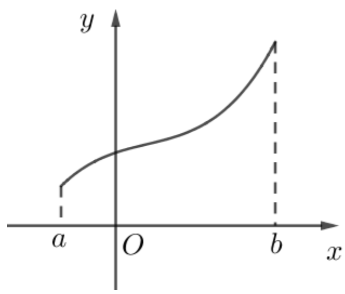
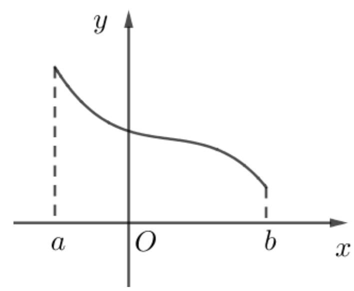
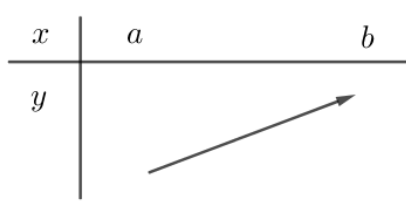
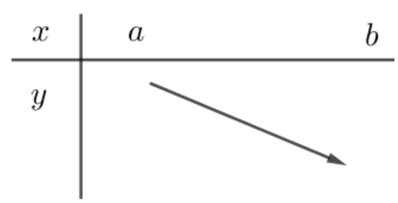
CHƯƠNG I. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

§ 1. Sự đồng biến và nghịch biến của hàm số

1. Định nghĩa: SGK

2. Các dấu hiệu của sự đồng biến, nghịch biến

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$

	Hàm đồng biến trên (a;b)	**Hàm nghịch biến trên (a;b)**
Đạo hàm	Đạo hàm f′(x) ≥ 0 với mọi x thuộc (a;b) (*)	Đạo hàm f′(x) ≤ 0 với mọi x thuộc (a;b) (*)
Đồ thị	Đồ thị ***đi lên*** từ trái sang phải 	Đồ thị ***đi xuống*** từ trái sang phải 
Bảng biến thiên	Bảng biến thiên có mũi tên ***đi lên*** từ trái sang phải 	Bảng biến thiên có mũi tên ***đi xuống*** từ trái sang phải 
Máy tính MODE 7	Dùng MODE 7 với hàm số f(x) START: a END: b STEP: xấp xỉ $\frac{b-a}{10}$ Sau đó quan sát bảng f(x) thấy các giá trị f(x) ***tăng dần***	Dùng MODE 7 với hàm số f(x) START: a END: b STEP: xấp xỉ $\frac{b-a}{10}$ Sau đó quan sát bảng f(x) thấy các giá trị f(x) ***giảm dần***

(*) Dấu bằng nếu xảy ra chỉ tại hữu hạn điểm

3. Các bước xét sự đồng biến, nghịch biến bằng tự luận

- Tìm TXĐ
- Tính y′. Cho y′=0 và y′ không xác định

- Xét dấu y′. Khi xét dấu có thể dùng các quy tắc dấu đã biết hoặc CALC thay vào y′. Lập BBT

- Kết luận.

4. Sự đồng biến, nghịch biến của một số hàm số thường gặp

-) Hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$

Đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$

Nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$

Khi $b^2 - 3ac > 0$ thì hàm bậc ba có cả khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến

-) Hàm phân thức $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow ad - bc > 0$

Nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow ad - bc < 0$

-) Các hàm số bậc hai, bậc 4 trùng phương, phân thức KHÔNG BAO GIỜ đồng biến và nghịch biến trên $\mathbb{R}$

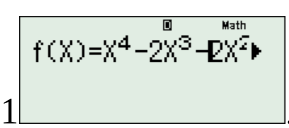
5. Một số dạng bài:

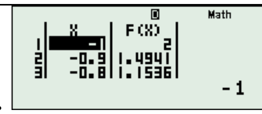
5.1. Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số f(x)

Cách 1: Dùng tự luận theo các bước ở mục c

- Tìm TXĐ *- Tính y′. Cho y′=0 và y′ không xác định* *- Xét dấu y′. Lập BBT* *- Kết luận*	VD: Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$ Giải: TXĐ: R $y' = 6x^2 - 10x + 4$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = \dfrac{2}{3}$ Xét dấu (Lập BBT) Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right); (1; +\infty)$ và nghịch biến trên $\left(\dfrac{2}{3}; 1\right)$

Cách 2: Dùng MODE 7. Thử từng đáp án

- Ấn MODE 7 *- Nhập hàm f(x)* *- START: a* *-END: b* *- STEP:* $\dfrac{b-a}{10}$ Nếu bảng f(x) luôn tăng thì đồng biến, f(x) luôn giảm thì nghịch biến trên	VD: Hàm số $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây A. $(-1;0)$ B. $(0;2)$ C. $(1;3)$ D. $(3;+\infty)$ Giải: - Ấn MODE 7 - f(x) = $X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 1$  . Ấn = - Kiểm tra đáp án A:

khoảng (a;b) * Chú ý: nếu khoảng (a;b) là tập số thực R thì chọn a=-9; b=9 và STEP là 1	START: -1; END: 0, STEP: 0,1.  Nhìn bảng f(x) ta thấy giá trị f(x) giảm nhưng sau đó lại tăng (dòng số 7 đến dòng số 8). Nên A loại - Tiếp tục thử sang đáp án B thấy đúng.

Câu 1. Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y = -3x^3 + 7x^2 + 2$.

A. $\left(0;\dfrac{7}{3}\right)$ **B.** $\left(0;\dfrac{14}{9}\right)$

C. $(-\infty;0)$ và $\left(\dfrac{14}{9};+\infty\right)$ **D.** $\left(\dfrac{7}{3};+\infty\right)$.

Câu 2. Hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - x^2 + 2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(0;\sqrt{2}\right)$ **B.** $\left(-\sqrt{2};0\right)$ và $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

C. $(-\infty;+\infty)$ **D.** $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Câu 3. Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 12x + 1$

A. $(-\infty;2);(6;+\infty)$ **B.** $(2;6)$

C. $(-\infty;-6);(2;+\infty)$ **D.** $(-\infty;+\infty)$

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$. Tìm kết luận đúng

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;3);(3;+\infty)$

B. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right);\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-7);(-7;+\infty)$

5.2. Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số f(x) biết đạo hàm f′(x):

Cách 1: Tự luận

- Cho f′(x) = 0 và f′(x) không xác định *- Xét dấu f′(x), nên dùng phương pháp thay số tìm dấu* *- Lập BBT và kết luận* **Mẹo nhỏ**, *nếu f′(x)*	VD: Cho hàm số y=f(x) liên tục trên R, có đạo hàm là $f'(x) = (x^2-4).(x^2+1).2x$. Hàm số f(x) đồng biến trên khoảng nào? A. $(-\infty;2)$ B. $(-\infty;-2)$ C. $(-2;0)$ D. $(0;2)$ Giải: - Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4=0 \\ x^2+1=0 \\ 2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-2; x=2; x=0$ - Lập bảng xét dấu

<table>
<tr>
<td>có dạng tích mà trong đó có 1 thừa số luôn lớn hơn hoặc bằng 0 thì có thể bỏ thừa số đó.

? Em hãy tìm tiếp khoảng đồng biến, nghịch biến của 2 ví dụ trên</td>
<td>Từ đó ta có đáp án C
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-2</td><td></td><td>0</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$\searrow$</td><td></td><td>$\nearrow$</td><td></td><td>$\searrow$</td><td></td><td>$\nearrow$</td><td></td></tr>
</table>
VD: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'(x) = x(x-1)^2(x+2)$. Hỏi hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?
Giải: Có thể bỏ ngay $(x-1)^2 \geq 0$ đi, như vậy coi $f'(x) = x(x+2)$. làm như VD trên ta có hàm số nghịch biến trên $(-2;0)$</td>
</tr>
</table>

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-1)(x-2)(x^2-4)$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(1;2)$ **B.** $(-2;2)$ **C.** $(-2;1)$ **D.** $(-2;+\infty)$

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2-1)(x+3)^2(x^2-4x+3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(3;4)$ **B.** $(-2;-1)$ **C.** $(-1;1)$ **D.** $(-1;+\infty)$

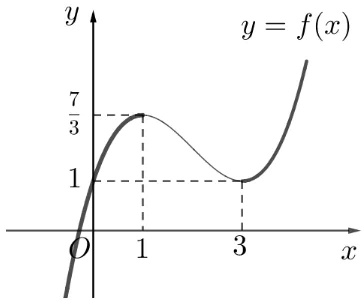
5.3. Sử dụng bảng biến thiên, bảng xét dấu đạo hàm, đồ thị hàm số, tìm khoảng đồng biến nghịch biến của hàm số

Cách giải: Dùng dấu hiệu đồng biến, nghịch biến của Bảng biến thiên và đồ thị ở mục 2.

<table>
<tr>
<td><u>Lỗi sai hay gặp</u>: Lấy con số ở hai đầu mũi tên nên chọn nhầm sang đáp án B.

<u>Chú ý:</u> Đề bài có thể đưa ra đáp án C là khoảng $(1;2)$ hoặc $(2;3)$ vẫn là đáp án đúng.
Phần đi lên của đồ thị là phần nét</td>
<td>VD: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm khoảng nghịch biến của hàm số
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-3</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>$\nearrow$</td><td>2</td><td>$\searrow$</td><td>-4</td><td>$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>
A. $(-\infty;2)$ B. $(-4;+\infty)$ C. $(-3;1)$ D. $(-4;2)$
Dùng dấu hiệu Bảng biến thiên ta có ngay đáp án C

VD: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây
A. $\left(-\infty;\frac{7}{3}\right)$ B. $(1;+\infty)$ C. $(1;3)$ D. $(-\infty;1)$</td>
</tr>
</table>

đậm, ứng với hàm số đồng biến Phần đi xuống của đồ thị là phần nét mảnh, ứng với hàm số nghịch biến.	 Giải: Dùng dấu hiệu, ta có đáp án A

Câu 7. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	4	↘	$-\infty$

A. $\left(2;+\infty\right)$ **B.** $\left(-1;4\right)$ **C.** (-2;2) **D.** $\left(-\infty;-2\right)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm khoảng nghịch biến của hàm số

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	$-\infty$

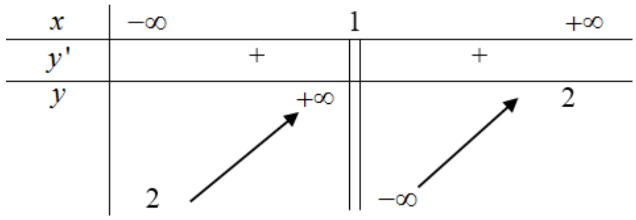
A. (-1;2) **B.** (-2;3)
C. $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;+\infty\right)$.

Câu 9. Hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hỏi hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	0	↘	-2	↗	$+\infty$

A. $\left(-3;-2\right)$ **B.** $\left(-1;0\right)$ **C.** $\left(0;2\right)$ **D.** $\left(-2;0\right)$

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm kết luận đúng



A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ. Tìm kết luận đúng

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	

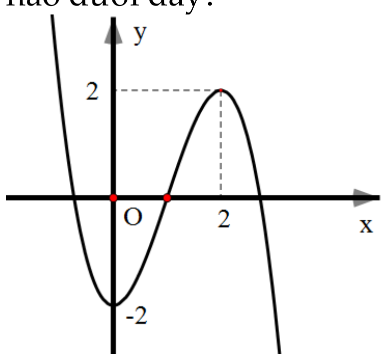
A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$

B. Hàm số đồng biến trên $(1;3)$

C. Hàm số đồng biến trên $(3;5)$

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$

Câu 12. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$

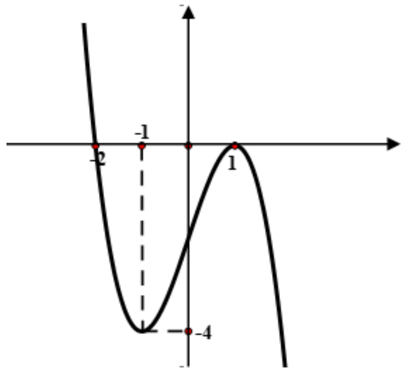
B. $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

C. $(-2;2)$

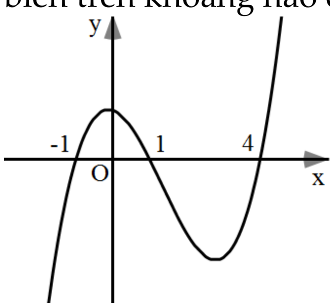
D. $(0;2)$

5.4. Sử dụng đồ thị y=f'(x), tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số f(x)

Không dùng sự lên xuống của đồ thị f'(x) để trả lời sự biến thiên của f(x) *+) Phần đồ thị f'(x) nằm trên Ox thì f'(x) >0 nên hàm số f(x) đồng biến.* *+) Phần đồ thị f'(x) nằm dưới Ox thì f'(x) <0 nên*	VD: Cho hàm số y=f(x) có đồ thị f'(x) như hình vẽ

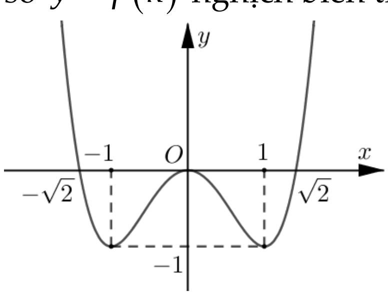
hàm số f(x) nghịch biến.	 Hàm số f(x) đồng biến trên khoảng nào dưới đây A. $(-\infty;-2)$ B. $(-1;1)$ C. $(1;+\infty)$ D. $(0;+\infty)$ Giải: Cho $f'(x)=0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị với Ox, ta có $x=-2; x=1$ Xét dấu: Trên khoảng $(-\infty;-2)$, phần đồ thị $f'(x)$ ở bên trên Ox nên $f'(x)>0$. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$ Trên khoảng $(-2;+\infty)$, phần đồ thị $f'(x)$ ở bên dưới Ox nên $f'(x)<0$. Hàm số nghịch biến trên $(-2;+\infty)$. Kết luận A

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây



A. $(4;+\infty)$ **B.** $(1;4)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(-\infty;-1)$

Câu 14. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của $f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây



A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(-\infty;-\sqrt{2})$ **C.** $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ **D.** $(1;+\infty)$

5.5*. Tìm m để hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng (a;b)

Đây là dạng bài VD-VDC, học sinh chú ý một số cách giải như sau:

Cách 1: Thử từng đáp án

** Chú ý: Phải thử hết các đáp án.* *Nếu có hai đáp án cùng đúng thì chọn đáp án nào bao quát hơn (to hơn).* *B và C cùng đúng thì phải chọn C.*	VD. Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ A. $m < 3$ B. $m > 3$ C. $m \geq 3$ D. $m = 3$ Giải: Với mỗi đáp án, ta thử hai giá trị. Đáp án A: thử với m=-9 và m=3-0,01 (vì m < 3) Với m=-9, hàm số là $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 1$ Dùng MODE 7 hoặc lập bảng biến thiên ta thấy m=-9 này không đúng. Loại A Đáp án B: thử với m=3+0,01 và m=9. Dùng MODE 7 hoặc lập bảng biến thiên thấy hai giá trị m này đều đúng. B đúng. Đáp án C: thử với m=3; đúng Vậy chọn C

Cách 2: Dùng các dấu hiệu nhanh trong phần 4 của lý thuyết (xem lại bên trên)

Rõ ràng cách này nhanh hơn nhiều so với thử từng đáp án	VD. Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ A. $m < 3$ B. $m \geq 3$ C. $m > 3$ D. $m = 3$ Giải: Hàm số đồng biến trên R khi $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$ VD: Tìm m để hàm số $y = \dfrac{mx - 1}{x + 2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định Giải: Khoảng xác định của hàm số là $(-\infty; -2); (-2; +\infty)$ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi $ad - bc < 0 \Leftrightarrow 2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{2}$

Câu 15. Tìm m để hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

A. $m \leq -\dfrac{3}{2}$ **B.** $m \leq \dfrac{3}{2}$ **C.** $m \geq -\dfrac{3}{2}$ **D.** $m > 3$

Câu 16. Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + (m - 2)x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

A. $m \leq \dfrac{2}{3}$ **B.** $-1 \leq m \leq \dfrac{2}{3}$ **C.** $m \geq 1$ **D.** $m \geq \dfrac{2}{3}$

Câu 17. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{x + m}{2x - 1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định

A. $m < -\dfrac{1}{2}$ **B.** $m > -\dfrac{1}{2}$ **C.** $m < \dfrac{1}{2}$ **D.** $m > \dfrac{1}{2}$

Cách 3: Dùng dấu hiệu đạo hàm

Nhắc lại: "hàm số *đồng biến* trên $(a;b)$ khi nó xác định trên $(a;b)$ và $f'(x)\ge 0$ với mọi x thuộc $(a;b)$; dấu bằng nếu có chỉ tại hữu hạn điểm.

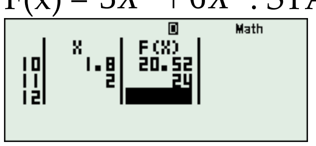
Riêng với hàm phân thức thì $f'(x)>0$."

** Chú ý: đây là hàm phân thức nên chỉ có hai trạng thái là đồng biến và nghịch biến trên từng khoảng xác định. Vậy muốn đồng biến trên khoảng nào thì ad-bc >0* ** Có thể vẽ trục số ra để hiểu kỹ hơn lập luận (1)*	VD: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên $(-\infty;-10)$ A. 1 B. 3 C. 2 D. Vô số Giải: ĐK: $x\ne -5m$ Hàm số phải xác định trên $(-\infty;-10)$ nên $-5m\notin(-\infty;-10)$ Hay $-5m\ge -10 \Leftrightarrow m\le 2$ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-10)$ thì $ad-bc>0 \Leftrightarrow 5m-2>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{2}{5}$ Vậy $\dfrac{2}{5}<m\le 2$ nên có hai giá trị nguyên là m=1; 2

Câu 18. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(2;5)$

A. $m\ge -\dfrac{1}{2}$ **B.** $-\dfrac{1}{2}<m\le 2$ hoặc $m\ge 5$

C. $m\ge 2$ **D.** $m<5$

** Bản chất của PP này chính là dùng đồ thị biện luận phương trình, BPT bằng* **cô lập tham số.** *Có thể thay việc dùng MODE 7 bằng lập BBT hoặc vẽ đồ thị của $3x^2+6x$ trên khoảng (0; 2)*	VD: Tìm m để hàm số $y=x^3+3x^2-mx-2$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ A. $m\ge 24$ B. $0<m<8$ C. $m>8$ D. $m\le -24$ Giải: Hàm số xác định trên R $y'=3x^2+6x-m\le 0$ với mọi x thuộc (0; 2) $\Leftrightarrow 3x^2+6x\le m$ với mọi x thuộc (0; 2) nên $m\ge \max\left(3x^2+6x\right)$ Lập BBT hoặc Dùng MTCT, ấn MODE 7 F(x) = $3X^2+6X$. START 0; END 2, STEP 0,2  Ta thấy các giá trị trong bảng chạy từ 0 đến 24 nên $m\ge 24$

Câu 19. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(2m-3)x-\dfrac{2}{3}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

A. $m>2$ **B.** $m\le 2$ **C.** $m<1$ **D.** $m\ge 1$

§ 2. Cực trị của hàm số

1. Định nghĩa cực trị: SGK

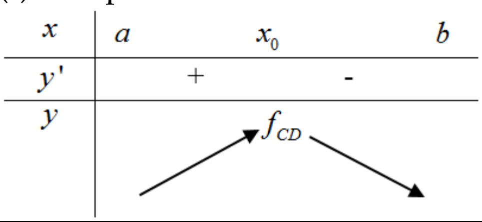
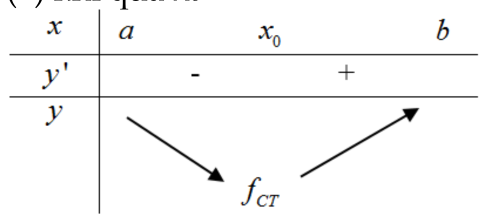
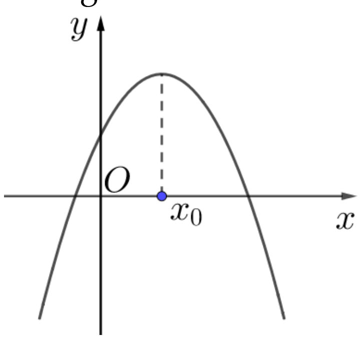
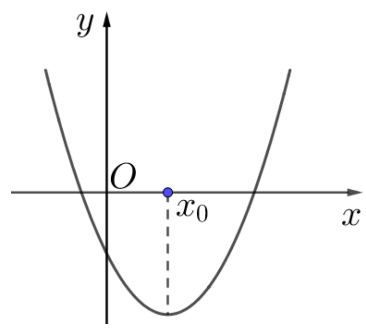
Chú ý phân biệt các khái niệm:

Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì x_0 gọi là điểm cực trị của hàm số.

$f(x_0)$ gọi là giá trị cực trị hoặc cực trị.

$M(x_0; f(x_0))$ gọi là điểm cực trị của **<u>đồ thị</u>** hàm số.

2. Các dấu hiệu của cực trị

x_0 là điểm cực đại	**x_0 là điểm cực tiểu**
Hàm số xác định và y′ đổi dấu từ (+) sang (-) khi qua x_0  	Hàm số xác định và y′ đổi dấu từ (-) sang (+) khi qua x_0 
Đồ thị trước x_0 thì đi lên, sau x_0 thì đi xuống  	Đồ thị trước x_0 thì đi xuống, sau x_0 thì đi lên 
Dùng MODE 7, chọn khoảng $(x_0-1; x_0+1)$ chứa x_0 START: x_0-1 END: x_0+1 STEP: 0.2 Đọc bảng f(x) có: Trước x_0 tăng, sau x_0 giảm.	Dùng MODE 7, chọn khoảng $(x_0-1; x_0+1)$ chứa x_0 START: x_0-1 END: x_0+1 STEP: 0.2 Đọc bảng f(x) có: Trước x_0 giảm, sau x_0 tăng.

3. Các bước tìm cực trị

Quy tắc 1:

- Lập BBT (tìm TXĐ, tính y′, cho y′=0 và y′ không xác định, xét dấu).
- Căn cứ vào BBT kết luận.

Quy tắc 2: HS tự học

4. Một số dấu hiệu về cực trị của các hàm số thường gặp

Hàm bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$,

không có điểm cực trị $\Leftrightarrow b^2 - 3ac \leq 0$

Hàm bậc 4 trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$,

có 1 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$

Hàm bậc hai $y = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ luôn có 1 điểm cực trị

Hàm bậc 1/ bậc 1: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ và hàm bậc nhất: $y = ax + b$ không có điểm cực trị nào.

5. Một số dạng bài thường gặp

5.1. Tìm cực trị (điểm cực trị, giá trị cực trị, điểm cực trị của đồ thị)

Cách 1: Tự luận. Dùng các bước tìm cực trị (phần c bên trên)

Chú ý đọc kỹ đề để trả lời cho đúng yêu cầu: cực trị, điểm cực trị.

