

PHẦN ĐẠI SỐ

§1. CĂN BẬC HAI

A. Kiến thức cơ bản

1. Khái niệm

+ x là căn bậc hai của số không âm $a \Leftrightarrow x^2 = a$.

$$+ \sqrt{a} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

2. Điều kiện xác định của biểu thức \sqrt{A}

Biểu thức \sqrt{A} xác định $\Leftrightarrow A \geq 0$.

3. Hằng đẳng thức căn bậc hai

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

4. Các phép biến đổi căn thức

$$+) \sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \quad (A \geq 0; B \geq 0)$$

$$+) \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (A \geq 0; B > 0)$$

$$+) \sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} \quad (B \geq 0)$$

$$+) \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{A \cdot B} \quad (A \cdot B \geq 0; B \neq 0)$$

$$+) \frac{m}{A \pm \sqrt{B}} = \frac{m \cdot (A \mp \sqrt{B})}{A^2 - B} \quad (B \geq 0; A^2 \neq B)$$

$$+) \frac{n}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{n \cdot (\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B} \quad (A \geq 0; B \geq 0; A \neq B)$$

$$+) \sqrt{A \pm 2\sqrt{B}} = \sqrt{m \pm 2\sqrt{m \cdot n} + n} = \sqrt{(\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2} = |\sqrt{m} \pm \sqrt{n}|$$

$$\text{với } \begin{cases} m + n = A \\ m \cdot n = B \end{cases}$$

B. Bài tập vận dụng

Bài 1. Rút gọn biểu thức

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{b) } A = \left(\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{\sqrt{2} - 1} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} \right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$$

$$\text{c) } B = \frac{x}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2x - \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \quad (x \geq 0; x \neq 1)$$

Bài 2. Rút gọn biểu thức

$$\text{a) } A = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} + \frac{\sqrt{35} - \sqrt{15}}{\sqrt{5}} - \sqrt{28}$$

$$\text{b) } B = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \quad (\text{với } a, b > 0 \text{ và } a \neq b)$$

Bài 3. Cho hai biểu thức $M = \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \sqrt{28} + \sqrt{54}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$

(với $x > 0$)

- Tính giá trị biểu thức M.
- Rút gọn biểu thức B
- Tìm giá trị của x để $\frac{M}{B} > \frac{9\sqrt{6}}{2}$

Bài 4. Cho biểu thức $A = \frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{1}{2\sqrt{3}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$

- Rút gọn biểu thức A và B
- Hãy tìm các giá trị của x để giá trị biểu thức $B = \frac{2}{5}A$

Bài 5

Cho hai biểu thức : $A = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} + \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$
 và $B = \left(\frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{(a-2\sqrt{a}+1)}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$

- Rút gọn hai biểu thức A và B.
- Hãy so sánh A và B.
- Tính giá trị biểu thức B tại x bằng giá trị biểu thức A.

Bài 6. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0, x \neq 25$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$
- Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$
- Tìm tất cả các giá trị của x để $A = B \cdot |x-4|$.

Bài 7

1. Tính $3\sqrt{2}(\sqrt{50} - 2\sqrt{18} + \sqrt{98})$

2. Cho biểu thức $P = \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

- Rút gọn biểu thức P
- Tìm giá trị của x để $P > 0$.

Bài 8. Cho hai biểu thức $A = \sqrt{50} - 3\sqrt{8} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ và $B = \frac{x\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ (Đk: $x \geq 0; x \neq 1$)

- Rút gọn biểu thức A, B.
- Tìm các giá trị của x để giá trị biểu thức A bằng giá trị biểu thức B.

Bài 9. 1. Cho biết $a = 2 + \sqrt{3}$ và $b = 2 - \sqrt{3}$.
 Tính giá trị biểu thức: $P = a + b - ab$.

2. Cho biểu thức

$$B = \left(1 + \frac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right) \left(1 + \frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) \quad \text{Với } 0 \leq x \neq 1$$

- Rút gọn B
- Tìm x để $\sqrt{B} < B$.

Bài 10.

1, Tính $A = \frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \sqrt{147} - 2\sqrt{18}$

2, Cho biểu thức $P = \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) : \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ (Điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 1$)

a, Rút gọn biểu thức P

b, Tìm giá trị của x để $A.P > 0$.

§2. HÀM SỐ BẬC NHẤT - HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. Kiến thức cơ bản

1. Hàm số bậc nhất

1.1. Tính chất của hàm số bậc nhất $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

- Đồng biến khi $a > 0$; nghịch biến khi $a < 0$.
- Đồ thị là đường thẳng nên khi vẽ chỉ cần xác định hai điểm thuộc đồ thị.
- + Trong trường hợp $b = 0$, đồ thị hàm số luôn đi qua gốc tọa độ.
- + Trong trường hợp $b \neq 0$, đồ thị hàm số luôn cắt trục tung tại điểm có tung độ b .
- Đồ thị hàm số luôn tạo với trục hoành một góc α , mà $\tan \alpha = a$.
- Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ khi và chỉ khi $y_A = ax_A + b$.

