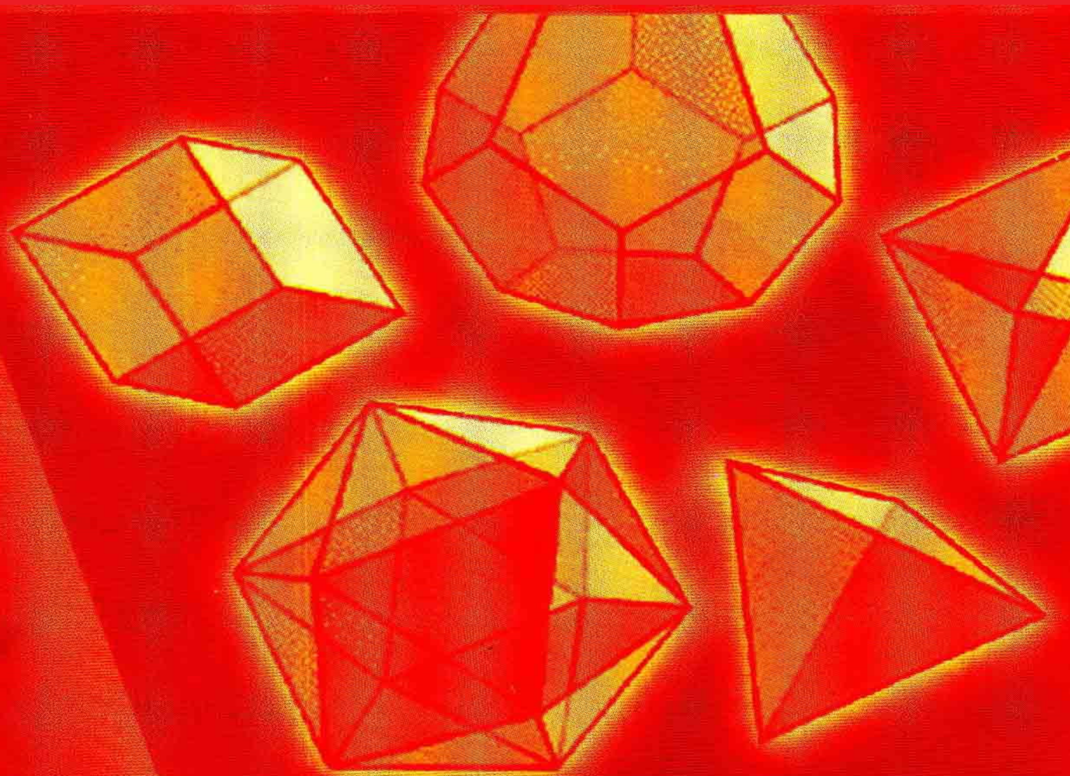
ĐOÀN HỒNG ĐỨC

20 chuyên đề

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

CÓ LỜI GIẢI CHI TIẾT



CHUYÊN ĐỀ 1 - PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A. MỤC TIÊU:

* Hệ thống lại các dạng toán và các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử
* Giải một số bài tập về phân tích đa thức thành nhân tử
* Nâng cao trình độ và kỹ năng về phân tích đa thức thành nhân tử

B. CÁC PHƯƠNG PHÁP VÀ BÀI TẬP

I. TÁCH MỘT HẠNG TỬ THÀNH NHIỀU HẠNG TỬ:

Định lí bổ sung:

+ Đa thức f(x) có nghiệm hữu tỉ thì có dạng p/q trong đó p là ước của hệ số tự do, q là ước dương của hệ số cao nhất

+ Nếu f(x) có tổng các hệ số bằng 0 thì f(x) có một nhân tử là x – 1

+ Nếu f(x) có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì f(x) có một nhân tử là x + 1

+ Nếu a là nghiệm nguyên của f(x) và f(1); f(- 1) khác 0 thì $\frac{f(1)}{a-1}$ và $\frac{f(-1)}{a+1}$ đều là số nguyên.

Để nhanh chóng loại trừ nghiệm là ước của hệ số tự do

1. Ví dụ 1: $3x^2 - 8x + 4$

Cách 1: Tách hạng tử thứ 2

$3x^2 - 8x + 4 = 3x^2 - 6x - 2x + 4 = 3x(x - 2) - 2(x - 2) = (x - 2)(3x - 2)$

Cách 2: Tách hạng tử thứ nhất:

$3x^2 - 8x + 4 = (4x^2 - 8x + 4) - x^2 = (2x - 2)^2 - x^2 = (2x - 2 + x)(2x - 2 - x)$

$= (x - 2)(3x - 2)$

Ví dụ 2: $x^3 - x^2 - 4$

Ta nhân thấy nghiệm của f(x) nếu có thì $x = \pm1; \pm2; \pm4$, chỉ có f(2) = 0 nên x = 2 là nghiệm của f(x) nên f(x) có một nhân tử là x – 2. Do đó ta tách f(x) thành các nhóm có xuất hiện một nhân tử là x – 2

Cách 1:

$x^3 - x^2 - 4 = \left(x^3 - 2x^2\right) + \left(x^2 - 2x\right) + \left(2x - 4\right) = x^2\left(x - 2\right) + x(x - 2) + 2(x - 2) = \left(x - 2\right)\left(x^2 + x + 2\right)$

Cách 2: $x^3 - x^2 - 4 = x^3 - 8 - x^2 + 4 = \left(x^3 - 8\right) - \left(x^2 - 4\right) = (x-2)(x^2+2x+4) - (x-2)(x+2)$

$$= (x-2)\left[\left(x^2+2x+4\right) - (x+2)\right] = (x-2)(x^2+x+2)$$

Ví dụ 3: f(x) = $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$

Nhận xét: $\pm1, \pm5$ không là nghiệm của f(x), như vậy f(x) không có nghiệm nguyên. Nên f(x) nếu có nghiệm thì là nghiệm hữu tỉ

Ta nhận thấy x = $\frac{1}{3}$ là nghiệm của f(x) do đó f(x) có một nhân tử là 3x – 1. Nên

f(x) = $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 = 3x^3 - x^2 - 6x^2 + 2x + 15x - 5 = \left(3x^3 - x^2\right) - \left(6x^2 - 2x\right) + \left(15x - 5\right)$

$= x^2(3x-1) - 2x(3x-1) + 5(3x-1) = (3x-1)(x^2-2x+5)$

Vì $x^2 - 2x + 5 = (x^2 - 2x + 1) + 4 = (x-1)^2 + 4 > 0$ với mọi x nên không phân tích được thành nhân tử nữa

Ví dụ 4: $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

Nhận xét: Tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ nên đa thức có một nhân tử là x + 1

$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x^2 + 4x) + (4x + 4) = x^2(x+1) + 4x(x+1) + 4(x+1)$

$= (x+1)(x^2 + 4x + 4) = (x+1)(x+2)^2$

Ví dụ 5: f(x) = $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2$

Tổng các hệ số bằng 0 thì nên đa thức có một nhân tử là x – 1, chia f(x) cho (x – 1) ta có:

$x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2 = (x-1)(x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x - 2)$

Vì $x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x - 2$ không có nghiệm nguyên cũng không có nghiệm hữu tỉ nên không phân tích được nữa

Ví dụ 6: $x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997 = (x^4 + x^2 + 1) + (1996x^2 + 1996x + 1996)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1996(x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1 + 1996) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1997)$

Ví dụ 7: $x^2 - x - 2001.2002 = x^2 - x - 2001.(2001 + 1)$

$= x^2 - x - 2001^2 - 2001 = (x^2 - 2001^2) - (x + 2001) = (x + 2001)(x - 2002)$

II. THÊM , BỚT CÙNG MỘT HẠNG TỬ:

1. Thêm, bớt cùng một số hạng tử để xuất hiện hiệu hai bình phương:

Ví dụ 1: $4x^4 + 81 = 4x^4 + 36x^2 + 81 - 36x^2 = (2x^2 + 9)^2 – 36x^2$

$= (2x^2 + 9)^2 – (6x)^2 = (2x^2 + 9 + 6x)(2x^2 + 9 – 6x)$

$= (2x^2 + 6x + 9)(2x^2 – 6x + 9)$

Ví dụ 2: $x^8 + 98x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) + 96x^4$

$= (x^4 + 1)^2 + 16x^2(x^4 + 1) + 64x^4 - 16x^2(x^4 + 1) + 32x^4$

$= (x^4 + 1 + 8x^2)^2 – 16x^2(x^4 + 1 – 2x^2) = (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - 16x^2(x^2 – 1)^2$

$= (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - (4x^3 – 4x)^2$

$= (x^4 + 4x^3 + 8x^2 – 4x + 1)(x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x + 1)$

2. Thêm, bớt cùng một số hạng tử để xuất hiện nhân tử chung

Ví dụ 1: $x^7 + x^2 + 1 = (x^7 – x) + (x^2 + x + 1) = x(x^6 – 1) + (x^2 + x + 1)$

$= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1) = x(x – 1)(x^2 + x + 1) (x^3 + 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)[x(x – 1)(x^3 + 1) + 1] = (x^2 + x + 1)(x^5 – x^4 + x^2 - x + 1)$

Ví dụ 2: $x^7 + x^5 + 1 = (x^7 – x) + (x^5 – x^2) + (x^2 + x + 1)$

$= x(x^3 – 1)(x^3 + 1) + x^2(x^3 – 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x – 1)(x^4 + x) + x^2 (x – 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)[(x^5 – x^4 + x^2 – x) + (x^3 – x^2) + 1] = (x^2 + x + 1)(x^5 – x^4 + x^3 – x + 1)$

Ghi nhớ:

Các đa thức có dạng $x^{3m + 1} + x^{3n + 2} + 1$ như: $x^7 + x^2 + 1$; $x^7 + x^5 + 1$; $x^8 + x^4 + 1$; $x^5 + x + 1$; $x^8 + x + 1$; … đều có nhân tử chung là $x^2 + x + 1$

III. ĐẶT BIẾN PHỤ:

Ví dụ 1: $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128 = [x(x + 10)][(x + 4)(x + 6)] + 128$

$= (x^2 + 10x) + (x^2 + 10x + 24) + 128$

Đặt $x^2 + 10x + 12 = y$, đa thức có dạng

$(y – 12)(y + 12) + 128 = y^2 – 144 + 128 = y^2 – 16 = (y + 4)(y – 4)$

$= (x^2 + 10x + 8)(x^2 + 10x + 16) = (x + 2)(x + 8)(x^2 + 10x + 8)$

Ví dụ 2: $A = x^4 + 6x^3 + 7x^2 – 6x + 1$

Giả sử $x \neq 0$ ta viết

$x^4 + 6x^3 + 7x^2 – 6x + 1 = x^2 (x^2 + 6x + 7 – \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}) = x^2 [(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 6(x - \frac{1}{x}) + 7]$

Đặt $x - \frac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$, do đó

$A = x^2(y^2 + 2 + 6y + 7) = x^2(y + 3)^2 = (xy + 3x)^2 = [x(x - \frac{1}{x})^2 + 3x]^2 = (x^2 + 3x – 1)^2$

Chú ý: Ví dụ trên có thể giải bằng cách áp dụng hằng đẳng thức như sau:

$A = x^4 + 6x^3 + 7x^2 – 6x + 1 = x^4 + (6x^3 – 2x^2) + (9x^2 – 6x + 1)$

$= x^4 + 2x^2(3x – 1) + (3x – 1)^2 = (x^2 + 3x – 1)^2$

Ví dụ 3: A = $(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)^2$

$=\left[(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)\right](x^2+y^2+z^2)+(xy+yz+zx)^2$

Đặt $x^2+y^2+z^2 = a$, $xy + yz + zx = b$ ta có

$A = a(a + 2b) + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (x^2+y^2+z^2 + xy + yz + zx)^2$

Ví dụ 4: B = $2(x^4+y^4+z^4)-(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(x+y+z)^4$

Đặt $x^4 + y^4 + z^4 = a$, $x^2 + y^2 + z^2 = b$, $x + y + z = c$ ta có:

$B = 2a – b^2 – 2bc^2 + c^4 = 2a – 2b^2 + b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2(a – b^2) + (b –c^2)^2$

Ta lại có: $a – b^2 = - 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$ và $b –c^2 = - 2(xy + yz + zx)$ Do đó;

$B = - 4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) + 4 (xy + yz + zx)^2$

$= -4x^2y^2-4y^2z^2-4z^2x^2+4x^2y^2+4y^2z^2+4z^2x^2+8x^2yz+8xy^2z+8xyz^2=8xyz(x+y+z)$

Ví dụ 5: $(a+b+c)^3-4(a^3+b^3+c^3)-12abc$

Đặt $a + b = m$, $a – b = n$ thì $4ab = m^2 – n^2$

$a^3 + b^3 = (a + b)[(a – b)^2 + ab] = m(n^2 + \frac{m^2 - n^2}{4})$. Ta có:

$C = (m + c)^3 – 4.\frac{m^3 + 3mn^2}{4} - 4c^3 - 3c(m^2 - n^2) = 3(- c^3 +mc^2 – mn^2 + cn^2)$

$= 3[c^2(m - c) - n^2(m - c)] = 3(m - c)(c - n)(c + n) = 3(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)$

III. PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH:

Ví dụ 1: $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3$

Nhận xét: các số ± 1, ± 3 không là nghiệm của đa thức, đa thức không có nghiệm nguyên củng không có nghiệm hữu tỉ

Như vậy nếu đa thức phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng

$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$

đồng nhất đa thức này với đa thức đã cho ta có: $\begin{cases} a+c=-6 \\ ac+b+d=12 \\ ad+bc=-14 \\ bd=3 \end{cases}$

Xét bd = 3 với b, d $\in$ Z, b $\in$ $\{\pm 1, \pm 3\}$ với b = 3 thì d = 1 hệ điều kiện trên trở thành

$$\begin{cases} a+c=-6 \\ ac=-8 \\ a+3c=-14 \\ bd=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c=-8 \\ ac=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-4 \\ a=-2 \end{cases}$$

Vậy: $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4x + 1)$

Ví dụ 2: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8$

Nhận xét: đa thức có 1 nghiệm là x = 2 nên có thừa số là x - 2 do đó ta có:

$2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x - 2)(2x^3 + ax^2 + bx + c)$

$= 2x^4 + (a - 4)x^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c \Rightarrow \begin{cases} a-4=-3 \\ b-2a=-7 \\ c-2b=6 \\ -2c=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=-4 \end{cases}$

Suy ra: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x - 2)(2x^3 + x^2 - 5x - 4)$

Ta lại có $2x^3 + x^2 - 5x - 4$ là đa thức có tổng hệ số của các hạng tử bậc lẻ và bậc chẵn bằng nahu nên có 1 nhân tử là x + 1 nên $2x^3 + x^2 - 5x - 4 = (x + 1)(2x^2 - x - 4)$

Vậy: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x - 2)(x + 1)(2x^2 - x - 4)$

Ví dụ 3:

$12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = (a x + by + 3)(cx + dy - 1)$

$= acx^2 + (3c - a)x + bdy^2 + (3d - b)y + (bc + ad)xy – 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} ac = 12 \\ bc + ad = -10 \\ 3c - a = 5 \\ bd = -12 \\ 3d - b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = 3 \\ b = -6 \\ d = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = (4x - 6y + 3)(3x + 2y - 1)$

BÀI TẬP:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1) $x^3 - 7x + 6$
2) $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$
3) $x^3 - 6x^2 - x + 30$
4) $2x^3 - x^2 + 5x + 3$
5) $27x^3 - 27x^2 + 18x - 4$
6) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12$
7) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$
8) $4x^4 - 32x^2 + 1$
9) $3(x^4 + x^2 + 1) - (x^2 + x + 1)^2$
10) $64x^4 + y^4$
11) $a^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 - b^6$
12) $x^3 + 3xy + y^3 - 1$
13) $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$
14) $x^8 + x + 1$
15) $x^8 + 3x^4 + 4$
16) $3x^2 + 22xy + 11x + 37y + 7y^2 + 10$
17) $x^4 - 8x + 63$

,

CHUYÊN ĐỀ 2: HOÁN VỊ, TỔ HỢP

A. MỤC TIÊU:

* Bước đầu HS hiểu về chỉnh hợp, hoán vị và tổ hợp

* Vận dụng kiến thức vào một ssó bài toán cụ thể và thực tế

* Tạo hứng thú và nâng cao kỹ năng giải toán cho HS

B. KIẾN THỨC:

I. Chỉnh hợp:

1. định nghĩa: Cho một tập hợp X gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của tập hợp X ($1 \le k \le n$) theo một thứ tự nhất định gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử ấy

Số tất cả các chỉnh hợp chập k của n phần tử được kí hiệu A_n^k

2. Tính số chỉnh chập k của n phần tử

$$\boxed{A_n^k = n(n - 1)(n - 2)\ldots[n - (k - 1)]}$$

II. Hoán vị:

1. Định nghĩa: Cho một tập hợp X gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp n phần tử của tập hợp X theo một thứ tự nhất định gọi là một hoán vị của n phần tử ấy

Số tất cả các hoán vị của n phần tử được kí hiệu P_n

2. Tính số hoán vị của n phần tử

(n! : n giai thừa)

$$\boxed{P_n = A_n^n = n(n - 1)(n - 2)\ldots 2 . 1 = n!}$$

III. Tổ hợp:

1. Định nghĩa: Cho một tập hợp X gồm n phần tử. Mỗi tập con của X gồm k phần tử trong n phần tử của tập hợp X ($0 \le k \le n$) gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử ấy

Số tất cả các tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu C_n^k

2. Tính số tổ hợp chập k của n phần tử

$$\boxed{C_n^k = A_n^n : k! = \frac{n(n - 1)(n - 2)\ldots[n - (k - 1)]}{k!}}$$

C. Ví dụ:

1. Ví dụ 1:

Cho 5 chữ số: 1, 2, 3, 4, 5

a) có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi ba trong các chữ số trên

b) Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi cả 5 chữ số trên

c)Có bao nhiêu cách chọn ra ba chữ số trong 5 chữ số trên

Giải:

a) số tự nhiên có ba chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi ba trong các chữ số trên là chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử: $A_5^3 = 5.(5 - 1).(5 - 2) = 5 . 4 . 3 = 60$ số

b) số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi cả 5 chữ số trên là hoán vị cua 5 phần tử (chỉnh hợp chập 5 của 5 phần tử):

$A_5^5 = 5.(5 - 1).(5 - 2).(5 - 3).(5 - 4) = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$ số

c) cách chọn ra ba chữ số trong 5 chữ số trên là tổ hợp chập 3 của 5 phần tử:

$$C_5^3 = \frac{5.(5 - 1).(5 - 2)}{3!} = \frac{5 . 4 . 3}{3.(3 - 1)(3 - 2)} = \frac{60}{6} = 10 \text{ nhóm}$$

2. Ví dụ 2:

Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Dùng 5 chữ số này:

a) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số trong đó không có chữ số nào lặp lại? Tính tổng các số lập được

b) lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau?

c) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, trong đó hai chữ số kề nhau phải khác nhau

d) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số, các chữ số khác nhau, trong đó có hai chữ số lẻ, hai chữ số chẵn

Giải

a) số tự nhiên có 4 chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi 4 trong các chữ số trên là chỉnh hợp chập 4 của 5 phần tử: $A_5^4 = 5.(5 - 1).(5 - 2).(5 - 3) = 5 . 4 . 3 . 2 = 120$ số

Trong mỗi hang (Nghìn, trăm, chục, đơn vị), mỗi chữ số có mặt: 120 : 5 = 24 lần

Tổng các chữ số ở mỗi hang: (1 + 2 + 3 + 4 + 5). 24 = 15 . 24 = 360

Tổng các số được lập: 360 + 3600 + 36000 + 360000 = 399960

b) chữ số tận cùng có 2 cách chọn (là 2 hoặc 4)

bốn chữ số trước là hoán vị của của 4 chữ số còn lại và có $P_4 = 4! = 4 . 3 . 2 = 24$ cách chọn

Tất cả có 24 . 2 = 48 cách chọn

c) Các số phải lập có dạng $\overline{abcde}$, trong đó : a có 5 cách chọn, b có 4 cách chọn (khác a), c có 4 cách chọn (khác b), d có 4 cách chọn (khác c), e có 4 cách chọn (khác d)

Tất cả có: 5 . 4 . 4 . 4 . 4 = 1280 số

d) Chọn 2 trong 2 chữ số chẵn, có 1 cách chọn

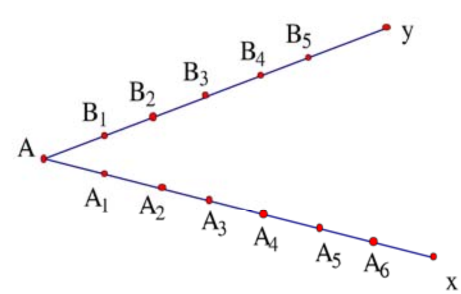
chọn 2 trong 3 chữ số lẻ, có 3 cách chọn. Các chữ số có thể hoán vị, do đó có:

1 . 3 . 4! =1 . 3 . 4 . 3 . 2 = 72 số

Bài 3: Cho $\widehat{xAy} \neq 180^0$. Trên Ax lấy 6 điểm khác A, trên Ay lấy 5 điểm khác A. trong 12 điểm nói trên (kể cả điểm A), hai điểm nào củng được nối với nhau bởi một đoạn thẳng. Có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh là 3 trong 12 điểm ấy

Giải

Cách 1: Tam giác phải đếm gồm ba loại:



+ Loại 1: các tam giác có một đỉnh là A, đỉnh thứ 2 thuộc Ax (có 6 cách chọn), đỉnh thứ 3 thuộc Ay (có 5 cách chọn), gồm có: 6 . 5 = 30 tam giác

+ Loại 2: Các tam giác có 1 đỉnh là 1 trong 5 điểm B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 (có 5 cách chọn), hai đỉnh kia là 2 trong 6 điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 (Có $C_6^2 = \frac{6.5}{2!} = \frac{30}{2} = 15$ cách chọn)

Gồm 5 . 15 = 75 tam giác

+ Loại 3: Các tam giác có 1 đỉnh là 1 trong 6 điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 hai đỉnh kia là 2 trong 5 điểm B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 gồm có: 6. $C_5^2 = 6.\frac{5.4}{2!} = 6.\frac{20}{2} = 60$ tam giác

Tất cả có: 30 + 75 + 60 = 165 tam giác

Cách 2: số các tam giác chọn 3 trong 12 điểm ấy là $C_{12}^3 = \frac{12.11.10}{3!} = \frac{1320}{3.2} = \frac{1320}{6} = 220$

Số bộ ba điểm thẳng hang trong 7 điểm thuộc tia Ax là: $C_7^3 = \frac{7.6.5}{3!} = \frac{210}{3.2} = \frac{210}{6} = 35$

Số bộ ba điểm thẳng hang trong 6 điểm thuộc tia Ay là: $C_6^3 = \frac{6.5.4}{3!} = \frac{120}{3.2} = \frac{120}{6} = 20$

Số tam giác tạo thành: 220 - (35 + 20) = 165 tam giác

D. BÀI TẬP:

Bài 1: cho 5 số: 0, 1, 2, 3, 4. từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên:

a) Có 5 chữ số gồm cả 5 chữ số ấy?

b) Có 4 chữ số, có các chữ số khác nhau?

c) có 3 chữ số, các chữ số khác nhau?

d) có 3 chữ số, các chữ số có thể giống nhau?

