

7 phương pháp so sánh hai phân số

Để so sánh hai phân số ngoài cách quy đồng mẫu số hoặc tử số, trong một số trường hợp cụ thể, tùy theo đặc điểm của các phân số, ta còn có thể so sánh bằng một số phương pháp đặc biệt khác.

Phương pháp 1. Dùng số 1 làm trung gian

Nếu $\frac{a}{b} > 1$ và $\frac{c}{d} < 1$ thì $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

- Khi nào thì sử dụng phương pháp dùng số 1 làm trung gian ?

Ta sử dụng phương pháp dùng số 1 làm trung gian khi nhận thấy một phân số có tử số lớn hơn mẫu số và phân số kia có tử số bé hơn mẫu số.

Ví dụ 1. So sánh hai phân số $\frac{2017}{2018}$ và $\frac{2016}{2015}$.

Ta làm như sau: Vì $\frac{2017}{2018} < 1$ và $\frac{2016}{2015} > 1$ nên $\frac{2017}{2018} < \frac{2016}{2015}$.

Phương pháp 2. Dùng một phân số làm trung gian

- Khi nào thì sử dụng phương pháp dùng một phân số làm trung gian ?

Ta sử dụng phương pháp dùng một phân số làm trung gian để so sánh hai phân số trong các trường hợp sau:

- Nhận thấy tử số của phân số thứ nhất bé hơn tử số của phân số thứ hai và mẫu số của phân số thứ nhất lớn hơn mẫu số của phân số thứ hai.

Ví dụ 2. So sánh hai phân số $\frac{15}{37}$ và $\frac{18}{31}$.

Ta làm như sau:

Cách 1. Xét phân số trung gian $\frac{15}{31}$ (phân số này có tử số là tử số của phân số thứ nhất, có mẫu số là mẫu số của phân số thứ hai).

Vì $\frac{15}{37} < \frac{15}{31}$ và $\frac{15}{31} < \frac{18}{31}$ nên $\frac{15}{37} < \frac{18}{31}$.

Cách 2. Xét phân số trung gian $\frac{18}{37}$ (phân số này có tử số là tử số của phân số thứ hai, có mẫu số là mẫu số của phân số thứ nhất).

$$\text{Vì } \frac{18}{31} > \frac{18}{37} \text{ và } \frac{18}{37} > \frac{15}{37} \text{ nên } \frac{18}{31} > \frac{15}{37}.$$

- Nhận thấy tử số và mẫu số của phân số thứ nhất bé hơn tử số và mẫu số của phân số thứ hai nhưng cả hai phân số đều xấp xỉ (gần bằng) với một phân số nào đó thì ta chọn phân số đó làm trung gian.

Ví dụ 3. So sánh hai phân số $\frac{3}{8}$ và $\frac{4}{13}$.

Ta nhận thấy cả hai phân số $\frac{3}{8}$ và $\frac{4}{13}$ đều xấp xỉ $\frac{1}{3}$ nên ta dùng phân số $\frac{1}{3}$ làm trung gian.

$$\text{Ta có: } \frac{3}{8} > \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ nên } \frac{3}{8} > \frac{1}{3} \text{ (1); } \frac{4}{13} < \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ nên } \frac{4}{13} < \frac{1}{3} \text{ (2).}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{3}{8} > \frac{4}{13}.$$

Phương pháp 3. So sánh “phần thừa” của hai phân số

$$\text{Nếu } \frac{a}{b} = m + M; \frac{c}{d} = m + N \text{ mà } M > N \text{ thì } \frac{a}{b} > \frac{c}{d}.$$

M và N theo thứ tự gọi là “phần thừa” so với m của hai phân số đã cho.

• Khi nào thì sử dụng phương pháp so sánh “phần thừa” của hai phân số ?

