SỞ GD&ĐT HẢI PHÒNG
TRƯỜNG THPT NGÔ QUYỀN

ĐỀ THI THỬ LẦN 2

KỲ THI THỬ TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2024
HƯỚNG DẪN CHẤM CÂU VD-VDC
Bài thi: TOÁN

Đề bài: Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}$. Khi đó, giá trị của $M+m$ bằng

Hướng dẫn giải

$P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}=(x+y)^2+2(x+y)+2+8\sqrt{4-x-y}$.

Đặt $t=x+y\Rightarrow P=t^2+2t+2+8\sqrt{4-t}$.

Theo giả thiết $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$.

$\Leftrightarrow (x+y)^2=x+2y+1+2\sqrt{2(x-1)(y+1)}\le x+2y+1+2(x-1)+y+1=3(x+y)$.

$\Rightarrow t^2\le 3t\Leftrightarrow t^2-3t\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 3$.

Xét $f(t)=t^2+2t+2+8\sqrt{4-t}$ trên $[0;3]$.

$f'(t)=2t+2-\dfrac{4}{\sqrt{4-t}}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow (2t+2)\sqrt{4-t}=4\Leftrightarrow (t+1)\sqrt{4-t}=2$.

$\Leftrightarrow (t^2+2t+1)(4-t)=4\Leftrightarrow -t^3+2t^2+7t=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1+2\sqrt{2}\notin[0;3]. \\ t=1-2\sqrt{2}\notin[0;3] \end{array}\right.$

Ta có $f(0)=18$; $f(3)=25\Rightarrow \min P=18,\ \max(P)=25$.

Vậy $M+m=25+18=43$.

Đáp án: 43

Đề bài: Cho $a,b>0$, $a\ne 1$ thỏa mãn $\log_a b=\dfrac{b}{4}$ và $\log_2 a=\dfrac{16}{b}$. Tổng $a+b$ bằng

Hướng dẫn giải

$\log_2 a=\dfrac{16}{b}\Leftrightarrow a=2^{\frac{16}{b}}\ (1)$

Thay vào $\log_a b=\dfrac{b}{4}$ ta được $\log_{2^{\frac{16}{b}}} b=\dfrac{b}{4}\Leftrightarrow \dfrac{b}{16}\log_2 b=\dfrac{b}{4}\ (2)$

Vì $b>0$ nên $(2)\Leftrightarrow \log_2 b=4\Leftrightarrow b=16$

Thay vào (1) ta được $a=2$

Vậy $a+b=18$.

Đáp án: 18

Đề bài: Cho hai số thực a,b lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\log_a\left(\frac{a^2+4b^2}{4}\right)+\frac{1}{4\log_{ab} b}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có

$$S=\log_a\left(\frac{a^2+4b^2}{4}\right)+\frac{1}{4\log_{ab} b}\ge \log_a(ab)+\frac{1}{4}\log_b(ab)=\frac{5}{4}+\log_a b+\frac{1}{4}\log_b a.$$

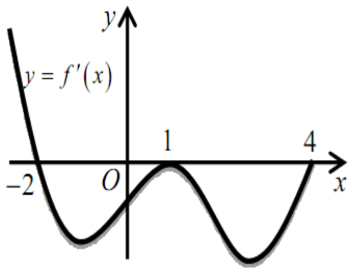
Suy ra

Vậy $S \ge \frac{5}{4} + 2\sqrt{\log_a b.\frac{1}{4}\log_b a} = \frac{9}{4}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4b^2 \\ \log_a b = \frac{1}{4}\log_b a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$.

Đáp án: $\frac{9}{4}$.

Đề bài: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1) = 3$. Giá trị biểu thức $f(-2) + f(4)$ bằng

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết ta có $\int_{-2}^{1} |f'(x)|\mathrm{d}x = 9$ và $\int_{1}^{4} |f'(x)|\mathrm{d}x = 12$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\int_{-2}^{1} |f'(x)|\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{1} f'(x)\mathrm{d}x = -f(x)\Big|_{-2}^{1} = -f(-1) + f(-2)$

$\Rightarrow -f(1) + f(-2) = 9$.

Tương tự ta có $-f(4) + f(1) = 12$.

Như vậy $[-f(1) + f(-2)] - [-f(4) + f(1)] = -3 \Leftrightarrow f(-2) + f(4) - 2f(1) = -3$

$\Leftrightarrow f(-2) + f(4) - 6 = -3 \Leftrightarrow f(-2) + f(4) = 3$.