Bài 2: Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số lập bởi các chữ số 1, 2, 3 biết rằng số đó chia hết cho 9

Bài 3: Trên trang vở có 6 đường kẻ thẳng đứng và 5 đường kẻ nằm ngang đôi một cắt nhau. Hỏi trên trang vở đó có bao nhiêu hình chữ nhật

CHUYÊN ĐỀ 3 - LUỸ THỪA BẬC N CỦA MỘT NHỊ THỨC

A. MỤC TIÊU:

HS nắm được công thức khai triển luỹ thừa bậc n của một nhị thức: $(a + b)^n$

Vận dụng kiến thức vào các bài tập về xác định hệ số của luỹ thừa bậc n của một nhị thức, vận dụng vào các bài toán phân tích đa thức thành nhân tử

B. KIẾN THỨC VÀ BÀI TẬP VẬN DỤNG:

I. Nhị thức Niutơn: $\boxed{(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n}$

Trong đó: $C_n^k = \dfrac{n(n - 1)(n - 2)...[n - (k - 1)]}{1.2.3...k}$

II. Cách xác định hệ số của khai triển Niutơn:

1. Cách 1: Dùng công thức $C_n^k = \dfrac{n(n - 1)(n - 2)...[n - (k - 1)]}{k\,!}$

Chẳng hạn hệ số của hạng tử a^4b^3 trong khai triển của $(a + b)^7$ là

$$C_7^4 = \frac{7.6.5.4}{4!} = \frac{7.6.5.4}{4.3.2.1} = 35$$

Chú ý: a) $C_n^k = \dfrac{n\,!}{n\,!(n - k)\,!}$ với quy ước $0! = 1 \Rightarrow C_7^4 = \dfrac{7!}{4!.3!} = \dfrac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.3.2.1} = 35$

b) Ta có: $C_n^k = C_n^{k-1}$ nên $C_7^4 = C_7^3 = \dfrac{7.6.5.}{3!} = 35$

2. Cách 2: Dùng tam giác Patxcan

Đỉnh							**1**						
Dòng 1(n = 1)						**1**		**1**					
Dòng 2(n = 1)					**1**		**2**		**1**				
Dòng 3(n = 3)				**1**		**3**		**3**		**1**			
Dòng 4(n = 4)			**1**		**4**		**6**		**4**		**1**		
Dòng 5(n = 5)		**1**		**5**		**10**		**10**		**5**		**1**	
Dòng 6(n = 6)	**1**		**6**		**15**		**20**		**15**		**6**		**1**

Trong tam giác này, hai cạnh bên gồm các số 1; dòng k + 1 được thành lập từ dòng k

($k \geq 1$), chẳng hạn ở dòng 2 ($n = 2$) ta có $2 = 1 + 1$, dòng 3 ($n = 3$): $3 = 2 + 1$, $3 = 1 + 2$ dòng 4 ($n = 4$): $4 = 1 + 3$, $6 = 3 + 3$, $4 = 3 + 1$, …

Với $n = 4$ thì: $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Với $n = 5$ thì: $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Với $n = 6$ thì: $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$

3. Cách 3:

Tìm hệ số của hạng tử đứng sau theo các hệ số của hạng tử đứng trước:

a) Hệ số của hạng tử thứ nhất bằng 1

b) Muốn có hệ số của của hạng tử thứ $k + 1$, ta lấy hệ số của hạng tử thứ k nhân với số mũ của biến trong hạng tử thứ k rồi chia cho k

Chẳng hạn: $(a + b)^4 = a^4 + \frac{1.4}{1}a^3b + \frac{4.3}{2}a^2b^2 + \frac{4.3.2}{2.3}ab^3 + \frac{4.3.2.}{2.3.4}b^5$

Chú ý rằng: các hệ số của khai triển Niutơn có tính đối xứng qua hạng tử đứng giữa, nghĩa là các hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối có hệ số bằng nhau

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2b^{n-2} + na^{n-1}b^{n-1} + b^n$$

III. Ví dụ:

1. Ví dụ 1: phân tích đa thức sau thành nhân tử

a) $A = (x + y)^5 - x^5 - y^5$

Cách 1: khai triển $(x + y)^5$ rồi rút gọn A

$A = (x + y)^5 - x^5 - y^5 = (x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5) - x^5 - y^5$

$= 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 = 5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3)$

$= 5xy\,[(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 2xy(x + y)] = 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)$

Cách 2: $A = (x + y)^5 - (x^5 + y^5)$

$x^5 + y^5$ chia hết cho $x + y$ nên chia $x^5 + y^5$ cho $x + y$ ta có:

$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$ nên A có nhân tử chung là $(x + y)$, đặt $(x + y)$ làm nhân tử chung, ta tìm được nhân tử còn lại

b) $B = (x + y)^7 - x^7 - y^7 = (x^7+7x^6y +21x^5y^2 + 35x^4y^3 +35x^3y^4 +21x^2y^5\ \ 7xy^6 + y^7) - x^7 - y^7$

$= 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6$

$= 7xy[(x^5 + y^5) + 3(x^4y + xy^4) + 5(x^3y^2 + x^2y^3)]$

$= 7xy\ \{[(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)] + 3xy(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 5x^2y^2(x + y)\}$

$= 7xy(x + y)[x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 + 3xy(x^2 + xy + y^2) + 5x^2y^2]$

$= 7xy(x + y)[x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 + 3x^3y - 3x^2y^2 + 3xy^3 + 5x^2y^2]$

$= 7xy(x + y)[(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + 2xy\ (x^2 + y^2) + x^2y^2] = 7xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^2$

Ví dụ 2:Tìm tổng hệ số các đa thức có được sau khi khai triển

a) $(4x - 3)^4$

Cách 1: Theo cônh thức Niu tơn ta có:

$(4x - 3)^4 = 4.(4x)^3.3 + 6.(4x)^2.3^2 - 4.\ 4x.\ 3^3 + 3^4 = 256x^4 - 768x^3 + 864x^2 - 432x + 81$

Tổng các hệ số: $256 - 768 + 864 - 432 + 81 = 1$

b) Cách 2: Xét đẳng thức $(4x - 3)^4 = c_0x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$

Tổng các hệ số: $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4$

Thay x = 1 vào đẳng thức trên ta có: $(4.1 - 3)^4 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4$

Vậy: $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$

* Ghi chú: Tổng các hệ số khai triển của một nhị thức, một đa thức bằng giá trị của đa thức đó tại x = 1

C. BÀI TẬP:

Bài 1: Phân tích thành nhân tử

a) $(a + b)^3 - a^3 - b^3$ b) $(x + y)^4 + x^4 + y^4$

Bài 2: Tìm tổng các hệ số có được sau khi khai triển đa thức

a) $(5x - 2)^5$ b) $(x^2 + x - 2)^{2010} + (x^2 - x + 1)^{2011}$

CHUÊN ĐỀ 4 - CÁC BÀI TOÁN VỀ SỰ CHIA HẾT CỦA SỐ NGUYÊN

A. MỤC TIÊU:

* Củng cố, khắc sâu kiến thức về các bài toán chia hết giữa các số, các đa thức

* HS tiếp tục thực hành thành thạo về các bài toán chứng minh chia hết, không chia hết, sốnguyên tố, số chính phương…

* Vận dụng thành thạo kỹ năng chứng minh về chia hết, không chia hết… vào các bài toán cụ thể

B.KIẾN THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN:

I. Dạng 1: Chứng minh quan hệ chia hết

1. Kiến thức:

* Để chứng minh A(n) chia hết cho một số m ta phân tích A(n) thành nhân tử có một nhân tử làm hoặc bội của m, nếu m là hợp số thì ta lại phân tích nó thành nhân tử có các đoi một nguyên tố cùng nhau, rồi chứng minh A(n) chia hết cho các số đó

* Chú ý:

+ Với k số nguyên liên tiếp bao giờ củng tồn tại một bội của k

+ Khi chứng minh A(n) chia hết cho m ta xét mọi trường hợp về số dư khi chia A(n) cho m

+ Với mọi số nguyên a, b và số tự nhiên n thì:

+) $a^n - b^n$ chia hết cho a - b (a $\neq$ - b)

+) $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ chia hết cho a + b

+ $(a + b)^n = B(a) + b^n$

+) $(a + 1)^n$ là BS(a)+ 1

+)$(a - 1)^{2n}$ là B(a) + 1

+) $(a - 1)^{2n+1}$ là B(a) - 1

2. Bài tập:

2. Các bài toán

<u>Bài 1</u>: chứng minh rằng

a) $2^{51} - 1$ chia hết cho 7

b) $2^{70} + 3^{70}$ chia hết cho 13

c) $17^{19} + 19^{17}$ chi hết cho 18

d) $36^{63} - 1$ chia hết cho 7 nhưng không chia hết cho 37

e) 2^{4n} -1 chia hết cho 15 với $n \in N$

Giải

a) $2^{51} - 1 = (2^3)^{17} - 1 \vdots 2^3 - 1 = 7$

b) $2^{70} + 3^{70}\ (2^2)^{35} + (3^2)^{35} = 4^{35} + 9^{35} \vdots 4 + 9 = 13$

c) $17^{19} + 19^{17} = (17^{19} + 1) + (19^{17} - 1)$

$17^{19} + 1 \vdots 17 + 1 = 18$ và $19^{17} - 1 \vdots 19 - 1 = 18$ nên $(17^{19} + 1) + (19^{17} - 1)$

hay $17^{19} + 19^{17} \vdots 18$

d) $36^{63} - 1 \vdots 36 - 1 = 35 \vdots 7$

$36^{63} - 1 = (36^{63} + 1) - 2$ chi cho 37 dư - 2

e) $2^{4n} - 1 = (2^4)^n - 1 \vdots 2^4 - 1 = 15$

Bài 2: chứng minh rằng

a) $n^5 - n$ chia hết cho 30 với $n \in N$;

b) $n^4 - 10n^2 + 9$ chia hết cho 384 với mọi n lẻ $n \in Z$

c) $10^n + 18n - 28$ chia hết cho 27 với $n \in N$;

Giải:

a) $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1) = (n - 1).n.(n + 1)(n^2 + 1)$ chia hết cho 6 vì $(n - 1).n.(n+1)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3 (*)

Mặt khác $n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n^2 - 1).(n^2 - 4 + 5) = n(n^2 - 1).(n^2 - 4) + 5n(n^2 - 1)$

$= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5n(n^2 - 1)$

Vì $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 5

$5n(n^2 - 1)$ chia hết cho 5

Suy ra $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5n(n^2 - 1)$ chia hết cho 5 (**)

Từ (*) và (**) suy ra đpcm

b) Đặt $A = n^4 - 10n^2 + 9 = (n^4 - n^2) - (9n^2 - 9) = (n^2 - 1)(n^2 - 9) = (n - 3)(n - 1)(n + 1)(n + 3)$

Vì n lẻ nên đặt $n = 2k + 1$ ($k \in Z$) thì

$A = (2k - 2).2k.(2k + 2)(2k + 4) = 16(k - 1).k.(k + 1).(k + 2) \Rightarrow$ A chia hết cho 16 (1)

Và $(k - 1).k.(k + 1).(k + 2)$ là tích của 4 số nguyên liên tiếp nên A có chứa bội của 2, 3, 4 nên A là bội của 24 hay A chia hết cho 24 (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 16. 24 = 384

c) $10^n + 18n - 28 = (10^n - 9n - 1) + (27n - 27)$

+ Ta có: $27n - 27 \vdots 27$ (1)

+ $10^n - 9n - 1 = [(\underbrace{9...9}_{n} + 1) - 9n - 1] = \underbrace{9...9}_{n} - 9n = 9(\underbrace{1...1}_{n} - n) \vdots 27$ (2)

vì $9 \vdots 9$ và $\underbrace{1...1}_{n} - n \vdots 3$ do $\underbrace{1...1}_{n} - n$ là một số có tổng các chữ số chia hết cho 3

Từ (1) và (2) suy ra đpcm

3. Bài 3: Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì

a) $a^3 - a$ chia hết cho 3

b) $a^7 - a$ chia hết cho 7

Giải

a) $a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a - 1)a(a + 1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên tồn tại một số là bội của 3 nên $(a - 1)a(a + 1)$ chia hết cho 3

b)) $a^7 - a = a(a^6 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$

Nếu $a = 7k$ ($k \in Z$) thì a chia hết cho 7

Nếu $a = 7k + 1$ ($k \in Z$) thì $a^2 - 1 = 49k^2 + 14k$ chia hết cho 7

Nếu $a = 7k + 2$ ($k \in Z$) thì $a^2 + a + 1 = 49k^2 + 35k + 7$ chia hết cho 7

Nếu $a = 7k + 3$ ($k \in Z$) thì $a^2 - a + 1 = 49k^2 + 35k + 7$ chia hết cho 7

Trong trường hợp nào củng có một thừa số chia hết cho 7

Vậy: $a^7 - a$ chia hết cho 7

Bài 4: Chứng minh rằng $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 100^3$ chia hết cho $B = 1 + 2 + 3 + ... + 100$

Giải

Ta có: $B = (1 + 100) + (2 + 99) + ... + (50 + 51) = 101. 50$

Để chứng minh A chia hết cho B ta chứng minh A chia hết cho 50 và 101

Ta có: $A = (1^3 + 100^3) + (2^3 + 99^3) + ... + (50^3 + 51^3)$

$= (1 + 100)(1^2 + 100 + 100^2) + (2 + 99)(2^2 + 2. 99 + 99^2) + ... + (50 + 51)(50^2 + 50. 51 + 51^2) = 101(1^2 + 100 + 100^2 + 2^2 + 2. 99 + 99^2 + ... + 50^2 + 50. 51 + 51^2)$ chia hết cho 101 (1)

Lại có: $A = (1^3 + 99^3) + (2^3 + 98^3) + ... + (50^3 + 100^3)$

Mỗi số hạng trong ngoặc đều chia hết cho 50 nên A chia hết cho 50 (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 101 và 50 nên A chi hết cho B

Bài tập về nhà

Chứng minh rằng:

a) $a^5 - a$ chia hết cho 5

b) $n^3 + 6n^2 + 8n$ chia hết cho 48 với mọi n chẵn

c) Cho a l à số nguyên tố lớn hơn 3. Cmr $a^2 - 1$ chia hết cho 24

d) Nếu a + b + c chia hết cho 6 thì $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6

e) 2009^{2010} không chia hết cho 2010

f) $n^2 + 7n + 22$ không chia hết cho 9

Dạng 2: Tìm số dư của một phép chia

Bài 1:

Tìm số dư khi chia 2^{100}

a)cho 9, b) cho 25, c) cho 125

Giải

a) Luỹ thừa của 2 sát với bội của 9 là $2^3 = 8 = 9 - 1$

Ta có : $2^{100} = 2.\ (2^3)^{33} = 2.(9 - 1)^{33} = 2.[B(9) - 1] = B(9) - 2 = B(9) + 7$

Vậy: 2^{100} chia cho 9 thì dư 7

b) Tương tự ta có: $2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} = [B(25) - 1]^{10} = B(25) + 1$

Vậy: 2^{100} chia chop 25 thì dư 1

c)Sử dụng công thức Niutơn:

$$2^{100} = (5 - 1)^{50} = (5^{50} - 5.\ 5^{49} + \ldots + \frac{50.49}{2}.\ 5^2 - 50\ .\ 5\ ) + 1$$

Không kể phần hệ số của khai triển Niutơn thì 48 số hạng đầu đã chứa thừa số 5 với số mũ lớn hơn hoặc bằng 3 nên đều chia hết cho $5^3 = 125$, hai số hạng tiếp theo: $\frac{50.49}{2}.\ 5^2 - 50.5$ cũng chia hết cho 125 , số hạng cuối cùng là 1

Vậy: $2^{100} = B(125) + 1$ nên chia cho 125 thì dư 1

Bài 2:

Viết số 1995^{1995} thành tổng của các số tự nhiên . Tổng các lập phương đó chia cho 6 thì dư bao nhiêu?

Giải

Đặt $1995^{1995} = a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$

Gọi $S = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + ... + a_n^3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + ... + a_n^3 + a - a$

$= (a_1^{\ 3} - a_1) + (a_2^{\ 3} - a_2) + \ldots + (a_n^{\ 3} - a_n) + a$

Mỗi dấu ngoặc đều chia hết cho 6 vì mỗi dấu ngoặc là tích của ba số tự nhiên liên tiếp. Chỉ cần tìm số dư khi chia a cho 6

1995 là số lẻ chia hết cho 3, nên a củng là số lẻ chia hết cho 3, do đó chia cho 6 dư 3

Bài 3: Tìm ba chữ số tận cùng của 2^{100} viết trong hệ thập phân

giải

Tìm 3 chữ số tận cùng là tìm số dư của phép chia 2^{100} cho 1000

Trước hết ta tìm số dư của phép chia 2^{100} cho 125

Vận dụng bài 1 ta có $2^{100} = B(125) + 1$ mà 2^{100} là số chẵn nên 3 chữ số tận cùng của nó chỉ có thể là 126, 376, 626 hoặc 876

Hiển nhiên 2^{100} chia hết cho 8 vì $2^{100} = 16^{25}$ chi hết cho 8 nên ba chữ số tận cùng của nó chia hết cho 8

trong các số 126, 376, 626 hoặc 876 chỉ có 376 chia hết cho 8

Vậy: 2^{100} viết trong hệ thập phân có ba chữ số tận cùng là 376

Tổng quát: Nếu n là số chẵn không chia hết cho 5 thì 3 chữ số tận cùng của nó là 376

Bài 4: Tìm số dư trong phép chia các số sau cho 7

a) $22^{22} + 55^{55}$ b) 3^{1993}

c) $1992^{1993} + 1994^{1995}$ d) $3^{2^{1930}}$

Giải

a) ta có: $22^{22} + 55^{55} = (21 + 1)^{22} + (56 – 1)^{55} = (BS\ 7 + 1)^{22} + (BS\ 7 – 1)^{55}$

$= BS\ 7 + 1 + BS\ 7 - 1 = BS\ 7$ nên $22^{22} + 55^{55}$ chia 7 dư 0

b) Luỹ thừa của 3 sát với bội của 7 là $3^3 = BS\ 7 – 1$

Ta thấy 1993 = BS 6 + 1 = 6k + 1, do đó:

$3^{1993} = 3^{6k+1} = 3.(3^3)^{2k} = 3(BS\ 7 - 1)^{2k} = 3(BS\ 7 + 1) = BS\ 7 + 3$

c) Ta thấy 1995 chia hết cho 7, do đó:

$1992^{1993} + 1994^{1995} = (BS\ 7 - 3)^{1993} + (BS\ 7 - 1)^{1995} = BS\ 7 - 3^{1993} + BS\ 7 - 1$

Theo câu b ta có 3^{1993} = BS 7 + 3 nên

$1992^{1993} + 1994^{1995} = BS\ 7 - (BS\ 7 + 3) - 1 = BS\ 7 - 4$ nên chia cho 7 thì dư 3

d) $3^{2^{1930}} = 3^{2860} = 3^{3k+1} = 3.3^{3k} = 3(BS\ 7 - 1) = BS\ 7 - 3$ nên chia cho 7 thì dư 4

Bài tập về nhà

Tìm số d ư khi:

a) 2^{1994} cho 7

b) $3^{1998} + 5^{1998}$ cho 13

c) $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ...+ 99^3$ chia cho $B = 1 + 2 + 3 + ... + 99$

Dạng 3: Tìm điều kiện để xảy ra quan hệ chia hết

Bài 1: Tìm $n \in Z$ để giá trị của biểu thức $A = n^3 + 2n^2 - 3n + 2$ chia hết cho giá trị của biểu thức $B = n^2 - n$

Giải

Chia A cho B ta có: $n^3 + 2n^2 - 3n + 2 = (n + 3)(n^2 - n) + 2$

Để A chia hết cho B thì 2 phải chia hết cho $n^2 - n = n(n - 1)$ do đó 2 chia hết cho n, ta có:

n	1	- 1	2	- 2
n - 1	0	- 2	1	- 3
n(n - 1)	0	2	2	6
	loại			loại

Vậy: Để giá trị của biểu thức $A = n^3 + 2n^2 - 3n + 2$ chia hết cho giá trị của biểu thức $B = n^2 - n$ thì $n \in \{-1; 2\}$

Bài 2:

a) Tìm $n \in N$ để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

b) Giải bài toán trên nếu $n \in Z$

Giải

Ta có: $n^5 + 1 \vdots n^3 + 1 \Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) \vdots n^3 + 1 \Leftrightarrow (n + 1)(n - 1) \vdots n^3 + 1$

$\Leftrightarrow (n + 1)(n - 1) \vdots (n + 1)(n^2 - n + 1) \Leftrightarrow n - 1 \vdots n^2 - n + 1$ (Vì $n + 1 \neq 0$)

a) Nếu n = 1 thì $0 \vdots 1$

Nếu n > 1 thì $n - 1 < n(n - 1) + 1 < n^2 - n + 1$ nên không thể xẩy ra $n - 1 \vdots n^2 - n + 1$

Vậy giá trụ của n tìm được là n = 1

b) $n - 1 \vdots n^2 - n + 1 \Rightarrow n(n - 1) \vdots n^2 - n + 1 \Leftrightarrow (n^2 - n + 1) - 1 \vdots n^2 - n + 1$

$\Rightarrow 1 \vdots n^2 - n + 1$. Có hai trường hợp xẩy ra:

+ $n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n(n - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0 \\ n = 1 \end{array}\right.$ (Tm đề bài)

+ $n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0$ (Vô nghiệm)

Bài 3: Tìm số nguyên n sao cho:

a) $n^2 + 2n - 4 \vdots 11$

b) $2n^3 + n^2 + 7n + 1 \vdots 2n - 1$

c) $n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 \vdots n^4 - 1$

d) $n^3 - n^2 + 2n + 7 \vdots n^2 + 1$

Giải

a) Tách $n^2 + 2n - 4$ thành tổng hai hạng tử trong đó có một hạng tử là B(11)

$n^2 + 2n - 4 \vdots 11 \Leftrightarrow (n^2 - 2n - 15) + 11 \vdots 11 \Leftrightarrow (n - 3)(n + 5) + 11 \vdots 11$

$\Leftrightarrow (n - 3)(n + 5) \vdots 11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n - 3 \vdots 11 \\ n + 5 \vdots 11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = B(11) + 3 \\ n = B(11) - 5 \end{array}\right.$

b) $2n^3 + n^2 + 7n + 1 = (n^2 + n + 4)(2n - 1) + 5$

Để $2n^3 + n^2 + 7n + 1 \vdots 2n - 1$ thì $5 \vdots 2n - 1$ hay $2n - 1$ là Ư(5) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2n - 1 = -5 \\ 2n - 1 = -1 \\ 2n - 1 = 1 \\ 2n - 1 = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -2 \\ n = 0 \\ n = 1 \\ n = 3 \end{array}\right.$

Vậy: $n \in \{-2; 0; 1; 3\}$ thì $2n^3 + n^2 + 7n + 1 \vdots 2n - 1$

c) $n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 \vdots n^4 - 1$

Đặt $A = n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 = (n^4 - n^3) - (n^3 - n^2) + (n^2 - n) - (n - 1)$

$= n^3(n - 1) - n^2(n - 1) + n(n - 1) - (n - 1) = (n - 1)(n^3 - n^2 + n - 1) = (n - 1)^2(n^2 + 1)$

$B = n^4 - 1 = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$

A chia hết cho b nên $n \neq \pm 1 \Rightarrow$ A chia hết cho B $\Leftrightarrow n - 1 \vdots n + 1 \Leftrightarrow (n + 1) - 2 \vdots n + 1$

$$\Leftrightarrow 2 \vdots n + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n + 1 = -2 \\ n + 1 = -1 \\ n + 1 = 1 \\ n + 1 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -3 \\ n = -2 \\ n = 0 \\ n = 1 \text{ (không Tm)} \end{array}\right.$$

Vậy: $n \in \{-3; -2; 0\}$ thì $n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 \vdots n^4 - 1$

d) Chia $n^3 - n^2 + 2n + 7$ cho $n^2 + 1$ được thương là $n - 1$, dư $n + 8$

Để $n^3 - n^2 + 2n + 7 \vdots n^2 + 1$ thì $n + 8 \vdots n^2 + 1 \Rightarrow (n + 8)(n - 8) \vdots n^2 + 1 \Leftrightarrow 65 \vdots n^2 + 1$

Lần lượt cho $n^2 + 1$ bằng 1; 5; 13; 65 ta được n bằng 0; ± 2; ± 8

Thử lại ta có n = 0; n = 2; n = 8 (T/m)

Vậy: $n^3 - n^2 + 2n + 7 \vdots n^2 + 1$ khi n = 0, n = 8

Bài tập về nhà:

Tìm số nguyên n để:

a) $n^3 – 2$ chia hết cho $n – 2$

b) $n^3 – 3n^2 – 3n – 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$

c)$5^n – 2^n$ chia hết cho 63

Dạng 4: Tồn tại hay không tồn tại sự chia hết

Bài 1: Tìm $n \in N$ sao cho $2^n – 1$ chia hết cho 7

Giải

Nếu n = 3k ($k \in N$) thì $2^n – 1 = 2^{3k} – 1 = 8^k - 1$ chia hết cho 7

Nếu n = 3k + 1 ($k \in N$) thì $2^n – 1 = 2^{3k + 1} – 1 = 2(2^{3k} – 1) + 1$ = BS 7 + 1

Nếu n = 3k + 2 ($k \in N$) thì $2^n – 1 = 2^{3k + 2} – 1 = 4(2^{3k} – 1) + 3$ = BS 7 + 3

V ậy: $2^n – 1$ chia hết cho 7 khi n = BS 3

Bài 2: Tìm $n \in N$ để:

a) $3^n – 1$ chia hết cho 8

b) $A = 3^{2n + 3} + 2^{4n + 1}$ chia hết cho 25

c) $5^n – 2^n$ chia hết cho 9

Giải

a) Khi n = 2k ($k \in N$) thì $3^n - 1 = 3^{2k} - 1 = 9^k - 1$ chia hết cho $9 - 1 = 8$

Khi n = 2k + 1 ($k \in N$) thì $3^n - 1 = 3^{2k+1} - 1 = 3.(9^k - 1) + 2 = BS\ 8 + 2$

Vậy : $3^n - 1$ chia hết cho 8 khi n = 2k ($k \in N$)

b) $A = 3^{2n+3} + 2^{4n+1} = 27.3^{2n} + 2.2^{4n} = (25 + 2)3^{2n} + 2.2^{4n} = 25.3^{2n} + 2.3^{2n} + 2.2^{4n}$

$= BS\ 25 + 2(9^n + 16^n)$

Nếu n = 2k +1($k \in N$) thì $9^n + 16^n = 9^{2k+1} + 16^{2k+1}$ chia hết cho 9 + 16 = 25

Nếu n = 2k ($k \in N$) thì 9^n có chữ số tận cùng bằng 1 , còn 16^n có chữ số tận cùng bằng 6 suy ra $2((9^n + 16^n)$ có chữ số tận cùng bằng 4 nên A không chia hết cho 5 nên không chia hết cho 25

c) Nếu n = 3k ($k \in N$) thì $5^n - 2^n = 5^{3k} - 2^{3k}$ chia hết cho $5^3 - 2^3 = 117$ nên chia hết cho 9

Nếu n = 3k + 1 thì $5^n - 2^n = 5.5^{3k} - 2.2^{3k} = 5(5^{3k} - 2^{3k}) + 3.2^{3k} = BS\ 9 + 3.8^k$

$= BS\ 9 + 3(BS\ 9 - 1)^k = BS\ 9 + BS\ 9 + 3$

Tương tự: nếu n = 3k + 2 thì $5^n - 2^n$ không chia hết cho 9

CHUYÊN ĐỀ 5: SỐ CHÍNH PHƯƠNG

I. Số chính phương:

A. Một số kiến thức:

Số chính phương: số bằng bình phương của một số khác

Ví dụ:

$4 = 2^2$; $9 = 3^2$

$A = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2 = B^2$

+ Số chính phương khong tận cùng bởi các chữ số: 2, 3, 7, 8

+ Số chính phương chia hết cho 2 thì chia hết cho 4, chia hết cho 3 thì chia hết cho 9, chia hết cho 5 thì chia hết cho 25, chia hết cho 2^3 thì chia hết cho 2^4,…

+ Số $\underbrace{11...1}_{n} =$ a thì $\underbrace{99...9}_{n} = 9a \Rightarrow 9a + 1 = \underbrace{99...9}_{n} + 1 = 10^n$

B. Một số bài toán:

1. Bài 1:

Chứng minh rằng: Một số chính phương chia cho 3, cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1

Giải

Gọi $A = n^2$ $(n \in N)$

a) xét $n = 3k$ $(k \in N) \Rightarrow A = 9k^2$ nên chia hết cho 3

$n = 3k \pm 1$ $(k \in N) \Rightarrow A = 9k^2 \pm 6k + 1$, chia cho 3 dư 1

Vậy: số chính phương chia cho 3 dư 0 hoặc 1

b) $n = 2k$ $(k \in N)$ thì $A = 4k^2$ chia hết cho 4

$n = 2k + 1$ $(k \in N)$ thì $A = 4k^2 + 4k + 1$ chia cho 4 dư 1

Vậy: số chính phương chia cho 4 dư 0 hoặc 1

Chú ý: + Số chính phương chẵn thì chia hết cho 4

+ Số chính phương lẻ thì chia cho 4 thì dư 1(Chia 8 củng dư 1)

2. Bài 2: Số nào trong các số sau là số chính phương

a) $M = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2$

b) $N = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2 + 1995^2$

c) $P = 1 + 9^{100} + 94^{100} + 1994^{100}$

d) $Q = 1^2 + 2^2 + ...+ 100^2$

e) $R = 1^3 + 2^3 + ... + 100^3$

Giải

a) các số 1993^2, 1994^2 chia cho 3 dư 1, còn 1992^2 chia hết cho 3 $\Rightarrow$ M chia cho 3 dư 2 do đó M không là số chính phương

b) $N = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2 + 1995^2$ gồm tổng hai số chính phương chẵn chia hết cho 4, và hai số chính phương lẻ nên chia 4 dư 2 suy ra N không là số chính phương

c) $P = 1 + 9^{100} + 94^{100} + 1994^{100}$ chia 4 dư 2 nên không là số chính phương

d) $Q = 1^2 + 2^2 + ...+ 100^2$

Số Q gồm 50 số chính phương chẵn chia hết cho 4, 50 số chính phương lẻ, mỗi số chia 4 dư 1 nên tổng 50 số lẻ đó chia 4 thì dư 2 do đó Q chia 4 thì dư 2 nên Q không là số chính phương

e) $R = 1^3 + 2^3 + ... + 100^3$

Gọi $A_k = 1 + 2 +... + k = \frac{k(k+1)}{2}$, $A_{k-1} = 1 + 2 +... + k = \frac{k(k-1)}{2}$

Ta có: $A_k{}^2 - A_{k-1}{}^2 = k^3$ khi đó:

$1^3 = A_1{}^2$

$2^3 = A_2{}^2 - A_1{}^2$

....

