số giao điểm của (P) và (d).

Dựa vào đồ thị ta thấy, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -4<-3m+\dfrac{11}{2}<5 \Leftrightarrow \dfrac{1}{6}<m<\dfrac{19}{6}$.

Vậy $\dfrac{1}{6}<m<\dfrac{19}{6}$.

Câu 3. Cho parabol $(P): y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $\left|ax^2+bx+c\right|=m$ có bốn nghiệm phân biệt.

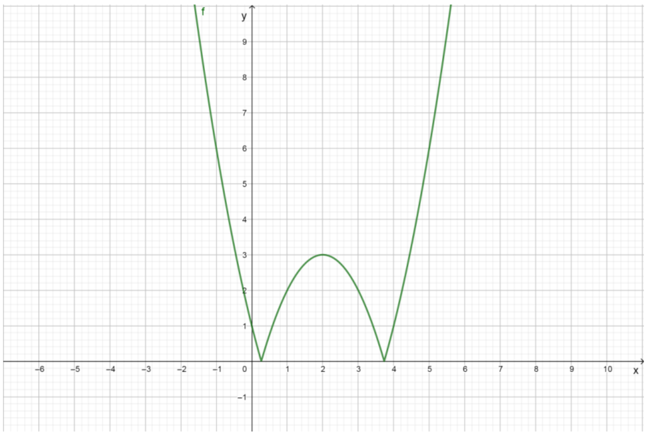


Lời giải

Đồ thị (C) của hàm số $y=\left|ax^2+bx+c\right|$ bao gồm:

- Phần 1: Là phần tính từ Ox trở lên của (P).

- Phần 2: Là phần đối xứng của phần phía dưới Ox của (P) qua trục Ox.



Phương trình $\left|ax^2+bx+c\right|=m$ là phương trình hoành độ giao điểm của

$(C)\ y=\left|ax^2+bx+c\right|$ và đường thẳng $d: y=m$.

Số nghiệm của phương trình $\left|ax^2+bx+c\right|=m$ bằng số giao điểm của (C) và (d).

Dựa vào đồ thị (C) ta thấy, yêu cầu của bài toán ⇔ suy ra $0<m<3$.

Vậy $0<m<3$.

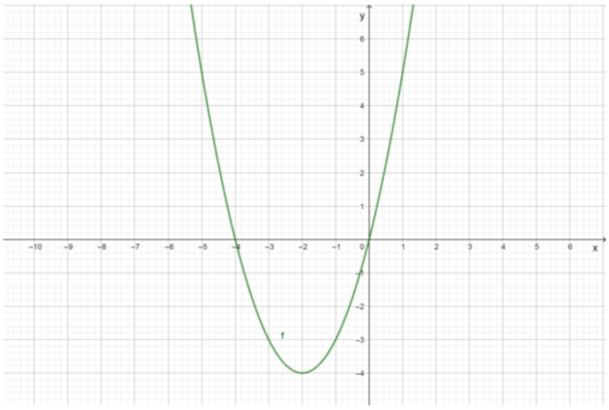
Câu 4. Cho phương trình $x^2+4x-m=0\,(1)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(-3;1)$.

Lời giải

Phương trình $x^2+4x-m=0 \Leftrightarrow x^2+4x=m\ (1)$.

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (P) của hàm số $y=x^2+4x$ và đường thẳng $d: y=m$ (cùng phương với trục Ox, cắt trục tung tại điểm có tung độ m).

Vẽ đồ thị (P)



Số nghiệm của phương trình (1) chính bằng số giao điểm của (P) và (d) .

Dựa vào đồ thị, ta thấy phương trình $x^2+4x-m=0$ có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(-3;1)$ khi và chỉ khi $-3<m<5$. Vậy $-3<m<5$.

Dạng 4.2. Sự tương giao của đồ thị hàm số bậc nhất và bậc hai

PHƯƠNG PHÁP:

Cho đồ thị (P) của hàm số $y=ax^2+bx+c$ với $a\neq 0$ và đồ thị d của hàm số $y=kx+m$.