Đáp án: 3

Đề bài: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $(x^2+1)^2 f'(x) = [f(x)]^2 (x^2-1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(2)$ bằng

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có: $f'(x) = [f(x)]^2 . \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} > 0$ với mọi $x \in (1;2]$.

Do đó $f(x) \ge f(1) = 1 > 0$ với mọi $x \in [1;2]$.

Xét với mọi $x \in [1;2]$ ta có:

$$(x^2+1) f'(x) = [f(x)]^2 (x^2-1) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2} \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{x+\frac{1}{x}} + C.$$

Mà $f(1)=1 \Rightarrow 1=1+C \Leftrightarrow C=0$. Vậy $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x} \Rightarrow f(2)=\dfrac{5}{2}$.

Đáp án: $f(2)=\dfrac{5}{2}$.

Đề bài: Có 6 chiếc ghế được kê thành một hàng ngang. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C, ngồi và hàng ghế đó, sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh. Xác suất để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B bằng

Hướng dẫn giải

Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh thành hàng ngang, không gian mẫu có số phần tử là: $6!$.

Gọi M là biến cố "học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B".

Xét các trường hợp:

Trường hợp 1. Học sinh lớp C ngồi đầu dãy

+ Chọn vị trí cho học sinh lớp C có 2 cách.

+ Chọn 1 học sinh lớp B ngồi cạnh học sinh lớp C có 2 cách.

+ Hoán vị các học sinh còn lại cho nhau có $4!$ cách.

Trường hợp này thu được: $2.2.4!=96$ cách.

Trường hợp 2. Học sinh lớp C ngồi giữa hai học sinh lớp B, ta gộp thành 1 nhóm, khi đó:

+ Hoán vị 4 phần tử gồm 3 học sinh lớp A và nhóm gồm học sinh lớp B và lớp C có: $4!$ cách.

+ Hoán vị hai học sinh lớp B cho nhau có: $2!$ cách.

Trường hợp này thu được: $4!.2!=48$ cách.

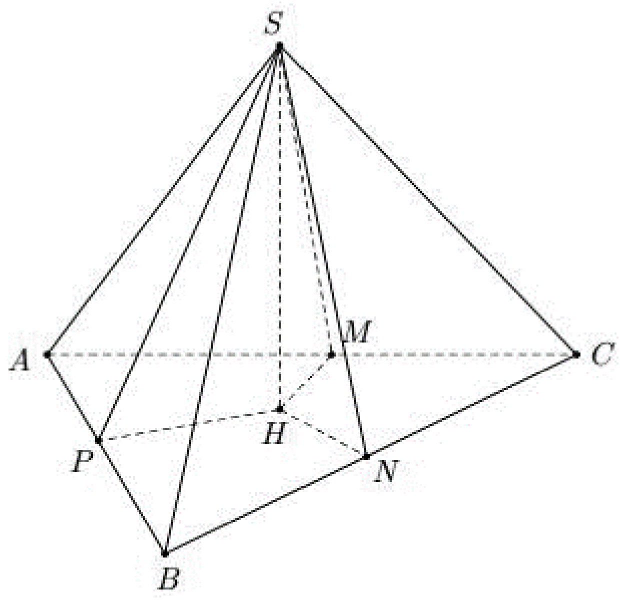
Như vậy số phần tử của biến cố M là: $48+96=144$.

Xác suất của biến cố M là $P(M)=\dfrac{144}{6!}=\dfrac{1}{5}$.

Đáp án: $\dfrac{1}{5}$.

Đề bài: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1, biết khoảng cách từ A đến (SBC) là $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến (SCA) là $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến (SAB) là $\dfrac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Thể tích khối chóp $V_{S.ABC}$ bằng

Hướng dẫn giải



Gọi M,N,P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AC,BC,AB.

Đặt $SH=h\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.h.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{h\sqrt{3}}{12}$.