$n^3 = A_n{}^2 = A_{n-1}{}^2$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên ta có:

$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = A_n{}^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{100(100+1)}{2}\right]^2 = (50.101)^2$ là số chính phương

3. Bài 3:

CMR: Với mọi n Ỵ N thì các số sau là số chính phương.

a) $A = (10^n + 10^{n-1} + ... + .10 + 1)(10^{n+1} + 5) + 1$

$A = (\underbrace{11.....1}_{n})(10^{n+1} + 5) + 1 = \frac{10^{n+1}-1}{10-1}.(10^{n+1}+5)+1$

Đặt $a = 10^{n+1}$ thì $A = \frac{a-1}{9}(a+5)+1 = \frac{a^2+4a-5+9}{9} = \frac{a^2+4a+4}{9} = \left(\frac{a+2}{3}\right)^2$

b) $B = \underbrace{111.....1}_{n}\underbrace{555.....5}_{n-1}6$ (cĩ n số 1 và n-1 số 5)

$B = \underbrace{111.....1}_{n}\underbrace{555.....5}_{n} + 1 = \underbrace{111.....1}_{n}.\,10^n + \underbrace{555.....5}_{n} + 1 = \underbrace{111.....1}_{n}.\,10^n + 5\left(\underbrace{111.....1}_{n}\right) + 1$

Đặt $\underbrace{11.....1}_{n} = a$ thì $10^n = 9a + 1$ nên

$B = a(9a+1) + 5a + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a+1)^2 = \underbrace{33....3}_{n-1}4^2$

c) $C = \underbrace{11.....1}_{2n}.+\underbrace{44.....4}_{n} + 1$

Đặt $a = \underbrace{11.....1}_{n}$ Thì $C = \underbrace{11.....1}_{n}\underbrace{11.....1}_{n} + 4.\,\underbrace{11.....1}_{n} + 1 = a.\,10^n + a + 4a + 1$

$= a(9a+1) + 5a + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a+1)^2$

d) $D = \underbrace{99....9}_{n}8\underbrace{00.....0}_{n}1$. Đặt $\underbrace{99....9}_{n} = a \Rightarrow 10^n = a + 1$

$D = \underbrace{99....9}_{n}.\,10^{n+2} + 8.\,10^{n+1} + 1 = a\,.\,100\,.\,10^n + 80.\,10^n + 1$

$= 100a(a+1) + 80(a+1) + 1 = 100a^2 + 180a + 81 = (10a+9)^2 = (\underbrace{99....9}_{n+1})^2$

e) $E = \underbrace{11.....1}_{n}\underbrace{22.....2}_{n+1}5 = \underbrace{11.....1}_{n}\underbrace{22.....2}_{n+1}00 + 25 = \underbrace{11.....1}_{n}.10^{n+2} + 2.\,\underbrace{11.....1}_{n}00 + 25$

$= [a(9a+1) + 2a]100 + 25 = 900a^2 + 300a + 25 = (30a+5)^2 = (\underbrace{33.....3}_{n}5)^2$

f) $F = \underbrace{44.....4}_{100} = 4.\underbrace{11.....1}_{100}$ là số chính phương thì $\underbrace{11.....1}_{100}$ là số chính phương

Số $\underbrace{11.....1}_{100}$ là số lẻ nên nó là số chính phương thì chia cho 4 phải dư 1

Thật vậy: $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ chia 4 dư 1

$\underbrace{11.....1}_{100}$ có hai chữ số tận cùng là 11 nên chia cho 4 thì dư 3 vậy $\underbrace{11.....1}_{100}$ không là số chính phương nên F = $\underbrace{44.....4}_{100}$ không là số chính phương

Bài 4:

a) Cho các số A = $\underbrace{11........11}_{2m}$; B = $\underbrace{11.......11}_{m+1}$; C = $\underbrace{66.....66}_{m}$

CMR: A + B + C + 8 là số chính phương .

Ta có: A $\frac{10^{2m}-1}{9}$; B = $\frac{10^{m+1}-1}{9}$; C = $6.\frac{10^m-1}{9}$ Nên:

$$A + B + C + 8 = \frac{10^{2m}-1}{9} + \frac{10^{m+1}-1}{9} + 6.\frac{10^m-1}{9} + 8 = \frac{10^{2m}-1+10^{m+1}-1+6(10^m-1)+72}{9}$$

$$= \frac{10^{2m}-1+10.10^m-1+6.10^m-6+72}{9} = \frac{\left(10^m\right)^2+16.10^m+64}{9} = \left(\frac{10^m+8}{3}\right)^2$$

b) CMR: Với mọi x,y Ỵ Z thì A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4 là số chính phương.

$A = (x^2 + 5xy + 4y^2)\ (x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4$

$= (x^2 + 5xy + 4y^2)\ [(x^2 + 5xy + 4y^2) + 2y^2) + y^4$

$= (x^2 + 5xy + 4y^2)^2 + 2(x^2 + 5xy + 4y^2).y^2 + y^4 = [(x^2 + 5xy + 4y^2) + y^2)^2$

$= (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$

Bài 5: Tìm số nguyên dương n để các biểu thức sau là số chính phương

a) $n^2 - n + 2$ b) $n^5 - n + 2$

Giải

a) Với n = 1 thì $n^2 - n + 2 = 2$ không là số chính phương

Với n = 2 thì $n^2 - n + 2 = 4$ là số chính phương

Với n > 2 thì $n^2 - n + 2$ không là số chính phương Vì

$(n - 1)^2 = n^2 - (2n - 1) < n^2 - (n - 2) < n^2$

b) Ta có $n^5 - n$ chia hết cho 5 Vì

$n^5 - n = (n^2 - 1).n.(n^2 + 1)$

Với n = 5k thì n chia hết cho 5

Với n = 5k $\pm$ 1 thì $n^2 - 1$ chia hết cho 5

Với n = 5k $\pm$ 2 thì $n^2 + 1$ chia hết cho 5

Nên $n^5 - n + 2$ chia cho 5 thì dư 2 nên $n^5 - n + 2$ có chữ số tận cùng là 2 hoặc 7 nên $n^5 - n + 2$ không là số chính phương

Vậy : Không có giá trị nào của n thoã mãn bài toán

Bài 6 :

a)Chứng minh rằng : Mọi số lẻ đều viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương

b) Một số chính phương có chữ số tận cùng bằng 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn

Giải

Mọi số lẻ đều có dạng a = 4k + 1 hoặc a = 4k + 3

Với a = 4k + 1 thì $a = 4k^2 + 4k + 1 - 4k^2 = (2k + 1)^2 - (2k)^2$

Với a = 4k + 3 thì $a = (4k^2 + 8k + 4) - (4k^2 + 4k + 1) = (2k + 2)^2 - (2k + 1)^2$

b)A là số chính phương có chữ số tận cùng bằng 9 nên

$A = (10k \pm 3)^2 = 100k^2 \pm 60k + 9 = 10.(10k^2 \pm 6) + 9$

Số chục của A là $10k^2 \pm 6$ là số chẵn (đpcm)

Bài 7:

Một số chính phương có chữ số hàng chục là chữ số lẻ. Tìm chữ số hàng đơn vị

Giải

Gọi $n^2 = (10a + b)^2 = 10.(10a^2 + 2ab) + b^2$ nên chữ số hàng đơn vị cần tìm là chữ số tận cùng của b^2

Theo đề bài , chữ số hàng chục của n^2 là chữ số lẻ nên chữ số hàng chục của b^2 phải lẻ

Xét các giá trị của b từ 0 đến 9 thì chỉ có $b^2 = 16$, $b^2 = 36$ có chữ số hàng chục là chữ số lẻ, chúng đều tận cùng bằng 6

Vậy : n^2 có chữ số hàng đơn vị là 6

Bài tập về nhà:

Bài 1: Các số sau đây, số nào là số chính phương

a) $A = \underbrace{22.....2}_{50}4$ b) B = 11115556 c) $C = \underbrace{99....9}_{n}\underbrace{00....0}_{n}25$

d) $D = \underbrace{44.....4}_{n}\underbrace{88....8}_{n-1}9$ e) $M = \underbrace{11.....1}_{2n} - \underbrace{22....2}_{n}$ f) $N = 1^2 + 2^2 + ... + 56^2$

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để các biểu thức sau là số chính phương

a) $n^3 - n + 2$

b) $n^4 - n + 2$

Bài 3: Chứng minh rằng

a)Tổng của hai số chính phương lẻ không là số chính phương

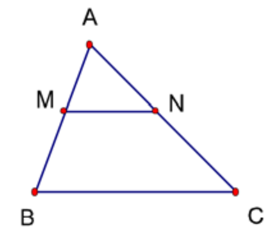
b) Một số chính phương có chữ số tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ

Bài 4: Một số chính phương có chữ số hàng chục bằng 5. Tìm chữ số hàng đơn vị

CHUYÊN ĐỀ 6 - CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐỊNH LÍ TA-LÉT

A.Kiến thức:

1. Định lí Ta-lét:



* §Þnh lÝ Ta-lÐt: $\left.\begin{matrix}\Delta ABC \\ MN \,//\, BC\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

* HƯ qu¶: MN // BC $\Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

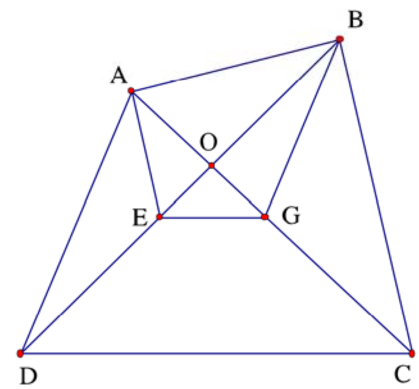
B. Bài tập áp dụng:

1. Bài 1:

Cho tứ giác ABCD, đường thẳng qua A song song với BC cắt BD ở E, đường thẳng qua B song song với AD cắt AC ở G

a) chứng minh: EG // CD

b) Giả sử AB // CD, chứng minh rằng AB^2 = CD. EG



Giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD

a) Vì AE // BC $\Rightarrow \dfrac{OE}{OB} = \dfrac{OA}{OC}$ (1)

BG // AC $\Rightarrow \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{OG}{OA}$ (2)

Nhân (1) với (2) vế theo vế ta có: $\dfrac{OE}{OD} = \dfrac{OG}{OC} \Rightarrow$ EG // CD

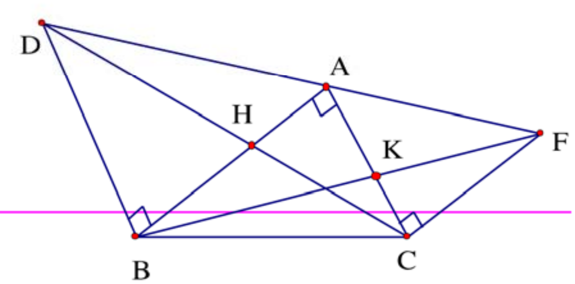
b) Khi AB // CD thì EG // AB // CD, BG // AD nên

$$\frac{AB}{EG} = \frac{OA}{OG} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{EG} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow AB^2 = CD.\,EG$$

Bài 2:

Cho ABC vuông tại A, Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABD vuông cân ở B, ACF vuông cân ở C. Gọi H là giao điểm của AB và CD, K là giao điểm của Ac và BF.

Chứng minh rằng:



a) AH = AK

b) AH^2 = BH. CK

Giải

Đặt AB = c, AC = b.

BD // AC (cùng vuông góc với AB)

nên $\frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{AH}{HB + AH} = \frac{b}{b + c}$

Hay $\frac{AH}{AB} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow \frac{AH}{c} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow AH = \frac{b.c}{b + c}$ (1)

AB // CF (cùng vuông góc với AC) nên $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CF} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{AK}{KC + AK} = \frac{c}{b + c}$

Hay $\frac{AK}{AC} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow \frac{AK}{b} = \frac{c}{b + c} \Rightarrow AK = \frac{b.c}{b + c}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: AH = AK

b) Từ $\frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BD} = \frac{b}{c}$ và $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CF} = \frac{c}{b}$ suy ra $\frac{AH}{HB} = \frac{KC}{AK} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{KC}{AH}$ (Vì AH = AK)

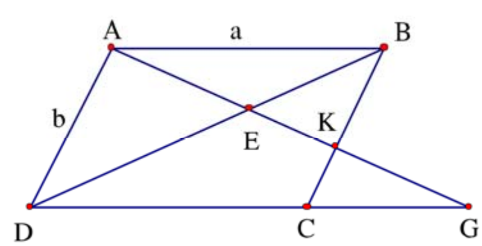
$\Rightarrow AH^2 = BH . KC$

3. Bài 3: Cho hình bình hành ABCD, đường thẳng a đi qua A lần lượt cắt BD, BC, DC theo thứ tự tại E, K, G. Chứng minh rằng:

a) AE^2 = EK. EG

b) $\frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}$

c) Khi đường thẳng a thay đổi vị trí nhưng vẫn qua A thì tích BK. DG có giá trị không đổi



Giải

a) Vì ABCD là hình bình hành và K $\in$ BC nên AD // BK, theo hệ quả của định lí Ta-lét ta có:

$\frac{EK}{AE} = \frac{EB}{ED} = \frac{AE}{EG} \Rightarrow \frac{EK}{AE} = \frac{AE}{EG} \Rightarrow AE^2 = EK.EG$

b) Ta có: $\frac{AE}{AK} = \frac{DE}{DB}$; $\frac{AE}{AG} = \frac{BE}{BD}$ nên

$\frac{AE}{AK} + \frac{AE}{AG} = \frac{BE}{BD} + \frac{DE}{DB} = \frac{BD}{BD} = 1 \Rightarrow AE\left(\frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}$ (đpcm)

c) Ta có: $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{CG} \Rightarrow \frac{BK}{KC} = \frac{a}{CG}$ (1); $\frac{KC}{AD} = \frac{CG}{DG} \Rightarrow \frac{KC}{b} = \frac{CG}{DG}$ (2)

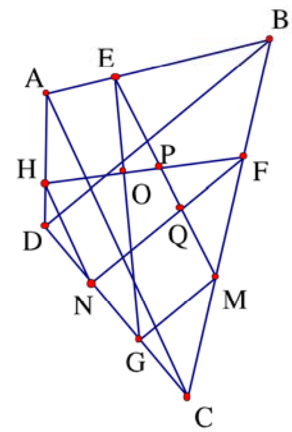
Nhân (1) với (2) vế theo vế ta có: $\frac{BK}{b} = \frac{a}{DG} \Rightarrow BK.\,DG = ab$ không đổi (Vì a = AB; b = AD là độ dài hai cạnh của hình bình hành ABCD không đổi)

4. Bài 4:

Cho tứ giác ABCD, các điểm E, F, G, H theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CD, DA theo tỉ số 1:2. Chứng minh rằng:

a) EG = FH

b) EG vuông góc với FH



Giải

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của CF, DG

Ta có CM = $\frac{1}{2}$ CF = $\frac{1}{3}$BC $\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ EM // AC $\Rightarrow \frac{EM}{AC} = \frac{BM}{BE} = \frac{2}{3} \Rightarrow EM = \frac{2}{3}AC$ (1)

Tương tự, ta có: NF // BD $\Rightarrow \frac{NF}{BD} = \frac{CF}{CB} = \frac{2}{3} \Rightarrow NF = \frac{2}{3}BD$ (2)

mà AC = BD (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra : EM = NF (a)

Tương tự như trên ta có: MG // BD, NH // AC và MG = NH = $\frac{1}{3}$AC (b)

Mặt khác EM // AC; MG // BD Và AC $\perp$ BD $\Rightarrow$ EM $\perp$ MG $\Rightarrow \widehat{EMG} = 90^0$ (4)

Tương tự, ta có: $\widehat{FNH} = 90^0$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{EMG} = \widehat{FNH} = 90^0$ (c)

Từ (a), (b), (c) suy ra $\Delta EMG = \Delta FNH$ (c.g.c) $\Rightarrow$ EG = FH

b) Gọi giao điểm của EG và FH là O; của EM và FH là P; của EM và FN là Q thì

$\widehat{PQF} = 90^0 \Rightarrow \widehat{QPF} + \widehat{QFP} = 90^0$ mà $\widehat{QPF} = \widehat{OPE}$ (đối đỉnh), $\widehat{OEP} = \widehat{QFP}$ ($\Delta EMG = \Delta FNH$)

Suy ra $\widehat{EOP} = \widehat{PQF} = 90^0 \Rightarrow EO \perp OP \Rightarrow EG \perp FH$

5. Bài 5:

Cho hình thang ABCD có đáy nhỏ CD. Từ D vẽ đường thẳng song song với BC, cắt AC tại M và AB tại K, Từ C vẽ đường thẳng song song với AD, cắt AB tại F, qua F ta lại vẽ đường thẳng song song với AC, cắt BC tại P. Chứng minh rằng

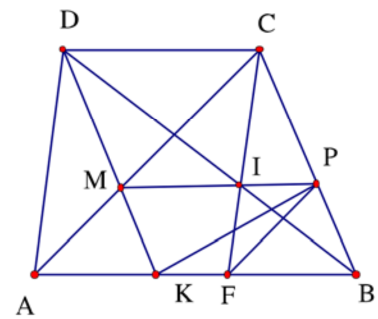
a) MP // AB

b) Ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy

Giải

a) EP // AC $\Rightarrow \dfrac{CP}{PB} = \dfrac{AF}{FB}$ (1)

AK // CD $\Rightarrow \dfrac{CM}{AM} = \dfrac{DC}{AK}$ (2)



các tứ giác AFCD, DCBK la các hình bình hành nên

AF = DC, FB = AK (3)

Kết hợp (1), (2) và (3) ta có $\dfrac{CP}{PB} = \dfrac{CM}{AM} \Rightarrow$ MP // AB

(Định lí Ta-lét đảo) (4)

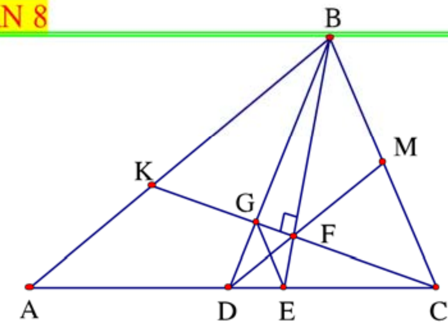
b) Gọi I là giao điểm của BD và CF, ta có: $\dfrac{CP}{PB} = \dfrac{CM}{AM} = \dfrac{DC}{AK} = \dfrac{DC}{FB}$

Mà $\dfrac{DC}{FB} = \dfrac{DI}{IB}$ (Do FB // DC) $\Rightarrow \dfrac{CP}{PB} = \dfrac{DI}{IB} \Rightarrow$ IP // DC // AB (5)

Từ (4) và (5) suy ra : qua P có hai đường thẳng IP, PM cùng song song với AB // DC nên theo tiên đề Ơclít thì ba điểm P, I, M thẳng hang hay MP đi qua giao điểm của CF và DB hay ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy

6. Bài 6:

Cho ΔABC có BC < BA. Qua C kẻ đường thẳng vuông goác với tia phân giác BE của $\widehat{ABC}$; đường thẳng này cắt BE tại F và cắt trung tuyến BD tại G. Chứng minh rằng đoạn thẳng EG bị đoạn thẳng DF chia làm hai phần bằng nhau



Giải

Gọi K là giao điểm của CF và AB; M là giao điểm của DF và BC

ΔKBC có BF vừa là phân giác vừa là đường cao nên ΔKBC cân tại B $\Rightarrow$ BK = BC và FC = FK

Mặt khác D là trung điểm AC nên DF là đường trung bình của ΔAKC $\Rightarrow$ DF // AK hay DM // AB

Suy ra M là trung điểm của BC

DF = $\frac{1}{2}$AK (DF là đường trung bình của ΔAKC), ta có

$\frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF}$(do DF // BK) $\Rightarrow \frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF} = \frac{2BK}{AK}$ (1)

Mốt khác $\frac{CE}{DE} = \frac{DC - DE}{DE} = \frac{DC}{DE} - 1 = \frac{AD}{DE} - 1$ (Vì AD = DC) $\Rightarrow \frac{CE}{DE} = \frac{AE - DE}{DE} = \frac{DC}{DE} - 1 = \frac{AD}{DE} - 1$

Hay $\frac{CE}{DE} = \frac{AE - DE}{DE} - 1 = \frac{AE}{DE} - 2 = \frac{AB}{DF} - 2$ (vì $\frac{AE}{DE} = \frac{AB}{DF}$: Do DF // AB)

Suy ra $\frac{CE}{DE} = \frac{AK + BK}{DE} - 2 = \frac{2(AK + BK)}{AK} - 2$ (Do DF = $\frac{1}{2}$AK) $\Rightarrow \frac{CE}{DE} = \frac{2(AK + BK)}{AK} - 2 = \frac{2BK}{AK}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BG}{GD} = \frac{CE}{DE} \Rightarrow$ EG // BC

Gọi giao điểm của EG và DF là O ta có $\frac{OG}{MC} = \frac{OE}{MB} \left(= \frac{FO}{FM} \right) \Rightarrow$ OG = OE

Bài tập về nhà

Bài 1:

Cho tứ giác ABCD, AC và BD cắt nhau tại O. Đường thẳng qua O và song song với BC cắt AB ở E; đường thẳng song song với CD qua O cắt AD tại F

a) Chứng minh FE // BD

b) Từ O kẻ các đường thẳng song song với AB, AD cắt BD, CD tại G và H.

Chứng minh: CG. DH = BG. CH

Bài 2:

Cho hình bình hành ABCD, điểm M thuộc cạnh BC, điểm N thuộc tia đối của tia BC sao cho BN = CM; các đường thẳng DN, DM cắt AB theo thứ tự tại E, F.

Chứng minh:

a) $AE^2 = EB.FE$

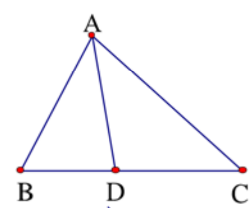
b) $EB = \left(\dfrac{AN}{DF}\right)^2.EF$

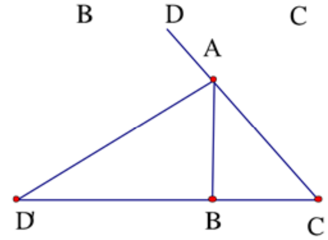
CHUYÊN ĐỀ 7 – CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ TALÉT VÀ TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

A. Kiến thức:

2. Tính chất đường phân giác:

ΔABC ,AD là phân giác góc A $\Rightarrow \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$





AD'là phân giác góc ngoài tại A: $\dfrac{BD'}{CD'} = \dfrac{AB}{AC}$

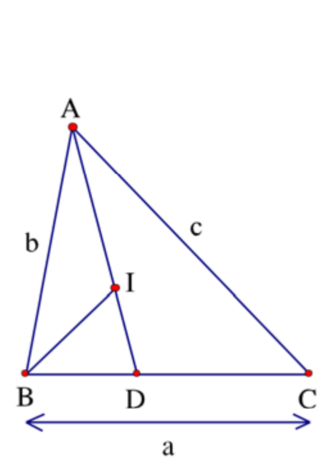
B. Bài tập vận dụng

1. Bài 1:

Cho ΔABC có BC = a, AB = b, AC = c, phân giác AD

a) Tính độ dài BD, CD

b) Tia phân giác BI của góc B cắt AD ở I; tính tỉ số: $\dfrac{AI}{ID}$



Giải

a) AD là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{b}$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{CD + BD} = \dfrac{c}{b + c} \Rightarrow \dfrac{BD}{a} = \dfrac{c}{b + c} \Rightarrow BD = \dfrac{ac}{b + c}$

Do đó $CD = a - \dfrac{ac}{b + c} = \dfrac{ab}{b + c}$

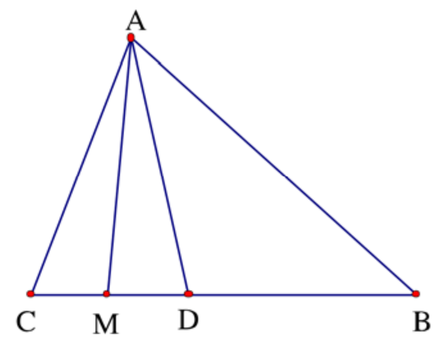
b) BI là phân giác của $\widehat{ABC}$ nên $\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{AB}{BD} = c : \dfrac{ac}{b + c} = \dfrac{b + c}{a}$

2. Bài 2:

Cho ΔABC, có $\widehat{B} < 60^0$ phân giác AD

a) Chứng minh AD < AB

b) Gọi AM là phân giác của ΔADC. Chứng minh rằng BC > 4 DM



Giải

a)Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{C} + \dfrac{\widehat{A}}{2} > \dfrac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} = \dfrac{180^0 - \widehat{B}}{2} = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{ADB} > \widehat{B} \Rightarrow AD < AB$

b) Gọi BC = a, AC = b, AB = c, AD = d

Trong ΔADC, AM là phân giác ta có

$\dfrac{DM}{CM} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow \dfrac{DM}{CM + DM} = \dfrac{AD}{AD + AC} \Rightarrow \dfrac{DM}{CD} = \dfrac{AD}{AD + AC}$

$\Rightarrow DM = \dfrac{CD.AD}{AD + AC} = \dfrac{CD.\ d}{b + d}$; $CD = \dfrac{ab}{b + c}$ (Vận dụng bài 1) $\Rightarrow DM = \dfrac{abd}{(b + c)(b + d)}$

Để c/m BC > 4 DM ta c/m $a > \dfrac{4abd}{(b + c)(b + d)}$ hay $(b + d)(b + c) > 4bd$ (1)

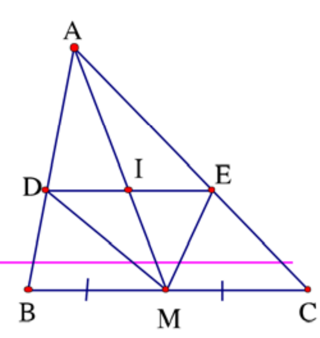
Thật vậy : do $c > d \Rightarrow (b + d)(b + c) > (b + d)^2 \geq 4bd$. Bất đẳng thức (1) được c/m

Bài 3:

Cho ΔABC, trung tuyến AM, các tia phân giác của các góc AMB , AMC cắt AB, AC theo thứ tự ở D và E

a) Chứng minh DE // BC

b) Cho BC = a, AM = m. Tính độ dài DE



c) Tìm tập hợp các giao diểm I của AM và DE nếu ΔABC có BC cố định, AM = m không đổi

d) ΔABC có điều kiện gì thì DE là đường trung bình của nó

Giải

a) MD là phân giác của $\widehat{AMB}$ nên $\frac{DA}{DB} = \frac{MB}{MA}$ (1)

ME là phân giác của $\widehat{AMC}$ nên $\frac{EA}{EC} = \frac{MC}{MA}$ (2)

Từ (1), (2) và giả thiết MB = MC ta suy ra $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC} \Rightarrow$ DE // BC

b) DE // BC $\Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AI}{AM}$. Đặt DE = x $\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{m - \frac{x}{2}}{m} \Rightarrow x = \frac{2a.m}{a + 2m}$

c) Ta có: MI = $\frac{1}{2}$ DE = $\frac{a.m}{a + 2m}$ không đổi $\Rightarrow$ I luôn cách M một đoạn không đổi nên tập hợp các điểm I là đường tròn tâm M, bán kính MI = $\frac{a.m}{a + 2m}$ (Trừ giao điểm của nó với BC

d) DE là đường trung bình của $\Delta ABC \Leftrightarrow$ DA = DB $\Leftrightarrow$ MA = MB $\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông ở A

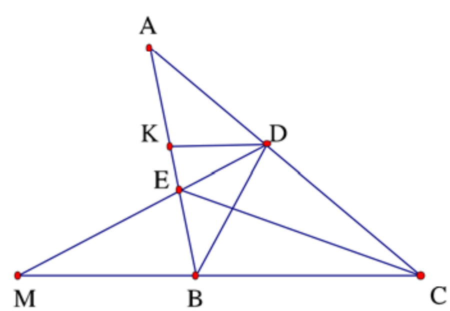
4. Bài 4:

Cho ΔABC (AB < AC) các phân giác BD, CE

a) Đường thẳng qua D và song song với BC cắt AB ở K, chứng minh E nằm giữa B và K

b) Chứng minh: CD > DE > BE

Giải



a) BD là phân giác nên

$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} < \frac{AC}{BC} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{AD}{DC} < \frac{AE}{EB}$ (1)

Mặt khác KD // BC nên $\frac{AD}{DC} = \frac{AK}{KB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AK}{KB} < \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{AK + KB}{KB} < \frac{AE + EB}{EB}$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{KB} < \dfrac{AB}{EB} \Rightarrow KB > EB \Rightarrow$ E nằm giữa K và B

b) Gọi M là giao điểm của DE và CB. Ta có $\widehat{CBD} = \widehat{KDB}$ (Góc so le trong) $\Rightarrow \widehat{KBD} = \widehat{KDB}$

mà E nằm giữa K và B nên $\widehat{KDB} > \widehat{EDB} \Rightarrow \widehat{KBD} > \widehat{EDB} \Rightarrow \widehat{EBD} > \widehat{EDB} \Rightarrow EB < DE$

Ta lại có $\widehat{CBD} + \widehat{ECB} = \widehat{EDB} + \widehat{DEC} \Rightarrow \widehat{DEC} > \widehat{ECB} \Rightarrow \widehat{DEC} > \widehat{DCE}$ (Vì $\widehat{DCE} = \widehat{ECB}$)

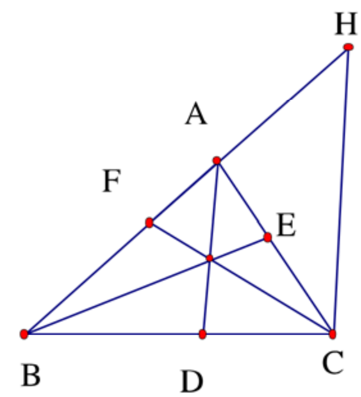
Suy ra CD > ED $\Rightarrow$ CD > ED > BE

5. Bài 5:

Cho ΔABC với ba đường phân giác AD, BE, CF. Chứng minh

a. $\dfrac{DB}{DC}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB} = 1$.

b. $\dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{BE} + \dfrac{1}{CF} > \dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{CA} + \dfrac{1}{AB}$.