Toạ độ giao điểm của hai đồ thị (P) và d là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = kx + m \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$ax^2 + bx + c = kx + m \Leftrightarrow ax^2 + (b-k)x + c - m = 0 \quad (2)$$

Nhận xét:

1. Số giao điểm của (P) và d bằng số nghiệm của hệ phương trình (1) và cũng bằng số nghiệm của phương trình (2).
2. Nếu phương trình (2) vô nghiệm thì ta nói d và (P) không giao nhau.
3. Nếu phương trình (2) có nghiệm kép thì ta nói d và (P) tiếp xúc với nhau. Lúc này ta nói d là tiếp tuyến của (P).
4. Nếu phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt thì ta nói d và (P) cắt nhau.

BÀI TẬP:

Câu 1. Tìm tọa độ giao điểm của Parabol $(P): y = -x^2 - 4x + 1$ và đường thẳng $d:\ y = -x + 3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$-x^2 - 4x + 1 = -x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Với $x = -1 \Rightarrow y = 4$; $x = -2 \Rightarrow y = 5$.

Tọa độ giao điểm của (P) và d là $A(-1;4), B(-2;5)$.

Câu 2. Cho Parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$. Tìm m để d tiếp xúc với (P). Tìm tọa độ tiếp điểm khi đó.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với d là

$$x^2 - 3x + 2 = mx + 2 \Leftrightarrow x^2 - (3+m)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m + 3 \end{array}\right..$$

Để d tiếp xúc với (P) thì $m = -3$.

Tọa độ tiếp điểm khi đó là $M(0;2)$.

Nhận xét: Từ phương trình (1) ta tính $\Delta' = (m+3)^2$. Để d tiếp xúc với (P) thì (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -3$.

Câu 3. Cho Parabol (P) $y = x^2 - 2x + 4$ và đường thẳng $d:\ y = 2mx - m^2$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 = 3m^2 + 16$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là

$x^2-2(m+1)x+m^2+4=0 \quad (1)$.

+ Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là $x_1;x_2$ thì $\Delta'>0 \Leftrightarrow m>\frac{3}{2}$.

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+2 \\ x_1.x_2=m^2+4 \end{cases}$.

Theo đề bài ta có

$x_1^{\,2}+2(m+1)x_2=3m^2+16 \Leftrightarrow x_1^{\,2}+(x_1+x_2)x_2=3m^2+16$

$\Leftrightarrow x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_1x_2=3m^2+16 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-x_1x_2=3m^2+16$

$\Leftrightarrow (2m+2)^2-m^2-4=3m^2+16 \Leftrightarrow m=2$.

So sánh với điều kiện suy ra $m=2$.

Câu 4. Cho Parabol $(P): y=\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d: y=(m+1)x-m^2-\frac{1}{2}$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ sao cho biểu thức $T=y_1+y_2-x_1x_2-(x_1+x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d

$\frac{1}{2}x^2=(m+1)x-m^2-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+2m^2+1=0 \quad (1)$

Để d cắt (P) tại 2 điểm $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm $x_1;x_2$

$\Leftrightarrow \Delta'\ge 0 \Leftrightarrow (m+1)^2-2m^2-1\ge 0 \Leftrightarrow 0\le m\le 2$

Vậy với $0\le m\le 2$ thì đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$.

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+2 \\ x_1.x_2=2m^2+1 \end{cases}$

Khi đó: $y_1=(m+1)x_1-m^2-\frac{1}{2};\ y_2=(m+1)x_2-m^2-\frac{1}{2}$.

Ta có: $T=y_1+y_2-x_1x_2-(x_1+x_2)=(m+1)(x_1+x_2)-2m^2-1-x_1x_2-(x_1+x_2)$

$\Rightarrow T=2(m+1)^2-4m^2-2-2(m+1)=-2m^2+2m-2$.

Bài toán trở thành tìm giá trị của tham số m để hàm số: $T=-2m^2+2m-2$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$.

Ta có bảng biến thiên:

m	0	$\frac{1}{2}$	2
$-2m^2+2m-2$	-2 ↗	$-\frac{3}{2}$ ↘	-6

Vậy giá trị nhỏ nhất của $T=-6$ đạt được khi $m=2$.

Dạng 4.3. Sự tương giao của hai đồ thị hàm số bậc hai

PHƯƠNG PHÁP:

Cho hai hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ là các hàm số bậc hai có đồ thị lần lượt là các đường parabol $\left(P_1\right)$ và $\left(P_2\right)$, khi đó tọa độ giao điểm của $\left(P_1\right)$ và $\left(P_2\right)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y=f\left(x\right) \\ y=g\left(x\right) \end{cases}. \qquad (1)$$

Để giải hệ (1) ta cần giải phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ (2), phương trình (2) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của $\left(P_1\right)$ và $\left(P_2\right)$.