** Đây là bài tập yêu cầu tính y cực đại. Hàm số thuộc dạng cơ bản nên cách nhanh nhất là tự luận* *- Những bài tính giá trị cực trị nên làm **<u>Tự luận</u>***	VD: Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 5$ Giải: TXĐ: R $y' = 3x^2 - 6x$ $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$ Lập bảng xét dấu, hàm số đạt cực đại tại x=0 Thay x=0 vào hàm số có y=-5, Vậy cực đại là -5

** Đây là bài tập yêu cầu tìm x cực tiểu* *Bảng biến thiên HS tự lập*	VD: Tìm điểm cực tiểu của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ Giải: TXĐ: R $y' = 4x^3 - 8x$ $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \sqrt{2}; x = -\sqrt{2}$ Lập bảng xét dấu, hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\sqrt{2}; x = \sqrt{2}$. Vậy điểm cực tiểu là $x = -\sqrt{2}; x = \sqrt{2}$

Câu 20. Tìm điểm cực tiểu của hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

A. $x = 3$ **B.** $x = 1$ **C.** $x = \dfrac{7}{3}$ **D.** $x = 0$.

Câu 21. Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

A. (1;0) **B.** (0;1) **C.** (1;1) **D.** (1;2).

Câu 22. Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = 3x^3 - 4x^2 - x + 1$.

A. $-\dfrac{1}{9}$ **B.** 1 **C.** $\dfrac{257}{243}$ **D.** -1.

Câu 23. Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^4 - x^2 + 3$.

A. 0 **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** 3 **D.** $\dfrac{11}{4}$.

5.2. Sử dụng bảng biến thiên, đồ thị, bảng xét dấu đạo hàm tìm cực trị

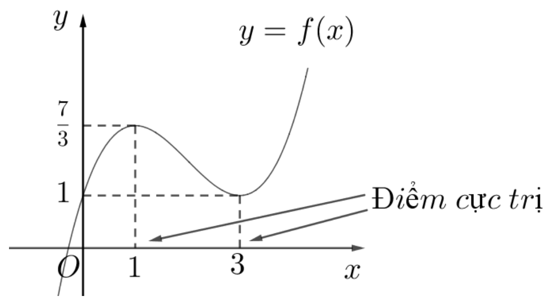
Cách giải: Dùng các dấu hiệu như lý thuyết

** Đây là dạng bài rất*	VD: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm điểm

<table>
<tr>
<td>dễ. Cố gắng đọc kỹ đề và trả lời đúng.</td>
<td>
cực tiểu của hàm số

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>2</td><td></td><td>5</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>↘</td><td>1</td><td>↗</td><td>3</td><td>↘</td><td>$-\infty$</td></tr>
</table>

Giải: Sử dụng dấu hiệu, rõ ràng ta có điểm cực tiểu của hàm số là x=2
Tương tự ta có điểm cực đại của hàm số là $x = 5$. Giá trị cực tiểu là 1; giá trị cực đại là 3
Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(2;1)$
VD: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị



Giải: Dùng dấu hiệu, rõ ràng hàm số có 2 điểm cực trị
</td>
</tr>
</table>

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm điểm cực đại của hàm số

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

A. $x = 1$ **B.** $x = -3$ **C.** $x = 2$ **D.** $x = -4$

Câu 25. (TN 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	5	↘	$-\infty$

giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là

A. -1 **B.** 5 **C.** -3 **D.** 1

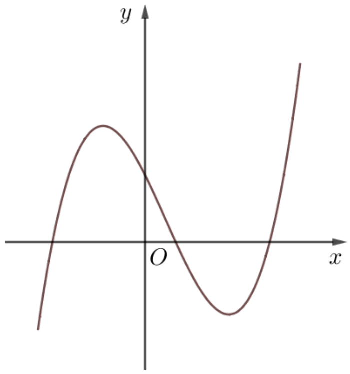
Câu 26. (TN 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

5.3. Tìm số cực trị của một hàm số thông thường

Cách 1: Tự luận. Dùng các dấu hiệu có cực trị của những hàm số cơ bản (xem lại phần d bên trên)

? Nhắc lại các dấu hiệu	VD: Hàm số nào dưới đây có ba điểm cực trị: **A.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$ **B.** $y = x^4 + 4x^2 + 1$ **C.** $y = x^4 - 6x^2 + 1$ **D.** $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$ Giải: Loại A vì hàm bậc ba tối đa có 2 điểm cực trị Loại D vì hàm phân thức bậc 1/ bậc 1 không có điểm cực trị nào Đáp án B, C là hàm bậc 4 trùng phương Muốn có ba điểm cực trị thì $a.b < 0$. Từ đó chọn được C

Câu 28. Hàm số nào dưới đây có ba điểm cực trị

A. $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ **B.** $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

C. $y = x^4 + 4x^2 + 1$ **D.** $y = x^4 - 4x^2 - 1$.

Câu 29. Hàm số nào dưới đây có hai điểm cực trị

A. $y = x^4 + x^2 + 1$ **B.** $y = x^4 - x^2 + 1$.

C. $y = x^3 - x^2 + x + 1$ **D.** $y = x^3 - x^2 - x + 1$.

Câu 30. Hàm số nào dưới đây có hai điểm cực trị

A. $y = \dfrac{3x-1}{x-2}$ **B.** $y = x^4 + 4x^2 - 2$

C. $y = -x^3 + 3x^2 - x + 1$ **D.** $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

5.4. Tìm cực trị của hàm số f(x) biết đạo hàm f’(x).

Cách giải: Phối hợp MTCT và tự luận

Vì đề bài đã cho đạo hàm nên để tìm ra cực trị ta chỉ cần xét dấu đạo hàm y'.

Cho y′=0 và y′ không xác định (nếu có)

Lập bảng xét dấu y′

Kết luận

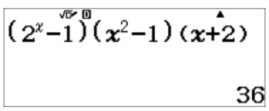
** Để xét dấu bằng PP thay số ta làm như sau:*

Nhập vào máy tính

$\left(2^x-1\right)\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)$

Để xét dấu y′ trên khoảng $(1;+\infty)$ *ta thay x=2*

Ấn CALC 2 =



Được 36 là số dương nên y′ trên khoảng đó ta điền dấu dương.

Các khoảng khác làm tương tự.

VD: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R, có đạo hàm là $y'=\left(2^x-1\right)\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)$. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Giải:

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x-1=0 \\ x^2-1=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1; x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

lập bảng xét dấu

x		-2		-1		0		1	
y'	+	0	-	0	+	0	-	0	+
y	↗		↘		↗		↘		↗

Từ đó, hàm số có 4 điểm cực trị

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^3\left(x^2-3x+2\right)$. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

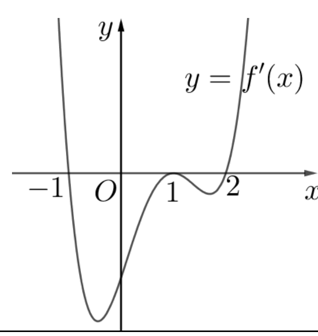
Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x-1)\left(x^2-4x+3\right)(x+1)$. Tìm điểm cực tiểu của hàm số.

A. $x=3$ **B.** $x=-1$ **C.** $x=1$ **D.** $x=4$

5.5. Sử dụng đồ thị của $f'(x)$ tìm điểm cực trị hàm số $f(x)$.

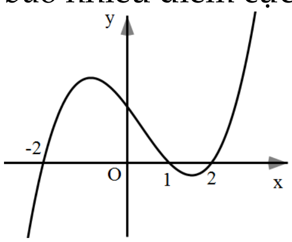
Cách giải: Từ đồ thị f′(x) suy ra bảng biến thiên của hàm số. (xem lại mục 5.4 bài trước). Sau đó suy ra số điểm cực trị.

VD: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R, có đồ thị của đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Tìm kết luận đúng về hàm số f(x)



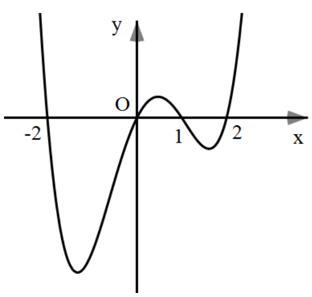
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
A. Hàm số có ba điểm cực trị
B. Hàm số có điểm cực tiểu là x=1
C. Hàm số có điểm cực tiểu là x=2
D. Hàm số có điểm cực đại là x=1
Giải:
Từ đồ thị f′(x) ta suy ra bảng biến thiên hàm số f(x) như sau
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>y</td><td></td><td>↗</td><td></td><td>↘</td><td></td><td>↘</td><td></td><td>↗</td><td></td></tr>
</table>
Hàm số có điểm cực tiểu là x=2. Đáp án C
</td>
</tr>
</table>

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu



A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm kết luận đúng về hàm số $y = f(x)$.



A. Hàm số có ba điểm cực trị **B.** Hàm số có hai điểm cực tiểu

C. Hàm số có ba điểm cực tiểu **D.** Hàm số có một điểm cực đại.

5.6. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$

Cách 1: Tự luận. Tìm TXĐ, tính y'

Hàm số đạt cực trị tại x_0 nếu $x_0 \in$ TXĐ và $y'(x_0) = 0$, tìm ra m

Với m tìm được, thay vào y′ để thử lại xem có đúng là điểm cực trị theo yêu cầu không.

Kết luận

** Lưu ý: Có một số bài VDC áp dụng*	VD: Tìm m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + 3x - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$

cách này vẫn không làm được mà phải sử dụng đến điều kiện đổi dấu của y' (như câu 42 mã đề 124 đề chính thức 2018)	**A.** $m=-\frac{15}{4}$ **B.** $m=\frac{15}{4}$ **C.** $m=3$ **D.** Không tồn tại m Giải: TXĐ: R. $y'=3x^2-2mx+3$. Hàm số đạt cực trị tại $x=2$ khi 2 thuộc TXĐ (luôn đúng) và $y'(2)=0$ Suy ra $3.4-4m+3=0 \Leftrightarrow m=\frac{15}{4}$ Thay $m=\frac{15}{4}$ vào đạo hàm ta có $y'=3x^2-\frac{15}{2}x+3$. Xét dấu đạo hàm này ta có x=2 đúng là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy chọn B

Câu 35. Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m^2+2m)x+1$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

A. $m=1$ **B.** $m=0$ **C.** $m=2$ **D.** $m=3$.

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số $y=x^3-(m^2-1)x^2-(4m+1)x+1$ có điểm cực tiểu là $x=-1$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Câu 37. Hàm số $y=x^3-(2-m)x-m$ đạt cực tiểu tại $x=1$ với giá trị nào của m dưới đây

A. $m=-2$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=0$ **D.** $m=1$

Cách 2. Thay m từ các đáp án vào hàm số

Dùng MTCT thử xem hàm số đó có đạt cực trị tại x_0 hay không

5.7. Tìm tham số để hàm số có n điểm cực trị

Cách 1: Tự luận. Sử dụng một số dấu hiệu nhanh:

Hàm bậc 3 có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow b^2-3ac>0$. Không có điểm cực trị khi $b^2-3ac<0$

Hàm bậc 4 trùng phương có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab<0$. Có 1 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab\geq 0$

Hàm bậc 1/ bậc 1 không có điểm cực trị.

	VD: Tìm m để hàm số $y=-x^3+(2m-1)x^2-(2-m)x-2$ có hai điểm cực trị. **A.** $m<-1$ **B.** $-1<m<\frac{5}{4}$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>\frac{5}{4} \end{array}\right.$ **D.** $m>-1$ Giải: Hàm bậc ba có hai điểm cực trị nên $b^2-3ac>0 \Leftrightarrow (2m-1)^2-3.(2-m)>0$

	$\Leftrightarrow 4m^2 - m - 5 > 0 \Leftrightarrow m < -1; m > \frac{5}{4}$. Chọn C

Câu 38. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + x - 2$ có hai điểm cực trị

A. $m > 1$ **B.** $m < 1$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right.$ **D.** $-1 < m < 1$

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = -x^3 + mx^2 + 2x + 1$ có hai điểm cực trị

A. $m < -6$ **B.** $m > -6$ **C.** $m \neq 6$ **D.** Với mọi m

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = x^3 + 2mx^2 - mx + 1$ không có điểm cực trị

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** Vô số

Câu 41. Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - (4m+1)x^2 + 2$ có một điểm cực trị duy nhất

A. $m < -\frac{1}{4}$ **B.** $m < \frac{1}{4}$ **C.** $m \leq -\frac{1}{4}$ **D.** Đáp án khác

Câu 42. Tìm m để hàm số $y = -\frac{1}{2}x^4 + (m-2)x^2 + 2$ có ba điểm cực trị

A. $m > 2$ **B.** $m \geq 2$ **C.** $m < 2$ **D.** $m \leq 2$

§3. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

1. Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp K.

a. M gọi là GTLN của hàm số trên K nếu $M \geq f(x)\ \forall x \in K$ và $\exists x_0 \in K$ để $f(x_0) = M$

Ký hiệu: $\max\limits_K f(x) = M$

b. m gọi là GTNN của hàm số trên K nếu $m \leq f(x)\ \forall x \in K$ và $\exists x_0 \in K$ để $f(x_0) = m$

Ký hiệu: $\min\limits_K f(x) = m$

2. Một số dạng bài thường gặp:

2.1. Tìm GTLN, NN của hàm số f(x) trên đoạn [a; b]

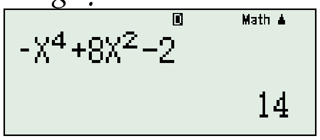
Cách 1: Tự luận. Dùng quy tắc tìm GTLN, NN trên đoạn

- Tìm $f'(x)$

- Trên khoảng $(a;b)$, cho $f'(x)=0$, loại nghiệm nào không thuộc khoảng $(a;b)$.

- Tính $f(a); f(b); f(x)$ tại các giá trị tìm được

- So sánh và kết luận.

** Nhiều HS có thói quen cứ thấy nghiệm âm là loại* ** Tính f(-3), f(-2), f(-1) bằng lệnh CALC*  *Nhập vào máy* $-X^4+8X^2-2$ *Ấn CALC* *Ấn -3 = ra kết quả -11* *Ấn -2 = ra kết quả 14..*	VD: Gọi M và m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số $y=f(x)=-x^4+8x^2-2$ trên đoạn $[-3;1]$. Tính M+m Giải: $y'=-4x^3+16x$ Trên (-3;1), Cho $y'=0 \Leftrightarrow -4x^3+16x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$. Ta loại x=2 Tính $f(-3)=-11;\ f(1)=5;\ f(-2)=14;\ f(0)=-2$ Vậy GTLN là 14, GTNN là -11 nên M+m=3

Cách 2: Dùng MTCT lệnh MODE 7

Ấn MODE 7

f(x) là hàm số cần tìm GTLN, NN

START a; END b; STEP $\frac{b-a}{10}$

Nhìn trong bảng, số nhỏ nhất sẽ xấp xỉ min, số to nhất sẽ xấp xỉ max

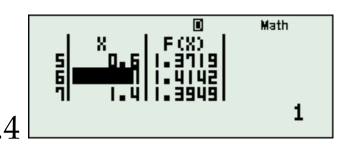
Với các bài có những dấu hiệu sau:

Có hai đáp án rất sát nhau, ví dụ: **A.** 31 **B.** 32

Hoặc **A.** $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{6}{25}$

Đoạn $[a;b]$ dài, ví dụ tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-9;5]$

Thì ta không nên dùng máy tính MODE 7.

	VD: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $[-1;3]$ **A.** 0 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\frac{4}{\sqrt{10}}$ **D.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$ Giải: Ấn MODE 7 $f(x)=\frac{X+1}{\sqrt{X^2+1}}$. START: -1; END: 3; STEP 0.4  Nhìn bảng thấy tại x=1, f(x) = 1,412 là to nhất. Nó sẽ xấp xỉ max Ấn các đáp án thấy B xấp xỉ với 1,412 nhất. Chọn B

Câu 43. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^4+10x^2-1$ trên $[-1;9]$

A. 23 **B.** 24 **C.** 8 **D.** -1

Câu 44. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+3x^2$ trên đoạn $[-4;-1]$ là

A. -16 **B.** -4 **C.** 0 **D.** 4

Câu 45. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3+3x^2-1$ trên đoạn [-1; 1] là

A. 4 **B.** -1 **C.** 0 **D.** -4

Câu 46. Gọi M và m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số $y=-x^4+8x^2-2$ trên đoạn $[-3;1]$. Tính M+m

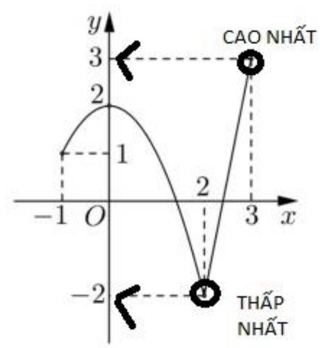
A. -48 **B.** 3 **C.** -6 **D.** -2

Câu 47. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-2x^3+3x^2+36x-1$ trên đoạn [-1; 4]

A. -33 **B.** 80 **C.** -45 **D.** -32

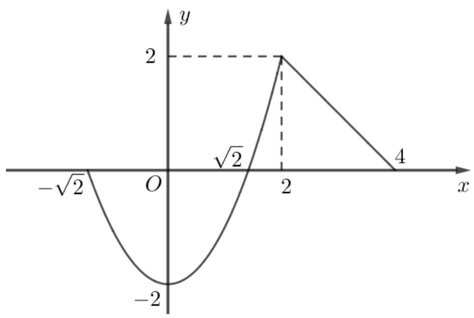
2.2. Sử dụng đồ thị tìm GTLN, NN của hàm số

Cách giải: Tự luận.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>VD: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn [-1;3] và có đồ thị như hình bên. Gọi M và m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số trên đoạn [-1;3]. Tính M+m.


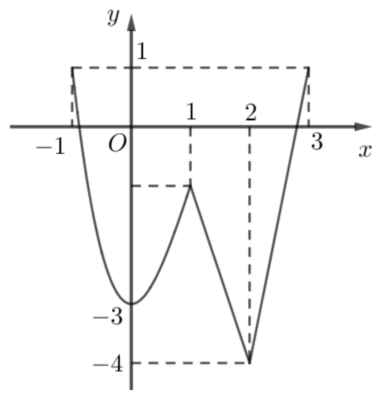
A. 0 B. 1 C. 4 D. 5
Giải:
Nhìn trên đồ thị, điểm cao nhất chiếu sang trục Oy là số 3. Vậy GTLN là 3
Điểm thấp nhất chiếu sang Oy là -2. Vậy GTNN là -2
Cộng lại, chọn B</td>
</tr>
</table>

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[-\sqrt{2};4\right]$ và có đồ thị như hình bên. Gọi M,m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số trên $\left[-\sqrt{2};4\right]$. Tính $M-m$



A. 2 **B.** 0 **C.** 4 **D.** -4

Câu 49. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-1;3\right]$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi M,m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số trên đoạn $\left[-1;3\right]$. Tính $M+m$



A. -3 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

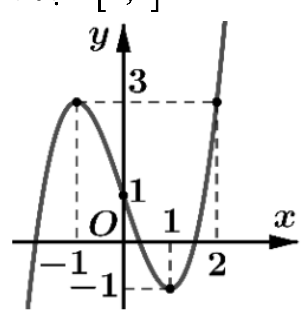
2.3. GTLN, NN của hàm hợp

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có BBT hoặc đồ thị. Tìm GTLN, NN của $g=f\left(u\right)$ trên đoạ $\left[a;b\right]$

Cách giải: Tự luận.

- Với $x\in\left[a;b\right]$ ta tìm được $u\in\left[\alpha;\beta\right]$ - có thể ấn máy tính

- Tìm GTLN, NN của $f\left(u\right)$ với $u\in\left[\alpha;\beta\right]$ nhờ hàm $f\left(x\right)$

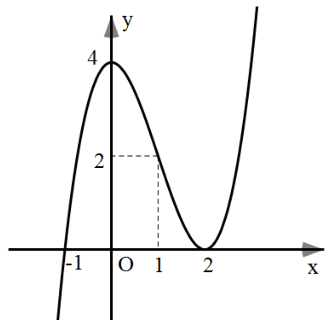
** Chý ý trong quá trình đọc số, ta KHÔNG lấy những vị trí sau:* *- Không lấy giá trị y tại x bằng $-\infty;+\infty$* *- Không lấy giá trị y tại x=a; x=b nếu đề bài là KHOẢNG $\left(a;b\right)$*	VD: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm GTLN của hàm số $y=f\left(2x^3+x-1\right)$ trên đoạn $\left[0;1\right]$  A. 3 B. -3 C. 2 D. -2 Giải: Đặt $u=2x^3+x-1$. Với x thuộc đoạn [0; 1] ta có u thuộc [-1;2] Tìm GTLN của hàm số f trên đoạn [-1;2] ta có GTLN là 3 Chọn A

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(\sin x + 1)$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	5	↘	-5	↗	$+\infty$

A. -4 **B.** 5 **C.** -5 **D.** -1

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, tìm GTLN của hàm số $y = f(2 - x^2)$ trên đoạn $\left[0; \sqrt{2}\right]$.



A. 0 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

§4. Tiệm cận

1. Định nghĩa:

- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng là $x = a$ nếu $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

- Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = b$ nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

2. Cách tìm đường tiệm cận của đồ thị hàm phân thức.

- Hàm phân thức $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, đồ thị có Tiệm cận đứng: $x = -\dfrac{d}{c}$ và Tiệm cận ngang: $y = \dfrac{a}{c}$

- Hàm phân thức $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ khác

Tiệm cận ngang: Nếu

Có bậc tử < bậc mẫu thì đồ thị có tiệm cận ngang $y = 0$.

Ví dụ: Hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x^2+x}$, đồ thị có tiệm cận ngang $y=0$

Có bậc tử = bậc mẫu thì đồ thị có tiệm cận ngang $y=\dfrac{\textit{hệ số bậc lớn nhất ở tử}}{\textit{hệ số bậc lớn nhất ở mẫu}}$

Ví dụ: Hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x}{5x^2+x-1}$, đồ thị có tiệm cận ngang $y=\dfrac{2}{5}$.

Có bậc tử > bậc mẫu thì đồ thị không có tiệm cận ngang.

Ví dụ: Hàm số $y=\dfrac{3x^2+x}{x+1}$, đồ thị không có tiệm cận ngang.

Tiệm cận đứng:

Cho mẫu = 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=a' \end{array}\right.$.

Tính $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, nếu giới hạn bằng vô cực thì $x=a$ là tiệm cận đứng.

Tương tự cho đường $x=a'$.

(Khi thay $x=a$ lên tử mà được kết quả $P(x)\neq 0$ thì $x=a$ là tiệm cận đứng)

3. Dạng bài cơ bản:

3.1. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị một hàm số phân thức:

Câu 52. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{-3x-1}$

A. $x=-\dfrac{2}{3}$ **B.** $x=\dfrac{1}{3}$ **C.** $x=-\dfrac{1}{3}$ **D.** $x=-3$

Câu 53. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x^2-2}$

A. $x=2$ **B.** $x=2;\ x=-2$ **C.** $x=-\dfrac{3}{2}$ **D.** $x=-\sqrt{2};\ x=\sqrt{2}$

Câu 54. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-3x-4}$

A. $x=-1; x=4$ **B.** $x=4$ **C.** $x=0; x=4$ **D.** $x=1; x=-4$

3.2. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị một hàm số phân thức:

Câu 55. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x+3}{2x-1}$

A. $y=-\dfrac{1}{2}$ **B.** $y=\dfrac{1}{2}$ **C.** $y=-3$ **D.** $y=3$

Câu 56. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-4}$

A. $y=2$ **B.** $y=\pm 2$ **C.** $y=0$ **D.** $y=1$

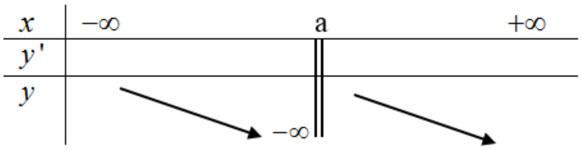
Câu 57. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4-x}{-x+2}$

A. $y=2$ **B.** $y=1$ **C.** $y=4$ **D.** $y=-1$

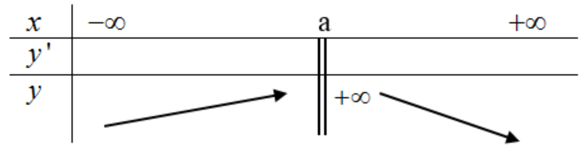
3.3. Quan sát Bảng biến thiên tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang

Cách giải: Tự luận.