Giải

a)AD là đường phân giác của $\widehat{BAC}$ nên ta có: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ (1)

Tương tự: với các phân giác BE, CF ta có: $\dfrac{EC}{EA} = \dfrac{BC}{BA}$ (2) ;

$\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{CA}{CB}$ (3)

Tứừ (1); (2); (3) suy ra: $\dfrac{DB}{DC}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{BC}{BA}.\dfrac{CA}{CB} = 1$

b) Đặt AB = c , AC = b , BC = a , AD = d_a.

Qua C kẻ đường thẳng song song với AD , cắt tia BA ở H.

Theo ĐL Talét ta có: $\dfrac{AD}{CH} = \dfrac{BA}{BH} \Rightarrow AD = \dfrac{BA.CH}{BH} = \dfrac{c.CH}{BA + AH} = \dfrac{c}{b + c}.CH$

Do CH < AC + AH = 2b nên: $d_a < \dfrac{2bc}{b+c} \Rightarrow \dfrac{1}{d_a} > \dfrac{b+c}{2bc} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{d_a} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

Chứng minh tương tự ta có : $\dfrac{1}{d_b} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}\right)$ Và $\dfrac{1}{d_c} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$ Nên:

$$\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} > \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right] \Leftrightarrow \frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} > \frac{1}{2}.2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{d_a}+\frac{1}{d_b}+\frac{1}{d_c} > \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \text{ (đpcm)}$$

Bài tập về nhà

Cho ΔABC có BC = a, AC = b, AB = c (b > c), các phân giác BD, CE

a) Tính độ dài CD, BE rồi suy ra CD > BE

b) Vẽ hình bình hành BEKD. Chứng minh: CE > EK

c) Chứng minh CE > BD

CHUYÊN ĐỀ 8 – CHỮ SỐ TẬN CÙNG

A. Kiến thức:

1. Một số tính chất:

a) Tính chất 1:

+ Các số có chữ số tận cùng là 0; 1; 5; 6khi nâng lên luỹ thừa bậc bất kỳ nào thì chữ số tận cùng không thay đổi

+ Các số có chữ số tận cùng là 4; 9 khi nâng lên luỹ thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng không thay đổi

+ Các số có chữ số tận cùng là 3; 7; 9 khi nâng lên luỹ thừa bậc 4n ($n \in N$) thì chữ số tận cùng là 1

+ Các số có chữ số tận cùng là 2; 4; 8 khi nâng lên luỹ thừa bậc 4n ($n \in N$) thì chữ số tận cùng là 6

b) Tính chất 2: Một số tự nhiên bất kỳ khi nâng lên luỹ thừa bậc 4n + 1 ($n \in N$) thì chữ số tận cùng không thay đổi

c) Tính chất 3:

+ Các số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên luỹ thừa bậc 4n + 3 ($n \in N$) thì chữ số tận cùng là 7; Các số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên luỹ thừa bậc 4n + 3 ($n \in N$) thì chữ số tận cùng là 3

+ Các số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên luỹ thừa bậc 4n + 3 ($n \in N$) thì chữ số tận cùng là 8; Các số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên luỹ thừa bậc 4n + 3 ($n \in N$) thì chữ số tận cùng là 2

+ Các số có chữ số tận cùng là 0; 1; 4; 5; 6; 9 khi nâng lên luỹ thừa bậc 4n + 3 ($n \in N$) thì chữ số tận cùng là không đổi

2. Một số phương pháp:

+ Tìm chữ số tận cùng của $x = a^m$ thì ta xét chữ số tận cùng của a:

- Nếu chữ số tận cùng của a là các chữ số: 0; 1; 5; 6 thì chữ số tận cùng của x là 0; 1; 5; 6

- Nếu chữ số tận cùng của a là các chữ số: 3; 7; 9 thì :

* Vì $a^m = a^{4n+r} = a^{4n} . a^r$

Nếu r là 0; 1; 2; 3 thì chữ số tận cùng của x là chữ số tận cùng của a^r

Nếu r là 2; 4; 8 thì chữ số tận cùng của x là chữ số tận cùng của $6.a^r$

B. Một số ví dụ:

Bài 1:

Tìm chữ số tận cùng của

a) 243^6 ; 167^{2010}

b) $\left(7^9\right)^9$; $\left(14^{14}\right)^{14}$; $\left[\left(4^5\right)^6\right]^7$

Giải

a) $243^6 = 243^{4+2} = 243^4 . 243^2$

243^2 có chữ số tận cùng là 9 nên chữ số tận cùng của 243^6 là 9

Ta có 2010 = 4.502 + 2 nên $167^{2010} = 167^{4.502+2} = 167^{4.502}.167^2$

$167^{4.502}$ có chữ số tận cùng là 6; 167^2 có chữ số tận cùng là 9 nên chữ số tận cùng của 167^{2010} là chữ số tận cùng của tích 6.9 là 4

b) Ta có:

+) $9^9 - 1 = (9 - 1)(9^8 + 9^7 + ...+ 9 + 1) = 4k$ $(k \in N) \Rightarrow 9^9 = 4k + 1 \Rightarrow \left(7^9\right)^9 = 7^{4k+1}$

$= 7^{4k}.7$ nên có chữ số tận cùng là 7

$14^{14} = (12 + 2)^{14} = 12^{14} + 12.14^{13}.2 + ...+ 12.12.2^{13} + 2^{14}$ chia hết cho 4, vì các hạng tử trước 2^{14} đều có nhân tử 12 nên chia hết cho 4; hạng tử $2^{14} = 4^7$ chia hết cho 4 hay

$14^{14} = 4k \Rightarrow \left(14^{14}\right)^{14} = 14^{4k}$ có chữ số tận cùng là 6

+) 5^6 có chữ số tận cùng là 5 nên $\left(5^6\right)^7 = 5.(2k + 1) \Rightarrow 5.(2k + 1) - 1 = 4$ q (k, q $\in$N)

$\Rightarrow 5.(2k + 1) = 4q + 1 \Rightarrow \left[\left(4^5\right)^6\right]^7 = 4^{4q+1} = 4^{4q} . 4$ có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng tích 6. 4 là 4

Bài 2: Tìm chữ số tận cùng của

$A = 2^1 + 3^5 + 4^9 + 5^{13} + ... + 2004^{8009}$

Giải

a) Luỹ thừa của mọi số hạng của A chia 4 thì dư 1(Các số hạng của A có dạng $n^{4(n-2)+1}$ ($n \in \{2; 3; ...; 2004\}$) nên mọi số hạng của A và luỹ thừa của nó có chữ số tận cùng giống nhau (Tính chất 2) nên chữ số tận cùng của A là chữ số tận cùng của tổng các số hạng

Từ 2 đến 2004 có 2003 số hạng trong đó có 2000 : 10 = 200 số hạng có chữ số tận cùng bằng 0,Tổng các chữ số tận cùng của A là

$(2 + 3 + ...+ 9) + 199.(1 + 2 + ... + 9) + 1 + 2 + 3 + 4 = 9009$ có chữ số tận cùng là 9

Vây A có chữ số tận cùng là 9

Bài 3: Tìm

a) Hai chữ số tận cùng của 3^{999}; $\left(7^7\right)^7$

b) Ba chữ số tận cùng của 3^{100}

c) Bốn chữ số tận cùng của 5^{1994}

Giải

a) $3^{999} = 3.3^{998} = 3.\ 9^{499} = 3.(10 - 1)^{499} = 3.(10^{499} - 499.10^{498} + ...+499.10 - 1)$

$= 3.[BS(100) + 4989] = ...67$

$7^7 = (8 - 1)^7 = BS(8) - 1 = 4k + 3 \Rightarrow \left(7^7\right)^7 = 7^{4k+3} = 7^3.\ 7^{4k} = 343.(...01)^{4k} = ...43$

b) $3^{100} = 9^{50} = (10 - 1)^{50} = 10^{50} - 50.\ 10^{49} + ...+ \dfrac{50.49}{2}.\ 10^2 - 50.10 + 1$

$= 10^{50} - 50.\ 10^{49} + ...+ \dfrac{49}{2}.\ 5000 - 500 + 1 = BS(1000) + 1 = ...001$

Chú ý:

+ Nếu n là số lẻ không chi hết cho 5 thì ba chữ số tận cùng của n^{100} là 001

+ Nếu một số tự nhiên n không chia hết cho 5 thì n^{100} chia cho 125 dư 1

HD C/m: $n = 5k + 1$; $n = 5k + 2$

+ Nếu n là số lẻ không chia hết cho 5 thì n^{101} và n có ba chữ số tận cùng như nhau

c) Cách 1: $5^4 = 625$

Ta thấy số $(...0625)^n = ...0625$

$5^{1994} = 5^{4k+2} = 25.(5^4)^k = 25.(0625)^k = 25.(...0625) = ...5625$

Cách 2: Tìm số dư khi chia 5^{1994} cho $10000 = 2^4.\ 5^4$

Ta thấy $5^{4k} - 1$ chia hết cho $5^4 - 1 = (5^2 - 1)(5^2 + 1)$ chia hết cho 16

Ta có: $5^{1994} = 5^6.(5^{1988} - 1) + 5^6$

Do 5^6 chia hết cho 5^4, còn $5^{1988} - 1$ chia hết cho 16 nên $5^6(5^{1988} - 1)$ chia hết cho 10000

Ta có $5^6 = 15625$

Vậy bốn chữ số tận cùng của 5^{1994} là 5625

Chú ý: Nếu viết $5^{1994} = 5^2.(5^{1992} - 1) + 5^2$

Ta có: $5^{1992} - 1$ chia hết cho 16; nhưng 5^2 không chia hết cho 5^4

Như vậy trong bài toán này ta cần viết 5^{1994} dưới dạng $5^n(5^{1994-n} - 1) + 5^n$; $n \geq 4$ và $1994 - n$ chia hết cho 4

C. Vận dụng vào các bài toán khác

Bài 1:

Chứng minh rằng: Tổng sau không là số chính phương

a) $A = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k$ ($k \in N$, k chẵn)

b) $B = 2004^{2004k} + 2001$

Giải

a) Ta có:

19^k có chữ số tận cùng là 1

5^k có chữ số tận cùng là 5

1995^k có chữ số tận cùng là 5

1996^k có chữ số tận cùng là 6

Nên A có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng của tổng các chữ số tận cùng của tổng $1 + 5 + 5 + 6 = 17$, có chữ số tận cùng là 7 nên không thể là số chính phương

b) Ta có :k chẵn nên $k = 2n$ ($n \in N$)

$2004^{2004k} = (2004^4)^{501k} = (2004^4)^{1002n} = (...6)^{1002n}$ là luỹ thừa bậc chẵn của số có chữ số tận cùng là 6 nên có chữ số tận cùng là 6 nên $B = 2004^{2004k} + 2001$ có chữ số tận cùng là 7, do đó B không là số chính phương

Bài 2:

Tìm số dư khi chia các biểu thức sau cho 5

a) $A = 2^1 + 3^5 + 4^9 + ... + 2003^{8005}$

b) $B = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + ... + 2005^{8007}$

Giải

a) Chữ số tận cùng của A là chữ số tận cùng của tổng

$(2 + 3 + ... + 9) + 199.(1 + 2 + ... + 9) + 1 + 2 + 3 = 9005$

Chữ số tận cùng của A là 5 nên chia A cho 5 dư 0

b)Tương tự, chữ số tận cùng của B là chữ số tận cùng của tổng

$(8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 199.(1 + ... + 9) + 8 + 7 + 4 + 5 = 9024$

B có chữ số tận cùng là 4 nên B chia 5 dư 4

Bài tập về nhà

Bài 1: Tìm chữ số tận cùng của: 3^{102} ; $\left(7^3\right)^5$; $3^{20} + 2^{30} + 7^{15} - 8^{16}$

Bài 2: Tìm hai, ba chữ số tận cùng của: 3^{555} ; $\left(2^7\right)^9$

Bài 3: Tìm số dư khi chia các số sau cho 2; cho 5:

a) 3^8; $14^{15} + 15^{14}$

b) $2009^{2010} - 2008^{2009}$

CHUYÊN ĐỀ 9 – ĐỒNG DƯ

A. Định nghĩa:

Nếu hai số nguyên a và b có cùng số dư trong phép chia cho một số tự nhiên $m \neq 0$ thì ta nói a đồng dư với b theo môđun m, và có đồng dư thức: $a \equiv b \pmod m$

Ví dụ: $7 \equiv 10 \pmod 3$, $12 \equiv 22 \pmod{10}$

+ Chú ý: $a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow a - b \vdots m$

B. Tính chất của đồng dư thức:

1. Tính chất phản xạ: $a \equiv a \pmod m$

2. Tính chất đối xứng: $a \equiv b \pmod m \Rightarrow b \equiv a \pmod m$

3. Tính chất bắc cầu: $a \equiv b \pmod m$, $b \equiv c \pmod m$ thì $a \equiv c \pmod m$

4. Cộng , trừ từng vế: $\begin{cases} a \equiv b \pmod m \\ c \equiv d \pmod m \end{cases} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \pmod m$

Hệ quả:

a) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod m$

b) $a + b \equiv c \pmod m \Rightarrow a \equiv c - b \pmod m$

c) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow a + km \equiv b \pmod m$

5. Nhân từng vế : $\begin{cases} a \equiv b \pmod m \\ c \equiv d \pmod m \end{cases} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod m$

Hệ quả:

a) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow ac \equiv bc \pmod m$ $(c \in Z)$

b) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod m$

6. Có thể nhân (chia) hai vế và môđun của một đồng dư thức với một số nguyên dương

$a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}$

Chẳng hạn: $11 \equiv 3 \pmod 4 \Leftrightarrow 22 \equiv 6 \pmod 8$

7. $\begin{cases} ac \equiv bc \pmod m \\ (c, m) = 1 \end{cases} \Rightarrow a \equiv b \pmod m$

Chẳng hạn : $\begin{cases} 16 \equiv 2 \pmod 7 \\ (2, 7) = 1 \end{cases} \Rightarrow 8 \equiv 1 \pmod 7$

C. Các ví dụ:

1. Ví dụ 1:

Tìm số dư khi chia 92^{94} cho 15

Giải

Ta thấy $92 \equiv 2 \pmod{15} \Rightarrow 92^{94} \equiv 2^{94} \pmod{15}$ (1)

Lại có $2^4 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow (2^4)^{23}.\ 2^2 \equiv 4 \pmod{15}$ hay $2^{94} \equiv 4 \pmod{15}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $92^{94} \equiv 4 \pmod{15}$ tức là 92^{94} chia 15 thì dư 4

2. Ví dụ 2:

Chứng minh: trong các số có dạng $2^n - 4 (n \in N)$, có vô số số chia hết cho 5

Thật vậy:

Từ $2^4 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4k} \equiv 1 \pmod 5$ (1)

Lại có $2^2 \equiv 4 \pmod 5$ (2)

Nhân (1) với (2), vế theo vế ta có: $2^{4k+2} \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4k+2} - 4 \equiv 0 \pmod 5$

Hay $2^{4k+2} - 4$ chia hết cho 5 với mọi k = 0, 1, 2, ... hay ta được vô số số dạng $2^n - 4$ $(n \in N)$ chia hết cho 5

Chú ý: khi giải các bài toán về đồng dư, ta thường quan tâm đến $a \equiv \pm 1 \pmod m$

$a \equiv 1 \pmod m \Rightarrow a^n \equiv 1 \pmod m$

$a \equiv -1 \pmod m \Rightarrow a^n \equiv (-1)^n \pmod m$

3. Ví dụ 3: Chứng minh rằng

a) $20^{15} - 1$ chia hết cho 11 b) $2^{30} + 3^{30}$ chi hết cho 13

c) $555^{222} + 222^{555}$ chia hết cho 7

Giải

a) $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ (1); $10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 10^5 \equiv -1 \pmod{11}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2^5.\ 10^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 20^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 20^5 - 1 \equiv 0 \pmod{11}$

b) $2^6 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{30} \equiv -1 \pmod{13}$ (3)

$3^3 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 3^{30} \equiv 1 \pmod{13}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $2^{30} + 3^{30} \equiv -1 + 1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{30} + 3^{30} \equiv 0 \pmod{13}$

Vậy: $2^{30} + 3^{30}$ chi hết cho 13

c) $555 \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow 555^{222} \equiv 2^{222} \pmod 7$ (5)

$2^3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow (2^3)^{74} \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 555^{222} \equiv 1 \pmod 7$ (6)

$222 \equiv -2 \pmod 7 \Rightarrow 222^{555} \equiv (-2)^{555} \pmod 7$

Lại có $(-2)^3 \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow [(-2)^3]^{185} \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow 222^{555} \equiv -1 \pmod 7$

Ta suy ra $555^{222} + 222^{555} \equiv 1 - 1 \pmod 7$ hay $555^{222} + 222^{555}$ chia hết cho 7

4. Ví dụ 4: Chứng minh rằng số $2^{2^{4n+1}} + 7$ chia hết cho 11 với mọi số tự nhiên n

Thật vậy:Ta có: $2^5 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

Xét số dư khi chia 2^{4n+1} cho 10. Ta có: $2^4 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4n} \equiv 1 \pmod 5$

$\Rightarrow 2.2^{4n} \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2$

Nên $2^{2^{4n+1}} + 7 = 2^{10k+2} + 7 = 4.\, 2^{10k} + 7 = 4.(BS\ 11 + 1)^k + 7 = 4.(BS\ 11 + 1^k) + 7$

$= BS\ 11 + 11$ chia hết cho 11

Bài tập về nhà:

Bài 1: CMR:

a) $2^{28} - 1$ chia hết cho 29

b)Trong các số có dạng$2^n - 3$ có vô số số chia hết cho 13

Bài 2: Tìm số dư khi chia $A = 20^{11} + 22^{12} + 1996^{2009}$ cho 7.

CHUYÊN ĐỀ 10 – TÍNH CHIA HẾT ĐỐI VỚI ĐA THỨC

A. Dạng 1: Tìm dư của phép chia mà không thực hiện phép chia

1. Đa thức chia có dạng x – a (a là hằng)

a) Định lí Bơdu (Bezout, 1730 – 1783):

Số dư trong phép chia đa thức f(x) cho nhị thức x – a bằng giá trị của f(x) tại x = a

Ta có: $f(x) = (x - a).\, Q(x) + r$

Đẳng thức đúng với mọi x nên với x = a, ta có

$f(a) = 0.Q(a) + r$ hay $f(a) = r$

Ta suy ra: f(x) chia hết cho x – a $\Leftrightarrow$ f(a) = 0

b) f(x) có tổng các hệ số bằng 0 thì chia hết cho x – 1

c) f(x) có tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì chia hết cho x + 1

Ví dụ : Không làm phép chia, hãy xét xem $A = x^3 - 9x^2 + 6x + 16$ chia hết cho

$B = x + 1$, $C = x - 3$ không

Kết quả:

A chia hết cho B, không chia hết cho C

2. Đa thức chia có bậc hai trở lên

Cách 1: Tách đa thức bị chia thành tổng của các đa thức chia hết cho đa thức chia và dư

Cách 2: Xét giá trị riêng: gọi thương của phép chia là Q(x), dư là ax + b thì

$f(x) = g(x).\, Q(x) + ax + b$

Ví dụ 1: Tìm dư của phép chia $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ cho $x^2 - 1$

Cách 1: Ta biết rằng $x^{2n} - 1$ chia hết cho $x^2 - 1$ nên ta tách:

$x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x^7 - x) + (x^5 - x) + (x^3 - x) + 3x + 1$

$= x(x^6 - 1) + x(x^4 - 1) + x(x^2 - 1) + 3x + 1$ chia cho $x^2 - 1$ dư $3x + 1$

Cách 2:

Gọi thương của phép chia là Q(x), dư là ax + b, Ta có:

$x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x - 1)(x + 1).Q(x) + ax + b$ với mọi x

Đẳng thức đúng với mọi x nên với x = 1, ta có 4 = a + b (1)

với x = - 1 ta có - 2 = - a + b (2)

Từ (1) và (2) suy ra a = 3, b =1 nên ta được dư là 3x + 1

Ghi nhớ:

$a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$ ($a \neq -b$)

$a^n + b^n$ (n lẻ) chia hết cho $a + b$ ($a \neq -b$)

Ví dụ 2: Tìm dư của các phép chia

a) x^{41} chia cho $x^2 + 1$

b) $x^{27} + x^9 + x^3 + x$ cho $x^2 - 1$

c) $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7$ cho $x^2 + 1$

Giải

a) $x^{41} = x^{41} - x + x = x(x^{40} - 1) + x = x[(x^4)^{10} - 1] + x$ chia cho $x^4 - 1$ dư x nên chia cho $x^2 + 1$ dư x

b) $x^{27} + x^9 + x^3 + x = (x^{27} - x) + (x^9 - x) + (x^3 - x) + 4x$

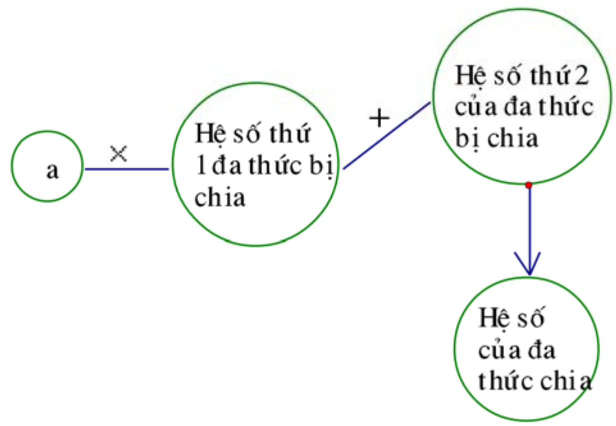
$= x(x^{26} - 1) + x(x^8 - 1) + x(x^2 - 1) + 4x$ chia cho $x^2 - 1$ dư $4x$

c) $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7 = x(x^{98} + 1) + x(x^{54} + 1) + x(x^{10} + 1) - 2x + 7$

chia cho $x^2 + 1$ dư $-2x + 7$

B. Sơ đồ HORNƠ

1. Sơ đồ



Để tìm kết quả của phép chia f(x) cho x – a (a là hằng số), ta sử dụng sơ đồ hornơ

Nếu đa thức bị chia là $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, đa thức chia là x – a ta được thương là

	a_0	a_1	a_2	a_3
a	$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a_1$	$b_2 = ab_1 + a_2$	$r = ab_2 + a_3$

$b_0x^2 + b_1x + b_2$, dư r thì ta có

Ví dụ:

Đa thức bị chia: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$, đa thức chia x – 2

Ta có sơ đồ

	1	- 5	8	- 4
2	1	2. 1 + (- 5) = -3	2.(- 3) + 8 = 2	r = 2. 2 +(- 4) = 0

Vậy: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 2)(x^2 - 3x + 2) + 0$ là phép chia hết

2. Áp dụng sơ đồ Hornơ để tính giá trị của đa thức tại x = a

Giá trị của f(x) tại x = a là số dư của phép chia f(x) cho x – a

1. Ví dụ 1:

Tính giá trị của A = $x^3 + 3x^2 - 4$ tại x = 2010

Ta có sơ đồ:

	1	3	0	-4
a = 2010	1	2010.1+3 = 2013	2010.2013 + 0 = 4046130	2010.4046130 – 4 = 8132721296

Vậy: A(2010) = 8132721296

C. Chưngs minh một đa thức chia hết cho một đa thức khác

I. Phương pháp:

1. Cách 1: Phân tích đa thức bị chia thành nhân tử có một thừa số là đa thức chia

2. Cách 2: biến đổi đa thức bị chia thành một tổng các đa thức chia hết cho đa thức chia

3. Cách 3: Biến đổi tương đương $f(x) \vdots g(x) \Leftrightarrow f(x) \pm g(x) \vdots g(x)$

4. cách 4: Chứng tỏ mọi nghiệm của đa thức chia đều là nghiệm của đa thức bị chia

II. Ví dụ

1.Ví dụ 1:

Chứng minh rằng: $x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$

Ta có: $x^{8n} + x^{4n} + 1 = x^{8n} + 2x^{4n} + 1 - x^{4n} = (x^{4n} + 1)^2 - x^{4n} = (x^{4n} + x^{2n} + 1)(x^{4n} - x^{2n} + 1)$

Ta lại có: $x^{4n} + x^{2n} + 1 = x^{4n} + 2x^{2n} + 1 - x^{2n} = (x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1)$

chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$

Vậy: $x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$

2. Ví dụ 2:

Chứng minh rằng: $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ với mọi m, n $\in$ N