* Nhận xét:

i) Số giao điểm của $\left(P_1\right)$ và $\left(P_2\right)$ bằng số nghiệm của hệ (1) và bằng số nghiệm của phương trình (2).

ii) $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ là các hàm số bậc hai nên phương trình (2) có nhiều nhất 2 nghiệm. iii) Các bài toán liên quan đến dạng này thường áp dụng đến nội dung định lý Vi-et thuận.

Định lý Vi-et: Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm x_1 và x_2, ta luôn có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ và $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

BÀI TẬP:

Câu 1. Biết rằng đồ thị hàm số $y=x^2-6x$ cắt đồ thị hàm số $y=-x^2-4$ tại hai điểm $A\left(x_A;y_A\right)$ và $B\left(x_B;y_B\right)$. Tính y_A+y_B.

Lời giải

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị $y=x^2-5x$ và $y=-x^2-3$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y=x^2-6x \\ y=-x^2-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x=-x^2-4 \\ y=-x^2-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ y=-x^2-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \\ y=-x^2-4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=-5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=-8 \end{cases} \end{array}\right.$.

Không mất tổng quát ta giả sử $A\left(1;-5\right)$ và $B\left(2;-8\right)$, suy ra $y_A+y_B=-13$.

Câu 2. Biết rằng parabol $y=x^2-x+1$ cắt parabol $y=-x^2+2x+4$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1 và x_2. Tính giá trị biểu thức $P=x_1^3+x_2^3$.

Lời giải

- Phương trình hoành độ giao điểm của hai parabol là

$x^2-x+1=-x^2+2x+4 \Leftrightarrow 2x^2-3x-3=0$. (*)

- Theo giả thiết ta có x_1,x_2 là hai nghiệm phân biệt của (*) nên $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{3}{2} \\ x_1x_2=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

- Ta có $P = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right]$

$$\Rightarrow P = \frac{3}{2}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(-\frac{3}{2}\right)\right] = \frac{81}{8}.$$

Vậy $P = \frac{81}{8}$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y = (m+1)x^2 + 2x + 3m - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 + 2mx + 4$ tại đúng hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

Lời giải

- Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đề bài cho là

$(m+1)x^2 + 2x + 3m - 2 = x^2 + 2mx + 4 \Leftrightarrow mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$. (1)

- Phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}. \qquad (2)$$

- Với điều kiện (2), áp dụng định lý Viet cho phương trình (1) và giả thiết cho, ta có

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1x_2 = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3m-4}{m} \\ x_2 = \dfrac{2-m}{m} \\ x_1x_2 = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3m-4}{m} \\ x_2 = \dfrac{2-m}{m} \\ \dfrac{(3m-4)(2-m)}{m^2} = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \qquad (3)$$

- Giải phương trình (3) ta được $m = 2$ và $m = \frac{2}{3}$ đều thỏa mãn (2), nên đó là hai giá trị cần tìm của tham số m.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho hai parabol $y = x^2 + mx + (m+1)^2$ và $y = -x^2 - (m+2)x - 2(m+1)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ thỏa mãn $P = |x_1x_2 - 3(x_1 + x_2)|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai parabol là

$x^2 + mx + (m+1)^2 = -x^2 - (m+2)x - 2(m+1) \Leftrightarrow 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$. (1)

Phương trình (1) có hai nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' = (m+1)^2 - 2(m^2 + 4m + 3) \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)(-m-5) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+1 \geq 0 \\ -m-5 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m+1 \leq 0 \\ -m-5 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1.$$

(2)

Với điều kiện (2), áp dụng định lý Viet cho phương trình (1), ta có

$$P = |x_1x_2 - 3(x_1 + x_2)| \Rightarrow P = \left|\frac{m^2 + 4m + 3}{2} + 3(m+1)\right| = \frac{1}{2}|(m+1)(m+9)| = \frac{1}{2}|m+1||m+9|$$

$$=\frac{1}{2}(-m-1)(m+9)\le\frac{1}{2}\left[\frac{(-m-1)+(m+9)}{2}\right]^2=8.\ (3)$$

Dấu "=" ở bất đẳng thức (3) xảy ra khi và chỉ khi $-m-1=m+9$ hay $m=-5$ thỏa mãn (2).