Dựa vào hình minh họa sau thì đồ thị có Tiệm cận đứng là $x = a$

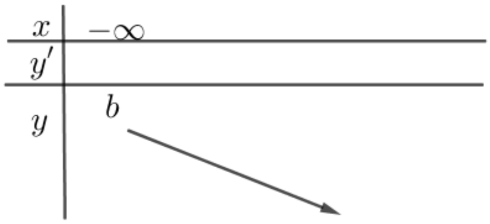


hoặc

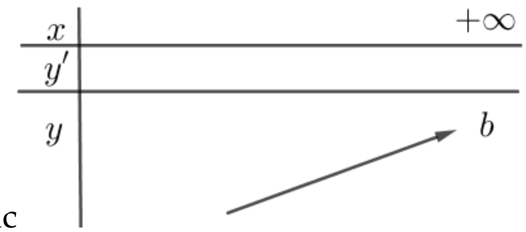


Tức là chiếu từ bên phải hoặc bên trái số a xuống dòng y ta được ký hiệu vô cực

Dựa vào hình minh họa sau thì đồ thị có Tiệm cận ngang là $y = b$

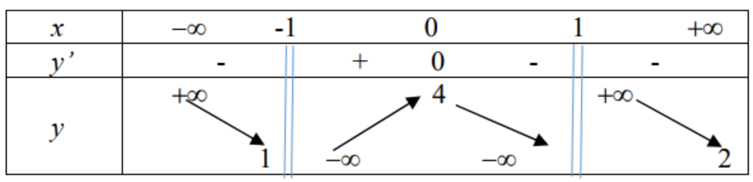


hoặc



Tức là chiếu từ $-\infty$ hoặc $+\infty$ xuống dòng y ta được một số b

VD: Cho hàm số y=f(x) có bảng biến thiên như sau



Đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Giải: Ta tìm TCN trước, từ $x = -\infty; x = +\infty$ chiếu xuống dòng y ta được một số là 2. Vậy có 1 TCN y=2

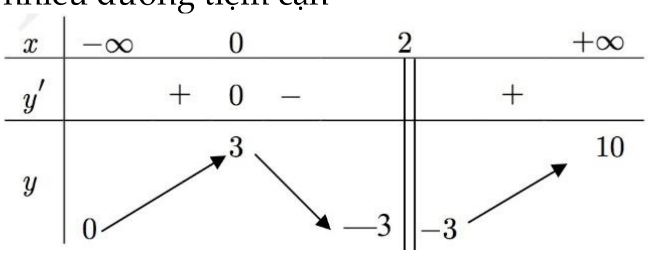
Ta tìm TCĐ: có hai số x=-1 và x=1

Bên phải số x=-1 chiếu xuống dòng y được $-\infty$ vậy có TCĐ là x=-1

Bên trái và phải số x=1 chiếu xuống dòng y được ∞ vậy có TCĐ là x=1

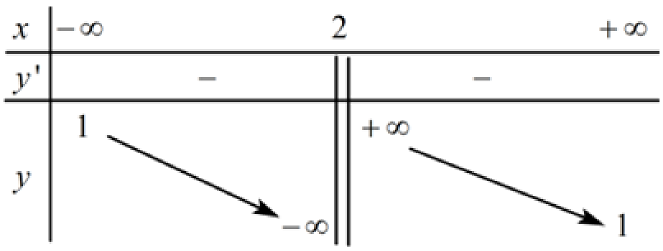
Tổng cộng có 3 tiệm cận (2 đứng 1 ngang)

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận



A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Câu 59. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận



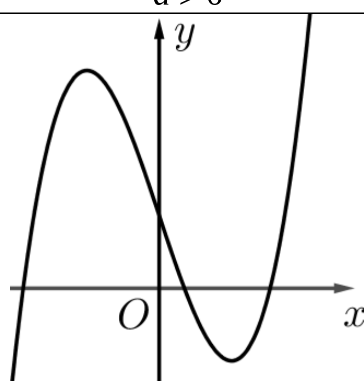
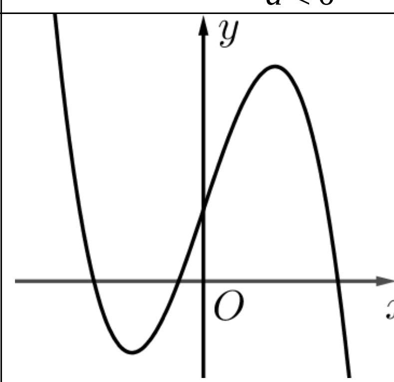
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

§5. Đồ thị của hàm số

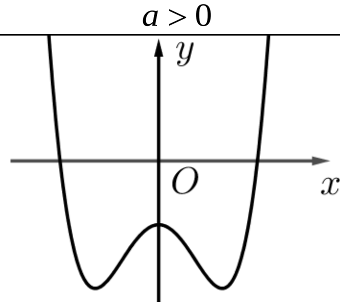
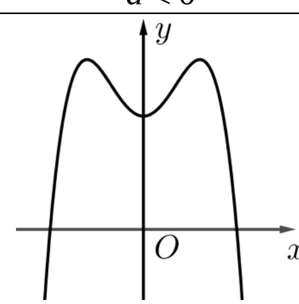
1. Quy trình khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (SGK)

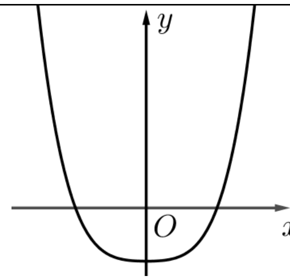
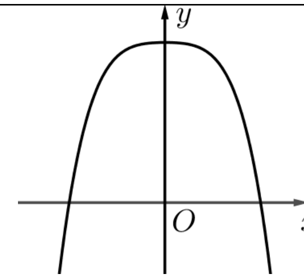
2. Các dạng đồ thị hàm số thường gặp

Hàm số Bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \left(a \neq 0\right)$

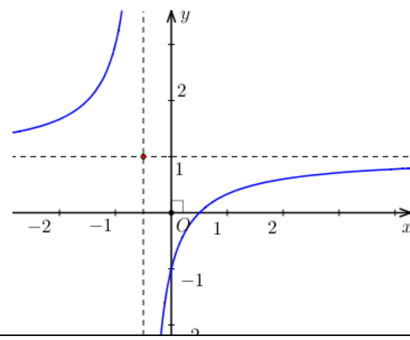
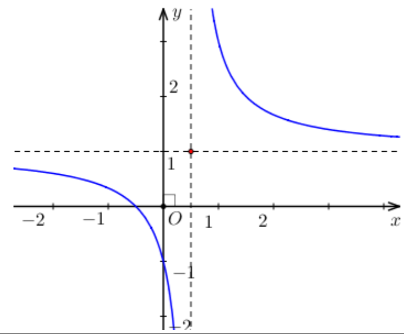
	$a > 0$	$a < 0$
* $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt * $b^2 - 3ac > 0$ * Hàm số có 2 điểm cực trị		

Hàm số Bậc 4 trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c \ \left(a \neq 0\right)$

	$a > 0$	$a < 0$
* $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt * $a.b < 0$ * Hàm số có 3 điểm cực trị	 $a > 0; b < 0$	 $a < 0; b > 0$

* $y'=0$ có 1 nghiệm * $a.b \ge 0$ * Hàm số có một điểm cực trị	 $a>0;b\ge 0$	 $a<0;b\le 0$

Hàm Phân thức $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

	$ad-bc>0$	$ad-bc<0$
	 	

3. Cách tìm giao điểm của đồ thị y = f(x) với các trục Ox; Oy

Giao điểm với Oy: Cho x=0, Tính y

VD: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$.

Cho $x=0$ thay vào tính $y=\dfrac{2.0-1}{0+2}=-\dfrac{1}{2}$ vậy giao với Oy là điểm $A\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Với các hàm đa thức ví dụ $y=x^3+3x^2-1$, *khi cho* $x=0$ *thì y luôn bằng số hạng tự do.*

Giao điểm với Ox: Cho y=0, Tìm x (Giải phương trình)

VD: Đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+x-2$. Cho $y=0$ giải PT: $x^3-2x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=2$. Vậy giao với Ox là điểm $B(2;0)$

4. Dạng bài cơ bản:

4.1. Nhận dạng đồ thị hàm bậc ba, bậc bốn (cho đồ thị, hỏi đó là của hàm số nào)

Cách giải: Tự luận. Nhìn đồ thị, ta dùng các dấu hiệu sau để **<u>loại dần các đáp án sai.</u>**

(1) Dạng đồ thị và dấu của a (quan sát bảng bên trên). Nhìn vào đồ thị phải biết là hàm bậc ba hay bậc 4, a âm hay a dương…

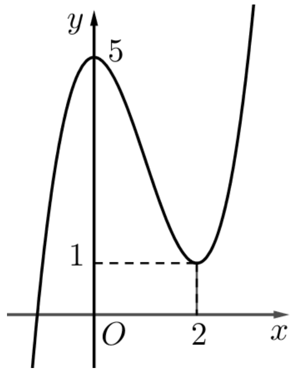
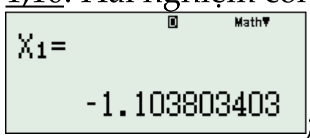
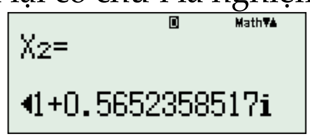
(2) Giao điểm với Oy (cho x=0, tính y)

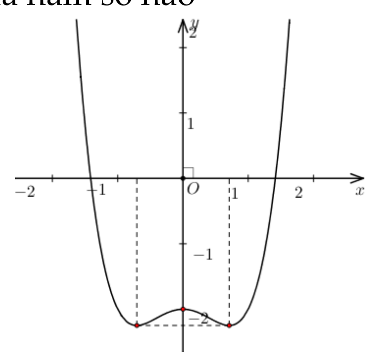
(3) Giao với Ox (cho y=0, Tìm x)

(4) Lấy thêm điểm khác (cho x, tính y)

(5) Cực trị: số cực trị, điểm cực trị của hàm số

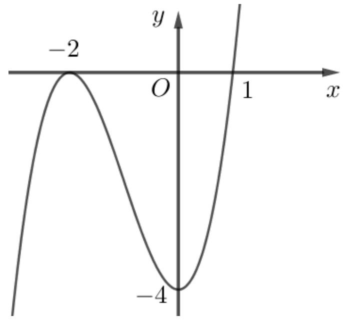
	VD: Đồ thị sau là của hàm số nào **A.** $y=x^4-2x^2$ **B.** $y=-x^3+3x^2+5$

Có thể dùng dấu hiệu 4, thay điểm $(2;1)$	**C.** $y = x^3 - 3x^2 + 5$ **D.** $y = x^3 - 3x + 5$  Giải: **- Nhìn đồ thị** ta có đây là hàm số bậc 3, $a > 0$. **<u>Vậy còn C và D</u>** **- Giao điểm với Oy:** Nhìn đồ thị có giao với Oy là y=5. Cả hai đáp án khi cho x=0 thì y=5 đều đúng. **- Giao điểm với Ox:** Nhìn đồ thị có MỘT giao điểm với Ox là $x \approx -1$ Đáp án C: ấn máy giải PT $x^3 - 3x^2 + 5 = 0$ ta có <u>đúng 1 nghiệm là -1,10</u>. Hai nghiệm còn lại có chữ i là nghiệm ảo. ;  Đáp án D: ấn máy giải phương trình có nghiệm là $x \approx -2,27$ không hợp lý. **Vậy C đúng.**

	VD: Đồ thị sau là của hàm số nào  **A.** $y = x^4 - x^2 - 2$ **B.** $y = x^4 - 2x^2 - 2$ **C.** $y = x^4 - 4x^2 - 2$ **D.** $y = x^4 + x^2 - 2$ Giải: **- Nhìn vào đồ thị** phải biết được đây là đồ thị hàm bậc 4, $a > 0$. Hàm số có ba điểm cực trị nên $b < 0$ vậy loại D. **- Giao điểm với Oy là y=-2**. Không loại thêm được đáp án nào - **Giao điểm với Ox** tại hai điểm có hoành độ xấp xỉ -1,5 và 1,5. Giải phương trình trùng phương ta thấy A có hai nghiệm là

	$-\sqrt{2};\sqrt{2}$ đều xấp xỉ 1,5. Chọn A

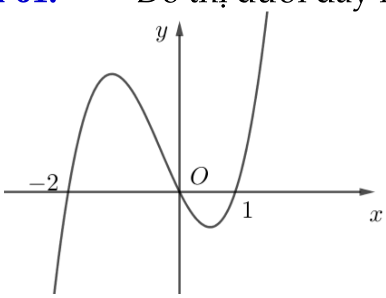
Câu 60. Đồ thị dưới đây là của hàm số nào



A. $y=x^3-3x^2-4$ **B.** $y=x^3+3x^2-4$

C. $y=x^4+4x^2-4$ **D.** $y=x^2-3x-4$.

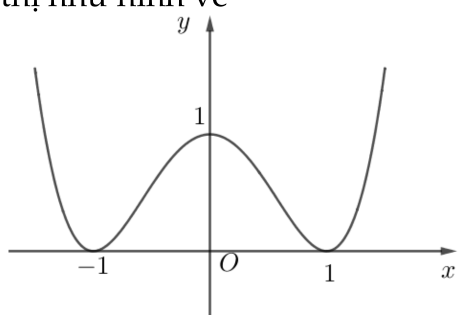
Câu 61. Đồ thị dưới đây là của hàm số nào



A. $y=x^3+x^2-2x$ **B.** $y=x^3-x^2-2x$

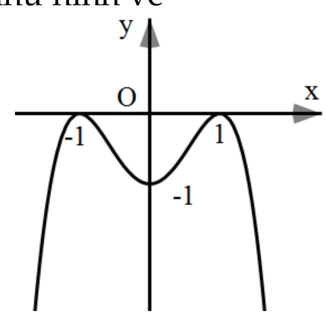
C. $y=-x^3-x^2+2x$ **D.** $y=x^4-x^2-2$

Câu 62. Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ



A. $y=x^4-2x^2+1$ **B.** $y=x^4+x^2+1$ **C.** $y=-x^4+2x^2+1$ **D.** $y=x^4-x^2-1$

Câu 63. Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ



A. $y=x^4-2x^2+1$ **B.** $y=-x^4+2x^2-1$ **C.** $y=-x^4+2x^2+1$ **D.** $y=-x^4-x^2$

4.2. Nhận dạng đồ thị hàm số phân thức $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

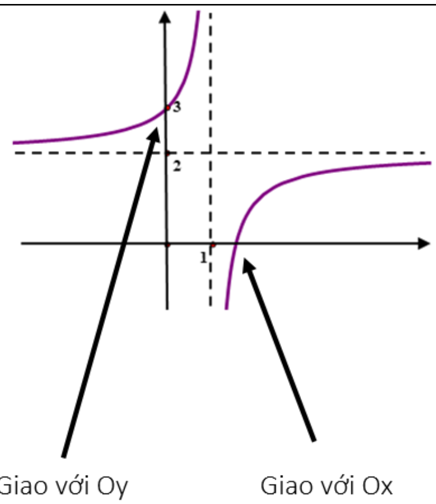
Cách giải: Tự luận. Nhìn đồ thị, ta dùng các dấu hiệu sau để **<u>loại dần các đáp án sai</u>**

(1) Tiệm cận đứng, tiệm cận ngang

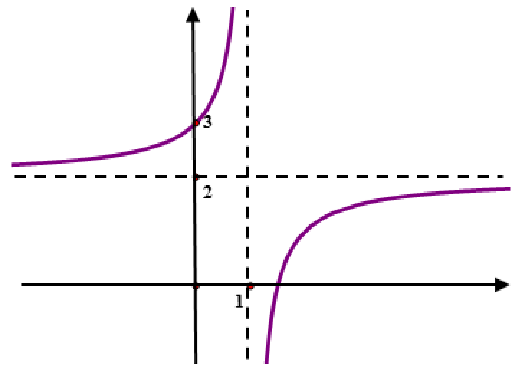
(2) Giao với Oy (cho x=0, tính y)

(3) Giao với Ox (cho y=0, tìm x)

(4) Dấu của ad-bc. Nếu đồ thị đi lên thì $ad-bc>0$, nếu đồ thị đi xuống thì $ad-bc<0$.



VD: Đồ thị dưới đây là của hàm số nào



A. $y=\frac{2x+1}{x-1}$ **B.** $y=\frac{x+1}{x-1}$ **C.** $y=\frac{x-3}{x-1}$ **D.** $y=\frac{2x-3}{x-1}$

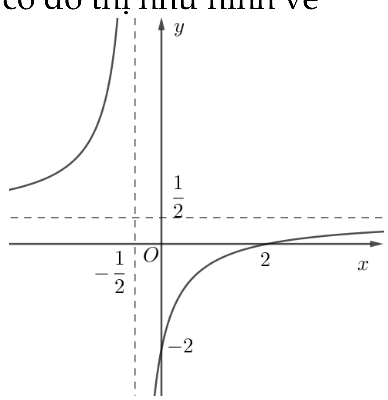
Giải:

- Nhìn vào đồ thị, TCĐ là x=1. Ở đáp án nào mà khi cho mẫu bằng 0 được x=1 thì giữ lại. Vậy không loại được đáp án nào.

- Nhìn vào đồ thị, TCN là y=2. Vậy đáp án nào có tỉ số $\frac{a}{c}=2$ thì giữ lại. Loại được B, C. Vậy còn A và D.

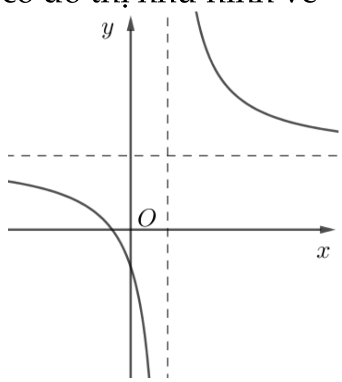
- Nhìn vào đồ thị, giao với Oy là (0; 3). Vậy cho x=0 thì y=3.
Ở đáp án A, cho x=0 thì y=-1.
Ở đáp án D, cho x=0 thì y=3. Vậy chọn D.

Câu 64. Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ



A. $y=\frac{x-2}{2x-1}$ **B.** $y=\frac{x-2}{2x+1}$ **C.** $y=\frac{x+2}{2x+1}$ **D.** $y=\frac{x+2}{2x-1}$

Câu 65. Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ



A. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ **C.** $y=x^3-2x+1$ **D.** $y=x^4-2x^2-1$

4.3. Xét dấu a, b, c, d của hàm số bậc ba, bậc bốn biết đồ thị

Cách giải: Tự luận. Nhìn đồ thị, ta sử dụng các dấu hiệu sau

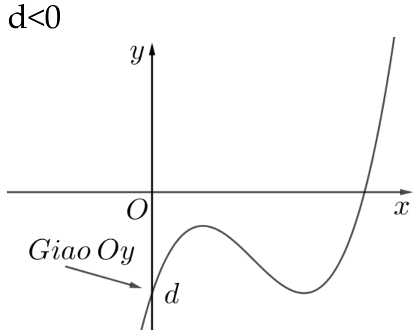
(1) Dạng đồ thị và dấu của a (quan sát bảng bên trên). Nhìn vào đồ thị phải biết là hàm bậc ba hay bậc 4, a âm hay a dương… Mẹo: nét cuối cùng bên phải ở phía trên thì $a>0$, ở phía dưới thì $a<0$.

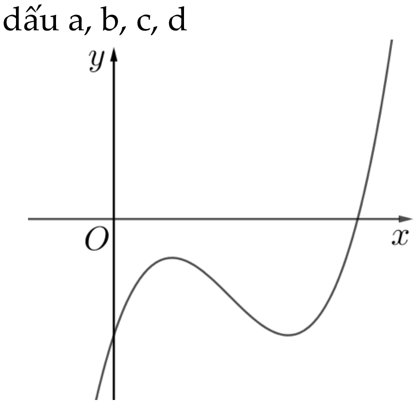
(2) Giao với Oy sẽ biết dấu hệ số tự do, ở trên O thì hệ số tự do dương, ở dưới O thì hệ số tự do âm.