Ta có: $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1 = x^{3m+1} - x + x^{3n+2} - x^2 + x^2 + x + 1$

$= x(x^{3m} - 1) + x^2(x^{3n} - 1) + (x^2 + x + 1)$

Vì $x^{3m} - 1$ và $x^{3n} - 1$ chia hết cho $x^3 - 1$ nên chia hết cho $x^2 + x + 1$

Vậy: $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ với mọi m, n $\in$ N

3. Ví dụ 3: Chứng minh rằng

$f(x) = x^{99} + x^{88} + x^{77} + ... + x^{11} + 1$ chia hết cho $g(x) = x^9 + x^8 + x^7 + ... + x + 1$

Ta có: $f(x) - g(x) = x^{99} - x^9 + x^{88} - x^8 + x^{77} - x^7 + ... + x^{11} - x + 1 - 1$

$= x^9(x^{90} - 1) + x^8(x^{80} - 1) + ... + x(x^{10} - 1)$ chia hết cho $x^{10} - 1$

Mà $x^{10} - 1 = (x - 1)(x^9 + x^8 + x^7 + ... + x + 1)$ chia hết cho $x^9 + x^8 + x^7 + ... + x + 1$

Suy ra f(x) – g(x) chia hết cho $g(x) = x^9 + x^8 + x^7 + ... + x + 1$

Nên $f(x) = x^{99} + x^{88} + x^{77} + ... + x^{11} + 1$ chia hết cho $g(x) = x^9 + x^8 + x^7 + ... + x + 1$

4. Ví dụ 4: CMR: $f(x) = (x^2 + x - 1)^{10} + (x^2 - x + 1)^{10} - 2$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x$

Đa thức $g(x) = x^2 - x = x(x - 1)$ có 2 nghiệm là x = 0 và x = 1

Ta có $f(0) = (-1)^{10} + 1^{10} - 2 = 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của f(x) $\Rightarrow$ f(x) chứa thừa số x

$f(1) = (1^2 + 1 - 1)^{10} + (1^2 - 1 + 1)^{10} - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm của f(x) f(x) chứa thừa số x – 1, mà các thừa số x và x – 1 không có nhân tử chung, do đó f(x) chia hết cho x(x – 1) hay $f(x) = (x^2 + x - 1)^{10} + (x^2 - x + 1)^{10} - 2$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x$

5. Ví dụ 5: Chứng minh rằng

a) $A = x^2 - x^9 - x^{1945}$ chia hết cho $B = x^2 - x + 1$

b) $C = 8x^9 - 9x^8 + 1$ chia hết cho $D = (x - 1)^2$

c) $C(x) = (x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ chia hết cho $D(x) = x(x + 1)(2x + 1)$

Giải

a) $A = x^2 - x^9 - x^{1945} = (x^2 - x + 1) - (x^9 + 1) - (x^{1945} - x)$

Ta có: $x^2 - x + 1$ chia hết cho $B = x^2 - x + 1$

$x^9 + 1$ chia hết cho $x^3 + 1$ nên chia hết cho $B = x^2 - x + 1$

$x^{1945} - x = x(x^{1944} - 1)$ chia hết cho $x^3 + 1$ (cùng có nghiệm là x = - 1)

nên chia hết cho $B = x^2 - x + 1$

Vậy $A = x^2 - x^9 - x^{1945}$ chia hết cho $B = x^2 - x + 1$

b) $C = 8x^9 - 9x^8 + 1 = 8x^9 - 8 - 9x^8 + 9 = 8(x^9 - 1) - 9(x^8 - 1)$

$= 8(x - 1)(x^8 + x^7 + ... + 1) - 9(x - 1)(x^7 + x^6 + ... + 1)$

$= (x - 1)(8x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)$

$(8x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)$ chia hết cho x – 1 vì có tổng hệ số bằng 0

suy ra $(x - 1)(8x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)$ chia hết cho $(x - 1)^2$

c) Đa thức chia $D(x) = x(x + 1)(2x + 1)$ có ba nghiệm là x = 0, x = - 1, $x = -\frac{1}{2}$

Ta có:

$C(0) = (0 + 1)^{2n} - 0^{2n} - 2.0 - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của C(x)

$C(-1) = (-1 + 1)^{2n} - (-1)^{2n} - 2.(-1) - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ là nghiệm của C(x)

$C(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2} + 1)^{2n} - (-\frac{1}{2})^{2n} - 2.(-\frac{1}{2}) - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ là nghiệm của C(x)

Mọi nghiệm của đa thức chia là nghiệm của đa thức bị chia $\Rightarrow$ đpcm

6. Ví dụ 6:

Cho f(x) là đa thức có hệ số nguyên. Biết f(0), f(1) là các số lẻ. Chứng minh rằng f(x) không có nghiệm nguyên

Giả sử x = a là nghiệm nguyên của f(x) thì f(x) = (x – a). Q(x). Trong đó Q(x) là đa thức có hệ số nguyên, do đó f(0) = - a. Q(0), f(1) = (1 – a). Q(1)

Do f(0) là số lẻ nên a là số lẻ, f(1) là số lẻ nên 1 – a là số lẻ, mà 1 – a là hiệu của 2 số lẻ không thể là số lẻ, mâu thuẩn

Vậy f(x) không có nghiệm nguyên

Bài tập về nhà:

Bài 1: Tìm số dư khi

a) x^{43} chia cho $x^2 + 1$

b) $x^{77} + x^{55} + x^{33} + x^{11} + x + 9$ cho $x^2 + 1$

Bài 2: Tính giá trị của đa thức $x^4 + 3x^3 - 8$ tại x = 2009

Bài 3: Chứng minh rằng

a) $x^{50} + x^{10} + 1$ chia hết cho $x^{20} + x^{10} + 1$

b) $x^{10} - 10x + 9$ chia hết cho $x^2 - 2x + 1$

c) $x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1$ chia hết cho $x^2 + 2x + 1$

d) $(x + 1)^{4n+2} + (x - 1)^{4n+2}$ chia hết cho $x^2 + 1$

e) $(x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$ chia hết cho $(x + 1)(x - 1)^2$

CHUYÊN ĐỀ 11 – CÁC BÀI TOÁN VỀ BIỂU THỨC HỮU TỈ

A. Nhắc lại kiến thức:

Các bước rút gọn biểu thức hửu tỉ

a) Tìm ĐKXĐ: Phân tích mẫu thành nhân tử, cho tất cả các nhân tử khác 0

b) Phân tích tử thành nhân , chia tử và mẫu cho nhân tử chung

B. Bài tập:

Bài 1: Cho biểu thức A = $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-10x^2+9}$

a) Rút gọn A

b) tìm x để A = 0

c) Tìm giá trị của A khi $|2x-1|=7$

Giải

a)Đkxđ :

$$x^4 - 10x^2 + 9 \neq 0 \Leftrightarrow [(x^2)^2 - x^2] - (9x^2 - 9) \neq 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 9) \neq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \\ x \neq 3 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq \pm 3 \end{cases}$$

Tử : $x^4 - 5x^2 + 4 = [(x^2)^2 - x^2] - (x^2 - 4) = x^2(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1)$

$= (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$

Với $x \neq \pm 1$; $x \neq \pm 3$ thì

$$A = \frac{(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)}$$

b) $A = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)} = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

c) $|2x-1|=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=7 \\ 2x-1=-7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=8 \\ 2x=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-3 \end{array}\right.$

* Với x = 4 thì $A = \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)} = \dfrac{(4 - 2)(4 + 2)}{(4 - 3)(4 + 3)} = \dfrac{12}{7}$

* Với x = - 3 thì A không xác định

2. Bài 2:

Cho biểu thức B = $\dfrac{2x^3-7x^2-12x+45}{3x^3-19x^2+33x-9}$

a) Rút gọn B

b) Tìm x để B > 0

Giải

a) Phân tích mẫu: $3x^3 - 19x^2 + 33x - 9 = (3x^3 - 9x^2) - (10x^2 - 30x) + (3x - 9)$

$= (x - 3)(3x^2 - 10x + 3) = (x - 3)[(3x^2 - 9x) - (x - 3)] = (x - 3)^2(3x - 1)$

Đkxđ: $(x - 3)^2(3x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ và $x \neq \dfrac{1}{3}$

b) Phân tích tử, ta có:

$2x^3 - 7x^2 - 12x + 45 = (2x^3 - 6x^2) - (x^2 - 3x) - (15x - 45) = (x - 3)(2x^2 - x - 15)$

$= (x - 3)[(2x^2 - 6x) + (5x - 15)] = (x - 3)^2(2x + 5)$

Với $x \neq 3$ và $x \neq \dfrac{1}{3}$

Thì $B = \dfrac{2x^3-7x^2-12x+45}{3x^3-19x^2+33x-9} = \dfrac{(x-3)^2(2x+5)}{(x-3)^2(3x-1)} = \dfrac{2x+5}{3x-1}$

c) $B > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+5}{3x-1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-1>0\\2x+5>0\end{cases}\\ \begin{cases}3x-1<0\\2x+5<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>\dfrac{1}{3}\\x>-\dfrac{5}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x<\dfrac{1}{3}\\x<-\dfrac{5}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\dfrac{1}{3}\\x<-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$

3. Bài 3

Cho biểu thức $C = \left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{5-x}{1-x^2}\right):\dfrac{1-2x}{x^2-1}$

a) Rút gọn biểu thức C

b) Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức B là số nguyên

Giải

a) Đkxđ: $x \neq \pm 1$

$$C = \left(\frac{1}{1-x}+\frac{2}{x+1}-\frac{5-x}{1-x^2}\right):\frac{1-2x}{x^2-1} = \left[\frac{1+x+2(1-x)-5}{(1-x)(1+x)}\right].\frac{(x-1)(x+1)}{1-2x} = \frac{-2}{2x-1}$$

b) B có giá trị nguyên khi x là số nguyên thì $\frac{-2}{2x-1}$ có giá trị nguyên

$$\Leftrightarrow 2x-1 \text{ là Ư}(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=1 \\ 2x-1=-1 \\ 2x-1=2 \\ 2x-1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=1,5 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Đối chiếu Đkxđ thì chỉ có x = 0 thoả mãn

4. Bài 4

Cho biểu thức $D = \frac{x^3+x^2-2x}{x|x+2|-x^2+4}$

a) Rút gọn biểu thức D

b) Tìm x nguyên để D có giá trị nguyên

c) Tìm giá trị của D khi x = 6

Giải

a) Nếu $x + 2 > 0$ thì $|x+2| = x + 2$ nên

$$D = \frac{x^3+x^2-2x}{x|x+2|-x^2+4} = \frac{x^3+x^2-2x}{x(x+2)-x^2+4} = \frac{x(x-1)(x+2)}{x(x+2)-(x-2)(x+2)} = \frac{x^2-x}{2}$$

Nếu $x + 2 < 0$ thì $|x+2| = -(x + 2)$ nên

$$D = \frac{x^3+x^2-2x}{x|x+2|-x^2+4} = \frac{x^3+x^2-2x}{-x(x+2)-x^2+4} = \frac{x(x-1)(x+2)}{-x(x+2)-(x-2)(x+2)} = \frac{-x}{2}$$

Nếu $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ thì biểu thức D không xác định

b) Để D có giá trị nguyên thì $\frac{x^2-x}{2}$ hoặc $\frac{-x}{2}$ có giá trị nguyên

+) $\frac{x^2-x}{2}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \;\vdots\; 2 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) \;\vdots\; 2 \\ x > -2 \end{cases}$

Vì x(x – 1) là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 với mọi x > - 2

+) $\frac{-x}{2}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \begin{cases} x \vdots 2 \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2k$ (k $\in$ Z; k < - 1)

c) Khia x = 6 $\Rightarrow$ x > - 2 nên D = $\frac{x^2 - x}{2} = \frac{6(6-1)}{2} = 15$

Bài tập về nhà

Bài 1:

Cho biểu thức A = $\left(\frac{2-x}{x+3} - \frac{3-x}{x+2} + \frac{2-x}{x^2+5x+6}\right) : \left(1 - \frac{x}{x-1}\right)$

a) Rút gọn A

b) Tìm x để A = 0; A > 0

Bài 2:

Cho biểu thức B = $\frac{3y^3 - 7y^2 + 5y - 1}{2y^3 - y^2 - 4y + 3}$

a) Rút gọn B

b) Tìm số nguyên y để $\frac{2D}{2y + 3}$ có giá trị nguyên

c) Tìm số nguyên y để B $\geq$ 1

CHUYÊN ĐỀ 12 – CÁC BÀI TOÁN VỀ BIỂU THỨC (TIẾP)

*** Dạng 2: Các biểu thức có tính quy luật**

Bài 1: Rút gọn các biểu thức

a) A = $\frac{3}{(1.2)^2}+\frac{5}{(2.3)^2}+......+\frac{2n+1}{\left[n(n+1)\right]^2}$

Phương pháp: Xuất phát từ hạng tử cuối để tìm ra quy luật

Ta có $\frac{2n+1}{\left[n(n+1)\right]^2}=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$ Nên

A = $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-......-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+1)}{(n+1)^2}$

b) B = $\left(1-\frac{1}{2^2}\right).\left(1-\frac{1}{3^2}\right).\left(1-\frac{1}{4^2}\right)........\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

Ta có $1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{(k+1)(k-1)}{k^2}$ Nên

B = $\frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}.\frac{3.5}{4^2}...\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{1.3.2.4...(n-1)(n+1)}{2^2.3^2.4^2...n^2}=\frac{1.2.3...(n-1)}{2.3.4...(n-1)n}.\frac{3.4.5...(n+1)}{2.3.4....n}=\frac{1}{n}.\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}$

c) C = $\frac{150}{5.8}+\frac{150}{8.11}+\frac{150}{11.14}+......+\frac{150}{47.50}=150.\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+......+\frac{1}{47}-\frac{1}{50}\right)$

$=50.\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{50}\right)=50.\frac{9}{10}=45$

d) D = $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+......+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+......+\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2}-\frac{1}{n(n+1)}\right]=\frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}$

Bài 2:

a) Cho A = $\frac{m-1}{1}+\frac{m-2}{2}+...+\frac{2}{m-2}+\frac{1}{n-1}$; B = $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+......+\frac{1}{n}$. Tính $\frac{A}{B}$

Ta có

A = $\left(\frac{n}{1}+\frac{n}{2}+...+\frac{n}{n-2}+\frac{n}{n-1}\right)-\left(\underbrace{1+1+...+1}_{n-1}\right)=n\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)-(n-1)$

$$= n\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)+1 = n\left(\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right) = nB \Rightarrow \frac{A}{B} = n$$

b) $A = \frac{1}{1.(2n-1)}+\frac{1}{3.(2n-3)}+......+\frac{1}{(2n-3).3}+\frac{1}{(2n-1).1}$; $B = 1+\frac{1}{3}+......+\frac{1}{2n-1}$

Tính A : B

Giải

$$A = \frac{1}{2n}\left[\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-3}\right)+...+\left(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}+1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2n}\left[\left(1+\frac{1}{3}+......+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-3}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-3}+......+\frac{1}{3}+1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2n}.2.\left(1+\frac{1}{3}+......+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-3}\right)=\frac{1}{2n}.2.B \Rightarrow \frac{A}{B}=\frac{1}{n}$$

Bài tập về nhà

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+......+\frac{1}{(n-1)n}$

b) $\frac{1^2}{2^2-1}.\frac{3^2}{4^2-1}.\frac{5^2}{6^2-1}......\frac{n^2}{(n+1)^2-1}$

c) $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+......+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

*** Dạng 3: Rút gọn; tính giá trị biểu thức thoả mãn điều kiện của biến**

Bài 1: Cho $x+\frac{1}{x}=3$. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $A = x^2+\frac{1}{x^2}$; b) $B = x^3+\frac{1}{x^3}$; c) $C = x^4+\frac{1}{x^4}$; d) $D = x^5+\frac{1}{x^5}$.

Lời giải

a) $A = x^2+\frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$;

b) $B = x^3+\frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right) = 27 - 9 = 18$;

c) $C = x^4+\frac{1}{x^4} = \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 49 - 2 = 47$;

d) $A.B = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right) = x^5 + \dfrac{1}{x} + x + \dfrac{1}{x^5} = D + 3 \Rightarrow D = 7.18 - 3 = 123.$

Bài 2: Cho $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 2$ (1); $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 2$ (2).

Tính giá trị biểu thức $D = \left(\dfrac{a}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{y}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{z}\right)^2$

Từ (1) suy ra $bcx + acy + abz = 0$ (3)

Từ (2) suy ra

$$\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 + \left(\frac{c}{z}\right)^2 + 2.\left(\frac{ab}{xy} + \frac{ac}{xz} + \frac{bc}{yz}\right) = 4 \Rightarrow \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 + \left(\frac{c}{z}\right)^2 = 4 - 2.\left(\frac{ab}{xy} + \frac{ac}{xz} + \frac{bc}{yz}\right) \quad (4)$$

Thay (3) vào (4) ta có $D = 4 - 2.0 = 4$

Bài 3

a) Cho $abc = 2$; rút gọn biểu thức $A = \dfrac{a}{ab + a + 2} + \dfrac{b}{bc + b + 1} + \dfrac{2c}{ac + 2c + 2}$

Ta có :

$$A = \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{ab}{abc + ab + a} + \frac{2c}{ac + 2c + 2} = \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{ab}{2 + ab + a} + \frac{2c}{ac + 2c + abc}$$

$$= \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{ab}{2 + ab + a} + \frac{2c}{c(a + 2 + ab)} = \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{ab}{2 + ab + a} + \frac{2}{a + 2 + ab} = \frac{ab + a + 2}{ab + a + 2} = 1$$

b) Cho $a + b + c = 0$; rút gọn biểu thức $B = \dfrac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \dfrac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \dfrac{c^2}{c^2 - b^2 - a^2}$

Từ $a + b + c = 0 \Rightarrow a = -(b + c) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \Rightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 2bc$

Tương tự ta có: $b^2 - a^2 - c^2 = 2ac$; $c^2 - b^2 - a^2 = 2ab$ (Hoán vị vòng quanh), nên

$$B = \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ac} + \frac{c^2}{2ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} \quad (1)$$

$a + b + c = 0 \Rightarrow -a = (b + c) \Rightarrow -a^3 = b^3 + c^3 + 3bc(b + c) \Leftrightarrow -a^3 = b^3 + c^3 - 3abc$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có $B = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} = \dfrac{3abc}{2abc} = \dfrac{3}{2}$ (Vì $abc \neq 0$)

c) Cho a, b, c từng đôi một khác nhau thoả mãn: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Rút gọn biểu thức $C = \dfrac{a^2}{a^2 + 2bc} + \dfrac{b^2}{b^2 + 2ac} + \dfrac{c^2}{c^2 + 2ab}$

Từ $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow ab + ac + bc = 0$

$\Rightarrow a^2 + 2bc = a^2 + 2bc – (ab + ac + bc) = a^2 – ab + bc – ac = (a – b)(a – c)$

Tương tự: $b^2 + 2ac = (b – a)(b – c)$; $c^2 + 2ab = (c – a)(c – b)$

$$C = \frac{a^2}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^2}{(b - a)(b - c)} + \frac{c^2}{(c - a)(c - b)} = \frac{a^2}{(a - b)(a - c)} - \frac{b^2}{(a - b)(b - c)} + \frac{c^2}{(a - c)(b - c)}$$

$$= \frac{a^2(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} - \frac{b^2(a - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} + \frac{c^2(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} = \frac{(a - b)(a - c)(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} = 1$$

*** Dạng 4: Chứng minh đẳng thức thoả mãn điều kiện của biến**

1. Bài 1: Cho $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 2$ (1); $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = 2$ (2).

Chứng minh rằng: $a + b + c = abc$

Từ (1) suy ra $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + 2.\left(\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac}\right) = 4 \Rightarrow 2.\left(\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac}\right) = 4 - \left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{a + b + c}{abc} = 1 \Leftrightarrow a + b + c = abc$

2. Bài 2: Cho a, b, c $\neq 0$ và $a + b + c \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a + b + c}$.

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có hai số đối nhau.

Từ đó suy ra rằng : $\dfrac{1}{a^{2009}} + \dfrac{1}{b^{2009}} + \dfrac{1}{c^{2009}} = \dfrac{1}{a^{2009} + b^{2009} + c^{2009}}$.

Ta có : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a + b + c} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a + b + c} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a + b}{ab} + \dfrac{a + b}{c(a + b + c)} = 0$

$$\Leftrightarrow (a + b).\frac{c(a + b + c) + ab}{abc(a + b + c)} = 0 \Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ c + a = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ b = -c \\ c = -a \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra : $\dfrac{1}{a^{2009}} + \dfrac{1}{b^{2009}} + \dfrac{1}{c^{2009}} = \dfrac{1}{a^{2009}} + \dfrac{1}{(-c)^{2009}} + \dfrac{1}{c^{2009}} = \dfrac{1}{a^{2009}}$

$$\frac{1}{a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}+(-c)^{2009}+c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^{2009}}+\frac{1}{b^{2009}}+\frac{1}{c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}}.$$

3. Bài 3: Cho $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$ (1)

chứng minh rằng : trong ba số a, b, c tồn tại hai số bằng nhau

Từ (1) $\Rightarrow a^2c+ab^2+bc^2=b^2c+ac^2+a^2b \Rightarrow a^2(b-c)-a(c^2-b^2)+bc(c-b)=0$

$\Rightarrow (c-b)(a^2-ac=ab+bc)=0 \Rightarrow (c-b)(a-b)(a-c)=0 \Rightarrow$ đpcm

4. Bài 4: Cho $(a^2-bc)(b-abc)=(b^2-ac)(a-abc)$; $abc \neq 0$ và $a \neq b$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$

Từ GT $\Rightarrow a^2b-b^2c-a^3bc+ab^2c^2=ab^2-a^2c-ab^3c+a^2bc^2$

$\Leftrightarrow (a^2b-ab^2)+(a^2c-b^2c)=abc^2(a-b)+abc(a-b)(a+b)$

$\Leftrightarrow (a-b)(ab+ac+bc)=abc(a-b)(a+b+c)$

$\Leftrightarrow \frac{ab+ac+bc}{abc}=a+b+c \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$

5. Bài 5: Cho $a+b+c=x+y+z=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$; Chứng minh rằng: $ax^2+by^2+cz^2=0$

Từ $x+y+z=0 \Rightarrow x^2=(y+z)^2$; $y^2=(x+z)^2$; $z^2=(y+x)^2$

$\Rightarrow ax^2+by^2+cz^2=a(y+z)^2+b(x+z)^2+c(y+x)^2=\ldots$

$=(b+c)x^2+(a+c)y^2+(a+b)z^2+2(ayz+bxz+cxy)$ (1)

Từ $a+b+c=0 \Rightarrow -a=b+c; -b=a+c; -c=a+b$ (2)

Từ $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0 \Rightarrow ayz+bxz+cxy=0$ (3). Thay (2), (3) vào (1); ta có:

$ax^2+by^2+cz^2=-(ax^2+by^2+cz^2) \Rightarrow ax^2+by^2+cz^2=0$

6. Bài 6: Cho $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$; chứng minh: $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$

Từ $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0 \Rightarrow \frac{a}{b-c}=\frac{b}{a-c}+\frac{c}{b-a}=\frac{b^2-ab+ac-c^2}{(a-b)(c-a)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{(b-c)^2} = \dfrac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a-b)(c-a)(b-c)}$ (1) (Nhân hai vế với $\dfrac{1}{b-c}$)

Tương tự, ta có: $\dfrac{b}{(c-a)^2} = \dfrac{c^2 - bc + ba - a^2}{(a-b)(c-a)(b-c)}$ (2) ; $\dfrac{c}{(a-b)^2} = \dfrac{a^2 - ac + cb - b^2}{(a-b)(c-a)(b-c)}$ (3)

Cộng từng vế (1), (2) và (3) ta có đpcm

7. Bài 7:

Cho a + b + c = 0; chứng minh: $\left(\dfrac{a-b}{c} + \dfrac{b-c}{a} + \dfrac{c-a}{b}\right)\left(\dfrac{c}{a-b} + \dfrac{a}{b-c} + \dfrac{b}{c-a}\right) = 9$ (1)

Đặt $\dfrac{a-b}{c} = x$; $\dfrac{b-c}{a} = y; \dfrac{c-a}{b} = z \Rightarrow \dfrac{c}{a-b} = \dfrac{1}{x}$ $\dfrac{a}{b-c} = \dfrac{1}{y}; \dfrac{b}{c-a} = \dfrac{1}{z}$

(1) $\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = 9$

Ta có: $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = 3 + \left(\dfrac{y+z}{x} + \dfrac{x+z}{y} + \dfrac{x+y}{z}\right)$ (2)

Ta lại có: $\dfrac{y+z}{x} = \left(\dfrac{b-c}{a} + \dfrac{c-a}{b}\right).\dfrac{c}{a-b} = \dfrac{b^2 - bc + ac - a^2}{ab}.\dfrac{c}{a-b} = \dfrac{c(a-b)(c-a-b)}{ab(a-b)} = \dfrac{c(c-a-b)}{ab}$

$= \dfrac{c\left[2c - (a+b+c)\right]}{ab} = \dfrac{2c^2}{ab}$ (3)

Tương tự, ta có: $\dfrac{x+z}{y} = \dfrac{2a^2}{bc}$ (4) ; $\dfrac{x+y}{z} = \dfrac{2b^2}{ac}$ (5)

Thay (3), (4) và (5) vào (2) ta có:

$(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = 3 + \dfrac{2c^2}{ab} + \dfrac{2a^2}{bc} + \dfrac{2b^2}{ac} = 3 + \dfrac{2}{abc}(a^3 + b^3 + c^3)$ (6)

Từ $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (7) ?

Thay (7) vào (6) ta có: $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = 3 + \dfrac{2}{abc}.3abc = 3 + 6 = 9$

Bài tập về nhà:

1) cho $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$; tính giá trị biểu thức $A = \dfrac{yz}{x^2} + \dfrac{xz}{y^2} + \dfrac{xy}{z^2}$

HD: $A = \dfrac{xyz}{x^3} + \dfrac{xyz}{y^3} + \dfrac{xyz}{z^3}$; vận dụng $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

2) Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$; Tính giá trị biểu thức $A = \left(\frac{a}{b} + 1\right)\left(\frac{b}{c} + 1\right)\left(\frac{c}{a} + 1\right)$

3) Cho x + y + z = 0; chứng minh rằng: $\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} + 3 = 0$

4) Cho $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 1$; $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$. Chứng minh xy + yz + xz = 0

CHUYÊN ĐỀ 13 – CÁC BÀI TOÁN VỀ TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

A. Kiến thức:

* Tam giác đồng dạng:

a) trường hợp thứ nhất: (c.c.c)

$\Delta ABC \backsim A'B'C' \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

b) trường hợp thứ nhất: (c.g.c)

$\Delta ABC \backsim A'B'C' \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$; $\hat{A} = \hat{A}'$

c. Trường hợp đồng dạng thứ ba (g.g)

$\Delta ABC \backsim A'B'C' \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$

AH; A'H'là hai đường cao tương ứng thì: $\frac{A'H'}{AH} = k$ (Tỉ số đồng dạng); $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = K^2$

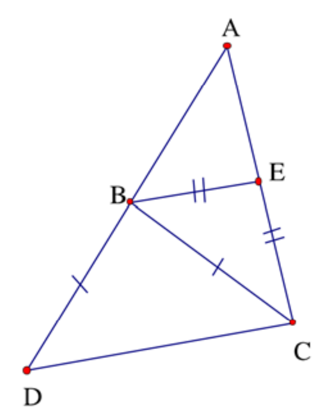
B. Bài tập áp dụng

Bài 1:

Cho ΔABC có $\hat{B} = 2\hat{C}$, AB = 8 cm, BC = 10 cm.

a)Tính AC

b)Nếu ba cạnh của tam giác trên là ba số tự nhiên liên tiếp thì mỗi cạnh là bao nhiêu?