1.2. Vị trí của hai đường thẳng trên mặt phẳng tọa độ

Xét hai đường thẳng: $(d_1): y = a_1x + b_1$; $(d_2): y = a_2x + b_2$ với $a_1 \neq 0$; $a_2 \neq 0$.

- Hai đường thẳng song song khi $a_1 = a_2$ và $b_1 \neq b_2$.
- Hai đường thẳng trùng nhau khi $a_1 = a_2$ và $b_1 = b_2$.
- Hai đường thẳng cắt nhau khi $a_1 \neq a_2$.
 - + Nếu $b_1 = b_2$ thì chúng cắt nhau tại b_1 trên trục tung.
 - + Nếu $a_1.a_2 = -1$ thì chúng vuông góc với nhau.

2. Hệ phương trình bậc nhất

Cách giải chủ yếu dựa vào hai phương pháp cộng đại số và thế. Chú ý phương pháp đặt ẩn phụ trong một số trường hợp xuất hiện các biểu thức giống nhau ở cả hai phương trình.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hàm số $y = 2x + m^2 - 3$ và hàm số bậc nhất $y = (m + 1)x + 4$

- a, tìm m để hai đồ thị hàm số trên cắt nhau? Hai đồ thị hàm số trên có song song không
b, tìm m để hai đồ thị hàm số trên đi qua điểm $A(1;3)$

Bài 2: Cho hàm số bậc nhất $y = (m - 2)x + 2m - 1$ có đồ thị (d). Tìm giá trị của m biết:

- a, (d) đi qua $A(2;3)$
b, (d) cắt trục hoành có hoành độ bằng 3;
c, (d) Cắt đường thẳng $y = -2x - 1$ tại điểm có hoành độ bằng -3;
d; (d) cắt đường thẳng $y = 2x - 3$ tại điểm cách trục hoành một khoảng bằng 2.

Bài 3.

1. Cho hàm số $y = (m-1)x + (n+3)$ (d). Hãy xác định giá trị của m, n để đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -1.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3(x+1) + 2(x+2y) = 4 \\ 4(x+1) - (x+2y) = 9 \end{cases}$$

Bài 4

- a. Tìm giá trị của m để đường thẳng: $y = (m-3)x + m + 1$, ($m \neq 3$) và đường thẳng $y = (2-m)x - 3$, ($m \neq 2$) cắt nhau tại 1 điểm trên trục tung.

b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Bài 5

1. Điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc đường thẳng $y = 2x - 1$ và cắt trục hoành một khoảng bằng

3. Tìm tọa độ điểm M.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - 2\sqrt{y+1} = 2 \\ 2\sqrt{x+3} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$

Bài 6.

1. Xác định hàm số $y = ax + b$ biết đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 6, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là -2.

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

Bài 6.

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 3 điểm : A(2;5); B(-1;-1); C(4;9)

a) Lập phương trình đường thẳng BC suy ra 3 điểm A; B; C thẳng hàng.

b) Chứng minh ba đường thẳng BC ; $3x - y - 1 = 0$; $x - 2y + 8 = 0$ đồng quy.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{4}{x} - \frac{2}{y} = 1 \end{cases}$$

Bài 7.

a) Biết đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $M(2; \frac{1}{2})$ và song song với

đường thẳng $2x + y = 3$. Tìm các hệ số a và b.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y = -1 & (1) \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2 & (2) \end{cases}$$

Bài 8.

1) Tìm m để đường thẳng $y = -3x + 6$ và đường thẳng $y = \frac{5}{2}x - 2m + 1$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành.

2) Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 2(2x - 1) + y = 3 \\ 3x - 2(y + 3) = -18 \end{cases}$$

Bài 9.

a) Viết phương trình đường thẳng song song với đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x - 3$ và cắt trục

hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{4}{x} - \frac{2}{y} = 1 \end{cases}$$

Bài 10.

1. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(-1; 2)$ và song song với đường thẳng $y = 2x + 1$

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{2}{x+1} + \frac{6}{y-2} = 5 \\ \frac{3}{x+1} - \frac{4}{y-2} = 1 \end{cases}$$

HÌNH HỌC: GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường tròn tâm O đi B và C, cắt AB, AC tại D và E (BC không là đường kính), đường cao AH cắt DE tại K.

1. CMR: góc ADE = góc ACB.
2. CMR: K là trung điểm DE.
3. Nếu K là trung điểm HA. CMR: DE là tiếp tuyến chung ngoài đường tròn đường kính BH và CH.

Bài 2

Cho tam giác ABC ($AB < AC$), trung tuyến AM, phân giác AD, lấy N thuộc AM, vẽ đường tròn tâm O đường kính AN cắt phân giác ngoài góc A tại E, cắt phân giác trong tại F.