(3) Cực trị:

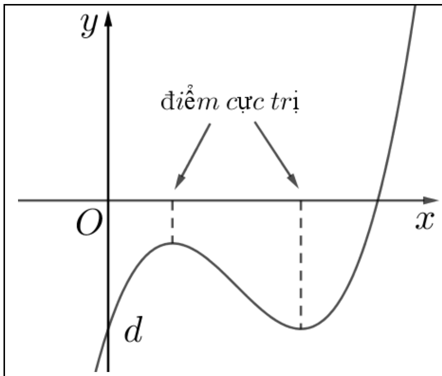
Hàm bậc ba: tổng hai điểm cực trị là dấu của $\dfrac{-b}{a}$; tích hai điểm cực trị là dấu của $\dfrac{c}{a}$

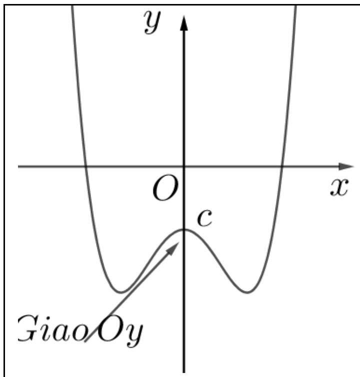
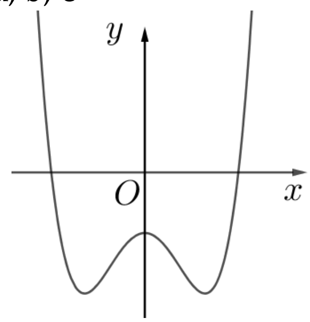
Hàm bậc bốn trùng phương: có 3 điểm cực trị khi ab<0. Có 1 điểm cực trị khi $ab\geq 0$

<table>
<tr>
<td>Giao với Oy, ở dưới O nên d<0


Hai điểm cực trị</td>
<td>VD: Cho hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Tìm dấu a, b, c, d


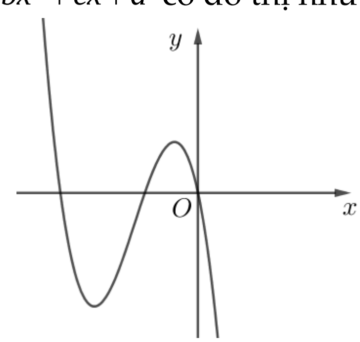
Giải:
Từ đồ thị có a>0 (căn cứ dạng đồ thị hàm bậc ba)
Nhìn đồ thị giao với Oy là điểm (0; d) ở bên dưới nên d<0
Nhìn đồ thị, hàm số có hai điểm cực trị. Hoành độ hai điểm cực trị này đều dương. Vậy tổng hai điểm cực trị và</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>tích hai điểm cực trị đều dương
Tổng: $-\frac{b}{a} > 0$ mà $a > 0$ nên $b < 0$
Tích: $\frac{c}{a} > 0$ mà $a > 0$ nên $c > 0$
KL: $a > 0;\ d < 0; b < 0;\ c > 0$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>VD: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên. Xác định dấu của a, b, c


Giải:
Nhìn đồ thị có a>0
Đồ thị cắt Oy tại điểm (0; c) ở bên dưới gốc O. Vậy c<0
Hàm số có ba cực trị nên ab<0. Vì a>0 nên b<0
Vậy a>0;b<0; c<0</td>
</tr>
</table>

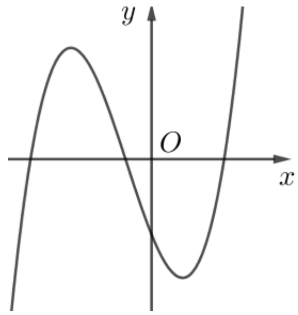
Câu 66. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm mệnh đề đúng



A. $a < 0; b < 0; c < 0; d = 0$ **B.** $a < 0; b > 0; c > 0; d = 0$

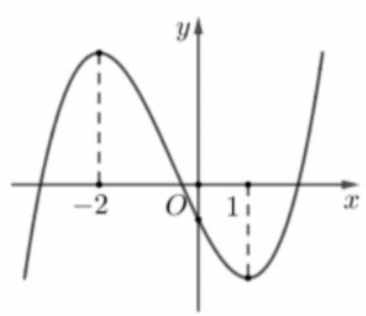
C. $a < 0; b < 0; c > 0; d = 0$ **D.** $a > 0; b < 0; c < 0; d = 0$

Câu 67. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Trong các số $a; b; c; d$ có bao nhiêu số dương



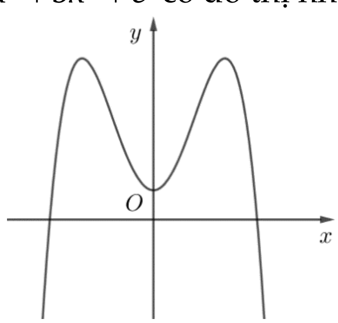
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 68. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Tìm số lớn nhất trong các số $a; b; c; d$



A. a B. b C. c D. d

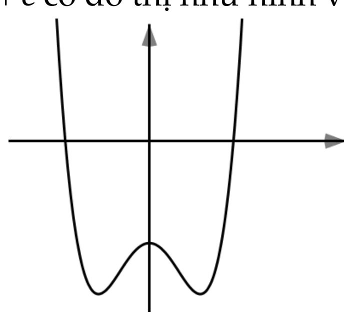
Câu 69. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm kết luận đúng



A. $a > 0; b > 0; c < 0$ B. $a > 0; b < 0; c > 0$

C. $a > 0; b < 0; c < 0$ D. $a < 0; b > 0; c > 0$

Câu 70. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm mệnh đề đúng



A. $a > 0; b > 0; c < 0$ B. $a > 0; b < 0; c > 0$

C. $a > 0; b < 0; c < 0$ D. $a < 0; b > 0; c < 0$

4.4. Xét dấu a, b, c, d của hàm phân thức $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ biết đồ thị

Cách giải: Tự luận. Với bài tập này, bao giờ đề bài cũng cho dấu của một trong các số a, b, c, d

Khi đó, ta tiếp tục tìm dấu của 3 số còn lại theo các gợi ý sau:

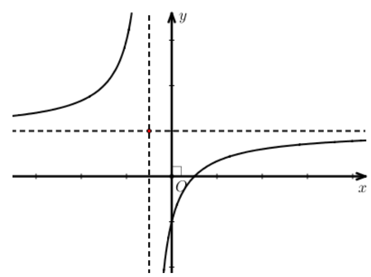
(1) Tiệm cận đứng: $x=-\dfrac{d}{c}$. Từ đồ thị ta xem $-\dfrac{d}{c}$ âm hay dương

(2) Tiệm cận ngang: $y=\dfrac{a}{c}$. Từ đồ thị ta xem $\dfrac{a}{c}$ âm hay dương

(3) Giao với Oy: $\left(0;\dfrac{b}{d}\right)$. Từ đồ thị ta xem $\dfrac{b}{d}$ âm hay dương

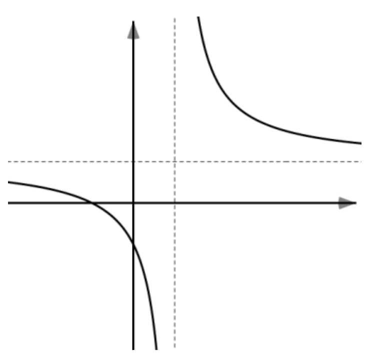
(4) Giao với Ox: $\left(-\dfrac{b}{a};0\right)$. Từ đồ thị ta xem $-\dfrac{b}{a}$ âm hay dương

Các dấu hiệu 1, 2, 3, 4 không máy móc theo đúng thứ tự đó mà có thể linh hoạt

<table>
<tr>
<td></td>
<td>VD: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên. Biết d>0. Xác định dấu của a, b, c


Giải:
Nhìn đồ thị có TCĐ là $x=-\dfrac{d}{c}<0$. Vì d>0 nên c>0
Nhìn đồ thị có TCN là $y=\dfrac{a}{c}>0$. Vì c>0 nên a>0
Giao Oy là $\left(0;\dfrac{b}{d}\right)$ và $\dfrac{b}{d}<0$. Vì d>0 nên b<0
vậy a>0; b<0; c>0; d>0</td>
</tr>
</table>

Câu 71. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ có đồ thị như hình bên. Trong các số $a; b; c$ có bao nhiêu số dương?



A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

4.5. Từ bảng biến thiên xác định hàm số bậc ba, bậc bốn.

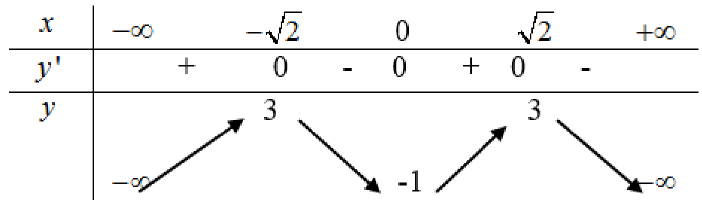
Cách giải: Tự luận. Dùng các dấu hiệu sau

(1) Dạng của BBT, dấu của a. (Hình dáng của BBT tương tự như hình dáng của đồ thị)

(2) Cực trị: thay x cực trị vào hàm số phải ra y cực trị.

Hoặc Tính y', cho y'=0 phải ra x cực trị

VD: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào



A. $y = x^4 - 4x^2 - 1$ **B.** $y = -x^4 + 4x^2$

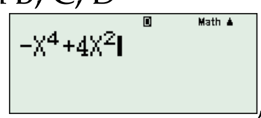
C. $y = -x^4 + 4x^2 - 1$ **D.** $y = -x^4 - 4x^2 - 1$

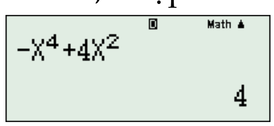
Giải:

Từ bảng biến thiên có đây là hàm bậc 4, $a < 0$. Loại A

Với $x = -\sqrt{2}$ thì $y = 3$. Với $x = 0$ thì $y = -1$. Với x=$\sqrt{2}$ thì $y = 3$.

Thử từng đáp án B, C, D

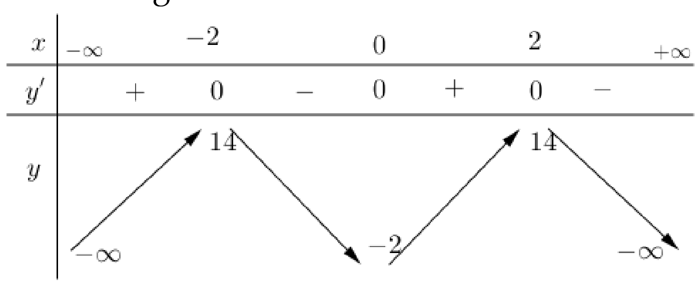
Thử B, nhập vào , ấn CALC $-\sqrt{2}$ = 4

 nên B loại. Tiếp tục thử C thì C đúng.

** Ta cũng có thể loại tiếp D ngay vì hàm số này có 3 cực trị nên ab<0. Ở đáp án D, ab>0.*

Nói chung nếu kết hợp được nhiều kiến thức thì việc chọn cũng như loại đáp án sẽ nhanh hơn

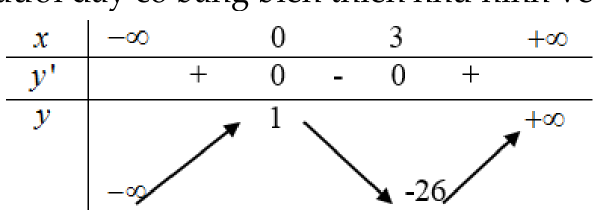
Câu 72. Hàm số nào có bảng biến thiên như hình vẽ



A. $y = -x^4 + 8x^2 - 2$ **B.** $y = -x^4 - 8x^2 - 2$

C. $y = -x^4 + 4x^2 - 2$ **D.** $y = x^4 - 8x^2 + 2$

Câu 73. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình vẽ



A. $y = x^3 - 3x^2 + 4$ **B.** $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 1$ **C.** $y = 2x^3 - 9x + 1$ **D.** $y = 2x^3 - 9x^2 + 1$

4.6. Từ bảng biến thiên xác định hàm số phân thức

Cách giải: Tự luận. Dùng các dấu hiệu sau

(1) Tiệm cận đứng

(2) Tiệm cận ngang

(3) Dấu $ad - bc$

(4) Có thể sử dụng dấu hiệu cho $x = 0$ tính y nhưng ít dùng, trừ khi 3 dấu hiệu kia không loại hết đáp án.

VD: Hàm số nào dưới đây có BBT là

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1

A. $y = \frac{-x+3}{x-2}$ **B.** $y = \frac{-x-1}{x-2}$ **C.** $y = \frac{x-3}{x-1}$ **D.** $y = \frac{-x+3}{x-1}$

Giải:

Từ BBT ta có TCĐ là x=2. Vậy cho mẫu bằng 0 thì x=2. Còn lại A, B

Từ BBT có TCN là y=-1. Vậy $\frac{a}{c} = -1$. Không loại được thêm

Từ BBT có $ad - bc < 0$. Kiểm tra A thỏa mãn. Chọn A.

Câu 74. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-1

A. $y = \frac{-x+1}{x-2}$ **B.** $y = \frac{2x+1}{x+1}$ **C.** $y = \frac{x+2}{x-2}$ **D.** $y = \frac{x-3}{-x+2}$

Câu 75. Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx+c}$ có bảng biến thiên như hình bên. Trong các số $a;b;c$ có bao nhiêu số dương?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

§6. Tương giao đồ thị:

1. Lý thuyết:

Cho hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Xét phương trình $f(x)=g(x)$ (1).

- Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm hai đồ thị hàm số
- Tung độ của giao điểm: thay nghiệm vào một trong hai công thức $y=f(x)$ hoặc $y=g(x)$
- Phương trình (1) có bao nhiêu nghiệm thì hai đồ thị có bấy nhiêu giao điểm.
- Ngược lại: Hai đồ thị có bao nhiêu giao điểm thì phương trình (1) có bấy nhiêu nghiệm.

Ta gọi những tình huống có liên quan đến giao điểm của hai đồ thị trên là TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ

- Đề bài cho TRỤC HOÀNH thì ta thay $g(x)=0$ vì trục hoành chính là đồ thị hàm số $y=0$

2. Một số dạng bài cơ bản:

2.1. Tìm giao điểm của hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=g(x)$

Cách giải: Tự luận. Lập phương trình $f(x)=g(x)$. Giải PT tìm x

Thay x vào một trong hai công thức $y=f(x)$; $y=g(x)$ để tìm y

Kết luận theo yêu cầu.

	VD: Gọi $a;b$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ và đường thẳng $y=3x+1$ trong đó $b<0$. Tính $a+3b$ **A.** -3 **B.** -2 **C.** 3 **D.** 2 Giải: Xét phương trình $\dfrac{2x+1}{x+1}=3x+1 \Leftrightarrow 2x+1=(x+1)(3x+1)$ (ĐK: $x\neq -1$) $\Leftrightarrow 3x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$ Vậy $b=-\dfrac{2}{3};a=0$ (vì theo đề bài, b là hoành độ âm) $a+3b=0+3.\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-2$. Chọn B

Câu 76. Đồ thị hàm số $y=2x^3+x+1$ cắt đường thẳng $y=8x-1$ tại bao nhiêu điểm

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Câu 77. Đồ thị hàm số $y=(x-2)(x^2+4)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 78. Đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Câu 79. (Đề thi 2020) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và $y=-x^2+5x$ là

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

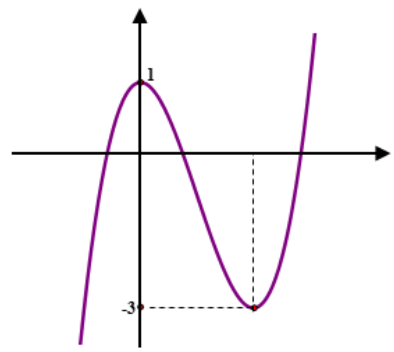
2.2. Sử dụng đồ thị hàm số $y=f(x)$, tìm m để phương trình $f(x)=m$ có nghiệm. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x)=m$.

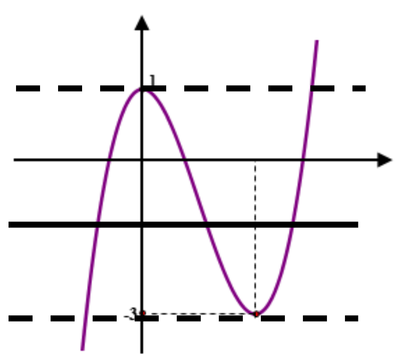
Cách giải: Tự luận. Vẽ đường y=m (nằm ngang)

PT f(x) = m có bao nhiêu nghiệm thì đường y=m phải cắt đồ thị tại bấy nhiêuđiểm

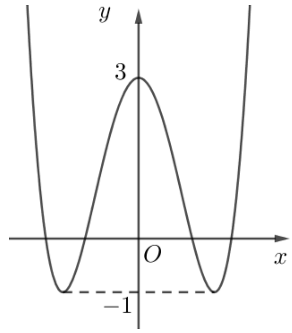
Di chuyển đường y=m sao cho cắt đồ thị tại số giao điểm theo yêu cầu

Suy ra giá trị của m

<table>
<tr>
<td>* Nếu PT chưa có dạng f(x) =m thì phải biến đổi để về dạng đó. Gọi là cô lập m.</td>
<td>VD: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Tìm m để phương trình $f(x)-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt


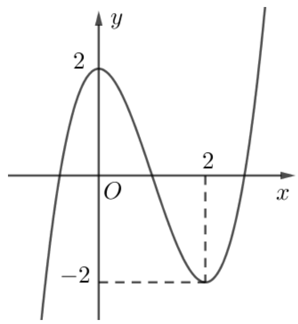
A. $-3<m<1$ B. $m=-3;m=1$ C. $m<-3;\ m>1$ D. $0<m<1$
Giải:
PT tương đương với $f(x)=m$
Vẽ đường y=m. Đây là đường nằm ngang, cắt trục Oy tại điểm (0;m)

Nhìn hình vẽ ta thấy muốn PT có ba nghiệm phân biệt thì đường y=m phải ở giữa hai đường nét đứt - - - - . Tức là -3<m<1. Chọn A.</td>
</tr>
</table>

Câu 80. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm điều kiện của m để phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm phân biệt.



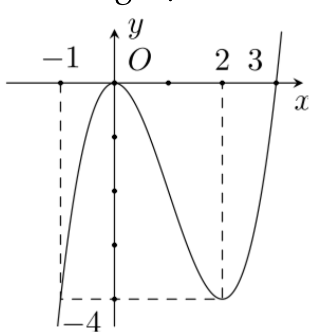
A. $-1 < m < 3$ **B.** $0 < m < 3$ **C.** $1 < m < 3$ **D.** $0 < m < 1$

Câu 81. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Tìm m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt



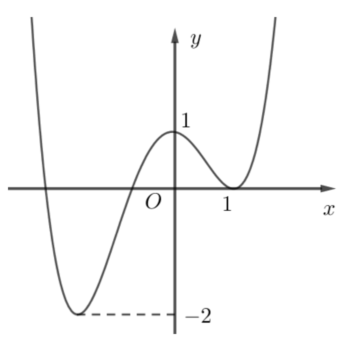
A. $m > 2$ **B.** $0 < m < 2$ **C.** $-2 < m < 2$ **D.** $m < -2$

Câu 82. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(x) = -1$ có bao nhiêu nghiệm



A. 1 nghiệm **B.** 2 nghiệm **C.** 3 nghiệm **D.** 4 nghiệm

Câu 83. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình. Tìm m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt



A. $m > 1$ **B.** $0 < m < 1$ **C.** $m = 1; m = 0$ **D.** $-2 < m < 0$

2.3. Sử dụng bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, tìm m để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm.

Tìm số nghiệm của phương trình $f(x) = m$.

Cách giải: Tự luận. Từ bảng biến thiên ta vẽ đồ thị hàm số f(x) dạng gần đúng Sau đó làm như dạng bài dùng đồ thị

**Số nguyên là các số như 0;1;2;3…; -1; -2; -3…*
** Có thể không cần vẽ gần đúng đồ thị. Ta thấy BBT và đồ thị thực ra có hình dạng giống nhau rồi nên họ dùng BBT luôn*

VD: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	1	↘	-2	↗	$+\infty$

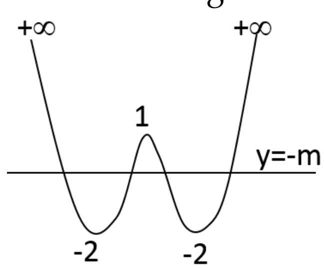
Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x) + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Giải:

PT tương đương với $f(x) = -m$

Từ BBT ta vẽ gần đúng đồ thị hàm số y=f(x)



PT có 4 nghiệm khi $-2 < -m < 1 \Leftrightarrow -1 < m < 2$

Vì m là số nguyên nên m=0; m=1. Vậy có 2 giá trị. Chọn C.

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm m để phương trình $f(x) = m$ có 4 nghiệm phân biệt

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	3	↗	4	↘	$-\infty$

A. Với mọi m **B.** $3 < m < 4$ **C.** $m < 4$ **D.** $m > 3$

Câu 85. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Phương trình $f(x) + 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

A. 4 nghiệm **B.** 3 nghiệm **C.** 2 nghiệm **D.** Vô nghiệm

Câu 86. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm m để phương trình $f\left(x\right) = m$ có 3 nghiệm phân biệt

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		-	0	$+$	0	-	
y	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

A. $0 < m < 4$ **B.** $m < 4$ **C.** $1 < m < 4$ **D.** $0 < m < 1$

CHƯƠNG II. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LOGARIT. HÀM SỐ LŨY THỪA

§1. Lũy thừa và hàm số lũy thừa

1. Định nghĩa lũy thừa: (SGK). Trong đó chú ý

Cho m, n **là các số nguyên,** $n \geq 1$

$a^n = a.a.a...a$ với n thừa số a.

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (n \geq 2)$

Điều kiện của cơ số a trong các loại lũy thừa

Mũ nguyên dương: a^2 ..	$a \in \mathbb{R}$
Mũ nguyên âm: a^{-2} , mũ 0	$a \neq 0$
Mũ không nguyên: $a^{\sqrt{2}}; a^{\frac{2}{3}}$	$a > 0$

2. Biến đổi lũy thừa:

$a^m.a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

$\left(ab\right)^m = a^m.b^m$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

3. Hàm số lũy thừa

Công thức $y = x^n$

TXĐ: Theo số mũ

Mũ nguyên dương: $y = x^2$ ..	$\mathbb{R}$
Mũ nguyên âm: $y = x^{-2}$, mũ 0	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (cho $x \neq 0$)
Mũ không nguyên: $y = x^{\sqrt{2}}; y = x^{-\frac{2}{3}}$	$(0;+\infty)$ (cho $x > 0$)

Đạo hàm $(x^n)' = nx^{n-1}$; $(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$

Đồ thị: (SGK)

2. Một số dạng bài thường gặp

2.1. Tìm tính chất đúng của lũy thừa và hàm số lũy thừa

Cách giải: Tự luận. Thuộc lý thuyết để trả lời

Câu 87. Kết luận nào đúng

A. $5^{-4} = \frac{1}{4^5}$ **B.** $5^{-4} = 4^{-5}$

C. $5^{-4} = \frac{1}{5^4}$ **D.** 5^{-4} không xác định

Câu 88. Cho $a > 0$, tìm kết luận đúng

A. $a^{\frac{5}{4}} = \sqrt[5]{a^4}$ **B.** $a^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{a^5}$ **C.** $a^{\frac{5}{4}} = \sqrt[20]{a}$ **D.** $a^{\frac{5}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^5}}$

Câu 89. Đẳng thức nào đúng

A. $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt{3^3}$ **B.** $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$ **C.** $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[6]{3}$ **D.** $3^{\frac{2}{3}} = \frac{3^2}{3^3}$

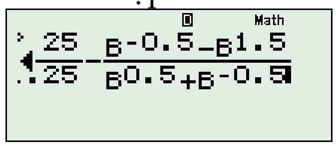
2.2. Rút gọn biểu thức lũy thừa:

Cách 1: Tự luận. Dùng các phép biến đổi lũy thừa để rút gọn với biểu thức chữ.

* Có $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}; b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$	VD: Rút gọn biểu thức sau (với đk các biểu thức là có nghĩa) $A = \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) : \left(b - 2b\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b^2}{a}\right)$ A. $\frac{b}{a}$ B. $\frac{a}{b}$ C. $a - b$ D. $a.b$ Giải: $A = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 : \left(\sqrt{b} - \frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2$ (dùng hằng đẳng thức)

<table>
<tr><td></td><td>$A=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2:\left[\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\right]^2=\frac{a}{b}$. Chọn B</td></tr>
</table>

Cách 2: Máy tính. Thay số vào đề bài và đáp án, trùng kết quả thì nhận

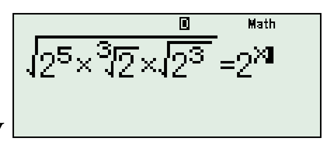
<table>
<tr><td>*Biểu thức khá dài nên ta chuyển các phân số thành số thập phân</td><td>VD: Rút gọn biểu thức $A=\frac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}-\frac{b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}$
A. a+b B. b-a C. b.a D. 2b
Giải: Nhập biểu thức vào máy tính


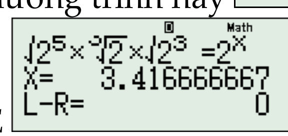
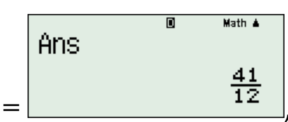
CALC. Chọn A=2; B=3. Kết quả ra 5
Vậy A đúng</td></tr>
</table>

2.3. Biến đổi căn về lũy thừa số mũ hữu tỷ

Cách 1: Tự luận. Dùng công thức $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, công thức căn tầng và các biến đổi lũy thừa

Cách 2: Máy tính. Lệnh SHIFT SOLVE, lệnh logarit.