Vậy $\max P=8$ đạt được khi $m=-5$ và do đó $m=-5$ chính là giá trị của tham số m cần tìm.

DẠNG 5. ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI

PHƯƠNG PHÁP:

Cho họ hàm số $f(x;m)=0$ (m là tham số) có đồ thị (P_m). Để tìm điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua với mọi giá trị của m, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Giả sử điểm $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua.

Tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình $f(x;m)=0$.

Bước 2: Chuyển phương trình về phương trình ẩn m dạng $Am+B=0$ (hoặc $Am^2+Bm+C=0$). Phương trình nghiệm đúng với mọi m.

Khi đó ta có $\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}A=0\\B=0\\C=0\end{cases}$. Tìm được $x_0;y_0\Rightarrow M(x_0;y_0)$.

Bước 3: Kết luận.

BÀI TẬP:

Câu 1. Cho hàm số $y=(1+m)x^2-2(m-1)x+m-3\ (P_m)$. Chứng tỏ rằng (P_m) luôn đi qua một điểm cố định, tìm tọa độ điểm cố định đó.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Giả sử điểm $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua.

Khi đó $y_0=(1+m)x_0^2-2(m-1)x_0+m-3$, $\forall m\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow(x_0^2-2x_0+1)m+x_0^2+2x_0-3-y_0=0$, $\forall m\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2-2x_0+1=0\\x_0^2+2x_0-3-y_0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=1\\y_0=0\end{cases}$.

Vậy họ (P_m) luôn đi qua điểm cố định $M(1;0)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=(m-1)x^2+2mx-3m+1\ (P_m)$. Tìm điểm cố định của họ đồ thị hàm số trên.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Giả sử điểm $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua.

Khi đó $y_0=(m-1)x_0^2+2mx_0-3m+1$, $\forall m\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \left(x_0^2+2x_0-3\right)m-x_0^2+1-y_0=0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+2x_0-3=0 \\ -x_0^2+1-y_0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=-3 \end{array}\right. \\ y_0=1-x_0{}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0=-3 \\ y_0=-8 \end{cases}$.

Vậy họ $\left(P_m\right)$ luôn đi qua 2 điểm cố định $M_1(1;0)$ và $M_2(-3;-8)$.

Câu 3. Tìm điểm cố định của đồ thị hàm số $\left(P_m\right): y=m^2x^2+2(m-1)x+m^2-1$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Giả sử điểm $M\left(x_0\,;y_0\right)$ là điểm cố định mà $\left(P_m\right)$ luôn đi qua.

Khi đó $y_0=m^2x_0^2+2(m-1)x_0+m^2-1,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \left(x_0^2+1\right)m^2+2x_0m-2x_0-1-y_0=0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+1=0 \\ 2x_0=0 \\ -2x_0-1-y_0=0 \end{cases}$ (I). Do phương trình $x_0^2+1=0$ vô nghiệm nên hệ (I) vô nghiệm.

Vậy không có điểm nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Cho hàm số $y=x^2+(2m-3)x+5-4m$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đồ thị $\left(P_m\right)$của hàm số đã cho và đường thẳng $\left(d_m\right): y=2mx-4m+3$ luôn có một điểm chung cố định.

Lời giải

Tập xác định của hai hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}$.

Giả sử điểm $M\left(x_0\,;y_0\right)$ là điểm cố định mà $\left(d_m\right)$ luôn đi qua.

Khi đó $y_0=2mx_0-4m+3,\ \forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (2x_0-4)m+3-y_0=0,\ \forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0-4=0 \\ 3-y_0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2 \\ y_0=3 \end{cases} \Rightarrow M(2;3)$.

Thay tọa độ điểm M và phương trình của $\left(P_m\right)$ ta được $3=2^2+(2m-3).2+5-4m$

$\Leftrightarrow 3=3$ (đúng với mọi m).

Vậy $M(2;3)$ là điểm chung cố định của $\left(P_m\right)$ và $\left(d_m\right)$.

Câu 5. Cho các hàm số $\left(P_m\right): y=x^2-(m+3)x+4m-7$, $\left(C_m\right): y=mx^2-3(m+1)x-4m+9$, $\left(d_m\right):(m-1)x+my+4-m=0$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, các đồ thị của các hàm số đã cho luôn cùng đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Tập xác định của hai hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}$.