1. CMR: E, O, F thẳng hàng.
2. Đường tròn (O) cắt AB và AC lần lượt tại K và H. KH cắt AD tại I.
CMR: $FK^2 = FI \cdot FA$.
3. CMR: $NI \cdot CD = NK \cdot BD$

Bài 3

Cho tam giác ABC cân tại A ngoại tiếp đường tròn tâm O. đường tròn này tiếp xúc với AB, BC, CA lần lượt tại F, D, E.

1. CMR $EF \parallel BC$ và ba điểm A, O, D thẳng hàng.
2. Gọi N là giao điểm của BE với (O), M là giao điểm FN và BC. CMR: tam giác BFC đồng dạng tam giác DMB và M là trung điểm BD. (Tỉ số bằng nhau có mẫu bằng nhau)
3. Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC CMR: AB, AC là tiếp tuyến của đường tròn O'.

Bài 4

Cho (O) đường kính AB, vẽ đường tròn tâm (I) tiếp xúc (O) tại M, tiếp xúc AB tại N, cắt MA, MB tại C, D.

1. CMR: $CD \parallel AB$.
2. CMR: MN đi qua điểm K chính giữa cung AB.
3. CMR: KA là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.
4. Vẽ tiếp tuyến KT với (I), CMR: T thuộc đường tròn cố định.

Bài 5

Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp (O), gọi P là điểm trên cung nhỏ AC, AP kéo dài cắt BC tại M.

1. CMR: góc ABP = góc AMB.
2. CMR: $AB^2 = AP \cdot AM$.
3. Giả sử $AP = CP$, CMR: $MA \cdot MP = BA \cdot BM$.
4. Tìm vị trí của M trên tia BC sao cho $AP = MP$.
5. Gọi MT là tiếp tuyến của (O) tại T, CMR: AM, AB, MT là 3 cạnh của một tam giác vuông. (HD: Sử dụng định lý Pitago)

Bài 6

Cho tam giác ABC cân tại A ($AB = AC > BC$), nội tiếp đường tròn (O), gọi D là trung điểm AC, Tiếp tuyến (O) tại A cắt BD tại E, CE cắt (O) tại F.

1. CMR: $BC \parallel AE$.
2. Tứ giác ADHE là hình gì? Vì sao?

3. Gọi I là trung điểm CF, G là giao điểm BC với OI, so sánh góc BGO và góc BAC.
4. Cho $DF \parallel BC$. Tính $\cos \angle ABC = ?$ ($\frac{\sqrt{2}}{4}$)

Bài 7

Cho $(O;R)$ đường kính BC, lấy A thuộc (O) sao cho $AB > AC$, đ/c AH của tam giác ABC, đường tròn (I) đường kính AH cắt AB, AC tại E, D

1. Tứ giác ADHE là hình gì? Vì sao?
2. CMR: OA vuông góc DE.
3. Gọi F là giao điểm thứ 2 của (O) với (I), AF cắt BC tại M. CMR M, D, E thẳng hàng.

Bài 8

Cho (O) đường kính AB, vẽ (A) bán kính nhỏ hơn $AB/2$, cắt (O) tại C, D. Đường thẳng qua B cắt (O) tại M cắt (A) tại N (N nằm trong (O)).

1. CMR: BC, BD là tiếp tuyến của đường tròn (A).
2. CMR: NB là phân giác góc CND.
3. CMR: tam giác CNM đồng dạng tam giác MND.
4. Cho $NC = a, DN = b$. Tính MN.

Bài 9

Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn tâm O đi qua B và C cắt AB, AC tại D, E. Đường cao AH cắt DE tại I.

1. CMR: I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE.
2. CMR: đường thẳng đi qua A và vuông góc DE đi qua trung điểm M của BC.
3. Trường hợp I là trung điểm của AH. Hãy xác định vị trí của đường thẳng DE với đường tròn đường kính BH và CH.

Bài 10

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, gọi C là điểm chính giữa cung AB, lấy M thuộc cung BC. Hạ CH vuông góc AM tại H.

1. CMR: tam giác HCM vuông cân, OH là phân giác góc COM.
2. Gọi I là giao điểm OH với BC, MI cắt (O) tại D. CMR: $BD \parallel CM$.
3. Tìm vị trí của M để BD đi qua H.

Bài 11

Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp (O) , kẻ đường kính AI, gọi M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC (M khác A, C), trên tia BM lấy điểm D nằm ngoài (O) và $MD = MC$.

1. CM: MI là phân giác BMC.
2. Tứ giác MDIC là hình thang.
3. CM: AM đi qua trung điểm DC.
4. So sánh chu vi tam giác MBC và chu vi tam giác ABC.

Bài 12

Cho đường tròn (O) , từ điểm A ở bên ngoài đường tròn và hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là tiếp điểm), OA cắt BC tại E.

1. Chứng minh BC vuông góc OA và $BA \cdot BE = AE \cdot BO$.
2. Gọi I là trung điểm BE, đường thẳng qua I vuông góc OI cắt các tia AB, AC tại D và F. Chứng minh rằng góc $\angle IDO = \angle BCO$ và tam giác DOF cân.
3. Chứng minh F là trung điểm AC. (HD: sử dụng song song, góc so le, tam giác IEF bằng tam giác IBD)