Ta sử dụng phương pháp so sánh “phần thừa” để so sánh hai phân số trong các trường hợp sau:

- Nhận thấy cả hai phân số đều có tử số lớn hơn mẫu số và hiệu của tử số và mẫu số của hai phân số đều bằng nhau thì ta so sánh “phần thừa” so với 1 của hai phân số đã cho.

Ví dụ 4. So sánh hai phân số $\frac{79}{76}$ và $\frac{86}{83}$.

Ta làm như sau: Ta có: $\frac{79}{76} = 1 + \frac{3}{76}$; $\frac{86}{83} = 1 + \frac{3}{83}$. Vì $\frac{3}{76} > \frac{3}{83}$ nên $\frac{79}{76} > \frac{86}{83}$.

Nhận xét: Nếu hai phân số có “phần thừa” so với 1 khác nhau, phân số nào có “phần thừa” lớn hơn thì phân số đó lớn hơn.

- *Nhận thấy cả hai phân số đều có tử số lớn hơn mẫu số và nếu lấy tử số chia cho mẫu số ở cả hai phân số thì có thương bằng nhau.*

Ví dụ 5. So sánh hai phân số $\frac{43}{14}$ và $\frac{10}{3}$.

Ta làm như sau:

Lấy tử số chia cho mẫu số: $43 : 14 = 3$ (dư 1); $10 : 3 = 3$ (dư 1).

Chọn phần nguyên của thương làm số chung (có 3).

Thực hiện phép trừ: $\frac{43}{14} - 3 = \frac{1}{14}$; $\frac{10}{3} - 3 = \frac{1}{3}$.

Vậy ta có: $\frac{43}{14} = 3 + \frac{1}{14}$; $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$. Vì $\frac{1}{3} > \frac{1}{14}$ nên $\frac{43}{14} < \frac{10}{3}$.

- *Nhận thấy cả hai phân số đều có tử số bé hơn mẫu số và nếu lấy mẫu số chia cho tử số ở cả hai phân số thì có thương bằng nhau.*

Ví dụ 6. So sánh hai phân số $\frac{13}{41}$ và $\frac{19}{71}$.

Ta làm như sau:

Lấy mẫu số chia cho tử số: $41 : 13 = 3$ (dư 2); $71 : 19 = 3$ (dư 14).

Chọn mẫu số của phân số chung bằng cách lấy phần nguyên của thương cộng 1: $3 + 1 = 4$ (có $\frac{1}{4}$).

Thực hiện phép trừ: $\frac{13}{41} - \frac{1}{4} = \frac{11}{164}$; $\frac{19}{71} - \frac{1}{4} = \frac{5}{284}$.

Vậy ta có: $\frac{13}{41} = \frac{1}{4} + \frac{11}{164}$; $\frac{19}{71} = \frac{1}{4} + \frac{5}{284}$.

Vì: $\frac{5}{284} < \frac{11}{284} < \frac{11}{164}$ nên $\frac{19}{71} < \frac{13}{41}$.

Loại 4. So sánh “phần thiếu” của hai phân số

Nếu $\frac{a}{b} = m - M$; $\frac{c}{d} = m - N$ mà $M > N$ thì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

M và N theo thứ tự gọi là “phần thiếu” hay “phần bù” so với m của hai phân số đã cho.

• Khi nào thì sử dụng phương pháp so sánh “phần thiếu” của hai phân số ?

Ta sử dụng phương pháp so sánh “phần thiếu” để so sánh hai phân số trong các trường hợp sau:

- Nhận thấy cả hai phân số đều có tử số nhỏ hơn mẫu số và hiệu của mẫu số và tử số của hai phân số đều bằng nhau thì ta so sánh “phần thiếu” so với 1 của hai phân số đã cho.

Ví dụ 7. So sánh hai phân số $\frac{42}{43}$ và $\frac{58}{59}$.