Giả sử điểm $M\left(x_0\,;y_0\right)$ là điểm cố định mà $\left(d_m\right)$ luôn đi qua.

Khi đó $(m-1)x_0+my_0+4-m=0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \left(x_0+y_0-1\right)m+4-x_0=0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ 4 - x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = -3 \end{cases} \Rightarrow M(4;-3)$.

Thay tọa độ điểm M vào phương trình của (P_m) ta được $-3 = 4^2 - (m+3).4 + 4m - 7$

$\Leftrightarrow -3 = -3$ (đúng với mọi m).

Thay tọa độ điểm M vào phương trình của (C_m) ta được

$-3 = m.4^2 - 3(m+1).4 - 4m + 9$

$\Leftrightarrow -3 = -3$ (đúng với mọi m).

Vậy các đồ thị (P_m); (C_m); (d_m) luôn cùng đi qua một điểm cố định $M(4;-3)$.

DẠNG 6: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

Dạng 6.1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên 1 tập cho trước

PHƯƠNG PHÁP:

Để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số bậc hai, ta lập bảng biến thiên cho hàm số đó trên tập hợp đã cho. Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số trên tập hợp đã cho.

BÀI TẬP:

Câu 1. Cho hàm số $y = x^2 - 4x - 3$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[-3;5]$.

Lời giải

Hàm số đã cho là hàm số bậc hai có hệ số: $a = 1, b = -4, c = -3$.

Ta có: $\frac{-b}{2a} = \frac{4}{2.1} = 2$; $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{(-4)^2 - 4.(-3)}{4.1} = \frac{-28}{4} = -7$.

Vì $a = 1 > 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$, đồng biến trên $(2;+\infty)$. Do đó, ta có bảng biến thiên của hàm số trên $[-3;5]$ là:

x	-3	2	5
y	18 ↘	-7	↗ 2

Dựa vào bảng biến thiên, vậy $\min\limits_{x\in[-3;5]} y = y(2) = -7$ và $\max\limits_{x\in[-3;5]} y = y(-3) = 18$.

Câu 2. Cho hàm số $y = -2x^2 + 4x + 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[2;7]$.

Lời giải

Hàm số đã cho là hàm số bậc hai có $a = -2, b = 4, c = 3$.

Ta có: $\frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2.(-2)} = 1$; $\frac{-\Delta}{4a} = -\frac{4^2 - 4.(-2).3}{4.(-2)} = 5$

Vì $a = -2 < 0$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$, nghịch biến trên $(1;+\infty)$. Do đó, ta có bảng biến thiên của hàm số trên $[2;7]$ là:

x	2		7
y	3	$\searrow$	-67

Dựa vào bảng biến thiên, vậy $\min\limits_{x\in[2;7]} y = y(7) = -67$ và $\max\limits_{x\in[2;7]} y = y(2) = 3$.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 3$ trên $[-1;2]$.

Lời giải

Đặt $t = x^2$. Với $x \in [-1;2]$ ta có $t \in [0;4]$. Hàm số trở thành $f(t) = t^2 - 4t - 3$ với $t \in [0;4]$.

Bảng biến thiên:

x	0		2		4
y	-3	$\searrow$	-7	$\nearrow$	-3

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$\max\limits_{x\in[-1;2]} y = \max\limits_{t\in[0;4]} f(t) = -3$ khi $\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=4 \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

$\min\limits_{x\in[-1;2]} y = \min\limits_{t\in[0;4]} f(t) = -7$ khi $t = 2$ hay $x = \sqrt{2}$.

Câu 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -2\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 1} + 4\sqrt[3]{x^2 + 1} + 3$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ $(t \ge 1) \Rightarrow t^2 = \sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 1}$. Hàm số trở thành $f(t) = -2t^2 + 4t + 3$.

Bảng biến thiên:

t	1		$+\infty$
$f(t)$	5	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$\max y = \max\limits_{t\in[1;+\infty]} f(t) = 5$ khi $t = 1$ hay $x = 0$

Giá trị nhỏ nhất của y không tồn tại.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ trên $[-2;4]$.