<table>
<tr><td>*Dấu bằng được nhập bằng cách ấn các nút ALPHA và CALC.</td><td>VD: Cho $x>0$. Biến đổi biểu thức sau về lũy thừa với số mũ hữu tỉ
$P=\sqrt{x^5.\sqrt[3]{x}.\sqrt{x^3}}$
Giải: Ta cần tìm số X sao cho $\sqrt{x^5.\sqrt[3]{x}.\sqrt{x^3}}=x^X$
Thay x bằng một số dương tùy ý, chẳng hạn x=2, ta có
$\sqrt{2^5.\sqrt[3]{2}.\sqrt{2^3}}=2^X$
Nhập vào máy phương trình này 

Ấn SHIFT SOLVE 
, máy ra nghiệm là X=3,416666..
Để đổi ra phân số ấn ANS = 
, chính là $\frac{41}{12}$</td></tr>
</table>

Câu 90. Cho $a>0$. Rút gọn $P=\sqrt[3]{a.\sqrt{a.\sqrt[4]{a^3}}}$ bằng

A. $a^{\frac{5}{8}}$ **B.** $a^{\frac{7}{8}}$ **C.** $a^{\frac{11}{8}}$ **D.** $a^{\frac{3}{8}}$

Câu 91. Cho $a>0$. Biết $\sqrt[3]{a.\sqrt[3]{a.\sqrt[3]{a}}}=a^{\frac{m}{n}}$ trong đó m,n là các số nguyên, $n\geq 2$. Tính $m+n$

A. 40 **B.** 27 **C.** 15 **D.** 54

2.4. Tìm TXĐ, tính đạo hàm của hàm số lũy thừa dạng $y=x^{\alpha};y=\left[f(x)\right]^{\alpha}$

Cách giải: Tự luận. Xét các trường hợp số mũ α

Mũ α nguyên dương: $y=\left[f(x)\right]^2$ ..	$f(x)$ xác định
Mũ α nguyên âm: $y=\left[f(x)\right]^{-2}$, mũ 0	Cho $f(x)\neq 0$
Mũ α không nguyên: $y=\left[f(x)\right]^{\sqrt{2}};\left[f(x)\right]^{\frac{2}{3}}$	Cho $f(x)>0$

** Có thể dùng MTCT giải bất phương trình.*	VD: Tìm TXĐ của hàm số $y=\left(x^2-2x\right)^{\frac{3}{4}}$ Giải: Do số mũ $\frac{3}{4}$ không phải số nguyên nên $x^2-2x>0\Leftrightarrow x<0;x>2$ Vậy TXĐ $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

Câu 92. Tìm TXĐ của hàm số $y=\left(x^2-3x\right)^{\sqrt{5}}$

A. $\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$ **B.** $(0;3)$

C. $(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$ **D.** $\mathbb{R}$

Câu 93. Tìm TXĐ của hàm số $y=(x-2)^{\pi}$

A. $(0;+\infty)$ **B.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ **C.** $(2;+\infty)$ **D.** $\mathbb{R}$

Câu 94. Tìm TXĐ của hàm số $y=x^{\frac{2}{3}}$

A. $[0;+\infty)$ **B.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **C.** $(0;+\infty)$ **D.** $(-\infty;0)$

Câu 95. Tính đạo hàm của hàm số $y=x^{\sqrt{5}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$

A. $y'=\sqrt{5}.x^{\sqrt{5}-1}$ **B.** $y'=\sqrt{5}.x^{\sqrt{5}+1}$ **C.** $y'=\frac{1}{\sqrt{5}}.x^{\sqrt{5}-1}$ **D.** $y'=\sqrt{5}.x^{\sqrt{5}}$

§2. Logarit. Hàm số logarit

1. Định nghĩa: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$. Ta gọi a là cơ số và b là biến số

Trong định nghĩa trên thì $\begin{cases} b > 0 \\ a > 0; a \neq 1 \end{cases}$

2. Các công thức logarit:

$\log_a 1 = 0; \log_a a = 1$

$\log_a a^m = m;\ a^{\log_a m} = m$

$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$

$\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$

$\log_a \dfrac{1}{x} = -\log_a x$

$\log_a x^n = n \log_a x \ (x > 0)$

3. Đổi cơ số: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. Hệ quả: $\log_{a^n} x = \dfrac{1}{n} \log_a x$

4. Logarit cơ số e=2,718..của x ký hiệu là $\ln x$

5. Logarit cơ số 10 của x ký hiệu là $\log x$

6. Hàm số logarit:

Công thức hàm số: $y = \log_a x$

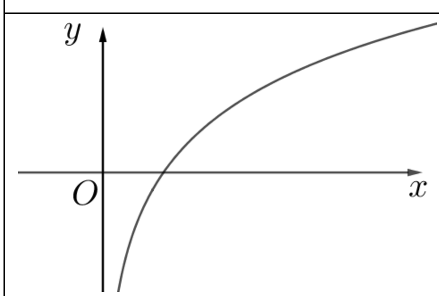
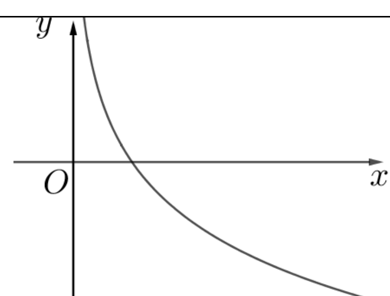
TXĐ: $(0; +\infty)$

Đạo hàm:

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x};\ (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a};\ (\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$

Sự biến thiên, đồ thị

<table>
<tr><th colspan="2">Hàm số logarit</th></tr>
<tr><td>$a > 1$ hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$</td><td>$0 < a < 1$ hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

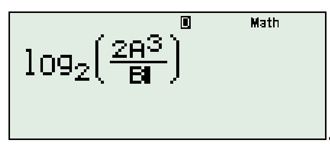
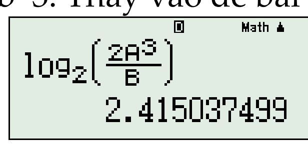
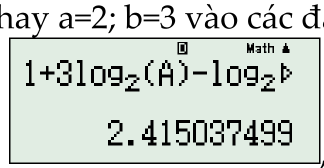
7. Một số dạng bài cơ bản:

7.1. Trả lời các tính chất của logarit. Biến đổi biểu thức logarit.

Cách 1. Tự luận: Thuộc tính chất và các công thức

** Chú ý là* $\log_2 2 = 1$	VD: Cho a, b là các số thực dương bất kỳ. Biểu thức $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right)$ bằng: **A.** $1+3\log_2 a-\log_2 b$ **B.** $1+\dfrac{1}{3}\log_2 a-\log_2 b$ **C.** $1+3\log_2 a+\log_2 b$ **D.** $1+\dfrac{1}{3}\log_2 a+\log_2 b$ Giải: Ta dùng các công thức logarit của thương, tích và lũy thừa, có $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right)=\log_2\left(2a^3\right)-\log_2 b$ $=\log_2 2+\log_2 a^3+\log_2 b=1+3\log_2 a-\log_2 b$. Chọn A

Cách 2: MTCT. Thay chữ bằng số vào đề bài và TẤT CẢ đáp án. Trùng kết quả thì nhận.

** Chú ý phải thay a, b là số dương. Cũng đừng nên thay các số đặc biệt quá như a=1 vì với a=1,* $\log_2 1 = 0$ *nên không phân biệt được các đáp án* *Thường ta thay a=2; b=3* ** Phải thử TẤT CẢ các đáp án, đề phòng có hai đáp án cùng ra số như nhau. Khi đó phải chọn cặp a, b khác*	VD: Cho a, b là các số thực dương bất kỳ. Biểu thức $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right)$ bằng: **A.** $1+3\log_2 a-\log_2 b$ **B.** $1+\dfrac{1}{3}\log_2 a-\log_2 b$ **C.** $1+3\log_2 a+\log_2 b$ **D.** $1+\dfrac{1}{3}\log_2 a+\log_2 b$ Giải: Chọn a=2; b=3. Thay vào đề bài  . Ấn CALC A=2;B=3 ra  2,4150 Tiếp tục thay a=2; b=3 vào các đáp án Thử A, có  , trùng với đề bài, chọn A

Câu 96. Với a là số thực dương tuỳ ý, $\log_4\left(a^3\right)$ bằng

A. $4\log_3 a$ **B.** $3\log_4 a$

C. $3+\log_4 a$ **D.** $4+\log_3 a$

Câu 97. Cho $x>0$ và $a>0, a\neq 1$. Tìm công thức đúng

A. $\log_{a^4} x = 4\log_a x$ **B.** $\log_{a^4} x = \frac{1}{4}\log_a x$

C. $\log_{a^4} x = \log_a x^4$ **D.** $\log_{a^4} x = \frac{4}{\log_a x}$

Câu 98. Cho $x>0$. Tìm công thức đúng

A. $\log_{\sqrt{3}} x = \frac{1}{2}\log_3 x$ **B.** $\log_{\sqrt{3}} x = 2\log_3 x$

C. $\log_{\sqrt{3}} x = \sqrt{\log_3 x}$ **D.** $\log_{\sqrt{3}} x = 3\log_3 x$

Câu 99. Cho $a>0$, rút gọn $\log(5a)-\log(3a)$

A. $\log\frac{3}{5}$ **B.** $\log(2a)$ **C.** $\log\frac{5}{3}$ **D.** $\log(15a^2)$

Câu 100. Cho $a,b>0, a,b\neq 1$. Tính $P=\log_{a^2} b+\log_a\sqrt{\frac{a}{b}}$

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{5}{2}$

7.2. Tính logarit cơ số này theo logarit cơ số khác

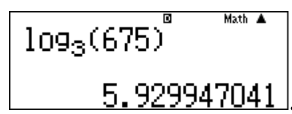
Cách 1: Tự luận. Dùng công thức đổi cơ số và hệ quả của nó; phối hợp các công thức biến đổi logarit khác (HS tự tham khảo)

Cách 2: MTCT. Dành cho câu trắc nghiệm.

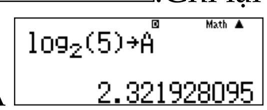
VD: Cho $a=\log_2 5; b=\log_2 3$. Tính $P=\log_3 675$ theo a và b

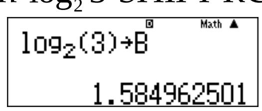
A. $P=\frac{2a}{b}+3$ B. $P=\frac{2a}{b}$ C. $P=\frac{a}{b}+3$ D. $P=\frac{2a}{b}+1$

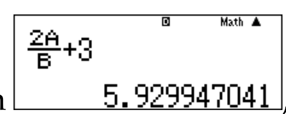
Giải:

Tính $P=\log_3 675$ bằng máy tính. 

.Ghi lại số 5,92

Lưu a, b vào máy. Ấn $\log_2 3$ SHIFT RCL A 

$\log_2 3$ SHIFT RCL B 

Thay vào các đáp án để thử. Thử A, ta ấn 

, thấy ĐÚNG bằng 5,92 đã ghi trên. Vậy chọn A.

Câu 101. Cho $\log_2 5=a$ và $\log_2 3=b$. Tính $\log_6 15$ theo a và b

A. $\frac{a+b}{2}$ **B.** $\frac{a+b}{b+1}$ **C.** $\frac{a+b}{b-1}$ **D.** $\frac{a-b}{b+1}$

7.3. Tìm TXĐ của hàm số logarit $y=\log_a x$ và $y=\log_a f(x)$

Cách 1: Tự luận.

Với hàm số $y = \log_a x$ ta có TXĐ: $\mathbb{R}$

Với hàm số $y = \log_a f(x)$: Cho f(x) > 0. Giải tìm bất phương trình tìm x.

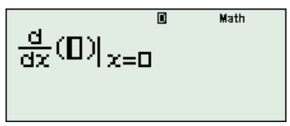
Kết luận TXĐ

	VD: Tìm TXĐ của hàm số $y = \log_2\left(x^2 - 2x\right)$ Giải: Cho $x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 0; x > 2$ TXĐ: $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

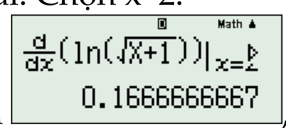
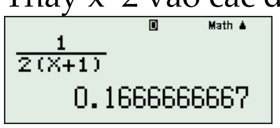
7.4. Tính đạo hàm hàm logarit $y = \log_a x$ và $y = \log_a u$

Cách 1: Tự luận. Dùng các công thức đạo hàm

	VD: Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln\left(x^2 - 2x + 3\right)$ Giải: Sử dụng đạo hàm hàm hợp $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ với $u = x^2 - 2x + 3$, ta có $y' = \frac{\left(x^2 - 2x + 3\right)'}{x^2 - 2x + 3} = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 3}$

Cách 2: Máy tính. Dùng lệnh 

(giống như các phép tính đạo hàm khác)

	VD: Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln\sqrt{x+1}$ A. $y' = \frac{1}{2(x+1)}$ B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ C. $y' = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ D. $y' = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ Giải: Chọn x=2. Ấn  , nhớ kết quả là 0,166 Thay x=2 vào các đáp án, dùng lệnh CALC, đáp án A  Ra 0,166 trùng với số bên trên. Vậy chọn A.

Câu 102. Tìm TXĐ của hàm số $y = \log_2\left(x^2 - 4x\right)$

A. $(0;4)$ **B.** $[0;4]$

C. $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$

Câu 103. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3 x$

A. $y' = x\ln 3$ **B.** $y' = \frac{1}{x}$ **C.** $y' = \frac{3}{x}$ **D.** $y' = \frac{1}{x\ln 3}$

Câu 104. Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_2(x-1)$

A. $y'=\dfrac{1}{x-1}$ **B.** $y'=\dfrac{2}{x-1}$ **C.** $y'=\dfrac{1}{(x-1)\ln 2}$ **D.** $y'=\dfrac{\ln 2}{x-1}$

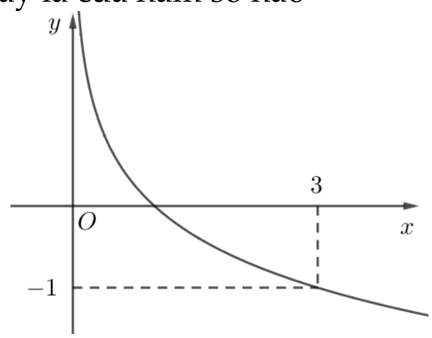
Câu 105. Tính đạo hàm của hàm số $y=\ln(x^2+1)$

A. $y'=\dfrac{1}{x^2+1}$ **B.** $y'=\dfrac{x}{x^2+1}$ **C.** $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$ **D.** $y'=\dfrac{x^2+1}{2x}$

7.5. Nhận dạng đồ thị hàm số logarit (tìm ra cơ số a)

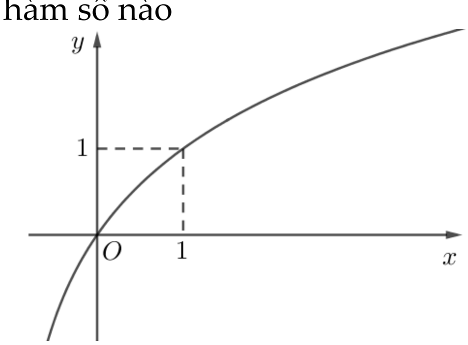
Cách giải: Tự luận. Từ đồ thị nhìn ra có phải hàm số Logarit không, $a>1$ hay $0<a<1$

Lấy thêm điểm, thay vào hàm số để chọn đúng cơ số a.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
VD: Đồ thị dưới đây là của hàm số nào


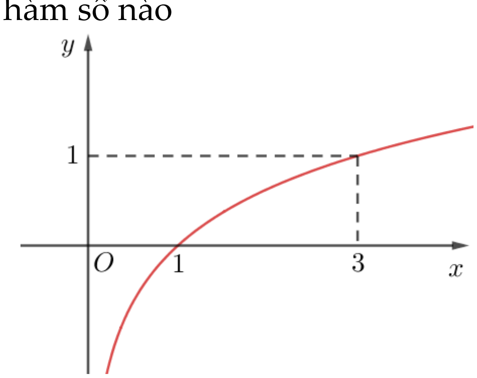
A. $y=\log x$ B. $y=\log_3 x$ C. $y=\log_{\frac{1}{5}} x$ D. $y=\log_{\frac{1}{3}} x$
Giải: Thay điểm $(3;-1)$ ta có đáp án D
</td>
</tr>
</table>

Câu 106. Đồ thị sau là của hàm số nào



A. $y=\log_2 x$ **B.** $y=\log_2(x+1)$ **C.** $y=\log_2 x+1$ **D.** $y=\dfrac{1}{\log_2 x}$

Câu 107. Đồ thị sau là của hàm số nào



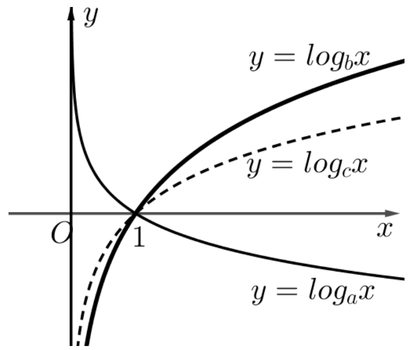
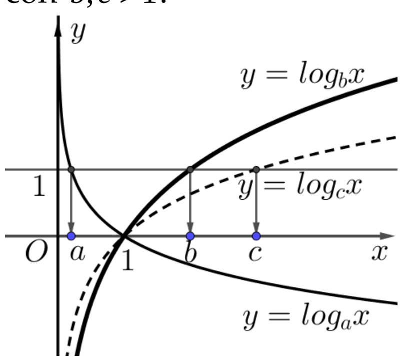
A. $y=\log_3 x$ **B.** $y=\log x$ **C.** $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ **D.** $y=\log_{\sqrt{2}-1} x$

7.6. So sánh các cơ số khi biết đồ thị nhiều hàm số logarit: $y=\log_a x; y=\log_b x$.

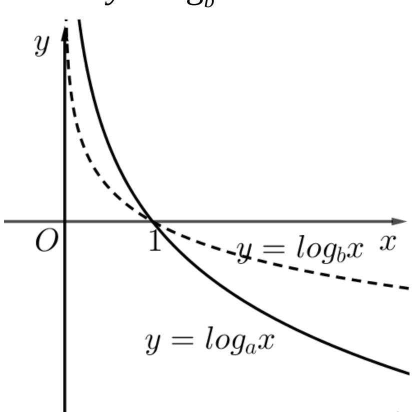
Cách giải: Tự luận.

Vẽ đường thẳng $y=1$, cắt đồ thị các hàm số tại các điểm có hoành độ $x=a; x=b$..

So sánh $a;b$ dựa vào hình vẽ.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>VD: Cho đồ thị các hàm số $y=\log_a x; y=\log_b x$ và $y=\log_c x$ như hình vẽ. So sánh $a;b;c$

</td>
</tr>
<tr>
<td>Lý giải:
Hoành độ giao điểm của đồ thị $y=\log_a x$ và $y=1$ là nghiệm của phương trình $\log_a x=1$
$\Leftrightarrow x=a$</td>
<td>Giải: Vẽ đường thẳng $y=1$. Nó cắt đồ thị các hàm số tại các điểm có hoành độ là $a;b;c$. Nhìn vào hình vẽ ta có $a<b<c$. Hơn nữa: $0<a<1$ còn $b,c>1$.

</td>
</tr>
</table>

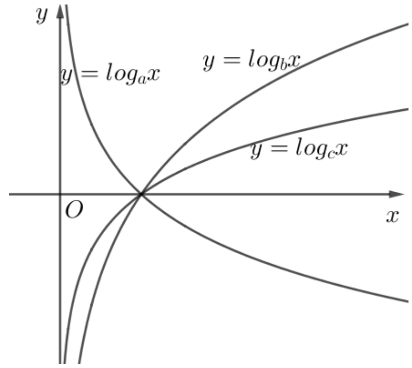
Câu 108. Cho hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình vẽ, trong đó đường nét đứt là $y=\log_b x$. Tìm kết luận đúng



A. $0 < b < a < 1$ **B.** $a > b > 1$

C. $0 < a < b < 1$ **D.** $b > a > 1$

Câu 109. Cho đồ thị ba hàm số logarit như hình vẽ. Tìm kết luận đúng



A. $a > b > c$ **B.** $b > c > a$ **C.** $b > a > c$ **D.** $c > b > a$

§3. Hàm số mũ

1. Định nghĩa

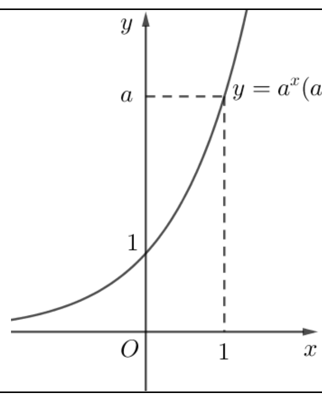
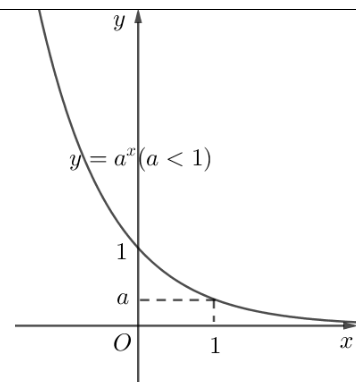
Công thức: $y = a^x$; $y = e^x$

TXĐ: $\mathbb{R}$

Đạo hàm: $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$; $\left(a^u\right)' = a^u.u'.\ln a$

$\left(e^x\right)' = e^x$; $\left(e^u\right)' = e^u.u'$

Sự biến thiên, đồ thị

Hàm số mũ	
$a > 1$ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$	$0 < a < 1$ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$
	

2. Một số dạng bài cơ bản:

2.1. TXĐ, Tính chất, Tính đạo hàm hàm số mũ

Cách 1: Tự luận. Thuộc công thức

Cách 2: Máy tính. Thay số vào đề bài và đáp án, kết quả trùng thì chọn (dùng cho câu trắc nghiệm)

	VD: Tính đạo hàm hàm số $y = 2^{2019x}$ C1: Dùng công thức đạo hàm hàm số $y = a^u$ ta có

	$y' = 2^{2019x}.(2019x)'.\ln 2 = 2019.\ln 2.2^{2019x}$

Câu 110. Tính đạo hàm của hàm số $y = 3^x$

A. $y' = 3^{x-1}$ **B.** $y' = x.3^{x-1}$ **C.** $y' = \dfrac{3^x}{\ln 3}$ **D.** $y' = 3^x.\ln 3$

Câu 111. Tính đạo hàm của hàm số $y = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x$

A. $y' = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x-1}$ **B.** $y' = 5^{-x}\ln 5$ **C.** $y' = -5^{-x}\ln 5$ **D.** $y' = 5^{-x-1}$

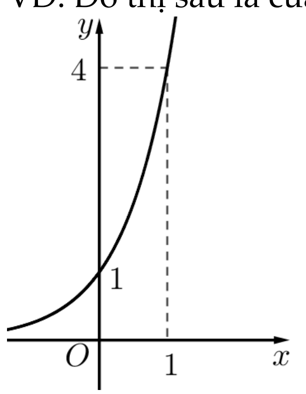
Câu 112. Tính đạo hàm của hàm số $y = 10^x$

A. $y' = 10^x\log 10$ **B.** $y' = 10^x\ln 10$ **C.** $y' = 10^{x-1}$ **D.** $y' = 10^x$

2.2. Nhận dạng đồ thị hàm số mũ (tìm ra cơ số a)

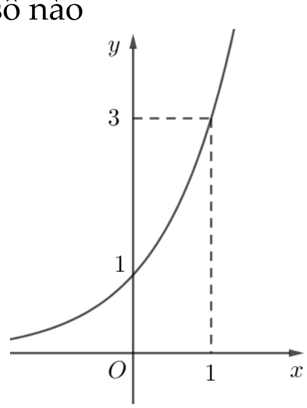
Cách giải: Tự luận. Từ đồ thị nhìn ra có phải hàm số Mũ không, $a > 1$ hay $0 < a < 1$

Lấy thêm điểm, thay vào hàm số để chọn đúng cơ số a .