Giải

Cách 1:

Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho:BD = BC

$\Delta ACD \backsim \Delta ABC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$

$\Rightarrow AC^2 = AB.\ AD = AB.(AB + BD) = AB(AB + BC)$

$= 8(10 + 8) = 144 \Rightarrow AC = 12$ cm

Cách 2:

Vẽ tia phân giác BE của $\widehat{ABC} \Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ACB$

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{BE}{CB} = \dfrac{AE + BE}{AB + CB} = \dfrac{AC}{AB + CB} \Rightarrow AC^2 = AB(AB + CB) = 8(8 + 10) = 144$

$\Rightarrow AC = 12$ cm

b) Gọi AC = b, AB = a, BC = c thì từ câu a ta có $b^2 = a(a + c)$ (1)

Vì b > anên có thể b = a + 1 hoặc b = a + 2

+ Nếu b = a + 1 thì $(a + 1)^2 = a^2 + ac \Leftrightarrow 2a + 1 = ac \Leftrightarrow a(c - 2) = 1$

$\Rightarrow a = 1; b = 2; c = 3$(loại)

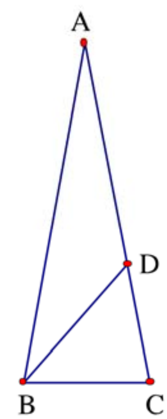
+ Nếu b = a + 2 thì $a(c - 4) = 4$

- Với a = 1 thì c = 8 (loại)

- Với a = 2 thì c = 6 (loại)

- với a = 4 thì c = 6 ; b = 5

Vậy a = 4; b = 5; c = 6



Bài 2:

Cho ΔABC cân tại A, đường phân giác BD; tính BD

biết BC = 5 cm; AC = 20 cm

Giải

Ta có $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow CD = 4$ cm và BC = 5 cm

Bài toán trở về bài 1

Bài 3:

Cho ΔABC cân tại A và O là trung điểm của BC. Một điểm O di động trên AB, lấy điểm E trên AC sao cho $CE = \dfrac{OB^2}{BD}$. Chứng minh rằng

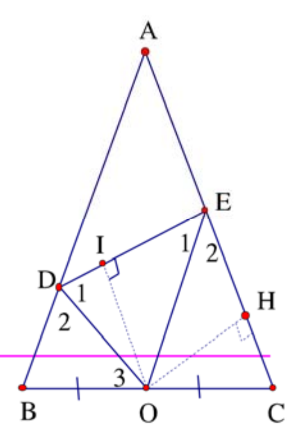
a) $\Delta DBO \backsim \Delta OCE$

b) $\Delta DOE \backsim \Delta DBO \backsim \Delta OCE$

c) DO, EO lần lượt là phân giác của các góc BDE, CED

d) khoảng cách từ O đến đoạn ED không đổi khi D di động trên AB

Giải



a) Từ $CE = \frac{OB^2}{BD} \Rightarrow \frac{CE}{OB} = \frac{OB}{BD}$ và $\hat{B} = \hat{C}$ (gt) $\Rightarrow \Delta DBO \backsim \Delta OCE$

b) Từ câu a suy ra $\hat{O}_3 = \hat{E}_2$ (1)

Vì B, O ,C thẳng hàng nên $\hat{O}_3 + \widehat{DOE} + \widehat{EOC} = 180^0$ (2)

trong tam giác EOC thì $\hat{E}_2 + \hat{C} + \widehat{EOC} = 180^0$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{DOE} = \hat{B} = \hat{C}$

ΔDOE và ΔDBO có $\frac{DO}{DB} = \frac{OE}{OC}$ (Do $\Delta DBO \backsim \Delta OCE$)

và $\frac{DO}{DB} = \frac{OE}{OB}$ (Do OC = OB) và $\widehat{DOE} = \hat{B} = \hat{C}$

nên $\Delta DOE \backsim \Delta DBO \backsim \Delta OCE$

c) Từ câu b suy ra $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 \Rightarrow$ DO là phân giác của các góc BDE

Củng từ câu b suy ra $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ EO là phân giác của các góc CED

c) Gọi OH, OI là khoảng cách từ O đến DE, CE thì OH = OI, mà O cố định nên OH không đổi $\Rightarrow$OI không đổi khi D di động trên AB

Bài 4: (Đề HSG huyện Lộc hà – năm 2007 – 2008)

Cho ΔABC cân tại A, có BC = 2a, M là trung điểm BC, lấy D, E thuộc AB, AC sao cho $\widehat{DME} = \hat{B}$

a) Chứng minh tích BD. CE không đổi

b)Chứng minh DM là tia phân giác của $\widehat{BDE}$

c) Tính chu vi của ΔAED nếu ΔABC là tam giác đều

Giải

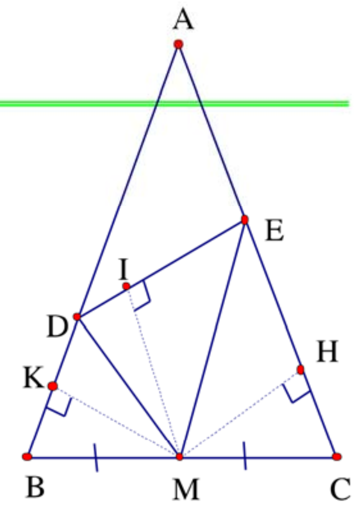
a) Ta có $\widehat{DMC} = \widehat{DME} + \widehat{CME} = \hat{B} + \widehat{BDM}$, mà $\widehat{DME} = \hat{B}$(gt)

nên $\widehat{CME} = \widehat{BDM}$, kết hợp với $\hat{B} = \hat{C}$ (ΔABC cân tại A)

suy ra $\Delta BDM \backsim \Delta CME$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{BD}{CM} = \frac{BM}{CE} \Rightarrow BD.\ CE = BM.\ CM = a^2$ không đổi

b) $\Delta BDM \backsim \Delta CME \Rightarrow \frac{DM}{ME} = \frac{BD}{CM} \Rightarrow \frac{DM}{ME} = \frac{BD}{BM}$



(do BM = CM)$\Rightarrow$ ΔDME $\backsim$ ΔDBM (c.g.c) $\Rightarrow$ $\widehat{MDE} = \widehat{BMD}$ hay

DM là tia phân giác của $\widehat{BDE}$

c) chứng minh tương tự ta có EM là tia phân giác của $\widehat{DEC}$

kẻ MH $\perp$ CE ,MI $\perp$ DE, MK $\perp$ DB thì MH = MI = MK $\Rightarrow$

ΔDKM = ΔDIM

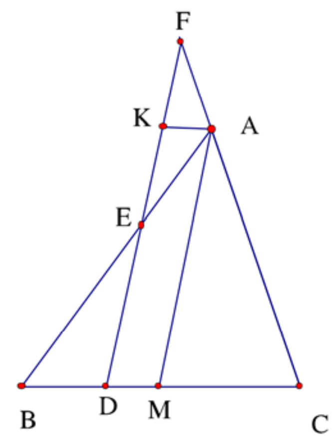
$\Rightarrow$DK =DI $\Rightarrow$ ΔEIM = ΔEHM $\Rightarrow$EI = EH

Chu vi ΔAED là P_{AED} = AD + DE + EA = AK +AH = 2AH (Vì AH = AK)

ΔABC là tam giác đều nên suy ra ΔCME củng là tam giác đều CH = $\frac{MC}{2} = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow$ AH = 1,5a $\Rightarrow$ P_{AED} = 2 AH = 2. 1,5 a = 3a

Bài 5:



Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Qua điểm D thuộc cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AM, cắt AB, AC tại E và F

a) chứng minh DE + DF không đổi khi D di động trên BC

b) Qua A vẽ đường thẳng song song với BC, cắt FE tại K. Chứng minh rằng K là trung điểm của FE

Giải

a) DE // AM $\Rightarrow \frac{DE}{AM} = \frac{BD}{BM} \Rightarrow DE = \frac{BD}{BM}.AM$ (1)

DF // AM $\Rightarrow \frac{DF}{AM} = \frac{CD}{CM} \Rightarrow DF = \frac{CD}{CM}.AM = \frac{CD}{BM}.AM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$DE + DF = \frac{BD}{BM}.AM + \frac{CD}{BM}.AM = \left(\frac{BD}{BM} + \frac{CD}{BM}\right).AM = \frac{BC}{BM}.AM = 2AM$ không đổi

b) AK // BC suy ra ΔFKA $\backsim$ ΔAMC (g.g) $\Rightarrow \frac{FK}{AM} = \frac{KA}{CM}$ (3)

$\frac{EK}{ED} = \frac{KA}{BD} \Rightarrow \frac{EK}{ED+EK} = \frac{KA}{BD+KA} \Rightarrow \frac{EK}{KD} = \frac{KA}{BD+DM} \Rightarrow \frac{EK}{AM} = \frac{KA}{BM} \Rightarrow \frac{EK}{AM} = \frac{KA}{CM}$ (2)

(Vì CM = BM)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{FK}{AM} = \frac{EK}{AM} \Rightarrow FK = EK$ hay K là trung điểm của FE

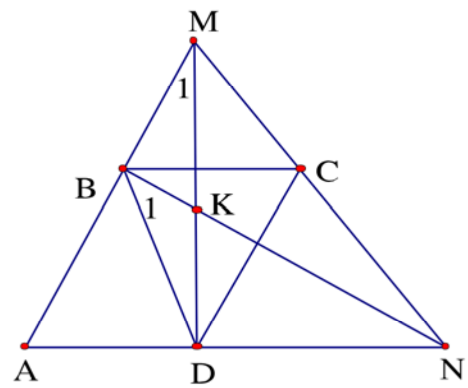
Bài 6: (Đề HSG huyện Thạch hà năm 2003 – 2004)

Cho hình thoi ABCD cạnh a có $\hat{A} = 60^0$, một đường thẳng bất kỳ qua C cắt tia đối của các tia BA, DA tại M, N

a) Chứng minh rằng tích BM. DN có giá trị không đổi

b) Gọi K là giao điểm của BN và DM. Tính số đo của góc BKD

Giải



a) BC // AN $\Rightarrow \frac{MB}{BA} = \frac{CM}{CN}$ (1)

CD// AM $\Rightarrow \frac{CM}{CN} = \frac{AD}{DN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\frac{MB}{BA} = \frac{AD}{DN} \Rightarrow MB.DN = BA.AD = a.a = a^2$

b) ΔMBD và ΔBDN có $\widehat{MBD} = \widehat{BDN} = 120^0$

$\frac{MB}{BD} = \frac{MB}{BA} = \frac{CM}{CN} = \frac{AD}{DN} = \frac{BD}{DN}$ (Do ABCD là hình thoi có $\hat{A} = 60^0$ nên AB = BC = CD = DA)

$\Rightarrow \Delta MBD \backsim \Delta BDN$

Suy ra $\hat{M}_1 = \hat{B}_1$. ΔMBD và ΔBKD có $\widehat{BDM} = \widehat{BDK}$ và $\hat{M}_1 = \hat{B}_1$ nên $\widehat{BKD} = \widehat{MBD} = 120^0$

Bài 7:

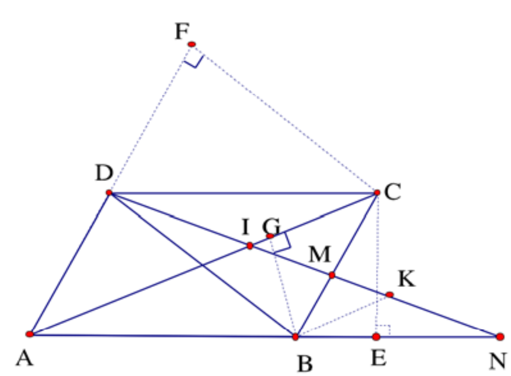
Cho hình bình hành ABCD có đường chéo lớn AC,tia Dx cắt SC, AB, BC lần lượt tại I, M, N. Vẽ CE vuông góc với AB, CF vuông góc với AD, BG vuông góc với AC. Gọi K là điểm đối xứng với D qua I. Chứng minh rằng

a) IM. IN = ID^2

b) $\frac{KM}{KN} = \frac{DM}{DN}$

c) AB. AE + AD. AF = AC^2

Giải



a) Từ AD // CM $\Rightarrow \frac{IM}{ID} = \frac{CI}{AI}$ (1)

Từ CD // AN $\Rightarrow \frac{CI}{AI} = \frac{ID}{IN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{IM}{ID} = \frac{ID}{IN}$ hay $ID^2 = IM.\ IN$

b) Ta có $\frac{DM}{MN} = \frac{CM}{MB} \Rightarrow \frac{DM}{MN + DM} = \frac{CM}{MB + CM} \Rightarrow \frac{DM}{DN} = \frac{CM}{CB}$ (3)

Từ ID = IK và $ID^2 = IM.\ IN$ suy ra $IK^2 = IM.\ IN$

$\Rightarrow \frac{IK}{IM} = \frac{IN}{IK} \Rightarrow \frac{IK - IM}{IM} = \frac{IN - IK}{IK} \Rightarrow \frac{KM}{IM} = \frac{KN}{IK} \Rightarrow \frac{KM}{KN} = \frac{IM}{IK} \Rightarrow \frac{KM}{KN} = \frac{IM}{ID} = \frac{CM}{AD} = \frac{CM}{CB}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{KM}{KN} = \frac{DM}{DN}$

c) Ta có $\Delta AGB \backsim \Delta AEC \Rightarrow \frac{AE}{AG} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB.AE = AC.AG \Rightarrow AB.\ AE = AG(AG + CG)$ (5)

$\Delta CGB \backsim \Delta AFC \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{CG}{CB} = \frac{CG}{AD}$ (vì CB = AD)

$\Rightarrow AF\ .\ AD = AC.\ CG \Rightarrow AF\ .\ AD = (AG + CG)\ .CG$ (6)

Cộng (5) và (6) vế theo vế ta có: $AB.\ AE + AF.\ AD = (AG + CG)\ .AG + (AG + CG)\ .CG$

$\Leftrightarrow AB.\ AE + AF.\ AD = AG^2 + 2.AG.CG + CG^2 = (AG + CG)^2 = AC^2$

Vậy: $AB.\ AE + AD.\ AF = AC^2$

Bài tập về nhà

Bài 1

Cho Hình bình hành ABCD, một đường thẳng cắt AB, AD, AC lần lượt tại E, F, G

Chứng minh: $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AG}$

HD: Kẻ DM // FE, BN // FE (M, N thuộc AC)

Bài 2:

Qua đỉnh C của hình bình hành ABCD, kẻ đường thẳng cắt BD, AB, AD ở E, G, F

chứng minh:

a) $DE^2 = \frac{FE}{EG}.\ BE^2$

b) $CE^2 = FE.\ GE$

(Gợi ý: Xét các tam giác DFE và BCE, DEC và BEG)

Bài 3

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến BM, phân giác CD cắt nhau tại một điểm. Chứng minh rằng

a) $\frac{BH}{HC}.\frac{CM}{MA}.\frac{AD}{BD}=1$

b) BH = AC

CHUYÊN ĐỀ 14 – PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

A.Mục tiêu:

* Củng cố, ôn tập kiến thức và kỹ năng giải các Pt bậc cao bằng cách phân tích thành nhân tử

* Khắc sâu kỹ năng phân tích đa thức thành nhân tử và kỹ năng giải Pt

B. Kiến thức và bài tập:

I. Phương pháp:

* Cách 1: Để giải các Pt bậc cao, ta biến đổi, rút gọn để dưa Pt về dạng Pt có vế trái là một đa thức bậc cao, vế phải bằng 0, vận dụng các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử để đưa Pt về dạng pt tích để giải

* Cách 2: Đặt ẩn phụ

II. Các ví dụ:

1.Ví dụ 1: Giải Pt

a) $(x + 1)^2(x + 2) + (x - 1)^2(x - 2) = 12$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2x^3 + 10x = 12 \Leftrightarrow x^3 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 1) + (5x - 5) \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 6) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x^2 + x + 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$ (Vì $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} = 0$ vô nghiệm)

b) $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0$ (1)

Vế phải của Pt là một đa thức có tổng các hệ số bằng 0, nên có một nghiệm x = 1 nên có nhân tử là x – 1, ta có

(1) $\Leftrightarrow (x^4 - x^3) + (x^3 - x^2) + (2x^2 - 2x) + (8x - 8) = 0$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x - 1)(x^3 + x^2 + 2x + 8) \Leftrightarrow (x - 1)[(x^3 + 2x^2) - (x^2 + 2x) + (4x - 8)] = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)[x^2(x + 2) - x(x + 2) + 4(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)(x^2 - x + 4) = 0 \ldots.$

c) $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 = 27x^3 + 8$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 - 27x^3 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow -18x^3 + 33x^2 + 57x + 18 = 0 \Leftrightarrow 6x^3 - 11x^2 - 19x - 6 = 0$ (2)

Ta thấy Pt có một nghiệm x = 3, nên vế trái có nhân tử x – 3:

(2) $\Leftrightarrow (6x^3 - 18x^2) + (7x^2 - 21x) + (2x - 6) = 0$

$\Leftrightarrow 6x^2(x - 3) + 7x(x - 3) + 2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(6x^2 + 7x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)[(6x^2 + 3x) + (4x + 2)] = 0 \Leftrightarrow (x - 3)[3x(2x + 1) + 2(2x + 1)] = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(2x + 1)(3x + 2)$ .....

d) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24 \Leftrightarrow [(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) + 1] - 25 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 5x - 1)^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 5x - 1 + 5)((x^2 + 5x - 1 - 5) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x - 6) = 0 \Leftrightarrow [(x^2 + x) + (4x + 4)][(x^2 - x) + (6x - 6)] = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x + 4)(x - 1)(x + 6) = 0$ ....

e) $(x^2 + x + 1)^2 = 3(x^4 + x^2 + 1) \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 - 3(x^4 + x^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)[x^2 + x + 1 - 3(x^2 - x + 1)] = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(-2x^2 + 4x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x - 1)^2 = 0$...

f) $x^5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 \Leftrightarrow (x^5 - 1) - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

+) $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

+) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^4 + x^3) + (x + 1) + x^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^3 + 1) + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2(x^2 - x + 1) + x^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2[(x^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4}] + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] + x^2 = 0$ Vô nghiệm vì $(x + 1)^2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \geq 0$ nhưng không xẩy ra dấu bằng

Bài 2:

a) $(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 3) = 12 \Leftrightarrow (x^2 + x - 2)[(x^2 + x - 2) - 1] - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + x - 2)^2 - (x^2 + x - 2) - 12 = 0$

Đặt $x^2 + x - 2 = y$ Thì

$(x^2 + x - 2)^2 - (x^2 + x - 2) - 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 12 = 0 \Leftrightarrow (y - 4)(y + 3) = 0$

* $y - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x) - (2x + 6) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 2) = 0....$

* $y + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$ (vô nghiệm)

b) $(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) = 1680 \Leftrightarrow (x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) = 1680$

Đặt $x^2 - 11x + 29 = y$, ta có:

$(x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) = 1680 \Leftrightarrow (y + 1)(y - 1) = 1680 \Leftrightarrow y^2 = 1681 \Leftrightarrow y = \pm 41$

$y = 41 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 29 = 41 \Leftrightarrow x^2 - 11x - 12 = 0$ $(x^2 - x) + (12x - 12) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 12) = 0.....$

* $y = - 41 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 29 = - 41 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 70 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x.\frac{11}{2} + \frac{121}{4}) + \frac{159}{4} = 0$

c) $(x^2 - 6x + 9)^2 - 15(x^2 - 6x + 10) = 1$ (3)

Đặt $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = y \geq 0$, ta có

(3) $\Leftrightarrow y^2 - 15(y + 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 15y - 16 = 0 \Leftrightarrow (y + 1)(y - 15) = 0$

Với $y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ (loại)

Với $y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = 15 \Rightarrow (x - 3)^2 = 16 \Leftrightarrow x - 3 = \pm 4$

+ $x - 3 = 4 \Leftrightarrow x = 7$

+ $x - 3 = - 4 \Leftrightarrow x = - 1$

d) $(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + 2x^2 = 0$ (4)

Đặt $x^2 + 1 = y$ thì

(4) $\Leftrightarrow y^2 + 3xy + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow (y^2 + xy) + (2xy + 2x^2) = 0 \Leftrightarrow (y + x)(y + 2x) = 0$

+) $x + y = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$: Vô nghiệm

+) $y + 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = - 1$

Bài 3:

a) $(2x + 1)(x + 1)^2(2x + 3) = 18 \Leftrightarrow (2x + 1)(2x + 2)^2(2x + 3) = 72.$ (1)

Đặt $2x + 2 = y$, ta có

(1) $\Leftrightarrow (y - 1)y^2(y + 1) = 72 \Leftrightarrow y^2(y^2 - 1) = 72$

$\Leftrightarrow y^4 - y^2 - 72 = 0$

Đặt $y^2 = z \geq 0$ Thì $y^4 - y^2 - 72 = 0 \Leftrightarrow z^2 - z - 72 = 0 \Leftrightarrow (z + 8)(z - 9) = 0$

* $z + 8 = 0 \Leftrightarrow z = - 8$ (loại)

* $z - 9 = 0 \Leftrightarrow z = 9 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3 \Rightarrow x = \ldots$

b) $(x + 1)^4 + (x - 3)^4 = 82$ (2)

Đặt $y = x - 1 \Rightarrow x + 1 = y + 2$; $x - 3 = y - 2$, ta có

(2) $\Leftrightarrow (y + 2)^4 + (y - 2)^4 = 82$

$\Leftrightarrow y^4 + 8y^3 + 24y^2 + 32y + 16 + y^4 - 8y^3 + 24y^2 - 32y + 16 = 82$

$\Leftrightarrow 2y^4 + 48y^2 + 32 - 82 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 24y^2 - 25 = 0$

Đặt $y^2 = z \geq 0 \Rightarrow y^4 + 24y^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 24z - 25 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z + 25) = 0$

+) $z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = 0$; $x = 2$

+) $z + 25 = 0 \Leftrightarrow z = -25$ (loại)

Chú ý: Khi giải Pt bậc 4 dạng $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ ta thường đặt ẩn phụ $y = x + \frac{a + b}{2}$

c) $(4 - x)^5 + (x - 2)^5 = 32 \Leftrightarrow (x - 2)^5 - (x - 4)^5 = 32$

Đặt $y = x - 3 \Rightarrow x - 2 = y + 1$; $x - 4 = y - 1$; ta có:

$(x - 2)^5 - (x - 4)^5 = 32 \Leftrightarrow (y + 1)^5 - (y - 1)^5 = 32$

$\Leftrightarrow y^5 + 5y^4 + 10y^3 + 10y^2 + 5y + 1 - (y^5 - 5y^4 + 10y^3 - 10y^2 + 5y - 1) - 32 = 0$

$\Leftrightarrow 10y^4 + 20y^2 - 30 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 2y^2 - 3 = 0$

Đặt $y^2 = z \geq 0 \Rightarrow y^4 + 2y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z + 3) = 0$ ....

d) $(x - 7)^4 + (x - 8)^4 = (15 - 2x)^4$

Đặt $x - 7 = a$; $x - 8 = b$; $15 - 2x = c$ thì $-c = 2x - 15 \Rightarrow a + b = -c$, Nên

$(x - 7)^4 + (x - 8)^4 = (15 - 2x)^4 \Leftrightarrow a^4 + b^4 = c^4 \Leftrightarrow a^4 + b^4 - c^4 = 0 \Leftrightarrow a^4 + b^4 - (a + b)^4 = 0$

$$\Leftrightarrow 4ab(a^2 + \frac{3}{2}ab + b^2) = 0 \Leftrightarrow 4ab\left[\left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 + \frac{7}{16}b^2\right] = 0 \Leftrightarrow 4ab = 0$$

(Vì $\left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 + \frac{7}{16}b^2 \geq 0$ nhưng không xảy ra dấu bằng) $\Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow x = 7$; $x = 8$

e) $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x - \frac{1}{x}\right) - 36 = 0$

(Vì $x = 0$ không là nghiệm). Đặt $x - \frac{1}{x} = y \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$, thì

$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x-\frac{1}{x}\right)-36=0 \Leftrightarrow 6(y^2+2)+7y-36=0 \Leftrightarrow 6y^2+7y-24=0$

$\Leftrightarrow (6y^2-9y)+(16y-24)=0 \Leftrightarrow (3y+8)(2y-3)=0$

+) $3y+8=0 \Leftrightarrow y=-\frac{8}{3} \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=-\frac{8}{3} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x+3)(3x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=0 \\ 3x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

+) $2y-3=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (2x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ 2x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Bài 4: Chứng minh rằng: các Pt sau vô nghiệm

a) $x^4-3x^2+6x+13=0 \Leftrightarrow (x^4-4x^2+4)+(x^2+6x+9)=0 \Leftrightarrow (x^2-2)^2+(x+3)^2=0$

Vế trái $(x^2-2)^2+(x+3)^2 \geq 0$ nhưng không đồng thời xẩy ra $x^2=2$ và $x=-3$

b) $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=0$

$\Leftrightarrow x^7-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$x=1$ không là nghiệm của Pt $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$

Bài tập về nhà:

Bài 1: Giải các Pt

a)$(x^2+1)^2=4(2x-1)$

HD: Chuyển vế, triển khai $(x^2+1)^2$, phân tích thành nhân tử: $(x-1)^2(x^2+2x+5)=0$

b) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$ (Nhân 2 nhân tử với nhau, áp dụng PP đặt ẩn phụ)

c) $(12x+7)^2(3x+2)(2x+1)=3$ (Nhân 2 vế với 24, đặt $12x+7=y$)

d) $(x^2-9)^2=12x+1$ (Thêm, bớt $36x^2$)

e) $(x-1)^4+(x-2)^4=1$ (Đặt $y=x-1{,}5$; Đs: $x=1$; $x=2$)

f) $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1)$ (Đặt $x+1=y$; Đs:0; -1; -2)

g) $(x+1)^3+(x-2)^3=(2x-1)^3$

Đặt $x+1=a$; $x-2=b$; $1-2x=c$ thì $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

h) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$ (Chia 2 vế cho x^2; Đặt $y=x+\frac{1}{x}$)

i) $x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1=0$ (Vế trái là đa thức có tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ...)

Bài 2: Chứng minh các pt sau vô nghiệm

a) $2x^4 - 10x^2 + 17 = 0$

(Phân tích vế trái thành tổng của hai bình phương)

b) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = 0$

(Phân tích vế trái thành tích của 2 đa thức có giá trị không âm....)