Ta có $AP=\frac{2S_{SAB}}{AB}=2S_{SAB}=\frac{6V_{S.ABC}}{d\left(C;\left(SAB\right)\right)}=\frac{h\sqrt{3}}{2}:\frac{\sqrt{30}}{20}=h\sqrt{10}$

Tương tự, tính được $HM=2h, HN=h$

$$\Rightarrow PH=\sqrt{SP^2-SH^2}=3h$$

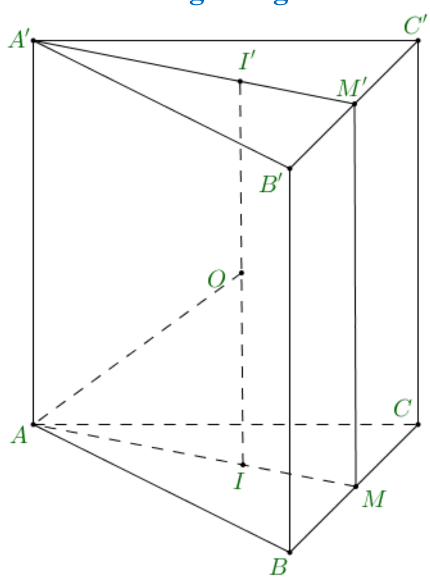
Ta có $S_{ABC}=S_{HAB}+S_{HAC}+S_{HBC}=\frac{1}{2}\left(HP+HM+HN\right)\Leftrightarrow 3h=\frac{\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{12}$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{\sqrt{3}}{12}.\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{48}$.

Đáp án: $\frac{1}{48}$.

Đề bài: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đều bằng a. Tính diện tích S của mặt cầu đi qua 6 đỉnh của hình lăng trụ đó.

Hướng dẫn giải



Gọi I, I' lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC, A'B'C'$, O là trung điểm của II'. Khi đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

Ta có $AI=\frac{2}{3}AM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OI=\frac{a}{2}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $R=OA=\sqrt{OI^2+AI^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$.

Diện tích mặt cầu $S=4\pi R^2=4\pi.\frac{7a^2}{12}=\frac{7\pi a^2}{3}$.

Đáp án : $\frac{7\pi a^2}{3}$.

Đề bài: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A\left(0;1;1\right)$, $B\left(-1;0;2\right)$, $C\left(-1;1;0\right)$ và điểm $D\left(2;1;-2\right)$. Khi đó thể tích tứ diện $ABCD$ là

Hướng dẫn giải

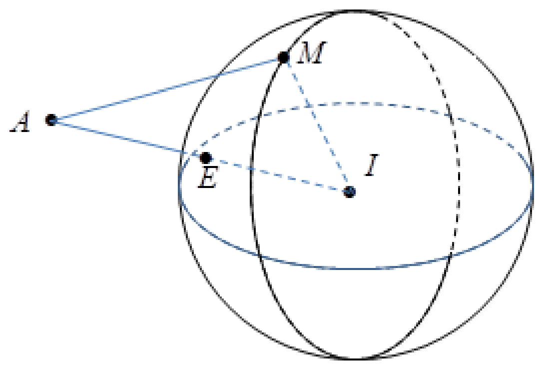
Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;0;-1)$, $\overrightarrow{AD}=(2;0;-3)$ và $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-2;-1)$.

Thể tích tứ diện $ABCD$ là $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{5}{6}$.

Đáp án : $V=\frac{5}{6}$.

Đề bài: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ và điểm $A(2;2;2)$. Xét các điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng AM luôn tiếp xúc với (S). M luôn thuộc mặt phẳng cố định có phương trình là

Hướng dẫn giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=1$. $A(2;2;2)$

Ta luôn có $AMI=90^{o}$, suy ra điểm M thuộc mặt cầu (S_1) tâm E là trung điểm của AI đường kính AI.

Với $E\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R_1=IE=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Phương trình mặt cầu (S_1): $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0.$$

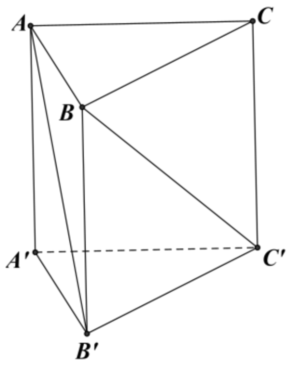
Vậy điểm M có tọa độ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1\\ x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0\\ x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0\end{cases}$$

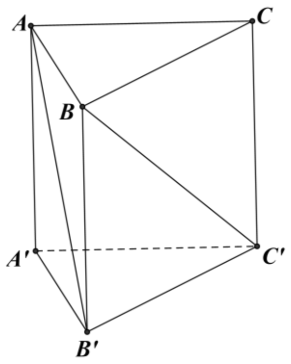
Trừ theo vế hai phương trình cho nhau ta được: $x+y+z-4=0$.