<table>
<tr><td></td><td>VD: Đồ thị sau là của hàm số nào?


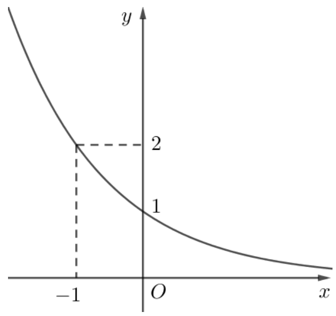
A. $y = 2^x$ B. $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ C. $y = 4^x$ D. $y = \log_2 x + 4$
Giải: Nhìn hình ta có đây là đồ thị hàm số mũ, cơ số lớn hơn 1.
Vậy loại B và D
Lấy điểm $x = 1$, dóng lên hình ta có $y = 4$. Tức là thay $x = 1$ thì $y = 4$ Vậy chọn C.</td></tr>
</table>

Câu 113. Đồ thị sau là của hàm số nào



A. $y=\left(\sqrt{3}\right)^{x}$ **B.** $y=3^{x}$ **C.** $y=x^{3}$ **D.** $y=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x}$

Câu 114. Đồ thị sau là của hàm số nào



A. $y=2^{x}$ **B.** $y=3^{x}$ **C.** $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$ **D.** $y=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x}$

2.3. So sánh các cơ số khi biết đồ thị nhiều hàm số mũ $y=a^{x};y=b^{x}$ ..

Cách giải: Tự luận.

Vẽ đường thẳng $x=1$, cắt đồ thị các hàm số tại các điểm có tung độ $y=a;y=b$

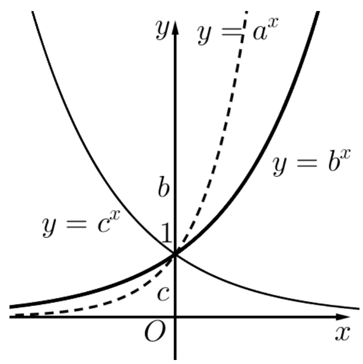
So sánh $a;b$ dựa vào hình vẽ.

<table>
<tr>
<td>

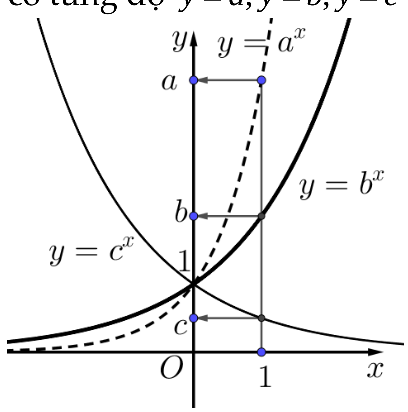
Lý giải:
Với $x=1$, thay vào $y=a^{x}$ ta sẽ có $y=a^{1}=a$

</td>
<td>

Cho đồ thị các hàm số $y=a^{x};y=b^{x};y=c^{x}$ như hình vẽ. So sánh $a;b;c$



Giải: Vẽ đường thẳng $x=1$. Nó cắt đồ thị các hàm số tại các điểm có tung độ $y=a;y=b;y=c$. Nhìn hình vẽ ta có $c<b<a$



</td>
</tr>
</table>

§4. Phương trình và bất phương trình mũ

1. Định nghĩa

a. Phương trình cơ bản: $a^x = b\ (a > 0; a \neq 1)$

$b \leq 0$: Vô nghiệm

$b > 0: a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

Ta coi $a^{f(x)} = b$ cũng là phương trình cơ bản. Vậy:

$b \leq 0$: Vô nghiệm

$b > 0: a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$

b. Bất phương trình cơ bản: $a^x > b;\ a^x < b$

	$a^x = b$	$a^x > b$	$a^x < b$
$b \leq 0$	Vô nghiệm	$x \in \mathbb{R}$	Vô nghiệm
$b > 0$	$x = \log_a b$	VT là x, VP là $\log_a b$ $0 < a < 1$ đảo chiều; $a > 1$ giữ nguyên chiều	

Ta coi $a^{f(x)} > b;\ a^{f(x)} < b$ cũng là bất phương trình cơ bản.

Câu 115. Giải phương trình $3^x = 5$

A. $x = \frac{5}{3}$ **B.** $x = \log_5 3$ **C.** $x = \log_3 5$ **D.** $x = 15$

Câu 116. Giải phương trình $5^{x-1} = 6$

A. $x = \log_5 6 + 1$ **B.** $x = \log_5 6 - 1$ **C.** $x = \frac{11}{5}$ **D.** $x = \log_5 6$

Câu 117. Tập nghiệm của bất phương trình $3^x < 6$ là

A. $(0;2)$ **B.** $(0;\log_3 6)$ **C.** $(-\infty;\log_3 6)$ **D.** $(\log_3 6;+\infty)$

Câu 118. Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 5$

A. $x > \log_{\frac{1}{4}} 5$ **B.** $x < \log_{\frac{1}{4}} 5$ **C.** $0 < x < \log_{\frac{1}{4}} 5$ **D.** $x > -\log_4 5$

Câu 119. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+3} > 10$

A. $(\log_2 10;+\infty)$ **B.** $(-3+\log_2 10;+\infty)$

C. $(-\infty;-3+\log_2 10)$ **D.** $(-3+\log 2;+\infty)$

2. Phương và bất phương trình thường gặp:

2.1. Phương trình $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)}$: $a > 1$ **không đảo chiều** $\Leftrightarrow f(x) > g(x)$

$0 < a < 1$ **đảo chiều** $\Leftrightarrow f(x) < g(x)$

	VD: Giải phương trình $e^{x^2-3x} = e^{4x}$

	Giải: Phương trình tương đương với $x^2-3x=4x \Leftrightarrow x^2-7x=0 \Leftrightarrow x=0; x=7$

Câu 120. Tìm nghiệm của phương trình $5^{3x-1}=5^{x^2-x-1}$

A. $x=0; x=-2$ **B.** $x=0; x=4$
C. $x=0; x=-4$ **D.** $x=0; x=2$

Câu 121. Tính tổng các nghiệm của phương trình $2^{2x^2-4x+1}=2^{3x-3}$

A. $\frac{7}{4}$ **B.** $\frac{7}{2}$ **C.** 7 **D.** 14

Câu 122. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $3^{2x-1}>3^{x+2}$

A. $(-\infty;3)$ **B.** $(-3;+\infty)$ **C.** $(3;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-3)$

Câu 123. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{-x+5} \le \left(\frac{3}{4}\right)^{3x-3}$

A. $(2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;2]$ **C.** $[2;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-2]$

2.2. Đưa về cùng cơ số: Khi hai vế là tích, thương của các lũy thừa.
Cơ số của chúng lại là luỹ thừa của nhau.
Cách giải: Tự luận. Dùng các công thức biến đổi lũy thừa đưa về dạng $a^{f(x)}=a^{g(x)}$
Hoặc về dạng $a^{f(x)}>a^{g(x)}$

**Ta có các cơ số đều là lũy thừa của 3:* $9=3^2$. $27=3^3$ $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$ *Sau đó áp dụng* $\left(a^m\right)^n=a^{m.n}$ *và* $a^m.a^n=a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	VD: Giải phương trình $3^x.27^x=9.\left(\sqrt{3}\right)^x$, tập nghiệm là: **A.** $\{\varnothing\}$ **B.** $\left\{\frac{4}{7}\right\}$ **C.** $\{0\}$ **D.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ Giải: Phương trình tương đương với $3^x.\left(3^3\right)^x=3^2.\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x$ $\Leftrightarrow 3^x.3^{3x}=3^2.3^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow 3^{4x}=3^{2+\frac{x}{2}}$ $\Leftrightarrow 4x=2+\frac{x}{2} \Leftrightarrow x=\frac{4}{7}$ (Có thể dùng lệnh CALC thay đáp án lên hoặc dùng SHIFT SOLVE)
** Cơ số $a=\frac{1}{2}<1$ nên ta phải đảo chiều*	VD: Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x>2.\left(\frac{1}{8}\right)^x$ Giải: BPT tương đương với $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}.\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$ $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+(-1)} \Leftrightarrow x<3x-1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

Câu 124. Phương trình $3^{x^2-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$ có hai nghiệm x_1,x_2. Tính x_1x_2.

A. 6. B. -2. C. -5. D. -6.

Câu 125. Giải phương trình $4^{2x+5}=2^{2-x}$

A. $x=-\frac{8}{5}$ B. $x=\frac{12}{5}$ C. $x=3$ D. $x=\frac{8}{5}$

Câu 126. Giải phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1}=125^{2x}$

A. $x=1$ B. $x=4$ C. $x=-\frac{1}{4}$ D. $x=-\frac{1}{8}$

Câu 127. Giải bất phương trình $2^{x^2-2x+3}>2^x.8$

A. $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$ B. $0<x<3$ C. $\left[\begin{array}{l}x>0\\x<3\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}x<0\\x>3\end{array}\right.$

Câu 128. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $9^x.3^{x+1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}.27$

A. $(1;+\infty)$ B. $(-\infty;1)$ C. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ D. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$

Câu 129. Giải bất phương trình $\left(\sqrt{2}\right)^x>2^{2x+1}$

A. $x>-\frac{2}{3}$ B. $x<-\frac{2}{3}$ C. $x=\frac{-2}{3}$ D. $x<\frac{2}{3}$

2.3. Đặt ẩn phụ đưa về phương trình và bất phương trình bậc hai:

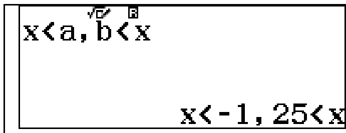
Cách giải: Tự luận. Đặt $t=a^x, t>0$.

Suy ra phương trình và bất phương trình bậc hai ẩn t

Giải phương trình, bất phương trình (lấy nghiệm t dương.)

Quay trở lại cách đặt, giải phương trình và bất phương trình cơ bản

* *Chú ý:* $25^x=\left(5^x\right)^2=t^2$ *và* $5^{2x}=\left(5^x\right)^2=t^2$ *Tương tự cho các bài tập khác*	VD: Giải phương trình $25^x-4.5^x-5=0$ Giải: Đặt $t=5^x>0$ ta có $t^2-4t-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\ (l)\\t=5\end{array}\right.$ Với $t=5, 5^x=5\Leftrightarrow x=\log_5 5=1$
* *Trong PT, BPT mũ, gặp t âm là loại* *Giải bất phương trình bằng máy tính cầm tay. Nếu máy hiện dấu phẩy thì thay nó bằng ngoặc vuông*	VD: Giải bất phương trình $25^x-24.5^x-25>0$ Giải: Đặt $t=5^x>0$ ta có $t^2-24t-25>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<-1(l)\\t>25\end{array}\right.$ Quay lại cách đặt ta có $5^x>25\Leftrightarrow x>2$ VD: Giải bất phương trình $9^x-2.3^x-3\le 0$ Giải: Đặt $t=3^x>0$ ta có $t^2-2t-3\le 0\Leftrightarrow -1\le t\le 3$

	Ta loại bỏ $t \geq -1$ vậy chỉ còn $t \leq 3$ Quay trở lại cách đặt ta có $3^x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 1$

Câu 130. Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình $5^{2x+1} - 4.5^x + 1 = 0$. Tính $x_1 + x_2$

A. 1 **B.** -2 **C.** 2 **D.** -1

Câu 131. Phương trình $9^x - 3.3^x + 2 = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$. Tính $2x_1 + 3x_2$

A. $4\log_3 2$ **B.** 1 **C.** $3\log_3 2$ **D.** $2\log_2 3$

Câu 132. Giải bất phương trình $9^x - 4.3^{x+1} + 20 > 0$

A. $\left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 10 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} 0 < x < \log_3 2 \\ x > \log_3 10 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x < \log_3 2 \\ x > \log_3 10 \end{array}\right.$ **D.** $\log_3 2 < x < \log_3 10$

Câu 133. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $25^x - 4.5^{x+1} + 75 \leq 0$

A. $[5;15]$ **B.** $[1;\log_5 15]$ **C.** $[0;\log_5 15]$ **D.** $[1;3]$

Câu 134. Tập nghiệm của bất phương trình $9^x - 25.3^x - 54 < 0$ có bao nhiêu số nguyên dương

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 4

§5. Phương trình, bất phương trình logarit

1. Định nghĩa

a. Phương trình cơ bản $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$ (PT luôn có nghiệm)

Ta coi phương trình $\log_a f(x) = b$ cũng là phương trình cơ bản

Vậy $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$

b. Bất phương trình cơ bản: $\log_a x > b$; $\log_a x < b$

	$\log_a x > b$	$\log_a x < b$
$a > 1$	$\begin{cases} x > 0 \\ x > a^b \end{cases} \Leftrightarrow x > a^b$	$\begin{cases} x > 0 \\ x < a^b \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < a^b$
$0 < a < 1$	$\begin{cases} x > 0 \\ x < a^b \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < a^b$	$\begin{cases} x > 0 \\ x > a^b \end{cases} \Leftrightarrow x > a^b$

Tóm lại, với bất phương trình ta ghi nhớ, dù ở loại nào thì

$$\begin{cases} x > 0 \\ a > 1: \text{giữ nguyên chiều}; 0 < a < 1: \text{đảo chiều} \end{cases}$$. Sau đó tìm x.

Ta coi bất phương trình $\log_a f(x) > b$; $\log_a f(x) < b$ cũng là các bất phương trình cơ bản.

Câu 135. Giải phương trình $\log_{\sqrt{3}} x = 4$

A. $x = 8$ **B.** $x = 4\sqrt{3}$ **C.** $x = 9$ **D.** $x = 18$

Câu 136. Giải phương trình $\log_4(x-1) = 2$

A. $x=16$ B. $x=15$ C. $x=17$ D. $x=9$

Câu 137. Giải phương trình $\log_3(1-2x)=3$

A. $x=13$ B. $x=-13$ C. $x=27$ D. $x=-4$

Câu 138. Giải bất phương trình $\log_2 x>3$

A. $x>6$ B. $0<x<8$ C. $x>8$ D. $0<x<6$

Câu 139. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} x\ge -4$

A. $(16;+\infty)$ B. $[16;+\infty)$ C. $(0;16]$ D. $[0;16]$

Câu 140. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x-5)>2$

A. $\left(\frac{5}{2};7\right)$ B. $(-\infty;7)$ C. $(7;+\infty)$ D. $\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$

Câu 141. Giải bất phương trình $\log_{27} x<\frac{1}{3}$

A. $x>3$ B. $x<3$ C. $0<x<3$ D. $1<x<3$

Câu 142. Giải bất phương trình $\log_3(2x-1)>3$

A. $x>14$ B. $x>28$ C. $0<x<14$ D. $0<x<28$

Câu 143. Giải bất phương trình $\log_2(x-2)<3$

A. $0<x<10$ B. $2<x<10$ C. $x<10$ D. $\left[\begin{array}{l} x<2 \\ x>10 \end{array}\right.$

2. Một số phương trình và bất phương trình thường gặp

2.1. Phương trình và bất phương trình đưa về cùng cơ số

Cách giải: Tự luận. ĐK: x>0.

Dùng công thức $\log_{a^n} x=\frac{1}{n}\log_a x$ để đưa các số hạng về cùng cơ số

Giải phương trình và bất phương trình cơ bản

** Ta đưa về cùng cơ số 2* $\log_4 x=\log_{2^2} x$ $\log_{\sqrt{2}} x=\log_{2^{\frac{1}{2}}} x$ $\log_{\frac{1}{2}} x=\log_{2^{-1}} x$	VD: Giải phương trình $\log_4 x-2\log_{\sqrt{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} x=-9$ Giải: ĐK x>0 PT tương đương với $\frac{1}{2}\log_2 x-2.2.\log_2 x-\log_2 x=-9$ $\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}-4-1\right)\log_2 x=-9\Leftrightarrow-\frac{9}{2}\log_2 x=-9$ $\Leftrightarrow\log_2 x=2\Leftrightarrow x=4$ thỏa mãn ĐK
** Ta đưa về cùng cơ số 2* $\log_4 x=\log_{2^2} x$ $\log_{\sqrt{2}} x=\log_{2^{\frac{1}{2}}} x$ $\log_{\frac{1}{2}} x=\log_{2^{-1}} x$	VD: Giải phương trình $\log_4 x-2\log_{\sqrt{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} x\le -9$ Giải: ĐK x>0 BPT tương đương với $\frac{1}{2}\log_2 x-2.2.\log_2 x-\log_2 x\le -9$ $\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}-4-1\right)\log_2 x\le -9\Leftrightarrow-\frac{9}{2}\log_2 x\le -9$

	$\Leftrightarrow \log_2 x \le 2 \Leftrightarrow 0 < x \le 4$

Câu 144. Giải phương trình $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = \frac{7}{8}$

A. $x = 2$ **B.** $x = \sqrt{2}$ **C.** $x = \frac{1}{2}$ **D.** $x = \frac{1}{4}$

Câu 145. Giải phương trình $\log_{\sqrt{2}} x + \log_2 x + \log_{\sqrt[3]{2}} x = 12$

A. $x = 4$ **B.** $x = 2$ **C.** $x = 8$ **D.** $x = 16$

Câu 146. Giải bất phương trình $\log_{25} x - 3\log_5 x + \log_{\sqrt{5}} x \le \frac{3}{2}$, tập nghiệm là

A. $\left(0; \frac{1}{125}\right)$ **B.** $\left(\frac{1}{125}; +\infty\right)$ **C.** $(0;125)$ **D.** $(125;+\infty)$

2.2. Phương trình $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Cách giải: Tự luận. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$. Chú ý chọn $f(x)$ là biểu thức đơn giản.

Bất phương trình dạng $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

Cách giải: Tự luận.

Nếu $a > 1$: $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$. Nếu $0 < a < 1$: $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Tổng quát: $a > 1$ giữ nguyên chiều; $a < 1$ đảo chiều

Và cho biểu thức nhỏ hơn dương.

** f(x) hay g(x) có vai trò như nhau, ta chọn biểu thức nào đơn giản để đặt **<u>điều kiện</u>**.*	VD: Giải phương trình $\ln(x^2 - 3x) = \ln(2x - 4)$ Giải: PT tương đương với $\begin{cases} x^2 - 3x = 2x - 4 \\ 2x - 4 > 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ x > 2 \end{cases}$ Giải PT trên, kiểm tra điều kiện dưới ta có x=4 PT có nghiệm x=4.
** Ta phân tích như sau:* *Cơ số $\frac{2}{3} < 1$ nên đảo chiều, từ dấu lớn thành dấu nhỏ* *Sau khi đảo, x-1 là biểu thức nhỏ hơn, ta cho x-1 dương.*	VD: Giải bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}}(x-1) > \log_{\frac{2}{3}}(2x+3)$

	Giải: BPT tương đương với $\begin{cases} x-1<2x+3 \\ x-1>0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -x<4 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$ (vẽ trục số ra để kết hợp) *Đảo chiều* *Cho biểu thức nhỏ hơn dương*

Câu 147. Giải phương trình $\log_3(x+1)=\log_3(3x+2)$

A. $x=-\frac{1}{2}$ **B.** $x=\frac{1}{2}$ **C.** $x=2$ **D.** Vô nghiệm

Câu 148. Tính tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-3x-7\right)=\log_{\frac{1}{2}}(3)$

A. 10 **B.** 2 **C.** -10 **D.** 3

Câu 149. Tính tổng các nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2-x\right)=\log_2(2x+10)$

A. 5 **B.** 3 **C.** -3 **D.** 10

Câu 150. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log(3-x)\geq\log(2x-1)$

A. $\left(\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right]$ **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ **C.** $\left(-\infty;\frac{4}{3}\right]$ **D.** $\left(\frac{4}{3};3\right)$

Câu 151. Giải bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}}(3-4x)>\log_{\frac{2}{3}}(5+x)$

A. $-\frac{2}{5}<x<\frac{3}{4}$ **B.** $x<-\frac{5}{2}$ **C.** $0<x<-\frac{2}{5}$ **D.** $x>-\frac{2}{5}$

Câu 152. Giải bất phương trình $\ln\left(x^2-x+1\right)>\ln(3x+1)$

A. $\left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>4 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{3}<x<0 \\ x>4 \end{array}\right.$ **C.** $0<x<4$ **D.** $x>4$

2.3. Đặt ẩn phụ:

Cách giải: Tự luận. Đặt $t=\log_a x$ (Không cần điều kiện của t)

Suy ra phương trình, bất phương trình ẩn t.

Giải phương trình và bất phương trình này.

Thay trở lại cách đặt, giải phương trình, bất phương trình cơ bản.