CHUYÊN ĐỀ 1 5 – SỬ DỤNG CÔNG THỨC DIỆN TÍCH ĐỂ THIẾT LẬP QUAN HỆ ĐỘ DÀI CỦA CÁC ĐOẠN THẲNG

Ngày soạn:23 – 3 - 2010

A. Một số kiến thức:

1. Công thức tính diện tích tam giác:

$S = \frac{1}{2}$ a.h (a – độ dài một cạnh, h – độ dài đường cao tương ứng)

2. Một số tính chất:

Hai tam giác có chung một cạnh, có cùng độ dài đường cao thì có cùng diện tích

Hai tam giác bằng nhau thì có cùng diện tích

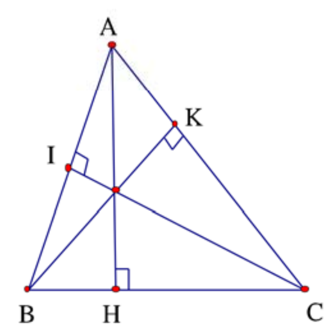
B. Một số bài toán:

1. Bài 1:

Cho ΔABC có AC = 6cm; AB = 4 cm; các đường cao AH; BK; CI. Biết $AH = \frac{CI + BK}{2}$

Tính BC

Giải



Ta có: $BK = \frac{2S_{ABC}}{AC}$; $CI = \frac{2S_{ABC}}{AB}$

$\Rightarrow BK + CI = 2.\, S_{ABC}\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}\right)$

$\Leftrightarrow 2AH = 2.\frac{1}{2}.\, BC.\, AH.\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}\right) \Leftrightarrow BC.\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}\right) = 2$

$\Rightarrow BC = 2 : \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}\right) = 2 : \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) = 4{,}8$ cm

Bài 2:

Cho ΔABC có độ dài các cạnh là a, b, c; độ dài các đường cao tương ứng là h_a, h_b, h_c. Biết rằng $a + h_a = b + h_b = c + h_c$. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều

Giải

Gọi $S_{ABC} = S$

Ta xét $a + h_a = b + h_b \Rightarrow a - b = h_a - h_b = \frac{2S}{b} - \frac{2S}{a} = 2S.\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = 2S.\frac{a-b}{ab}$

$\Rightarrow a - b = 2S.\frac{a-b}{ab} \Rightarrow (a-b)\left(1 - \frac{2S}{ab}\right) = 0 \Rightarrow \Delta ABC$ cân ở C hoặc vuông ở C (1)

Tương tự ta có: ΔABC cân ở A hoặc vuông ở A (2); ΔABC cân ở B hoặc vuông ở B (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra ΔABC cân hoặc vuông ở ba đỉnh (Không xẩy ra vuông tại ba đỉnh) $\Leftrightarrow$ ΔABC là tam giác đều

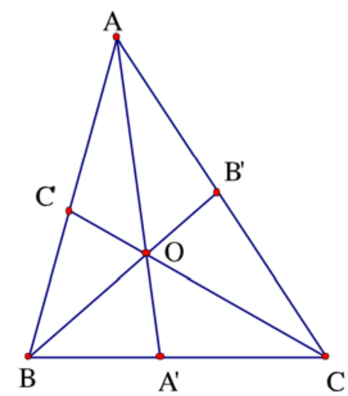
Bài 3:

Cho điểm O nằm trong tam giác ABC, các tia AO, BO, Co cắt các cạnh của tam giác ABC theo thứ tự tại A', B', C'. Chứng minh rằng:

a) $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$ b) $\frac{OA}{AA'} + \frac{OB}{BB'} + \frac{OC}{CC'} = 2$

c) $M = \frac{OA}{OA'} + \frac{OB}{OB'} + \frac{OC}{OC'} = 6$. Tìm vị trí của O để tổng M có giá trị nhỏ nhất

d) $N = \frac{OA}{OA'}.\frac{OB}{OB'}.\frac{OC}{OC'} = 8$. Tìm vị trí của O để tích N có giá trị nhỏ nhất



Giải

Gọi $S_{ABC} = S$, $S_1 = S_{BOC}$, $S_2 = S_{COA}$, $S_3 = S_{AOB}$. Ta có:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{S_2}{S_{OA'C}} = \frac{S_3}{S_{OA'B}} = \frac{S_2 + S_3}{S_1} \quad (1)$$

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{S_{OA'C}}{S_{AA'C}} = \frac{S_{OA'B}}{S_{AA'B}} = \frac{S_{OA'C} + S_{OA'B}}{S_{AA'C} + S_{AA'B}} = \frac{S_1}{S} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{OA}{AA'} = \frac{S_2 + S_3}{S}$

Tương tự ta có $\frac{OB}{OB'} = \frac{S_1 + S_3}{S_2}$; $\frac{OC}{OC'} = \frac{S_1 + S_2}{S_3}$; $\frac{OB'}{BB'} = \frac{S_2}{S}$; $\frac{OC'}{CC'} = \frac{S_3}{S}$

a) $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = \frac{S}{S} = 1$

b) $\frac{OA}{AA'} + \frac{OB}{BB'} + \frac{OC}{CC'} = \frac{S_2 + S_3}{S} + \frac{S_1 + S_3}{S} + \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{2S}{S} = 2$

c) $M = \dfrac{OA}{OA'} + \dfrac{OB}{OB'} + \dfrac{OC}{OC'} = \dfrac{S_2 + S_3}{S_1} + \dfrac{S_1 + S_3}{S_2} + \dfrac{S_1 + S_2}{S_3} = \left(\dfrac{S_1}{S_2} + \dfrac{S_2}{S_1}\right) + \left(\dfrac{S_3}{S_2} + \dfrac{S_2}{S_3}\right) + \left(\dfrac{S_1}{S_3} + \dfrac{S_3}{S_1}\right)$

Aùp dụng Bđt Cô si ta có $\left(\dfrac{S_1}{S_2} + \dfrac{S_2}{S_1}\right) + \left(\dfrac{S_3}{S_2} + \dfrac{S_2}{S_3}\right) + \left(\dfrac{S_1}{S_3} + \dfrac{S_3}{S_1}\right) \ge 2 + 2 + 2 = 6$

Đẳng thức xẩy ra khi $S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow$ O là trọng tâm của tam giác ABC

d) $N = \dfrac{S_2 + S_3}{S_1} . \dfrac{S_1 + S_3}{S_2} . \dfrac{S_1 + S_2}{S_3} = \dfrac{(S_2 + S_3)(S_1 + S_3)(S_1 + S_2)}{S_1.S_2.S_3}$

$\Rightarrow N^2 = \dfrac{(S_2 + S_3)^2 (S_1 + S_3)^2 (S_1 + S_2)^2}{(S_1.S_2.S_3)^2} \ge \dfrac{4S_1S_2.4S_2S_3.4S_1S_3}{(S_1.S_2.S_3)^2} \ge 64 \Rightarrow N \ge 8$

Đẳng thức xẩy ra khi $S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow$ O là trọng tâm của tam giác ABC

Bài 4:

Cho tam giác đều ABC, các đường caoAD, BE, CF; gọi A’, B’, C’ là hình chiếu của M (nằm bên trong tam giác ABC) trên AD, BE, CF. Chứng minh rằng: Khi M thay đổi vị trí trong tam giác ABC thì:

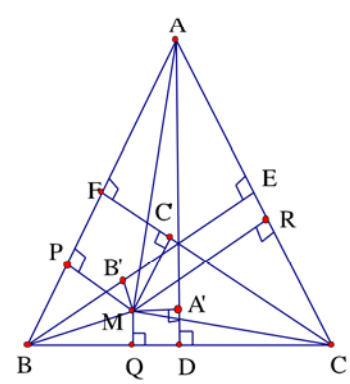
a) A’D + B’E + C’F không đổi

b) AA’ + BB’ + CC’ không đổi

Giải

Gọi h = AH là chiều cao của tam giác ABC thì h không đổi

Gọi khoảng cách từ M đến các cạnh AB; BC; CA là MP; MQ; MR thì A’D + B’E + C’F = MQ + MR + MP



Vì M nằm trong tam giác ABC nên

$S_{BMC} + S_{CMA} + S_{BMA} = S_{ABC}$

$\Leftrightarrow$ BC.(MQ + MR + MP) = BC . AH

$\Rightarrow$ MQ + MR + MP = AH $\Rightarrow$ A’D + B’E + C’F = AH = h

Vậy: A’D + B’E + C’F = AH = h không đổi

b) AA’ + BB’ + CC’ = (AH – A’D)+(BE – B’E) (CF – C’F)

= (AH + BE + CF) – (A’D + B’E + C’F) = 3h – h = 2h không đổi

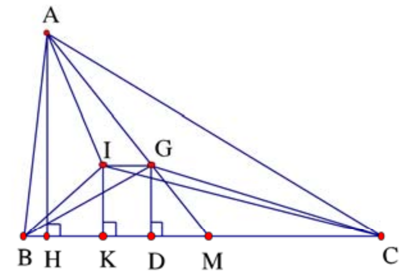
Bài 5:

Cho tam giác ABC có BC bằng trung bình cộng của AC và AB; Gọi I là giao điểm của các phân giác, G là trọng tâm của tam giác. Chứng minh: IG // BC

Giải

Gọi khoảng cách từ a, I, G đến BC lần lượt là AH, IK, GD

Vì I là giap điểm của ba đường phân giác nên khoảng cách từ I đến ba cạnh AB, BC, CA bằng nhau và bằng IK



Vì I nằm trong tam giác ABC nên:

$S_{ABC} = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA} \Leftrightarrow BC.AH = IK(AB+BC+CA)$ (1)

Mà $BC = \dfrac{AB + CA}{2} \Rightarrow AB + CA = 2\,BC$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có: $BC.\ AH = IK.\ 3BC \Rightarrow IK = \dfrac{1}{3}AH$ (a)

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$S_{BGC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \Leftrightarrow BC\ .\ GD = \dfrac{1}{3}BC.\ AH \Rightarrow GD = \dfrac{1}{3}AH$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra IK = GD hay khoảng cách từ I, G đến BC bằng nhau nên IG // BC

Bài tập về nhà:

1) Cho C là điểm thuộc tia phân giác của $\widehat{xOy} = 60^0$, Mlà điểm bất kỳ nằm trên đường vuông góc với OC tại C và thuộc miền trong của $\widehat{xOy}$, gọi MA, MB thứ tự là khoảng cách từ M đến Ox, Oy. Tính độ dài OC theo MA, MB

2) Cho M là điểm nằm trong tam giác đều ABC. A', B', C' là hình chiếu của M trên các cạnh BC, AC, AB. Các đường thẳng vuông góc với BC tại C, vuông góc với CA tại A, vuông góc với AB tại B cắt nhau ở D, E, F. Chứng minh rằng:

a) Tam giác DEF là tam giác đều

b) AB' + BC' + CA' không phụ thuộc vị trí của M trong tam giác ABC

CHUYÊN ĐỀ 16 – BẤT ĐẲNG THỨC

Phần I : các kiến thức cần lưu ý

1-Đinhnghĩa: $\begin{cases} A \ge B \Leftrightarrow A - B \ge 0 \\ A \le B \Leftrightarrow A - B \le 0 \end{cases}$

2-tính chất

+ A>B $\Leftrightarrow B < A$	+ A > B > 0 $\Rightarrow$ $A^n > B^n$ $\forall n$
+ A>B và B >C $\Leftrightarrow$ A > C	+ A > B $\Rightarrow$ $A^n > B^n$ với n lẻ
+ A>B $\Rightarrow$ A + C >B + C	+ $\|A\| > \|B\|$ $\Rightarrow$ $A^n > B^n$ với n chẵn
+ A>B và C > D $\Rightarrow$ A +C > B + D	+ m > n > 0 và A > 1 $\Rightarrow$ $A^m > A^n$
+ A>B và C > 0 $\Rightarrow$ A.C > B.C	+ m > n > 0 và 0 <A < 1 $\Rightarrow$ $A^m < A^n$
+ A>B và C < 0 $\Rightarrow$ A.C < B.C	+A < B và A.B > 0 $\Rightarrow$ $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$
+ 0 < A < B và 0 < C < D $\Rightarrow$ 0 < A.C < B.D	

3 - một số hằng bất đẳng thức

+ $A^2 \ge 0$ với $\forall$ A (dấu = xảy ra khi A = 0)

+ $A^n \ge 0$ với $\forall$ A (dấu = xảy ra khi A = 0)

+ $|A| \ge 0$ với $\forall A$ (dấu = xảy ra khi A = 0)

+ -$|A|$ < A = $|A|$

+ $|A+B| \ge |A| + |B|$ (dấu = xảy ra khi A.B > 0)

+ $|A-B| \le |A| - |B|$ (dấu = xảy ra khi A.B < 0)

Phần II : một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức

1) Phương pháp 1: dùng định nghĩa

Kiến thức : Để chứng minh A > B Ta chứng minh A – B > 0

Lưu ý dùng hằng bất đẳng thức $M^2 \ge 0$ với $\forall$ M

Ví dụ 1 $\forall$ x, y, z chứng minh rằng :

a) $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$

b) $x^2 + y^2 + z^2 \ge 2xy - 2xz + 2yz$

Giải:

a) Ta xét hiệu : $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}.2.(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2\right] \geq 0$ đúng với mọi x;y;$z \in R$

Vì $(x-y)^2 \geq 0$ với $\forall x$; y .Dấu bằng xảy ra khi x = y

$(x-z)^2 \geq 0$ với $\forall x$; z . Dấu bằng xảy ra khi x = z

$(y-z)^2 \geq 0$ với $\forall$ z; y . Dấu bằng xảy ra khi z = y

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$. Dấu bằng xảy ra khi x = y =z

b)Ta xét hiệu:

$x^2 + y^2 + z^2 - (2xy - 2xz + 2yz) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = (x - y + z)^2 \geq 0$ đúng với mọi x;y;$z \in R$

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$ đúng với mọi x;y;$z \in R$

Dấu bằng xảy ra khi x + y = z

Ví dụ 2: chứng minh rằng :

a) $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$; b) $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ c) Hãy tổng quát bài toán

giải

a) Ta xét hiệu

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{2(a^2+b^2)}{4} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{1}{4}(2a^2+2b^2-a^2-b^2-2ab) = \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$$

Vậy $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ Dấu bằng xảy ra khi a = b

b)Ta xét hiệu: $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geq 0$

Vậy $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ Dấu bằng xảy ra khi a = b =c

c)Tổng quát: $\frac{a_1^2+a_2^2+....+a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n}\right)^2$

* Tóm lại các bước để chứng minh A ≥ B theo định nghĩa

Bước 1: Ta xét hiệu H = A - B

Bước 2:Biến đổi H = $(C+D)^2$ hoặc H=$(C+D)^2+\ldots+(E+F)^2$

Bước 3: Kết luận A ≥ B

2) phương pháp 2 : Dùng phép biến đổi tương đương

Lưu ý:

Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức đúng hoặc bất đẳng thức đã được chứng minh là đúng.

Ví dụ 1: Cho a, b, c, d,e là các số thực chứng minh rằng

a) $a^2+\frac{b^2}{4}\ge ab$ b) $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$ c) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$

Giải:

a) $a^2+\frac{b^2}{4}\ge ab \Leftrightarrow 4a^2+b^2\ge 4ab \Leftrightarrow 4a^2-4a+b^2\ge 0 \Leftrightarrow (2a-b)^2\ge 0$ (Bđt này luôn đúng)

Vậy $a^2+\frac{b^2}{4}\ge ab$ (dấu bằng xảy ra khi 2a = b)

b) $a^2+b^2+1\ge ab+a+b \Leftrightarrow 2(a^2+b^2+1)>2(ab+a+b)$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2+a^2-2a+1+b^2-2b+1\ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\ge 0$ (luôn đúng)

Vậy $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$ Dấu bằng xảy ra khi a = b = 1

c) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e) \Leftrightarrow 4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)\ge 4a(b+c+d+e)$

$\Leftrightarrow (a^2-4ab+4b^2)+(a^2-4ac+4c^2)+(a^2-4ad+4d^2)+(a^2-4ac+4c^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+(a-2c)^2\ge 0$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2)\ge(a^8+b^8)(a^4+b^4)$

Giải:

$(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2)\ge(a^8+b^8)(a^4+b^4) \Leftrightarrow a^{12}+a^{10}b^2+a^2b^{10}+b^{12}\ge a^{12}+a^8b^4+a^4b^8+b^{12}$

$\Leftrightarrow a^8b^2(a^2-b^2)+a^2b^8(b^2-a^2)\ge 0 \Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2)(a^6-b^6)\ge 0 \Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2)^2(a^4+a^2b^2+b^4)\ge 0$

Ví dụ 4: cho ba số thực khác không x, y, z thỏa mãn: $\begin{cases} x.y.z=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<x+y+z \end{cases}$

Chứng minh rằng : có đúng một trong ba số x,y,z lớn hơn 1

Giải: Xét (x-1)(y-1)(z-1) = xyz + (xy + yz + zx) + x + y + z - 1

$= (xyz - 1) + (x + y + z) - xyz(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) = x + y + z - (\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) > 0$

(vì $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} <$ x+y+z theo gt) $\rightarrow$ 2 trong 3 số x-1 , y-1 , z-1 âm hoặc cả ba sỗ-1 , y-1, z-1 là dương.

Nếu trường hợp sau xảy ra thì x, y, z >1 $\rightarrow$x.y.z>1 Mâu thuẫn gt x.y.z =1 bắt buộc phải xảy ra trường hợp trên tức là có đúng 1 trong ba số x ,y ,z là số lớn hơn 1

3) Phương pháp 3: dùng bất đẳng thức quen thuộc

A) một số bất đẳng thức hay dùng

1) Các bất đẳng thức phụ:

a) $x^2 + y^2 \geq 2xy$ b) $x^2 + y^2 \geq |\ xy\ |$ dấu(=) khi x = y = 0

c) $(x+y)^2 \geq 4xy$ d) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$

2)Bất đẳng thức Cô sy: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 .... a_n}$ Với $a_i > 0$

3)Bất đẳng thức Bunhiacopski

$$\left(a_2{}^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + ... +{}_n^2\right) \geq \left(a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n\right)^2$$

4) Bất đẳng thức Trê-bư - sép:

Nếu $\begin{cases} a \leq b \leq c \\ A \leq B \leq C \end{cases} \Rightarrow \frac{aA + bB + cC}{3} \geq \frac{a+b+c}{3} . \frac{A+B+C}{3}$

Nếu $\begin{cases} a \leq b \leq c \\ A \geq B \geq C \end{cases} \Rightarrow \frac{aA + bB + cC}{3} \leq \frac{a+b+c}{3} . \frac{A+B+C}{3}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a = b = c \\ A = B = C \end{cases}$

B) các ví dụ

<u>ví dụ 1</u>

Cho a, b ,c là các số không âm chứng minh rằng (a+b) (b+c)(c+a) $\geq$ 8abc

Giải: Dùng bất đẳng thức phụ: $(x+y)^2 \geq 4xy$

Tacó $(a+b)^2 \geq 4ab$; $(b+c)^2 \geq 4bc$; $(c+a)^2 \geq 4ac$

$\Rightarrow (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq 64a^2b^2c^2 = (8abc)^2 \Rightarrow$ (a + b)(b + c)(c + a) $\geq$ 8abc

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c

ví dụ 2: Cho a > b > c > 0 và $a^2+b^2+c^2=1$ chứng minh rằng $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}$

Do a,b,c đối xứng , giả sử a $\geq$ b $\geq$ c $\Rightarrow \begin{cases} a^2 \geq b^2 \geq c^2 \\ \frac{a}{b+c} \geq \frac{b}{a+c} \geq \frac{c}{a+b} \end{cases}$

áp dụng BĐT Trê- bư-sép ta có

$$a^2.\frac{a}{b+c}+b^2.\frac{b}{a+c}+c^2.\frac{c}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)=\frac{1}{3}.\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

Vậy $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}$ Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

ví dụ 3: Cho a,b,c,d > 0 và abcd =1 .Chứng minh rằng :

$$a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a) \geq 10$$

Ta có $a^2+b^2 \geq 2ab$; $c^2+d^2 \geq 2cd$

Do abcd =1 nên cd =$\frac{1}{ab}$ (dùng $x+\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$)

Ta có $a^2+b^2+c^2 \geq 2(ab+cd) = 2(ab+\frac{1}{ab}) \geq 4$ (1)

Mặt khác: $a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)$ = (ab + cd) + (ac + bd) + (bc + ad)

$=\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+\left(ac+\frac{1}{ac}\right)+\left(bc+\frac{1}{bc}\right) \geq 2+2+2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a) \geq 10$

ví dụ 4: Chứng minh rằng : $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$

Giải: Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski

Xét cặp số (1,1,1) và (a,b,c) ta có $(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) \geq (1.a+1.b+1.c)^2$

$\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \geq a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c

4) Phương pháp 4: dùng tính chất của tỷ số

A. Kiến thức

1) Cho a, b ,c là các số dương thì

a – Nếu $\frac{a}{b}>1$ thì $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$ b – Nếu $\frac{a}{b}<1$ thì $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$

2) Nếu b,d >0 thì từ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

B. Các ví dụ:

ví dụ 1: Cho a,b,c,d > 0 .Chứng minh rằng : $1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$

Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có $\frac{a}{a+b+c}<1\Rightarrow\frac{a}{a+b+c}<\frac{a+d}{a+b+c+d}$ (1)

Mặt khác : $\frac{a}{a+b+c}>\frac{a}{a+b+c+d}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{a}{a+b+c+d}<\frac{a}{a+b+c}<\frac{a+d}{a+b+c+d}$ (3)

Tương tự ta có : $\frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{b+c+d}<\frac{b+a}{a+b+c+d}$ (4)

$\frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{c+d+a}<\frac{b+c}{a+b+c+d}$ (5); $\frac{d}{a+b+c+d}<\frac{d}{d+a+b}<\frac{d+c}{a+b+c+d}$ (6)

cộng vế với vế của (3); (4); (5); (6) ta có

$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$ (đpcm)

ví dụ 2 : Cho: $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ và b,d > 0

Chứng minh rằng $\frac{a}{b}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{c}{d}$

Giải: Từ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{ab}{b^2}<\frac{cd}{d^2}$ $\Rightarrow\frac{ab}{b^2}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{cd}{d^2}=\frac{c}{d}$ $\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{c}{d}$ (đpcm)

ví dụ 3 : Cho a;b;c;d là các số nguyên dương thỏa mãn : a + b = c+d =1000

tìm giá trị lớn nhất của $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$

giải : Không mất tính tổng quát ta giả sử : $\frac{a}{c}\le\frac{b}{d}$ $\Rightarrow\frac{a}{c}\le\frac{a+b}{c+d}\le\frac{b}{d}$; $\frac{a}{c}\le1$ vì a + b = c + d a, Nếu: b ≤ 998 thì $\frac{b}{d} \le 998 \Rightarrow \frac{a}{c}+\frac{b}{d} \le 999$

b, Nếu: b = 998 thì a =1 $\Rightarrow \frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{1}{c}+\frac{999}{d}$ Đạt giá trị lớn nhất khi d = 1; c = 999

Vậy: giá trị lớn nhất của $\frac{a}{c}+\frac{b}{d} = 999 + \frac{1}{999}$ khi a = d = 1; c = b = 999

Ví dụ 4 : Với mọi số tự nhiên n >1 chứng minh rằng : $\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{n+n}<\frac{3}{4}$

Ta có $\frac{1}{n+k}>\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2n}$ với k = 1,2,3,…,n-1

Do đó: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

Ví dụ 5: CMR: A = $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+........+\frac{1}{n^2}$ với $n \ge 2$ không là số tự nhiên

HD: $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1.2.};\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3};.....$

Ví dụ 6: Cho a ,b ,c ,d > 0 .Chứng minh rằng :

$$2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<3$$

Giải :

Vì a ,b ,c ,d > 0 nên ta có: $\frac{a+b}{a+b+c+d}<\frac{a+b}{a+b+c}<\frac{a+b+d}{a+b+c+d}$ (1)

$$\frac{b++c}{a+b+c+d}<\frac{b+c}{b+c+d}<\frac{b+c+a}{a+b+c+d} \quad (2)$$

$$\frac{d+a}{a+b+c+d}<\frac{d+a}{d+a+b}<\frac{d+a+c}{a+b+c+d} \quad (3)$$

Cộng các vế của 4 bất đẳng thức trên ta có :

$$2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<3 \quad \text{(đpcm)}$$

5. Phương pháp 5:Dùng bất đẳng thức trong tam giác

Lưu ý: Nếu a;b;clà số đo ba cạnh của tam giác thì : a; b; c > 0

Và |b-c| < a < b+c ; |a-c| < b < a+c ; |a-b| < c < b+a

Ví dụ1:

Cho a; b; clà số đo ba cạnh của tam giác chứng minh rằng

a, $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$

b, abc $> (a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)$

Giải

a)Vì a,b,c là số đo 3 cạnh của một tam giác nên ta có $\begin{cases} 0 < a < b+c \\ 0 < b < a+c \\ 0 < c < a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < a(b+c) \\ b^2 < b(a+c) \\ c^2 < c(a+b) \end{cases}$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$

b) Ta có $a > |b-c| \Rightarrow a^2 > a^2 - (b-c)^2 > 0$

$b > |a-c| \Rightarrow b^2 > b^2 - (c-a)^2 > 0$

$c > |a-b| \Rightarrow c^2 > c^2 - (a-b)^2 > 0$

Nhân vế các bất đẳng thức ta được: $a^2b^2c^2 > \left[a^2 - (b-c)^2\right]\left[b^2 - (c-a)^2\right]\left[c^2 - (a-b)^2\right]$

$$\Rightarrow a^2b^2c^2 > (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 \Rightarrow abc > (a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)$$

Ví dụ2: (đổi biến số)

Cho a,b,c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (1)

Đặt x= b + c ; y= c + a ;z = a + b ta có a = $\frac{y+z-x}{2}$; b = $\frac{z+x-y}{2}$; c = $\frac{x+y-z}{2}$

ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{y+z-x}{2x} + \frac{z+x-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1 \geq 3$

$\Leftrightarrow (\frac{y}{x} + \frac{x}{y}) + (\frac{z}{x} + \frac{x}{z}) + (\frac{z}{y} + \frac{y}{z}) \geq 6$ là Bđt đúng?

Ví dụ 3: (đổi biến số)

Cho a, b, c > 0 và a + b + c <1. Chứng minh rằng : $\frac{1}{a^2+2bc} + \frac{1}{b^2+2ac} + \frac{1}{c^2+2ab} \geq 9$ (1)

Giải: Đặt x = $a^2 + 2bc$; y = $b^2 + 2ac$; z = $c^2 + 2ab$

Ta có $x + y + z = (a+b+c)^2 < 1$

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9$ Với x + y + z < 1 và x ,y,z > 0

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$x+y+z \ge 3.\sqrt[3]{xyz}$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge 3.\,.\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \Rightarrow \;(x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge 9$

6) phương pháp làm trội :

Chứng minh BĐT sau :

a) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}<\frac{1}{2}$

b) $1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+...+\frac{1}{1.2.3.....n}<2$

Giải :

a) Ta có : $\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{1}{2}.\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1).(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

Cho n chạy từ 1 đến k .Sau đó cộng lại ta có

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{1}{2}.\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)<\frac{1}{2} \qquad \text{(đpcm)}$$

b) Ta có : $1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+...+\frac{1}{1.2.3.....n}<1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+.....+\frac{1}{(n-1).n}$

$$< 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+....+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)<2-\frac{1}{n}<2 \quad \text{(đpcm)}$$

Bài tập về nhà:

1) Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2+3 \ge 2(x+y+z)$

HD: Ta xét hiệu: $x^2+y^2+z^2+3-2(x+y+z) = x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-2z+1$

2) Cho a ,b,c là số đo ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng : $1<\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$

(HD: $\frac{a}{b+c}<\frac{a+a}{a+b+c}=\frac{2a}{a+b+c}$ và $\frac{a}{b+c}>\frac{a}{a+b+c}$)

3) $1<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n+1}+...+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}<2$

áp dụng phương pháp làm trội

4) Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \ge a+b+c$

HD: $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}=c\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq 2c$; $\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}$? ; $\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}$?