Ta làm như sau:

$$\text{Ta có: } 1 - \frac{42}{43} = \frac{1}{43}; 1 - \frac{58}{59} = \frac{1}{59}.$$

$$\text{Vì } \frac{1}{43} > \frac{1}{59} \text{ nên } \frac{42}{43} < \frac{58}{59}.$$

Nhận xét: Nếu hai phân số có “phần bù” tới đơn vị khác nhau, phân số nào có “phần bù” lớn hơn thì phân số đó nhỏ hơn.

- Nhận thấy cả hai phân số đều có tử số nhỏ hơn mẫu số và nếu lấy mẫu số chia cho tử số ở cả hai phân số thì có thương bằng nhau.

Ví dụ 8. So sánh hai phân số $\frac{2}{5}$ và $\frac{3}{7}$.

Ta làm như sau:

$$\text{Lấy mẫu số chia cho tử số: } 5 : 2 = 2 \text{ (dư 1); } 7 : 3 = 2 \text{ (dư 1).}$$

Chọn mẫu số của phân số chung bằng cách lấy phần nguyên của thương (có $\frac{1}{2}$).

$$\text{Thực hiện phép trừ: } \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}; \frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{1}{14}.$$

$$\text{Vậy ta có: } \frac{2}{5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}; \frac{3}{7} = \frac{1}{2} - \frac{1}{14}.$$

$$\text{Vì } \frac{1}{10} > \frac{1}{14} \text{ nên } \frac{2}{5} < \frac{3}{7}.$$

Phương pháp 5. Nhân thêm cùng một số vào hai phân số

- Khi nào thì sử dụng phương pháp nhân thêm cùng một số vào hai phân số ?

Ta sử dụng phương pháp nhân thêm cùng một số vào hai phân số khi nhận thấy tử số của hai phân số đều bé hơn mẫu số và nếu lấy mẫu số chia cho tử số thì có thương và số dư bằng nhau. Khi đó ta nhân cả hai phân số với cùng một số tự nhiên (là phần nguyên của thương) để đưa về dạng so sánh “phần bù” đến 1.

Ví dụ 9. So sánh hai phân số $\frac{11}{52}$ và $\frac{17}{76}$.

Ta nhận thấy hai phân số đã cho nếu lấy mẫu số chia cho tử số thì đều được thương là 4 và số dư là 8 nên ta nhân cả hai phân số với 4.

$$\text{Ta có: } \frac{11}{52} \times 4 = \frac{44}{52}; \frac{17}{76} \times 4 = \frac{68}{76}. \quad 1 - \frac{44}{52} = \frac{8}{52}; \quad 1 - \frac{68}{76} = \frac{8}{76}.$$

$$\text{Vì } \frac{8}{52} > \frac{8}{76} \text{ nên } \frac{44}{52} < \frac{68}{76} \text{ hay } \frac{11}{52} < \frac{17}{76}.$$

Phương pháp 6. Thực hiện “phép chia hai phân số”

Phương pháp này được sử dụng dựa vào nhận xét: “*Trong phép chia, nếu số bị chia lớn hơn số chia thì được thương lớn hơn 1, nếu số bị chia bé hơn số chia thì được thương nhỏ hơn 1*”.

- Khi nào thì sử dụng phương pháp “chia hai phân số” ?

Ta sử dụng phương pháp “chia hai phân số” khi nhận thấy tử số và mẫu số của hai phân số là những số có giá trị không quá lớn, không mất nhiều thời gian khi thực hiện phép nhân ở tử số và mẫu số.

Ví dụ 10. So sánh hai phân số $\frac{2}{23}$ và $\frac{9}{41}$.

$$\text{Ta có: } \frac{2}{23} : \frac{9}{41} = \frac{2}{23} \times \frac{41}{9} = \frac{82}{207}. \text{ Vì } \frac{82}{207} < 1 \text{ nên } \frac{2}{23} < \frac{9}{41}.$$

Phương pháp 7. Đảo ngược phân số để so sánh

Phương pháp này được sử dụng dựa vào nhận xét: “*Trong hai phép chia có số bị chia bằng nhau (đều bằng 1), phép chia nào có số chia lớn hơn thì có thương nhỏ hơn*”.