Lời giải

Ta có: $y = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow y = (x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x) + 2$

Đặt $t = x^2 + 2x$. Xét hàm số $t(x) = x^2 + 2x$ với $x \in [-2;4]$.

Bảng biến thiên:

x	-2		-1		4
$t(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	24

Từ bảng biến thiên ta có: $t \in [-1;24]$ với $x \in [-2;4]$.

Do đó, hàm số y ban đầu có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có) trên $[-2;4]$ bằng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t) = t^2 - t + 2$ với $t \in [-1;24]$

Bảng biến thiên:

t	-1	$\frac{1}{2}$	24
$f(t)$	4 ↘	$\frac{7}{4}$ ↗	554

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$\max\limits_{x\in[-2;4]} y = \max\limits_{t\in[-1;24]} f(t) = 554$ khi $t = 24$ hay $x = 4$.

$$\min\limits_{x\in[-2;4]} y = \min\limits_{t\in[-1;24]} f(t) = \frac{7}{4} \text{ khi } t = \frac{1}{2} \text{ hay } x^2 + 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2+\sqrt{6}}{2}.$$

Dạng 6.2. Tìm điều kiện của tham số để hàm số bậc hai đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

PHƯƠNG PHÁP:

Cho hàm số bậc hai: $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$

- Nếu $a > 0$ thì $\min y = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{\Delta}{4a}$ đạt tại hoành độ đỉnh $x_I = -\dfrac{b}{2a}$.
- Nếu $a < 0$ thì $\max y = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{\Delta}{4a}$ đạt tại hoành độ đỉnh $x_I = -\dfrac{b}{2a}$.

Trường hợp tập xác định khác $\mathbb{R}$, ta kẻ bảng biến thiên của hàm số trên tập đó để có được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

BÀI TẬP:

Câu 1. Tìm giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hoành độ đỉnh: $x_I = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2m}{2m} = 1$, suy ra $y_I = -4m - 2$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 khi và chỉ khi $\begin{cases} m > 0 \\ -4m - 2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$. (Thỏa mãn)

Câu 2. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 1$ và nhận giá trị bằng 3 khi $x = 2$. Tính abc.

Lời giải

Để hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 1$ và nhận giá trị bằng 3 khi $x = 2$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ f(1) = 2 \\ f(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 2a + b = 0 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$.

Vậy $abc = 1.(-2).3 = -6$.

Câu 3. Cho hàm số $y = mx^2 - 2x - m - 1$. Tìm giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Hoành độ đỉnh: $x_I = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2}{2m} = \dfrac{1}{m}$, suy ra $y_I = m.\left(\dfrac{1}{m}\right)^2 - 2.\left(\dfrac{1}{m}\right) - m - 1 = \dfrac{-m^2 - m - 1}{m}$

TH1: Khi $m < 0$ thì $\max y = y_I = \dfrac{-m^2 - m - 1}{m}$ tại điểm $x_I = \dfrac{1}{m}$.

$$y_I = f(m) = \frac{-m^2 - m - 1}{m} - 1 + 1 = \frac{-m^2 - 2m - 1}{m} + 1 = \frac{-(m+1)^2}{m} + 1 \geq 0 + 1 = 1.$$

Vậy $\min y_I = 1$ tại điểm $m = -1$.

TH2: Khi $m > 0$ thì hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất, chỉ có giá trị nhỏ nhất.

TH3: Khi $m = 0$ thì hàm số $y = -2x - 1$ đã cho là hàm số bậc nhất, không có giá trị lớn nhất.

Kết luận: $m = -1$.

Câu 4. Cho hàm số $y = -(m-1)^2 x^2 + 2(m-1)^2 x + 1 + 2m$. Với $m \neq 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \dfrac{\min\limits_{x \in [0;2]} y}{\max\limits_{x \in [0;2]} y}$.