* *Viết* $\log_3^2 x$ *chính là* $(\log_3 x)^2$	VD: Giải phương trình $\log_3^2 x-4\log_3 x-5=0$. Giải: Đặt $t=\log_3 x$ ta có $t^2-4t-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=-1 \end{array}\right.$. Hai nghiệm t này đều nhận. Với $t=5:\log_3 x=5\Leftrightarrow x=3^5=243$

	Với $t=-1$: $\log_3 x=-1 \Leftrightarrow x=3^{-1}=\frac{1}{3}$ KL: Phương trình có hai nghiệm $x=\frac{1}{3}; x=243$
	VD: Giải bất phương trình $\log_3^2 x-4\log_3 x-5>0$. Giải: Đặt $t=\log_3 x$ ta có $t^2-4t-5>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-1 \\ t>5 \end{array}\right.$ Với $t<-1$: $\log_3 x<-1 \Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{3}$ Với $t>5$: $\log_3 x>5 \Leftrightarrow x>3^5=243$
	VD: Giải bất phương trình $\log_{0,3}^2 x-4\log_{0,3} x-5<0$. Giải: Đặt $t=\log_{0,3} x$ ta có $t^2-4t-5<0 \Leftrightarrow -1<t<5$ Đến đây ta gặp bất phương trình kép $-1<\log_{0,3} x<5$, giải: ***<u>lấy 0,3 mũ lên và đảo chiều</u>*** thành $0,3^{-1}>x>0,3^5 \Leftrightarrow \frac{10}{3}>x>\frac{243}{100000}$ Viết xuôi lại: $\frac{243}{100000}<x<\frac{10}{3}$

Câu 153. Giải phương trình $\log_3^2 x-2\log_3 x-3=0$

A. $x=-1; x=3$ **B.** $x=-3; x=9$ **C.** $x=\frac{1}{3}; x=27$ **D.** $x=27$

Câu 154. Tính tích các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4=0$

A. 32 **B.** 36 **C.** 8 **D.** 16

Câu 155. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_3^2 x-4\log_3 x+3\le 0$

A. $[1;3]$ **B.** $[3;9]$ **C.** $[3;27]$ **D.** $[27;+\infty)$

Câu 156. Giải bất phương trình $\log_2^2 x-\log_{\frac{1}{2}} x-2>0$

A. $\left[\begin{array}{l} 0<x<2 \\ x>4 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} 0<x<\frac{1}{4} \\ x>2 \end{array}\right.$ **C.** $\frac{1}{2}<x<4$ **D.** Đáp án khác

Minh hoạ một số biến đổi thường làm sai

Biến đổi Sai	Biến đổi Đúng	Lý do
$\log_{\frac{1}{2}}^2 x=-\log_2^2 x$	$\log_{\frac{1}{2}}^2 x=\log_2^2 x$	$\log_{\frac{1}{2}}^2 x=\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2=(-\log_2 x)^2$ $=(\log_2 x)^2=\log_2^2 x$

$\log_9^2 x = \frac{1}{2}\log_3^2 x$	$\log_9^2 x = \frac{1}{4}\log_3^2 x$	$\log_9^2 x = (\log_9 x)^2 = \left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)^2$
$\log_3^2(3x) = 1 + \log_3^2 x$	$\log_3^2(3x) = (1+\log_3 x)^2$	$\log_3^2(3x) = \left[\log_3(3x)\right]^2 = [1+\log_3 x]^2$
$-\log_2(8x) = -\log_2 x + 3$	$-\log_2(8x) = -\log_2 x - 3$	Nhầm dấu khi bỏ ngoặc
$-\log_3\left(\frac{x}{9}\right) = -\log_3 x - 2$	$\log_3\left(\frac{x}{9}\right) = -\log_3 x + 2$	Nhầm dấu khi bỏ ngoặc

2.4. Phương trình, bất phương trình dạng

$\log_a f(x) \pm \log_a g(x) = \log_a h(x)$

Và $\log_a f(x) \pm \log_a g(x) > \log_a h(x)$

Cách giải: Tự luận. Đặt các điều kiện $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \end{cases}$ (1)

Dùng công thức "Nhân thành cộng, chia thành trừ" đưa về PT, BPT dạng: $\log_a P(x) = \log_a Q(x)$

Hoặc: $\log_a P(x) > \log_a Q(x)$

Giải phương trình và bất phương trình này (không cần thêm đk nữa)

So sánh với điều kiện (1) và kết luận.

	VD: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x-9) - \log_2(x-5) > \log_2(x-3)$. ĐK: $\begin{cases} 2x-9>0 \\ x-5>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5$ BPT trở thành $\log_2 \frac{2x-9}{x-5} > \log_2(x-3)$ Đến đây, ta có bất phương trình dạng 2.2, đúng ra phải có $\begin{cases} \frac{2x-9}{x-5} > x-3 \\ x-3>0 \end{cases}$ nhưng do đã có điều kiện trên rồi nên $x-3>0$ có thể lược bỏ đi. Vậy ta còn: $\frac{2x-9}{x-5} > x-3$ $\Leftrightarrow 2x-9 > x^2-8x+15 \Leftrightarrow 4 < x < 6$ Kết hợp với điều kiện ta có $5 < x < 6$

Câu 157. Số nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-6) = \log_2(x-2)+1$ là

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Câu 158. Tập nghiệm của bất phương trình: $\log_2 x+\log_2(x+1)\le 1$ là

A. $(0;1]$ **B.** $[1;+\infty)$ **C.** $[1;2]$ **D.** $(-2;1]$

Chú ý chung cho Phương trình, nếu là câu TNKQ mà có đáp án là tập nghiệm thì có thể dùng lệnh CALC trên máy tính để thử từng đáp án. (xem lại phần PT mũ)

CHƯƠNG III. NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN

§1. Nguyên hàm

1. Định nghĩa:

F(x) là nguyên hàm của f(x) trên tập hợp K nếu F′(x) = f(x) với mọi x thuộc K

2. Tính chất:

$$\int f'(x)dx = f(x)+C \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad (k\ne 0) \qquad \int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

3. Bảng nguyên hàm cơ bản và mở rộng

NGUYÊN HÀM		NGUYÊN HÀM MỞ RỘNG
$\int 0dx = C$	Nếu $\int f(x)dx = F(x)+C$ thì $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$	
$\int dx = x+C$		$\int adx = ax+C$
$\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}.x^{\alpha+1}+C$ $(\alpha\ne -1)$		$\int (ax+b)^\alpha dx=\frac{1}{a}.\frac{1}{\alpha+1}(ax+b)^{\alpha+1}+C$ $(\alpha\ne -1)$
$\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$		$\int \frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}.\ln\lvert ax+b\rvert+C$
$\int e^x dx = e^x+C$		$\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}.e^{ax+b}+C$
$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$		$\int a^{mx+n}dx=\frac{1}{m}.\frac{a^{mx+n}}{\ln a}+C$
$\int \sin xdx=-\cos x+C$		$\int \sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
$\int \cos x.dx=\sin x+C$		$\int \cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$		$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$		$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{x^n}dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$ $(n \neq 1, n \in \mathbb{N}^*)$		$\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{a.(n-1).(ax+b)^{n-1}} + C$ $(n \neq 1, n \in \mathbb{N}^*)$
$\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$		$\int \sqrt{ax+b}.dx = \frac{1}{a}.\frac{2}{3}(ax+b)\sqrt{ax+b} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$		$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{a}.2\sqrt{ax+b}$ +C

4. Các dạng bài cơ bản:

4.1. Định nghĩa, tính chất của nguyên hàm

Cách giải: Tự luận. Thuộc lý thuyết

Câu 159. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên tập K. Tìm kết luận đúng

A. $F'(x) = f(x)$ **B.** $F(x) = f'(x)$ **C.** $F'(x) = f'(x)$ **D.** $F(x) = f(x)$

Câu 160. Cho $\int x\ln x.dx = F(x) + C$. Tìm kết luận đúng

A. $F'(x) = x.\ln x$ **B.** $F'(x) = \ln x + 1$ **C.** $F'(x) = \ln x$ **D.** $F'(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4}$

Câu 161. Tính chất nào đúng:

A. $\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx \ (k \neq 0)$ **B.** $\int k.f(x)dx = \int f(kx)dx \ (k \neq 0)$

C. $\int k.f(x)dx = \frac{1}{k}\int f(x)dx \ (k \neq 0)$ **D.** $\int k.f(x)dx = \int f\left(\frac{x}{k}\right)dx \ (k \neq 0)$

Câu 162. Cho $F(x) = x^2\ln x$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Tính $\int 3f(x)dx$

A. $x^2\ln x + C$ **B.** $3x^2\ln x + C$ **C.** $x^2\ln 3x + C$ **D.** $3x^2\ln 3x + C$

Câu 163. Cho $F(x) = e^x.\sin x$ và $G(x) = x^2$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$ và $g(x)$ trên $\mathbb{R}$. Tìm kết luận đúng

A. $\int f(x).g(x)dx = x^2.e^x.\sin x + C$ **B.** $\int f(x).g(x)dx = x^2 + e^x\sin x + C$

C. $\int[f(x) + g(x)]dx = x^2 + e^x\sin x + C$ **D.** $\int[f(x) - g(x)]dx = x^2 + e^x\sin x + C$

4.2. Tìm nguyên hàm của một hàm số

Cách 1: Tự luận. Dùng bảng nguyên hàm cơ bản và mở rộng, phép biến đổi và các phương pháp tìm nguyên hàm (đổi biến, từng phần).

Câu 164. Tính $\int (3\cos x - 4e^x)dx$

A. $3\sin x - 4e^x + C$
B. $-3\sin x - 4e^x + C$
C. $-3\cos x - 4e^x + C$
D. $3\cos x - 4e^x + C$

Câu 165. Tính $\int e^{2x}dx$

A. $\frac{1}{2}e^{2x} + C$
B. $\frac{1}{2}e^{2x+C}$
C. $e^{2x} + C$
D. $2e^{2x} + C$

Câu 166. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của $f(x) = \sin^2 x.\cos x$

A. $F(x) = \sin^2 x$
B. $F(x) = \sin^3 x.\cos x$
C. $F(x) = \sin^3 x$
D. $F(x) = \cos^3 x$

Câu 167. Biết $\int x.e^{2x}dx = \frac{1}{4}.e^{2x}(ax+b) + C$. Tính $a.b$

A. -3
B. 3
C. -2
D. 2

Cách 2: Máy tính. Chọn một giá trị x thuộc TXĐ. Tính giá trị của **hàm số cần tính nguyên hàm** tại x.

Tính đạo hàm của **tất cả** các đáp án nguyên hàm tại x vừa chọn. Đáp án nào Trùng kết quả với bước 1 thì nhận.

Nếu có hai kết quả cùng đúng thì thử với giá trị x khác.

<table>
<tr>
<td>

** Phải đổi sang RAD với các bài có liên quan đến lượng giác*

** Đề bài có thể dùng ký hiệu $\int$ hoặc dùng từ " nguyên hàm".*

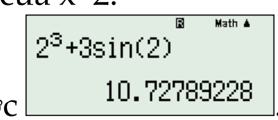
</td>
<td>

VD: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3\sin x$

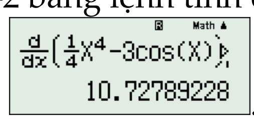
A. $F(x) = x^4 + \cos x + C$ B. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3\cos x + C$

C. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3\cos x + C$ D. $F(x) = x^4 + 3\cos x + C$

Giải: +) Chọn một giá trị của x=2.

+) Thay x=2 vào f(x): được 

. Ghi nhớ số 10,7278

+ Tính đạo hàm của các hàm số F(x) trong đáp án tại x=2 bằng lệnh tính đạo hàm. Chẳng hạn thử ở đáp án C: 

. Trùng với con số tính ở bước 1. Chọn C

</td>
</tr>
</table>

4.3. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ biết $F(a) = b$

Cách giải: Tự luận.

- Ta có $F(x) = \int f(x)dx$

- Thay $F(a) = b$, tìm ra C .

- Kết luận.

	VD: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin x+x$ biết $F(0)=2$ Giải: Có $F(x)=\int(\sin x+x)dx=-\cos x+\frac{x^2}{2}+C$ $F(0)=2\Rightarrow C-1=2\Rightarrow C=3$ Vậy $F(x)=-\cos x+\frac{x^2}{2}+3$

Câu 168. Tìm $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)=\sqrt{x}$ biết $F(1)=2$

A. $F(x)=x\sqrt{x}+1$ **B.** $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{4}{3}$

C. $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}$ **D.** $F(x)=\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{2}{3}$

4.4. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(a)=m$; tính $F(b)$.

Cách giải: Cách 1. Tự luận.

- Ta có $F(x)=\int f(x)dx$

- Thay $F(a)=b$, tìm ra C .

- Tính $F(b)$

	VD: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+3x$. Biết $F(0)=\frac{1}{6}$. Tính $F(1)$ **A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** $\frac{11}{6}$ Giải: Ta có $F(x)=\int(x^2+3x)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+C$ $F(0)=0+0+C=\frac{1}{6}$ nên $C=\frac{1}{6}$. Có $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+\frac{1}{6}$ Vậy $F(1)=2$

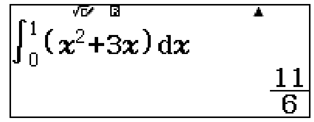
Cách 2. Máy tính

- Tính $\int_a^b f(x)dx$.

- Theo định nghĩa, $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

- Thay $F(a)=m$, tìm ra $F(b)$.

	VD: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+3x$.

	Biết $F(0)=\frac{1}{6}$. Tính $F(1)$ **A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** $\frac{11}{6}$ Giải:  - Tính $\int\limits_0^1 \left(x^2+3x\right)dx=\frac{11}{6}$ - Theo định nghĩa: $\int\limits_0^1 \left(x^2+3x\right)dx=\frac{11}{6}=F(1)-F(0)$ - Thay $F(0)=\frac{1}{6}$ ta có $F(1)=\frac{11}{6}+\frac{1}{6}=2$

Câu 169. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)=x^2-5x+3$. Biết $F(2)=\frac{5}{6}$. Tính $F(1)$

A. $-\frac{11}{6}$ **B.** $-\frac{13}{6}$ **C.** 3 **D.** -3

Câu 170. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ và $F(0)=2$. Tính $F(4)$

A. 12 **B.** 9 **C.** 4 **D.** $\frac{1}{3}$

§2. Tích phân

1. Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và có nguyên hàm là $F(x)$

Khi đó: $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$

2. Tính chất

$\int\limits_a^b kf(x)dx=k\int\limits_a^b f(x)dx$ (k bằng 0 hay khác 0 cũng được)

$\int\limits_a^b \left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int\limits_a^b f(x)dx\pm\int\limits_a^b g(x)dx$

$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$

3. Phương pháp tính tích phân

3.1. Đổi biến tính NH-TP dạng 1

Bảng đổi biến thường gặp:

Dấu hiệu	Ví dụ	Cách đặt

- Có x^n; $x^{n-1}dx$	$\int x^2\left(x^3+3\right)^4 dx$	$t = x^n + a$
- Có $\dfrac{P(x)}{(ax+b)^n}$	$\int \dfrac{2x-1}{(x+1)^3}dx$	$t = ax+b$
- Có $\sqrt{ax+b}$	$\int x\sqrt{x-1}dx$	$t=\sqrt{ax+b}$
- Có $\sin x$ và $\cos xdx$	$\int \cos x\left(\sin^2 x+1\right)dx$	$t=\sin x+a$
- Có $\cos x$ và $\sin xdx$	$\int \left(\cos^3 x+3\right)\sin xdx$	$t=\cos x+a$
- Có e^x - Nhưng không nhân đa thức	$\int \dfrac{e^x}{e^x+2}dx$	$t=e^x+a$
- Có $\ln x$ và $\dfrac{1}{x}dx$	$\int \dfrac{\ln x+1}{x}dx$	$t=\ln x$

Đặt t= Mẫu với phân thức;

t= Căn với Căn thức;

t= Mũ với hàm mũ ; t= Cơ số với hàm luỹ thừa.

Các bước đổi biến với nguyên hàm:

+) Đặt t theo hướng dẫn, t=u(x)

+) Tính $dt = u'(x)dx$. Rút dx = $\dfrac{dt}{u'(x)}$.

+) Thay vào nguyên hàm biến t. Tính nguyên hàm biến t.

+) Sau đó thay lại t để về nguyên hàm biến x

Các bước đổi biến với tích phân

Các bước đổi biến dạng 1 để tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$

+) Đặt $t = u(x)$ (tương tự như nguyên hàm). Tính $dt = u'.dx$

+) Đổi cận:

x	a	b
$t=u(x)$	α	β

+) Thay vào để được tích phân mới $\int_\alpha^\beta g(t)dt$. Tính tích phân theo biến t.

3.2. Đổi biến dạng 2:

+) Đặt $x=\varphi(t)$, thường là $x=\sin t; x=\cos t; x=\tan t$

Tính $dx = \varphi'(t)dt$

+) Đổi cận

x	a	b

t	α $\qquad\qquad\qquad\qquad$ β

+) Thay vào để được tích phân mới ẩn t: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t).t'\text{dt}$. Tính tích phân này.

3.3. Nguyên hàm, Tích phân từng phần

Công thức:

a. $\int u.dv = uv - \int v.du$ $\qquad$ b. $\int_a^b u.dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v.du$

Các bước:

Cho tích phân có dạng $\int_a^b f(x).g(x)dx$

B1: Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases}$

B2: Tính $\begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int g(x)dx \end{cases}$

B3: Thay vào công thức

Thứ tự ưu tiên đặt u: Nhất LO > Nhì ĐA > Tam LƯỢNG > Tứ MŨ.

Tức là, Trong nguyên hàm hoặc tích phân mà có tích hai biểu thức thuộc loại trên thì đặt u là biểu thức đứng trước trong dãy ưu tiên.

VD: $\int (x+1)\sin x dx$. **Nguyên hàm này là tích của hai loại hàm số:**

Đa thức (xếp thứ 2) và Lượng giác (xếp thứ 3). Đa thức được đứng trước trong dãy. Vậy $u = x+1$ **và** $dv = \sin x.dx$ **là cái còn lại.**

4. Một số dạng bài cơ bản:

4.1. Định nghĩa, Tính chất tích phân

Cách giải: Tự luận. Thuộc tính chất để trả lời.

	VD: Tìm tính chất đúng A. $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$ $\qquad$ B. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ C. $\int_a^b f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ $\qquad$ D. $\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx$ Giải: Theo tính chất của tích phân thì chọn B

4.2. Cho $\int_a^b f(x)dx; \int_a^b g(x)dx$. Tính $\int_a^b [mf(x) + ng(x) + h(x)]dx$

Cách giải: Tự luận kết hợp MTCT:

- Tách thành 3 tích phân $m\int_a^b f(x)dx;\ n\int_a^b g(x)dx;\ \int_a^b h(x)dx$.

- Tích phân thứ 3 thì ấn máy, hai tích phân đầu thay số từ đề bài.

	VD: Biết $\int_0^1 f(x)dx = 2; \int_0^1 g(x)dx = -3$. Tính $\int_0^1 \left[f(x)-2g(x)+x\right]dx$ **A.** $\frac{9}{2}$ **B.** $\frac{17}{2}$ **C.** $-\frac{7}{2}$ **D.** $\frac{1}{2}$ Giải: $\int_0^1 \left[f(x)-2g(x)+x\right]dx = \int_0^1 f(x)dx - 2\int_0^1 g(x)dx + \int_0^1 xdx$ Thay số cho hai tích phân đầu Ấn máy tích phân thứ ba được $\frac{1}{2}$ Vậy kết quả là $2-2.(-3)+\frac{1}{2}=\frac{17}{2}$. Chọn B

Câu 171. Cho $\int_1^3 f(x)dx = 5$. Tính $\int_1^3 \left[f(x)+x^2\right]dx$

A. $\frac{41}{3}$ **B.** $\frac{56}{3}$ **C.** $-\frac{41}{3}$ **D.** $-\frac{56}{3}$

Câu 172. (Tham khảo 2023) Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 4$ thì $\int_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x)-2\right]dx$ bằng:

A. 0 **B.** 6 **C.** 8 **D.** -2

4.3. Cho tích phân $\int_a^b f(x)dx = m; \int_c^d f(x)dx = n$. Tính $\int_e^f f(x)dx$

Cách giải: Tự luận. Dùng tính chất $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ để tách tích phân có khoảng cách từ cận dưới đến cận trên dài nhất thành các tích phân thành phần.

** Tích phân có khoảng cách từ cận dưới đến cận trên dài nhất là* $\int_1^7 f(x)dx$	VD: Cho $\int_1^4 f(x)dx = 5; \int_1^7 f(x)dx = 2$. Tính $\int_4^7 f(x)dx$ Giải: Xét $\int_1^7 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx + \int_4^7 f(x)dx$ Thay số có $2 = 5 + \int_4^7 f(x)dx$

	Vậy $\int_4^7 f(x)dx = -3$

Câu 173. Cho $\int_1^3 f(x)dx = 4; \int_1^7 f(x)dx = 12$. Tính $\int_3^7 f(x)dx$.

A. -8 **B.** 8 **C.** 3 **D.** -3.

Câu 174. Cho $\int_{-2}^1 f(x)dx = 3$ và $\int_{-2}^5 f(x)dx = 4$. Tính $\int_1^5 f(x)dx$

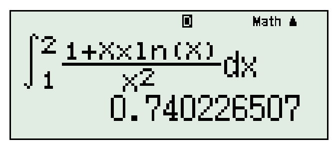
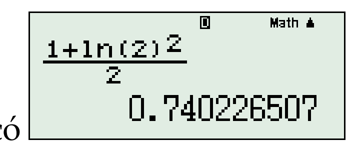
A. 1 **B.** 7 **C.** -1 **D.** -7

4.4. Tính tích phân thông thường

Cách 1: Tự luận. Sử dụng các phương pháp tính tích phân đã biết

** Với cách thi như hiện nay, những câu tích phân thông thường nên dùng MTCT*	VD: Tính tích phân $\int_0^1 (x^2 + 2x)dx$ Giải: $\int_0^1 (x^2 + 2x)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right)\Big\|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

Cách 2: MTCT

** Chú ý:* $\ln^2 2 = (\ln 2)^2$ *và trong máy tính ta ấn thành*  *(Bình phương ở bên ngoài ngoặc nhé!)*	VD: Tính tích phân $\int_1^2 \frac{1 + x.\ln x}{x^2} dx$ ta được **A.** $\frac{1 + \ln^2 2}{2}$ **B.** $\frac{1 - \ln^2 2}{2}$ **C.** $\frac{1 + \ln 2}{2}$ **D.** $\frac{1 - \ln 2}{2}$ Giải: +) Ấn máy tích phân $\int_1^2 \frac{1 + x.\ln x}{x^2} dx$,  +) Ấn gần đúng đáp án, đáp án A có  Chọn A

4.5. Cho tích phân $\int_a^b f(x)dx$. Đổi biến $t = u(x)$ thì được tích phân nào?

Cách 1. Tự luận. Đặt t theo yêu cầu đề bài. Thực hiện quy trình đổi biến

	VD: Cho tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1 + x^2}dx$. Đặt $t = \sqrt{1 + x^2}$ ta có: **A.** $I = \int_0^{\sqrt{3}} t^2 dx$ **B.** $I = \int_1^2 t^2 dt$ **C.** $I = \int_1^2 \frac{14t}{9} dt$ **D.** $\int_1^2 \frac{t^3}{3} dt$ Giải:

	Đặt $t=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2=1+x^2 \Rightarrow 2t.dt=2x.dx$ Suy ra $x.dx=t.dt$ Đổi cận: x=0 thì t=1, x=$\sqrt{3}$ thì t=2 Vậy $I=\int_1^2 t.x.dx=\int_1^2 t.t.dt=\int_1^2 t^2dt$ vậy chọn B

§3. Ứng dụng của tích phân tính diện tích, thể tích

1. Ứng dụng tích phân tính diện tích

a. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f\left(x\right)$, trục Ox, các đường $x=a;x=b$

$$S=\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx \qquad (1)$$

b. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f\left(x\right);y=g\left(x\right)$, các đường $x=a;x=b$

$$S=\int_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx \quad (2)$$

c. Các chú ý khi tính diện tích:

+ Nếu đề bài cho đủ cận (các đường x=a; x=b) thì chỉ việc áp dụng đúng tình huống và có thể dùng MTCT để tính ra kết quả.

+ Nếu đề bài cho trục Oy nghĩa là cho một cận x=0

+ Nếu đề bài cho thiếu cận thì:

Tình huống a, giải phương trình $f\left(x\right)=0$,

Tình huống b, giải phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$,

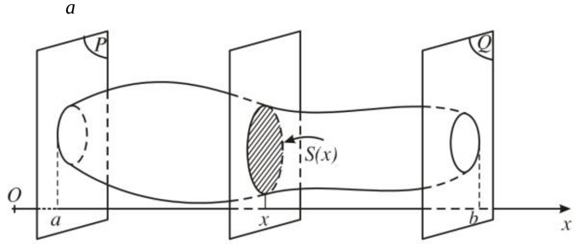
Khi đó, Nghiệm bé nhất là a, nghiệm lớn nhất là b.

+ Để bỏ dấu giá trị tuyệt đối trong tích phân (1) và (2), ta có thể lập bảng xét dấu hoặc căn cứ vào các đồ thị mà lấy đường trên trừ đi đường dưới.