- Khi nào thì sử dụng phương pháp đảo ngược phân số ?

Ta sử dụng phương pháp đảo ngược phân số khi nhận thấy cả hai phân số đều có tử số bé hơn mẫu số và nếu lấy mẫu số chia cho tử số thì

có thương và số dư bằng nhau. Khi đó ta đảo ngược phân số để đưa về dạng so sánh “phần thừa”.

Ví dụ 11. So sánh hai phân số $\frac{21}{89}$ và $\frac{2003}{8017}$.

Ta nhận thấy hai phân số đã cho nếu lấy mẫu số chia cho tử số thì đều được thương là 4 và số dư là 5.

Ta có: $1 : \frac{21}{89} = \frac{89}{21}$; $1 : \frac{2003}{8017} = \frac{8017}{2003}$. Mà $\frac{89}{21} = 4 + \frac{5}{21}$; $\frac{8017}{2003} = 4 + \frac{5}{2003}$.

Vì $\frac{5}{21} > \frac{5}{2003}$ nên $\frac{89}{21} > \frac{8017}{2003}$. Suy ra: $\frac{21}{89} < \frac{2003}{8017}$.

Bài tập tự luyện:

1. Không quy đồng mẫu số, tử số hãy so sánh hai phân số sau:

a) $\frac{4005}{4007}$ và $\frac{1999}{1997}$; b) $\frac{25}{49}$ và $\frac{35}{71}$; c) $\frac{1997}{2003}$ và $\frac{1995}{2101}$;

d) $\frac{2007}{2005}$ và $\frac{2005}{2003}$; e) $\frac{13}{27}$ và $\frac{7}{15}$.

2. Hãy so sánh hai phân số sau:

a) $\frac{7777772}{7777778}$ và $\frac{88888881}{88888889}$; b) $\frac{1224364860}{1734516885}$ và $\frac{1326395265}{1836547290}$.

3. Không quy đồng tử số hoặc mẫu số, hãy sắp xếp các phân số sau theo thứ tự từ bé đến lớn:

a) $\frac{26}{15}$; $\frac{215}{253}$; $\frac{10}{10}$; $\frac{26}{11}$; $\frac{152}{253}$.

b) $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$.

c) $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{8}{7}$; $\frac{9}{8}$ và $\frac{10}{9}$.

d) $\frac{15}{22}$; $\frac{17}{26}$; $\frac{19}{30}$; $\frac{21}{34}$; $\frac{23}{38}$; $\frac{25}{42}$.

e) $\frac{12}{13}$; $\frac{34}{31}$; $\frac{11}{14}$; $\frac{33}{32}$; $\frac{15}{15}$.

4. Hãy so sánh:

a) $A = \frac{2003}{2004} + \frac{2004}{2005}$ và $B = \frac{2003+2004}{2004+2005}$.

$$b) C = \frac{432143214321}{99999999999} \text{ và } D = \frac{1231+1231+1231+1231}{1997+19971997+199819982000}.$$

$$c) E = \frac{2006}{987654321} + \frac{2007}{246813579} \text{ và } G = \frac{2007}{987654321} + \frac{2006}{246813579}.$$

5. Không tính ra kết quả, hãy so sánh:

$$a) A = \frac{1}{7} + \frac{1}{13} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{97} \text{ với } \frac{1}{3}.$$

$$b) B = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} \text{ với } \frac{1}{2}.$$

$$c) C = \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \text{ với } \frac{39}{40}.$$

$$d) D = \frac{2006}{2007} + \frac{2007}{2008} + \frac{2008}{2009} + \frac{2009}{2006} \text{ với } 4.$$

$$e) E = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{4048144} \text{ với } 1.$$