Lời giải

Hoành độ đỉnh: $x_I = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-2(m-1)^2}{-2(m-1)^2} = 1$, suy ra

$$y_I = -(m-1)^2 + 2(m-1)^2 + 1 + 2m = m^2 + 2$$

Do $a = -(m-1)^2 < 0,\ \forall m \neq 1$ nên ta có bảng biến thiên như sau:

x	0	1	2
y	$2m+1$ ↗	m^2+2	↘ $2m+1$

Từ bảng biến thiên ta có: $\max\limits_{x \in [0;2]} y = m^2 + 2$ tại $x = 1$, $\min\limits_{x \in [0;2]} y = 2m + 1$ tại $x = 0$ hoặc $x = 2$.

$$B = \frac{\min\limits_{x \in [0;2]} y}{\max\limits_{x \in [0;2]} y} = \frac{2m+1}{m^2+2} = \frac{\frac{1}{2}m^2 + 2m + 1 - \frac{1}{2}m^2}{m^2+2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\mathrm{m}^2 + 4m + 4\right) - \frac{1}{2}\left(m^2+2\right)}{m^2+2} = \frac{(m+2)^2}{2\left(m^2+2\right)} - \frac{1}{2}$$

Vì $(m+2)^2 \ge 0,\ \forall m\in\mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{(m+2)^2}{2(m^2+2)} \ge 0,\ \forall m\in\mathbb{R} \Rightarrow B \ge -\dfrac{1}{2},\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Vậy $\min B = -\dfrac{1}{2}$ tại $m=-2$.

VẤN ĐỀ 7: BÀI TOÁN THỰC TẾ

PHƯƠNG PHÁP:

Dạng 7.1: Các bài toán thực tế mà mô hình thực tiễn chưa chuyển về mô hình toán học. Các bước làm như sau:

Bước 1: Dựa vào giả thiết và các yếu tố của đề bài, ta xây dựng mô hình toán học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả dưới "dạng ngôn ngữ toán học" cho mô hình mô phỏng thực tiễn. Căn cứ vào các yếu tố bài ra ta chọn biến số, tìm điều kiện tồn tại, đơn vị.

Bước 2: Dựa vào các mối liên hệ ràng buộc giữa biến số với các giả thiết của đề bài cũng như các kiến thức liên quan đến thực tế, ta thiết lập hàm số bậc hai. Chuyển yêu cầu đặt ra đối với bài toán thực tiễn thành yêu cầu bài toán hàm số bậc hai.

Bước 3: Dùng tính chất hàm số bậc hai để giải quyết bài toán hình thành ở bước 2. Lưu ý kiểm tra điều kiện, và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa.

Dạng 7.2: Các bài toán thực tế đã mô hình hóa bằng một hàm số bậc hai.

Ta thực hiện bước 3 của dạng 1.

BÀI TẬP:

Câu 1. Một quả bóng được ném vào không trung có chiều cao tính từ lúc bắt đầu ném ra được cho bởi công thức $h(t)=-t^2+2t+3$ (tính bằng mét), t là thời gian tính bằng giây $(t\ge 0)$

.

a. Tính chiều cao lớn nhất quả bóng đạt được.

b. Hãy tính xem sau bao lâu quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất ?

Lời giải

a. Ta có: $h(t)=-t^2+2t+3 \Leftrightarrow h(t)=-(t-1)^2+4 \Rightarrow \max h(t)=h(1)=4$.

Vậy quả bóng đạt chiều cao lớn nhất bằng 4 m tại thời điểm $t=1$ giây.

b. Ta có: $-t^2+2t+3=0 \Leftrightarrow t=-1$ (loại) hoặc $t=3$ (nhận).

Vậy sau 3 giây quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất.

Câu 2. Độ cao của quả bóng golf tính theo thời gian có thể được xác định bằng một hàm bậc hai. Với các thông số cho trong bảng sau, hãy xác định độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây ?

Thời gian (giây)	0	0,5	1	2
Độ cao (mét)	0	28	48	64

Lời giải

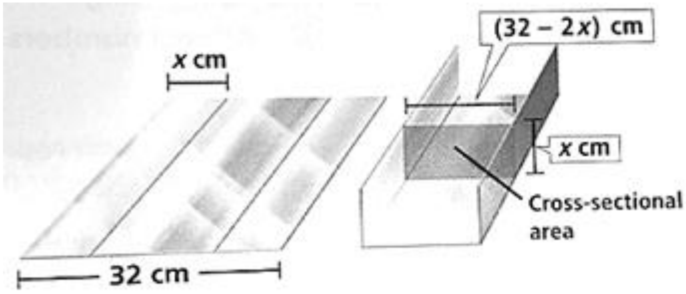
Độ cao của quả bóng tính theo thời gian được xác định bởi hàm số $h(t)=at^2+bt+c$ (tính bằng mét), t : giây, $t\ge 0$.