2. Ứng dụng tích phân tính Thể tích:

a. Thể tích vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với trục Ox tại điểm x=a; x=b, có thiết diện của vật thể với mặt phẳng (R) tại điểm x là S(x):

$$V=\int_a^b S\left(x\right)dx \, (3)$$



b. Thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi đồ thị y=f(x), trục Ox, các đường x=a;x=b quay quanh Ox:

$V = \pi.\int_a^b f^2(x)dx$ (4)

c. Thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x); y = g(x)$, các đường x=a; x=b quay quanh Ox là:

$V = \pi\int_a^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx$ (5) .

d. Các chú ý khi tính thể tích

+ Đọc kỹ đề xem có từ ***<u>tròn xoay</u>*** hay không để chọn đúng công thức (3) hay (4).

+ Nếu đề bài cho đủ cận thì chỉ việc áp dụng đúng tình huống rồi trả lời.

+ Đề bài cho trục Oy tức là cho một cận x=0

+ Nếu đề bài cho thiếu cận thì cũng phải giải phương trình tương tự như bài tính diện tích.

3. Các dạng bài:

3.1. Nhận dạng công thức diện tích

Cách giải: Thuộc các công thức lý thuyết để trả lời

<table>
<tr>
<td>*Chú ý: Vì đề bài đã cho đủ cận nên <u>không cần phải giải phương trình.</u></td>
<td>VD: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x$, trục Ox, hai đường thẳng x=-1; x=3 được tính bằng công thức nào?
A. $\int_0^4 \left|x^2 - 4x\right| dx$ B. $\int_{-1}^3 \left|x^2 - 4x\right| dx$ C. $\int_{-1}^4 \left|x^2 - 4x\right| dx$ D. $\int_{-1}^0 \left|x^2 - 4x\right| dx$
Giải: Áp dụng công thức (1) ta có đáp án B.

VD: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x; y = x$ được tính bằng công thức nào dưới đây?
A. $\int_0^2 \left|x^3 - 4x\right| dx$ B. $\int_{-2}^2 \left|x^3 - 4x\right| dx$
C. $\int_{-2}^2 \left(x^3 - 4x\right) dx$ D. $\int_0^2 \left(x^3 - 4x\right) dx$
Giải:
Bài tập này cho thiếu cận do đó phải giải phương trrình $x^3 - 3x = x$
$\Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Vậy a=-2 và b=2. Áp dụng công thức (2) ta có đáp án B</td>
</tr>
</table>

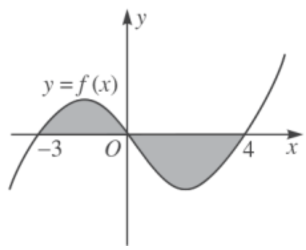
3.2. Quan sát đồ thị hàm số, tính diện tích phần tô đậm.

Cách giải: Tìm hoành độ giao điểm của các đồ thị, giả sử là a < b < c.

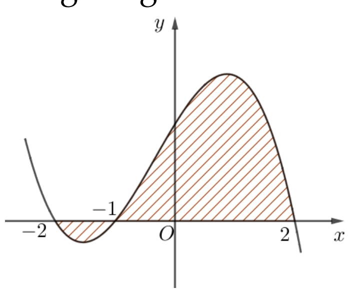
Chia phần tô đậm ra thành các đoạn theo x, từ a đến b, từ b đến c. Trên mỗi đoạn thì ta có 1 đường luôn nằm trên và 1 đường luôn nằm dưới.

Lập các tích phân $\int_a^b (\text{trên-dưới})dx + \int_b^c (\text{trên-dưới})dx$

(Khi đó sẽ không còn dấu GTTĐ)

<table>
<tr>
<td>*Chú ý: đề bài có thể cho dạng trắc nghiệm, trong đó có đáp án là $\int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{4}^{0} f(x)dx$ thì đây cũng là đáp án đúng vì sử dụng công thức tích phân.</td>
<td>VD: Cho hàm số y=f(x) có đồ thị như hình vẽ. Công thức tính diện tích phần tô đậm là gì?

Giải: Đây là bài tập tính diện tích giới hạn bởi đồ thị f(x) và trục Ox
Hoành độ giao điểm của đồ thị và Ox là: x=-3; x=0; x=4
Từ -3 đến 0; f(x) nằm trên Ox nên tích phân lấy dấu +
Từ 0 đến 4; Ox nằm trên f(x) nên
Vậy $S = \int_{-3}^{0} \left[f(x) - 0 \right] dx + \int_{0}^{4} \left[0 - f(x) \right] dx$
$= \int_{-3}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{4} f(x)dx$</td>
</tr>
</table>

Câu 175. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Diện tích phần gạch chéo được tính bằng công thức nào dưới đây



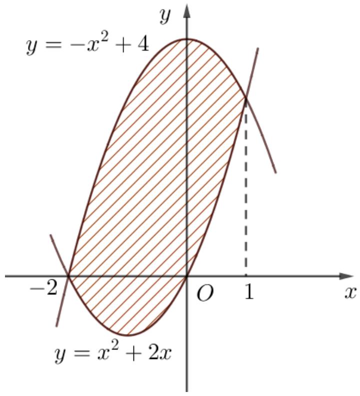
A. $\int_{-2}^{2} f(x)dx$

B. $\int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{2} f(x)dx$

C. $\int_{-2}^{-1} f(x)dx - \int_{-1}^{2} f(x)dx$

D. $-\int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{2} f(x)dx$

Câu 176. Diện tích phần gạch chéo trong hình được tính bằng công thức nào

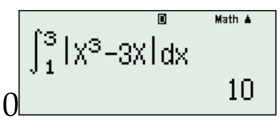


A. $\int_{-2}^{1}\left(2x^2+2x-4\right)dx$ **B.** $\int_{-2}^{1}\left(-2x^2-2x+4\right)dx$

C. $\int_{0}^{1}\left|-2x^2-2x+4\right|dx$ **D.** $\int_{-2}^{1}\left(2x^2+2x+4\right)dx$

3.3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị y=f(x), y=g(x), các đường x=a; x=b

Cách giải: Dùng đúng các tình huống tính diện tích ở phần 1 và lưu ý mục 1.c, kết hợp MTCT tìm kết quả.

	VD: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=x^3-x; y=2x$, các đường thẳng $x=1; x=3$ **A.** 5 **B.** 10 **C.** 8 **D.** $\frac{25}{2}$ Giải: Đây là câu đề bài cho đủ cận, ADCT (2) có $S=\int_{1}^{3}\left|x^3-3x\right|dx$ Ấn máy ra kết quả là 10 

3.4. Tính thể tích vật thể không phải tròn xoay.

Cách giải: Lập công thức tính diện tích thiết diện S(x).

Xác định hai vị trí giới hạn a; b

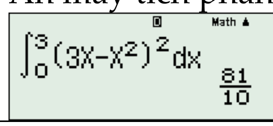
Sử dụng công thức $V=\int_{a}^{b}S\left(x\right)dx$ (3)

	VD: Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm $x=0; x=3$ biết khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $\left(0\le x\le 3\right)$ ta được hình tròn có bán kính x . **A.** 9π **B.** $9\pi^2$ **C.** $\frac{243\pi}{5}$ **D.** Đáp án khác Giải: Diện tích thiết diện là diện tích hình tròn: $S=\pi x^2$

	Hai vị trí giới hạn là $x=0; x=3$ $V=\int_0^3 \pi x^2 dx = 9\pi$. Chọn B

3.5. Tính thể tích vật tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x);Ox$, các đường x=a; x=b quay quanh Ox.

Cách giải: Dùng đúng tình huống tính thể tích ở phần 2 và lưu ý mục 2d. Kết hợp MTCT tìm kết quả

	VD: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=3x-x^2$ và trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay (H) quanh trục Ox. **A.** $\frac{9\pi}{2}$ **B.** $\frac{81\pi}{10}$ **C.** $\frac{7\pi}{6}$ **D.** 9π Giải: Bài tập thiếu cận Giải phương trình $3x-x^2=0 \Leftrightarrow x=0; x=3$ Áp dụng (3) ta có $V=\pi\int_0^3 (3x-x^2)^2 dx$ Ấn máy tích phân sau đó gắn thêm π ta có đáp án B 

Câu 177. Cho hình (H) giới hạn bởi các đồ thị $y=-x^2+2x$, trục hoành. Quay (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là

A. $\frac{496\pi}{15}$ **B.** $\frac{32\pi}{15}$ **C.** $\frac{4\pi}{3}$ **D.** $\frac{16\pi}{15}$

Câu 178. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\frac{1}{x}$, trục Ox, các đường thẳng $x=1; x=4$. Quay (H) quanh Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là

A. $2\pi\ln 2$ **B.** $\frac{3\pi}{4}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $2\ln 2$

CHƯƠNG IV. SỐ PHỨC

1. Định nghĩa, công thức

- Số phức có dạng $z=a+bi$. Phần thực là a, phần ảo là b (CHÚ Ý không phải là bi)
- Mô đun: $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$
- Số phức liên hợp: $\bar{z}=a-bi$ (đổi dấu phần ảo)
- Điểm biểu diễn của số phức $z=a+bi$ là $M(a;b)$ trên mặt phẳng Oxy

- Hai số phức bằng nhau $a+bi=a'+b'i \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$

- Cộng và trừ số phức: Lấy phần thực cộng và trừ cho nhau, phần ảo cộng và trừ cho nhau như cộng trừ đa thức biến i

- Nhân số phức: Thực hiện như nhân đa thức biến i và thay $i^2=-1$

- Chia: Nhân cả tử và mẫu với liên hợp của mẫu.

2. Phương trình bậc hai với $\Delta<0$

Khi $\Delta<0$, phương trình $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ có hai nghiệm là số phức.

Công thức nghiệm phương trình bậc hai với $\Delta<0$: $x=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Hai nghiệm là hai số phức liên hợp.

3. Các dạng bài thường gặp

3.1. Các định nghĩa số phức

Cách giải: Tự luận. Thuộc lý thuyết để trả lời

Câu 179. Số phức $z=3+4i$ có điểm biểu diễn là

A. $M\left(3;4\right)$ **B.** $N\left(4;3\right)$ **C.** $P\left(3;-4\right)$ **D.** $Q\left(4;-3\right)$

Câu 180. Tìm phần ảo của số phức $z=5-7i$

A. 5 **B.** $7i$ **C.** $-7i$ **D.** -5

3.2. Tính toán số phức: cộng, trừ, nhân, chia, lũy thừa

Cách giải: MTCT.

3.3.Tính toán kết hợp với trả lời phần thực, ảo, mô đun, liên hợp, điểm biểu diễn

Cách giải: MTCT kết hợp lý thuyết. Chú ý sử dụng tối đa các lệnh mô đun, liên hợp trên máy tính.

Câu 181. Tìm điểm biểu diễn của số phức $\left(2+i\right)^3+\left(1-i\right)$.

A. (10; 3) **B.** (9;-2) **C.** (3; 10) **D.** Đáp án khác

Câu 182. Tính mô đun của số phức z biết $z=\dfrac{7-i}{3-4i}+2-3i$.

A. 9 **B.** 3 **C.** $\sqrt{13}$ **D.** $\sqrt{21}$.

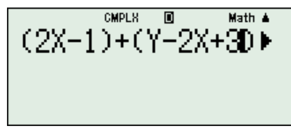
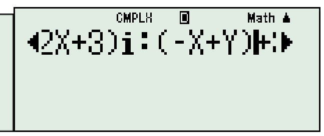
3.4. Tìm điều kiện để hai số phức bằng nhau

Cách 1. Tự luận: Biến đổi, sắp xếp về đúng dạng $a+bi=a'+b'i$ rồi lập hệ $\begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$

	VD: Tìm x và y để $2x-y+\left(x+y-1\right)i=x+1+\left(xi-1\right)i$ Giải: Trước hết vế phải chưa có dạng $a+bi$ (do có tới hai vị trí có chữ i) nên ta biến đổi

* *Chú ý* $i^2=-1$	$2x-y+(x+y-1)i=x+1+(xi-1)i$ $\Leftrightarrow 2x-y+(x+y-1)i=x+1+xi^2-i$ $\Leftrightarrow 2x-y+(x+y-1)i=1-i$ Lập hệ $\begin{cases}2x-y=1\\ x-y-1=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

Cách 2. Máy tính: Dùng lệnh CALC thay đáp án vào đề bài. Hai vế bằng nhau thì nhận

** ở đáp án C, ta lần lượt ấn CALC* *1 =* *2 =* *= (máy ra vế trái là 1+3i)* *= (máy ra vế phải là 1+3i)*	VD: Tìm điều kiện của $x;y$ để $(2x-1)+(y-2x+3)i=(-x+y)+3i$ **A.** $x=-1;y=-2$ **B.** $x=\frac{2}{5};y=\frac{1}{5}$ **C.** $x=1;y=2$ **D.** $x=-\frac{2}{5};y=-\frac{1}{5}$ Giải: Ấn MODE 2, nhập cùng lúc hai biểu thức vào máy, cách nhau bởi dấu hai chấm. Nhập vào máy   Ấn CALC, máy hỏi x =, y= Ta ấn các x, y trong đáp án vào. VD đáp án C ta có hai vế là 1+3i Vậy chọn C

Câu 183. Tìm các số thực $x;y$ để $(2x-3yi)+(1-3i)=-1+6i$

A. $x=1;y=-3$ **B.** $x=-1;y=-3$

C. $x=-1;y=-1$ **D.** $x=1;y=-1$

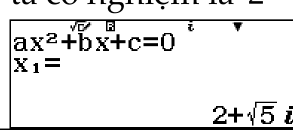
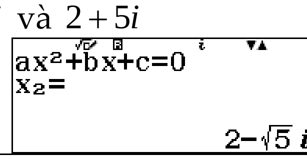
Câu 184. Tìm hai số thực $x;y$ thoả mãn $(2x-3yi)+(3-i)=5x-4i$

A. $x=-1;y=-1$ **B.** $x=1;y=1$

C. $x=-1;y=1$ **D.** Đáp án khác

3.5. Giải phương trình bậc hai với hệ số thực

Cách giải. Dùng MTCT

	VD: Giải phương trình $z^2-4z+9=0$ Giải: Sử dụng chức năng giải phương trình bậc hai của máy tính ta có nghiệm là $2-5i$ và $2+5i$  

CHƯƠNG V. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP

1. Định nghĩa, công thức

Cho tập hợp A gồm n phần tử.

- Mỗi cách sắp xếp TẤT CẢ n phần tử được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

Có $P_n = n!$ hoán vị

- Mỗi cách CHỌN RA k phần tử và SẮP XẾP k phần tử đó gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử

Có $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ chỉnh hợp.

- Mỗi cách CHỌN RA k phần tử gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử. (không sắp xếp).

Hay: mỗi tập hợp con gồm k phần tử của A là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Có $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ tổ hợp.

2. Các dạng bài thường gặp

2.1. Chọn công thức đúng

Cách giải:

Thuộc công thức

Máy tính: Thay số, trùng kết quả thì nhận.

Câu 185. (Đề 2021) Với n là số nguyên dương bất kỳ, $n \geq 3$, công thức nào dưới đây là đúng.

A. $A_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!}$ **B.** $A_n^3 = \frac{n!}{(n-3)!}$ **C.** $A_n^3 = \frac{3!}{(n-3)!}$ **D.** $A_n^3 = \frac{(n-3)!}{n!}$

Câu 186. Có bao nhiêu hoán vị của n phần tử $(n \geq 1; n \in \mathbb{N})$

A. n **B.** n^2 **C.** n^n **D.** $n!$

Câu 187. Công thức nào dưới đây tính số chỉnh hợp chập k của n phần tử

A. $\frac{n!}{k!}$ **B.** $\frac{n!}{(n-k)!}$ **C.** $k!$ **D.** $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Câu 188. Công thức tính số tổ hợp chập k của n phần tử

A. $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ **B.** $\frac{n!}{k!}$ **C.** $\frac{n!}{(n-k)!}$ **D.** $n!(n-k)!$

Câu 189. Có bao nhiêu tổ hợp chập 3 của 7 phần tử

A. 35 **B.** 21 **C.** 10 **D.** 210

Câu 190. (Minh hoạ 2023) Cho tập hợp A gồm 15 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của A bằng

A. 225 **B.** 30 **C.** 210 **D.** 105

2.2. Tìm số cách chọn

Cách giải:

Thuộc khái niệm và sử dụng đúng công thức.

Phối hợp với quy tắc cộng và quy tắc nhân.

Câu 191. (Đề 2022) Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số đôi một khác nhau?

A. 120 **B.** 3215 **C.** 1 **D.** 5

Câu 192. Trong tổ có 5 nam và 6 nữ. Chọn ra hai bạn nam và hai bạn nữ tập văn nghệ. Có bao nhiêu cách chọn

A. 330 **B.** 25 **C.** 150 **D.** 4

Câu 193. Trong hộp có 6 quả cầu xanh và 7 quả cầu đỏ. Chọn ra 3 quả cầu xanh và 2 quả cầu đỏ. Có bao nhiêu cách chọn?

A. 42 **B.** 1287 **C.** 420 **D.** 41

Câu 194. Trong chi đoàn có 15 đoàn viên. Cần chọn ra 3 đoàn viên làm bí thư, phó bí thư và ủy viên. Có bao nhiêu cách chọn

A. 45 **B.** 2730 **C.** 455 **D.** 15

CHƯƠNG VI. XÁC SUẤT

1. Định nghĩa, công thức

- Phép thử: là một thí nghiệm, một phép đo…

- Không gian mẫu Ω là tập hợp các khả năng có thể xảy ra khi thực hiện phép thử.

- Biến cố: là tập hợp con của không gian mẫu. Cũng là một trường hợp nào đó xảy ra khi thực hiện phép thử.

- Công thức xác suất của biến cố A: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$. Trong đó $n(\Omega); n(A)$ lần lượt là số phần tử của không gian mẫu và biến cố.

- Xác suất của biến cố đối: $P(\overline{A})=1-P(A)$.

2. Các dạng bài thường gặp

2.1. Tính xác suất của biến cố

Cách giải: Tự luận

Xác định phép thử và tính số phần tử của không gian mẫu.

Xác định biến cố và tính số phần tử của biến cố

Xác suất: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$

Để tính số phần tử, ta có thể liệt kê hoặc dùng hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp.

Câu 195. Chọn ngẫu nhiên 3 số từ tập hợp S={1, 2, 3, 4, 5.., 11}. Tính xác suất để tổng ba số được chọn là 12

A. $\frac{1}{165}$ B. $\frac{8}{165}$ C. $\frac{7}{165}$ D. $\frac{21}{165}$

Câu 196. Trong tổ có 4 bạn nam và 5 bạn nữ. Chọn ra ngẫu nhiên 2 bạn. Tính xác suất để hai bạn nữ được chọn.

A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{5}{9}$ C. $\frac{10}{36}$ D. $\frac{6}{36}$

Câu 197. (Đề thi 2021 –mã 114) Từ một hộp chứa 12 quả bóng gồm 5 quả màu đỏ và 7 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Xác suất để lấy được ba quả màu đỏ bằng

A. $\frac{1}{22}$ B. $\frac{7}{44}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{2}{7}$

Câu 198. (Đề thi 2018). Từ một hộp có 9 quả cầu đỏ và 6 quả cầu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Tính xác suất để cả ba quả lấy ra đều màu xanh.

A. $\frac{12}{65}$ B. $\frac{5}{21}$ C. $\frac{24}{91}$ D. $\frac{4}{91}$

Câu 199. (Đề thi 2021). Từ một hộp chứa 12 quả bóng gồm 5 quả màu đỏ và 7 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả màu đỏ bằng

A. $\frac{1}{22}$ B. $\frac{7}{44}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{2}{7}$

Câu 200. (Đề thi 2022). Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên thuộc đoạn $[30;50]$. Xác suất để lấy được số có chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục bằng

A. $\frac{10}{21}$ B. $\frac{8}{21}$ C. $\frac{11}{21}$ D. $\frac{13}{21}$

CHƯƠNG VII. CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN

1. Cấp số cộng

Định nghĩa, công thức

- Là dãy số mà số đứng sau luôn bằng số đứng trước cộng với một số không đổi d. d gọi là công sai.
- Ví dụ: 1; 5; 9; 13; 17; 21…

$u_n = u_{n-1} + d$

- Số hạng thứ n: $u_n = u_1 + (n-1)d$
- Tổng n số hạng đầu tiên: $S_n = u_1 + u_2 + .. + u_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}.d = \frac{(u_1 + u_n).n}{2}$

2. Cấp số nhân

Định nghĩa, công thức

- Là dãy số mà số đứng sau luôn bằng số đứng trước nhân với một số không đổi q.

q gọi là công sai

- Ví dụ: 3; 6; 12; 24; 48; 96…
- Số hạng thứ n: $u_n = u_1.q^{n-1}$
- Tổng n số hạng đầu tiên: $S_n = u_1 + u_2 + .. + u_n = \dfrac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$

3. Các dạng bài thường gặp

3.1. Tìm các số hạng hoặc yếu tố d; S_n .. của cấp số cộng, cấp số nhân

Áp dụng các công thức

Câu 201. Cho cấp số cộng có $u_1 = 5$; công sai $d = 4$. Tính u_{12}

A. $u_{12} = 53$ **B.** $u_{12} = 49$ **C.** $u_{12} = 59$ **D.** $u_{12} = 64$

Câu 202. Cho cấp số cộng có $u_1 = -3$; công sai $d = -5$. Tính u_{2017}

A. 10083 **B.** -10083 **C.** 20017 **D.** -20017

Câu 203. Cho cấp số cộng có $u_1 = 5$ và $u_2 = -3$. Tính công sai d .

A. 2 **B.** -2 **C.** -8 **D.** 8

Câu 204. Cho cấp số cộng có $u_2 = 4$ và $u_3 = 7$. Tính công sai d .

A. Không xác định **B.** 3 **C.**-3 **D.** 1

Câu 205. Cho cấp số cộng có $u_1 = 3$ và công sai d=5. Tính u_2.

A. 1 **B.** 8 **C.** 15 **D.** -2

Câu 206. Cấp số nhân có $u_2 = 6$ và $q = 2$. Tính u_3

A. $u_3 = 12$ **B.** $u_3 = 3$ **C.** $u_3 = 8$ **D.** $u_3 = 4$

Câu 207. Cấp số nhân có $u_3 = 8$ và $q = 4$. Tính u_2

A. $u_2 = 32$ **B.** $u_2 = 12$ **C.** $u_2 = 2$ **D.** $u_2 = 4$

Câu 208. Cấp số nhân có $u_1 = 4$ và $u_2 = 32$. Tính công bội q

A. $q = 4$ **B.** $q = 8$ **C.** $q = 28$ **D.** $q = 36$

Câu 209. Cấp số nhân có $u_1 = 3$ và $u_2 = -6$. Tính công bội q

A. $q = 3$ **B.** $q = 2$ **C.** $q = -2$ **D.** $q = -9$

Câu 210. Cấp số nhân có $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Số hạng tổng quát u_n là

A. 3.2^{n-1} **B.** 3.2^{n+1} **C.** 3.2^{n+2} **D.** 3.2^n

Câu 211. Cấp số nhân có $u_1 = 2$, công bội $q = \dfrac{1}{2}$. Tính S_6

A. $\dfrac{23}{16}$ **B.** $\dfrac{65}{16}$ **C.** $\dfrac{63}{8}$ **D.** $\dfrac{63}{16}$