Đáp án: $x+y+z-4=0$

Đề bài: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$ và $AA'=\sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



Hướng dẫn giải



Ta có $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}\right)\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CC'}$

$$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CC'}=-\frac{a^2}{2}+0+0+2a^2=\frac{3a^2}{2}.$$

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC'}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}}{\left|\overrightarrow{AB'}\right|.\left|\overrightarrow{BC'}\right|}=\dfrac{\frac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3}.a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(AB',BC'\right)=60^\circ$.

Đáp án: 60^0.

Đề bài: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $8^x+3x.4^x+\left(3x^2+1\right).2^x=\left(m^3-1\right)x^3+\left(m-1\right)x$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left(0;10\right)$.

Hướng dẫn giải

$8^x+3x.4^x+\left(3x^2+1\right).2^x=\left(m^3-1\right)x^3+\left(m-1\right)x\quad(1)$

$\Leftrightarrow\left(2^x+x\right)^3+\left(2^x+x\right)=\left(mx\right)^3+mx$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+t$

Ta có $t=2^x+x$ mà $0<x<10\Rightarrow\begin{cases}1<2^x<1024\\0<x<10\end{cases}\Rightarrow 1<2^x+x<1034\Rightarrow 1<t<1034$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+t,t\in\left(1;1034\right)$.

$f'\left(t\right)=3t^2+1>0,\forall t\in\left(1;1034\right)$ hay $f\left(t\right)=t^3+t$ đồng biến trên $\left(1;1034\right)$

Suy ra $\left(2\right)\Leftrightarrow 2^x+x=mx\Leftrightarrow\dfrac{2^x+x}{x}=m$

Xét hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{2^x}{x}+1,t\in\left(0;10\right)$.

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{x.2^x\ln 2-2^x}{x^2}=\frac{2^x(x.\ln 2-1)}{x^2}$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\ln 2}=\log_2 e$$

BBT

x	0		$\log_2 e$		10
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$e.\ln 2+1$	$\nearrow$	$104,4$ ‖

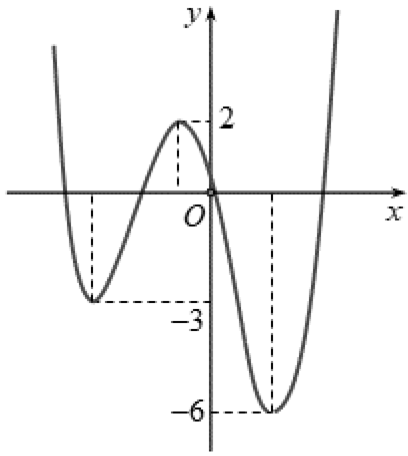
$ycbt \Leftrightarrow e.\ln 2+1<m<104,4$

mà $m\in Z$ nên $m=\overline{3,104}$.

Có tất cả 102 số nguyên m thoả mãn.

Đáp án : 102.

Đề bài: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là hình vẽ dưới đây



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=|f(x-2024)+m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

Hướng dẫn giải

Vì hàm số $y=f(x)$ có ba điểm cực trị nên hàm số $y=f(x-2024)$ cũng có ba điểm cực trị.

Do đó, $y=|f(x-2024)+m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình

$f(x-2024)+m=0\Leftrightarrow f(x-2024)=-m$

có hai nghiệm (bội lẻ) phân biệt. Do $-m$ nhận giá trị âm nên ta có $-6<-m\le -3\Leftrightarrow 3\le m<6$.

Vậy $S=\{3;4;5\}$ và tổng các phần tử là 12.

Đáp án: 12.

Đề bài: Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(g(x))=2x$ với mọi số thực x, $f(2)=-2, f(4)=0$ và $\int_2^4 f(x)dx=6$. Giá trị của $S=\int_{-1}^0 g(x)dx$ bằng

Hướng dẫn giải

Đặt $x=g(t)$.

Với $x=2\Rightarrow g(t)=2\Rightarrow f(g(t))=f(2)=-2\Rightarrow t=-1$,

$x=4\Rightarrow g(t)=4\Rightarrow f(g(t))=f(4)=0\Rightarrow t=0.$

Suy ra,

$$6 = \int_2^4 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(g(t))dg(t) = \int_{-1}^0 2tdg(t).$$

Sử dụng tích phân từng phần, ta có

$3 = \int_{-1}^0 tdg(t) = tg(t)\Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 g(t)dt = g(-1) - S$. Mặt khác, $g(-1) = 2$ nên $S = -1$.

Đáp án: $S = -1$.