Với các thông số cho bởi bảng trên ta có:

$$\begin{cases} c=0 \\ \frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c=28 \\ a+b+c=48 \\ 4a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-16 \\ b=64 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow h(t)=-16t^2+64t \Rightarrow h(3)=48.$$

Vậy độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây là 48 m.

Câu 3. Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tấm nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình vẽ dưới. Hỏi x bằng bao nhiêu để tạo ra máng có có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất ?



Lời giải

Gọi $S(x)$ là diện tích mặt ngang ứng với bề ngang x (cm) của phần gấp hai bên, ta có:

$S(x)=x(32-2x)$, với $0<x<16$.

Diện tích mặt ngang lớn nhất khi hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0;16)$.

Ta có: $S(x)=-2x^2+32x=-2(x-8)^2+128\le 128,\ \forall x\in(0;16)$.

$\Rightarrow \max S(x)=S(8)=128$.

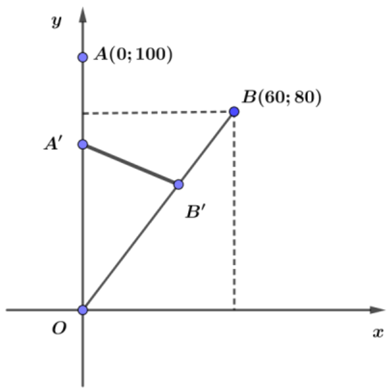
Vậy $x=8$ cm thì diện tích mặt ngang lớn nhất.

Câu 4. Hai con chuồn chuồn bay trên hai quĩ đạo khác nhau, xuất phát cùng thời điểm.

Một con bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ điểm $A(0;100)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 5 m/s.

Con còn lại bay trên quĩ đạo là đường thẳng từ $B(60;80)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 10 m/s.

Hỏi trong quá trình bay thì khoảng cách ngắn nhất hai con đạt được là bao nhiêu ?



Lời giải

Xét tại thời điểm t (giây), $t\in[0;10]$, con chuồn chuồn bay từ A về O có tọa độ là $A'(0;100-5t)$.

Con chuồn chuồn bay từ $B(60;80)$ về $O(0;0)$ trên quĩ đạo là đường thẳng có hệ số góc là $k=\tan\alpha=\frac{4}{3}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5}$.

Do đó tại thời điểm t, nó có tọa độ là $\begin{cases} x = 60 - 10t.\cos\alpha \\ y = 80 - 10t.\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 - 6t \\ y = 80 - 8t \end{cases}$

$\Rightarrow B'(60-6t;80-8t)$.

Ta có: $\overrightarrow{A'B'} = (60-6t;-20-3t)$.

Khi đó, khoảng cách giữa hai con chuồn chuồn là:

$d = A'B' = \sqrt{(60-6t)^2 + (20+3t)^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{45t^2 - 600t + 4000}$

d nhỏ nhất khi hàm số $f(t) = 45t^2 - 600t + 4000$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;10]$.

Ta có: $f(t) = 5(3t-20)^2 + 2000 \geq 2000,\ \forall t \in [0;10]$

$\Rightarrow \min\limits_{t\in[0;10]} f(t) = f\left(\dfrac{20}{3}\right) = 2000$.

Vậy khoảng cách ngắn nhất của hai con chuồn chuồn trong quá trình bay là $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$ m.

Câu 5. Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để của hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.

Lời giải

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng (x: đồng, $30000 \leq x \leq 50000$).

Tương ứng với giá bán là x thì số quả bán được là: $40 + \dfrac{10}{1000}(50000 - x) = -\dfrac{1}{100}x + 540$

.

Gọi $f(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($f(x)$: đồng), ta có:

$f(x) = \left(-\dfrac{1}{100}x + 540\right).(x - 30000) = -\dfrac{1}{100}x^2 + 840x - 16200000$

Lợi nhuận thu được lớn nhất khi hàm $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[30000;50000]$

Ta có: $f(x) = -\left(\dfrac{1}{10}x - 4200\right)^2 + 1440000 \leq 1440000,\ \forall x \in [30000;50000]$

$\Rightarrow \max\limits_{x\in[30000;50000]} f(x) = f(42000) = 1440000$.

Vậy với giá bán 42000 đồng mỗi quả bưởi thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.