CHUYÊN ĐỀ 17 – VẼ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG ĐỂ TẠO THÀNH CÁC CẶP ĐOẠN THẲNG TỶ LỆ

A.Phương pháp:

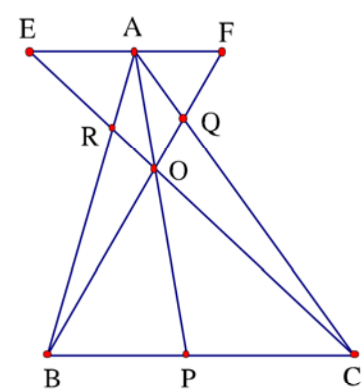
Trong các bài tập vận dụng định lí Talét. Nhiều khi ta cần vẽ thêm đường phlà một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước,. Đây là một cách vẽ đường phụ ĩhay dùng, vì nhờ đó mà tạo thành được các cặp đoạn thẳng tỉ lệ

B. Các ví dụ:

1) Ví dụ 1:

Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC, lấy tương ứng các điểm P, Q, R sao cho ba đường thẳng AP, BQ, CR cắt nhau tại một điểm.

Chứng minh: $\frac{AR}{RB}.\frac{BP}{PC}.\frac{CQ}{QA}=1$ (Định lí Cê – va)



Giải

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt các đường thẳng CR, BQ tại E, F. Gọi O là giao điểm của AP, BQ, CR

$\Delta ARE \backsim \Delta BRC \Rightarrow \frac{AR}{RB}=\frac{AE}{BC}$ (a)

$\Delta BOP \backsim \Delta FOA \Rightarrow \frac{BP}{FA}=\frac{OP}{OA}$ (1)

$\Delta POC \backsim \Delta AOE \Rightarrow \frac{PC}{AE}=\frac{PO}{AO}=$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{BP}{FA}=\frac{PC}{AE}\Rightarrow\frac{BP}{PC}=\frac{FA}{AE}$ (b)

$\Delta AQF \backsim \Delta CQB \Rightarrow \frac{CQ}{AQ}=\frac{BC}{FA}$ (c)

Nhân (a), (b), (c) vế theo vế ta có: $\frac{AR}{RB}.\frac{BP}{PC}.\frac{CQ}{QA}=\frac{AE}{BC}.\frac{FA}{AE}.\frac{BC}{FA}=1$

* Đảo lại: Nếu $\frac{AR}{RB}.\frac{BP}{PC}.\frac{CQ}{QA}=1$ thì bai đường thẳng AP, BQ, CR đồng quy

2) Ví dụ 2:

Một đường thăng bất kỳ cắt các cạnh(phần kéo dài của các cạnh) của tam giác ABC tại P, Q, R.

Chứng minh rằng: $\frac{RB.QA.PC}{RA.CQ.BP}=1$(Định lí Mê-nê-la-uýt)

Giải:

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt PR tại E. Ta có

$\Delta RAE \backsim \Delta RBP \Rightarrow \frac{RB}{RA}=\frac{BP}{AE}$ (a)

$\Delta AQE \backsim \Delta CQP \Rightarrow \frac{QA}{QC}=\frac{AE}{CP}$ (b)

Nhân vế theo vế các đẳng thức (a) và (b) ta có

$\frac{RB}{RA}.\frac{QA}{QC}=\frac{BP}{AE}.\frac{AE}{CP}$ (1)

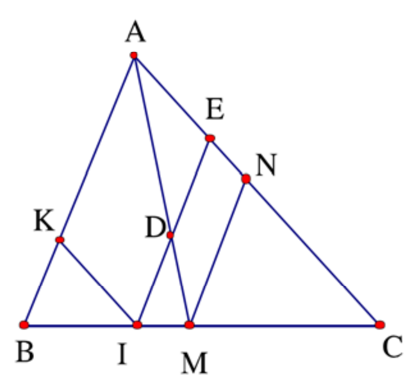
Nhân hai vế đẳng thức (1) với $\frac{PC}{BP}$ ta có: $\frac{RB}{RA}.\frac{PC}{BP}.\frac{QA}{QC}=\frac{BP}{AE}.\frac{AE}{CP}.\frac{PC}{BP}=1$

Đảo lại: Nếu $\frac{RB.QA.PC}{RA.CQ.BP}=1$ thì ba điểm P, Q, R thẳng hàng

3) Ví dụ 3:

Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Gọi I là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Đường thẳng qua I song song với AC cắt AB ở K; đường thẳng qua I song song với AB cắt AC, AM theo thứ tự ở D, E. Chứng minh DE = BK

Giải

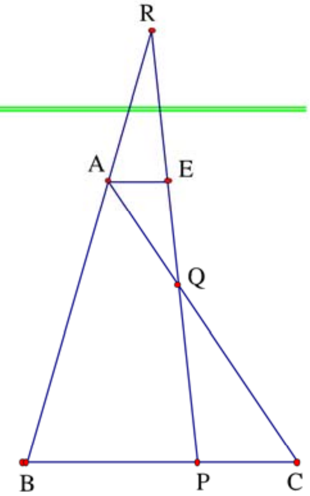


Qua M kẻ MN // IE ($N \in AC$).Ta có:

$\frac{DE}{MN}=\frac{AE}{AN}\Rightarrow\frac{DE}{AE}=\frac{MN}{AN}$ (1)

MN // IE, mà MB = MC $\Rightarrow$ AN = CN (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DE}{AE}=\frac{MN}{CN}$ (3)



Ta lại có $\frac{MN}{AB} = \frac{CN}{AC} \Rightarrow \frac{MN}{CN} = \frac{AB}{AC}$ (4)

Từ (4) và (5) suy ra $\frac{DE}{AE} = \frac{AB}{AC}$ (a)

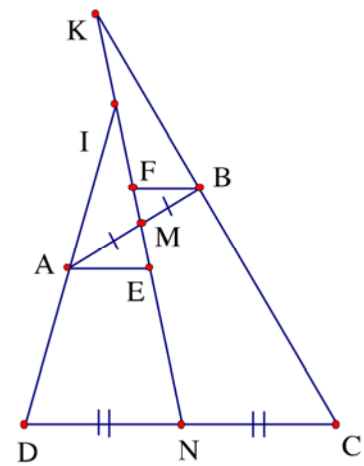
Tương tự ta có: $\frac{BK}{KI} = \frac{AB}{AC}$ (6)

Vì KI // AC, IE // AC nên tứ giác AKIE là hình bình hành nên KI = AE (7)

Từ (6) và (7) suy ra $\frac{BK}{KI} = \frac{BK}{AE} = \frac{AB}{AC}$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra $\frac{DE}{AE} = \frac{BK}{AE} \Rightarrow$ DE = BK

4) Ví dụ 4:



Đường thẳng qua trung điểm của cạnh đối AB, CD của tứ giác ABCD cắt các đường thẳng AD, BC theo thứ tự ở I, K. Chứng minh: IA . KC = ID. KB

Giải

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD

Ta có AM = BM; DN = CN

Vẽ AE, BF lần lượt song song với CD

ΔAME = ΔBMF (g.c.g) $\Rightarrow$ AE = BF

Theo định lí Talét ta có: $\frac{IA}{ID} = \frac{AE}{DN} = \frac{BF}{CN}$ (1)

Củng theo định lí Talét ta có: $\frac{KB}{KC} = \frac{BF}{CN}$ (2)

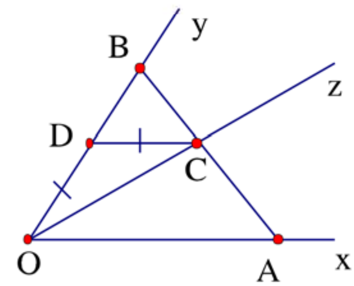
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{IA}{ID} = \frac{KB}{KC} \Rightarrow$ IA . KC = ID. KB

5) Ví dụ 5:

Cho $\widehat{xOy}$, các điểm A, B theo thứ tự chuyển động trên các tia Ox, Oy sao cho

$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{k}$ (k là hằng số). Chứng minh rằng AB luôn đi qua một điểm cố định

Giải



Vẽ tia phân giác Oz của $\widehat{xOy}$ cắt AB ở C. vẽ CD // OA

(D $\in$ OB) $\Rightarrow$ $\widehat{DOC} = \widehat{DCO} = \widehat{AOC}$

$\Rightarrow \Delta$COD cân tại D $\Rightarrow$ DO = DC

Theo định lí Talét ta có $\frac{CD}{OA} = \frac{BD}{OB} \Rightarrow \frac{CD}{OA} = \frac{OB - CD}{OB}$

$\Rightarrow \frac{CD}{OA} + \frac{CD}{OB} = 1 \Rightarrow \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{CD}$ (1)

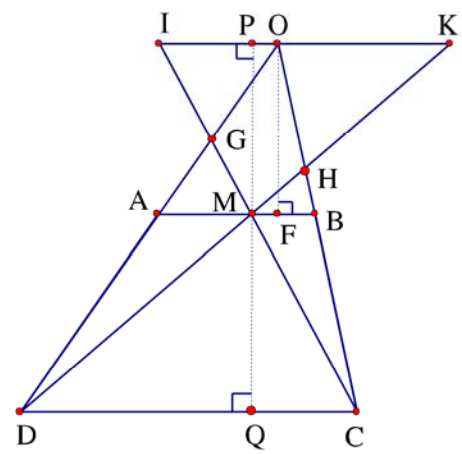
Theo giả thiết thì $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{k}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra CD = k , không đổi

Vậy AB luôn đi qua một điểm cố định là C sao cho CD = k và CD // Ox , D $\in$ OB

6) Ví dụ 6:

Cho điểm M di động trên đáy nhỏ AB của hình thang ABCD, Gọi O là giao điểm của hai cạnh bên DA, CB. Gọi G là giao điểm của OA và CM, H là giao điểm của OB và DM. Chứng minh rằng: Khi M di động trên AB thì tổng $\frac{OG}{GD} + \frac{OH}{HC}$ không đổi



Giải

Qua O kẻ đường thẳng song với AB cắt CM, DM theo thứ tự ở I và K. Theo định lí Talét ta có:

$\frac{OG}{GD} = \frac{OI}{CD}$; $\frac{OH}{HC} = \frac{OK}{CD} \Rightarrow \frac{OG}{GD} + \frac{OH}{HC} = \frac{OI}{CD} + \frac{OK}{CD} = \frac{IK}{CD}$

$\Rightarrow \frac{OG}{GD} + \frac{OH}{HC} = \frac{IK}{CD}$ (1)

Qua M vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt IK, CD theo thứ tự ở P và Q, ta có:

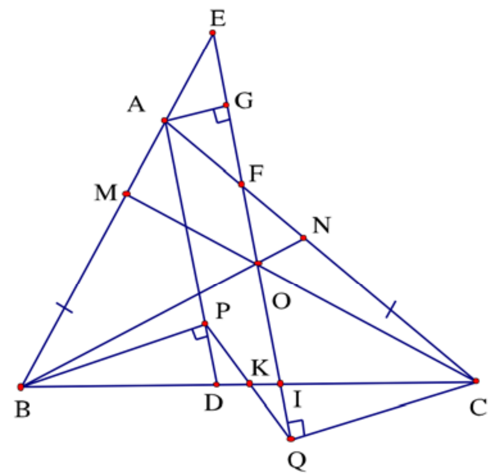
$\frac{IK}{CD} = \frac{MP}{MQ} = \frac{FO}{MQ}$ không đổi vì FO là khoảng cách từ O đến AB, MQ là đường cao của hình thang nên không đổi (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{OG}{GD} + \frac{OH}{HC} = \frac{FO}{MQ}$ không đổi

7) Ví dụ 7:

Cho tam giác ABC (AB < AC), phân giác AD. Trên AB lấy điểm M, trên AC lấy điểm N sao cho BM = CN, gọi giao điểm của CM và BN là O, Từ O vẽ đường thẳng song song với AD cắt AC, AB tại E và F.

Chứng minh rằng: AB = CF; BE = CA



Giải.

AD là phân giác nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAF}$

EI // AD $\Rightarrow$ $\widehat{BAD} = \widehat{AEF}$ (góc đồng vị)

Mà $\widehat{DAF} = \widehat{OFC}$ (đồng vị); $\widehat{AFE} = \widehat{OFC}$ (đối đỉnh)

Suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{AFE}$ $\Rightarrow$ ΔAFE cân tại A $\Rightarrow$ AE =AF (a)

Aùp dụng định lí Talét vào ΔACD , với I là giao điểm của EF với BC ta có $\frac{CF}{CA} = \frac{CI}{CD} \Rightarrow \frac{CF}{CI} = \frac{CA}{CD}$ (1)

AD là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\frac{CA}{CD} = \frac{BA}{BD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{CF}{CI} = \frac{BA}{BD}$ (3)

Kẻ đường cao AG của ΔAFE . BP // AG (P $\in$ AD); CQ // AG (Q$\in$ OI)

thì $\widehat{BPD} = \widehat{CQI} = 90^0$

Gọi trung điểm của BC là K, ta có $\Delta BPK = \Delta CQK$ (g.c.g) $\Rightarrow$ CQ = BP

$\Rightarrow$ $\Delta BPD = \Delta CQI$ (g.c.g) $\Rightarrow$ CI = BD (4)

Thay (4) vào (3) ta có $\frac{CF}{BD} = \frac{BA}{BD}$ $\Rightarrow$ CF = BA (b)

Từ (a) và (b) suy ra BE = CA

Bài tập về nhà

1) Cho tam giác ABC. Điểm D chia trong BC theo tỉ số 1 : 2, điểm O chia trong AD theo tỉ số 3 : 2. gọi K là giao điểm của BO và AC. Chứng minh rằng $\frac{KA}{KC}$ không đổi

2) Cho tam giác ABC (AB > AC). Lấy các điểm D, E tuỳ ý thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho BD = CE. Gọi giao điểm của DE, BC là K, chứng minh rằng :

Tỉ số $\frac{KE}{KD}$ không đổi khi D, E thay đổi trên AB, AC

(HD: Vẽ DG // EC ($G \in BC$).

CHUYÊN ĐỀ 18 – BỔ ĐỀ HÌNH THANG VÀ CHÙM ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

A. Kiến thức

1) Bổ đề hình thang:

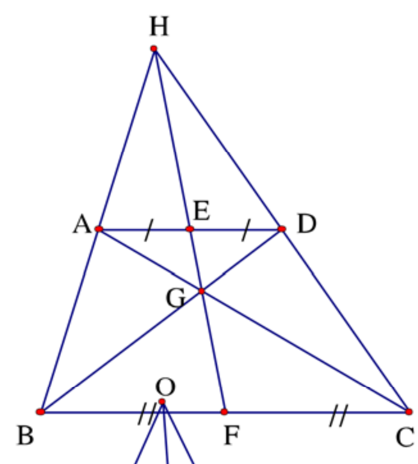
"Trong hình thang có hai đáy không bằng nhau, đường thẳng đi qua giao điểm của các đường chéo và đi qua giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên thì đi qua trung điểm của hai đáy"

Chứng minh:

Gọi giao điểm của AB, CD là H, của AC, BD là G, trung điểm của AD, BC là E và F

Nối EG, FG, ta có: $\Delta ADG \backsim \Delta CBG$ (g.g) , nên :

$\frac{AD}{CB} = \frac{AG}{CG} \Rightarrow \frac{2AE}{2CF} = \frac{AG}{CG} \Rightarrow \frac{AE}{CF} = \frac{AG}{CG}$ (1)



Ta lại có : $\widehat{EAG} = \widehat{FCG}$ (SL trong) (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\Delta AEG \backsim \Delta CFG$ (c.g.c)

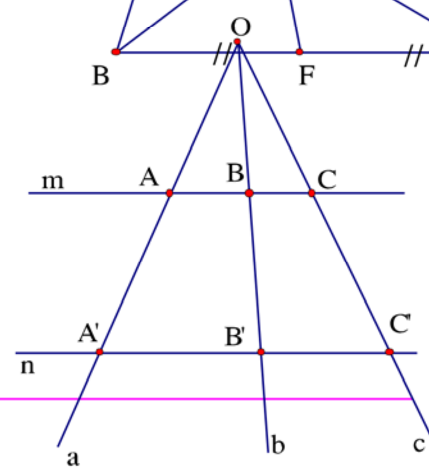
Do đó: $\widehat{AGE} = \widehat{CGF} \Rightarrow$ E , G , H thẳng hàng (3)

Tương tự, ta có: $\Delta AEH \backsim \Delta BFH \Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{BHF}$

$\Rightarrow$ H , E , F thẳng hàng (4)

Tõừ (3) và (4) suy ra : H , E , G , F thẳng hàng

2) Chùm đường thẳng đồng quy:



Nếu các đường thẳng đồng quy cắt hai đường thẳng song song thì chúng định ra trên hai đường thẳng song song ấy các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ

Nếu m // n, ba đường thẳng a, b, c đồng quy ở O chúng cắt m tại A, B, C và cắt n tại A', B', C' thì

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ hoặc $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$; $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$

* Đảo lại:

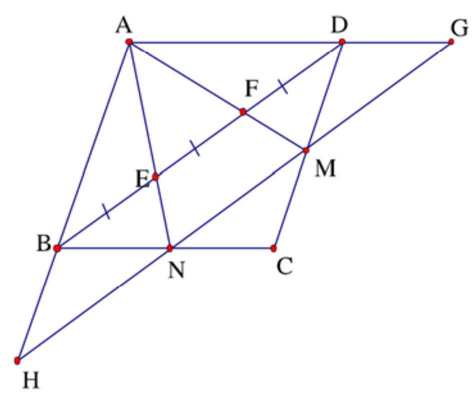
+ Nếu ba đường thẳng trong đó có hai đường thẳng cắt nhau, định ra trên hai đường thẳng song song các cặp đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì ba đường thẳng đó đồng quy

+ Nếu hai đường thẳng bị cắt bởi ba đường thẳng đồng quy tạo thành các cặp đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì chúng song song với nhau

B. Aùp dụng:

1) Bài 1:

Cho tứ giác ABCD có M là trung điểm CD, N là trung điểm CB. Biết AM, AN cắt BD thành ba đoạn bằng nhau. Chứng minh rằng ABCD là hình bình hành



Giải

Gọi E, F là giao điểm của AM, AN với BD; G, H là giao điểm của MN với AD, BD

MN // BC (MN là đường trung bình của ΔBCD)

$\Rightarrow$ Tứ giác HBFM là hình thang có hai cạnh bên đòng quy tại A, N là trung điểm của đáy BF nên theo bổ đề hình thang thì N là trung điểm của đáy MH

$\Rightarrow$ MN = NH (1)

Tương tự : trong hình thang CDEN thì M là trung điểm của GN $\Rightarrow$ GM = MN (2)

Từ (1) và (2) suy ra GM = MN = NH

Ta có ΔBNH = ΔCNM (c.g.c) $\Rightarrow$ $\widehat{BHN} = \widehat{CMN}$ $\Rightarrow$ BH // CM hay AB // CD (a)

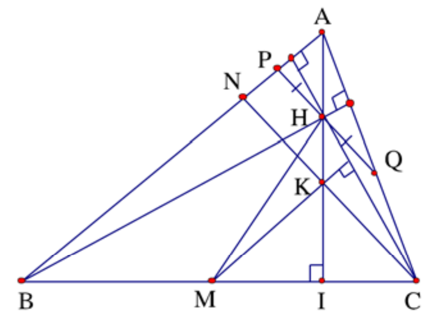
Tương tự: ΔGDM = ΔNCM (c.g.c) $\Rightarrow$ $\widehat{DGM} = \widehat{CNM}$ $\Rightarrow$ GD // CN hay AD // CB (b)

Từ (a) và (b) suy ra tứ giác ABCD có các cặp cạnh đối song song nên là hình bình hành

2) Bài 2:

Cho ΔABC có ba góc nhọn, trực tâm H, một đường thẳng qua H cắt AB, AC thứ tự tạ P, Q sao cho HP = HQ. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh: $HM \perp PQ$

Giải



Gọi giao điểm của AH và BC là I

Từ C kẻ CN // PQ ($N \in AB$),

ta chứng minh $MH \perp CN \Rightarrow HM \perp PQ$

Tứ giác CNPQ là hình thang, có H là trung điểm PQ, hai cạnh bên NP và CQ đồng quy tại A nên K là trung điểm CN

$\Rightarrow$ MK là đường trung bình của $\Delta BCN \Rightarrow MK // CN \Rightarrow MK // AB$ (1)

H là trực tâm của ΔABC nên $CH \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MK \perp CH \Rightarrow$ MK là đường cao của ΔCHK (3)

Từ $AH \perp BC \Rightarrow MC \perp HK \Rightarrow$ MI là đường cao của ΔCHK (4)

Từ (3) và (4) suy ra M là trực tâm của $\Delta CHK \Rightarrow MH \perp CN \Rightarrow MH \perp PQ$

3) bài 3:

Cho hình chữ nhật ABCD có M, N thứ tự là trung điểm của AD, BC. Gọi E là một điểm bất kỳ thuộc tia đối của tia DC, K là giao điểm của EM và AC.

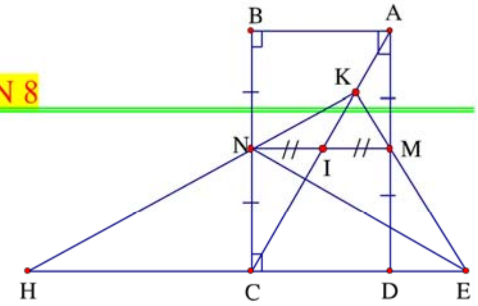
Chứng minh rằng: NM là tia phân giác của $\widehat{KNE}$

Giải

Gọi H là giao điểm của KN và DC, giao điểm của AC và MN là I thì IM = IN

Ta có: MN // CD (MN là đường trung bình của hình chữ nhật ABCD)

$\Rightarrow$ Tứ giác EMNH là hình thang có hai cạnh bên EM và HN đồng quy tại K và I là trung điểm của MN nên C là trung điểm của EH

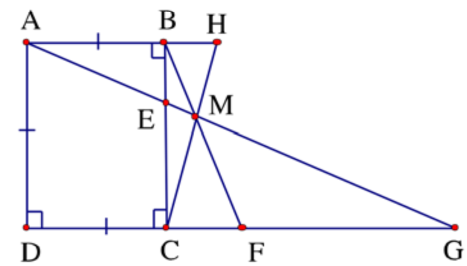


Trong ΔENH thì NC vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên ΔENH cân tại N $\Rightarrow$ NC là tia phân giác của $\widehat{ENH}$ mà NC $\perp$ MN (Do NM $\perp$ BC – MN // AB) $\Rightarrow$ NM là tia phân giác góc ngoài tại N của ΔENH

Vậy NM là tia phân giác của $\widehat{KNE}$

Bài 4:

Trên cạnh BC = 6 cm của hình vuông ABCD lấy điểm E sao cho BE = 2 cm. Trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho CF = 3 cm. Gọi M là giao điểm của AE và BF. Tính $\widehat{AMC}$



Giải

Gọi giao điểm của CM và AB là H, của AM và DF là G

Ta có: $\dfrac{BH}{CF} = \dfrac{AB}{FG} \Leftrightarrow \dfrac{BH}{3} = \dfrac{6}{FG}$

Ta lại có $\dfrac{AB}{CG} = \dfrac{BE}{EC} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow CG = 2AB = 12$ cm

$\Rightarrow$ FG = 9 cm $\Rightarrow$ $\dfrac{BH}{3} = \dfrac{6}{9} \Rightarrow BH = 2$ cm $\Rightarrow$ BH = BE

ΔBAE = ΔBCH (c.g.c) $\Rightarrow$ $\widehat{BAE} = \widehat{BCH}$ mà $\widehat{BAE} + \widehat{BEA} = 90^0$

Mặt khác $\widehat{BEA} = \widehat{MEC}$; $\widehat{MCE} = \widehat{BCH}$ $\Rightarrow$ $\widehat{MEC} + \widehat{MCE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AMC} = 90^0$

Bài 5:

Cho tứ giác ABCD. Qua điểm E thuộc AB, H thuộc AC vẽ các đường thẳng song song với BD, cắt các cạnh còn lại của tứ giác tại F, G

a) Có thể kết luận gì về các đường thẳng EH, AC, FG

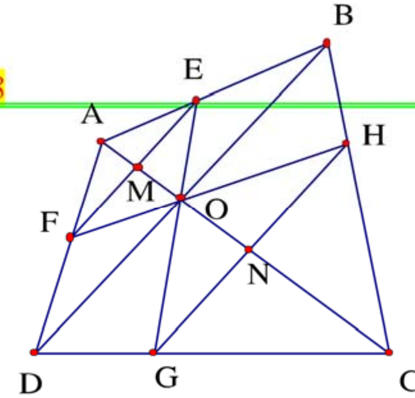
b) Gọi O là giao điểm của AC và BD, cho biết OB = OD. Chứng minh rằng ba đường thẳng EG, FH, AC đồng quy

Giải

a) Nếu EH // AC thì EH // AC // FG

Nếu EH và AC không song song thì EH, AC, FG đồng quy

b) Gọi giao điểm của EH, HG với AC



Trong hình thang DFEB có hai cạnh bên DF, BE đồng quy tại A và OB = OD nên theo bổ đề hình thang thì M là trung điểm của EF

Tương tự: N là trung điểm của GH

Ta có $\frac{ME}{GN} = \frac{MF}{HN}$ nên ba đường thẳng EG, FH, AC đồng quy tại O

CHUYÊN ĐỀ 19 – TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

A. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức

1) Khái niệm: Nếu với mọi giá trị của biến thuộc một khoảng xác định nào đó mà giá trị của biểu thức A luôn luôn lớn hơn hoặc bằng (nhỏ hơn hoặc bằng) một hằng số k và tồn tại một giá trị của biến để A có giá trị bằng k thì k gọi là giá trị nhỏ nhất (giá trị lớn nhất) của biểu thức A ứng với các giá trị của biến thuộc khoảng xác định nói trên

2) Phương pháp

a) Để tìm giá trị nhỏ nhất của A, ta cần:

+ Chứng minh $A \geq k$ với k là hằng số

+ Chỉ ra dấ "=" có thể xẩy ra với giá trị nào đó của biến

b) Để tìm giá trị lớn nhất của A, ta cần:

+ Chứng minh $A \leq k$ với k là hằng số

+ Chỉ ra dấ "=" có thể xẩy ra với giá trị nào đó của biến

Kí hiệu : min A là giá trị nhỏ nhất của A; max A là giá trị lớn nhất của A

B.Các bài tập tìm Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức

I) Dạng 1: Tam thức bậc hai

Ví dụ 1 :

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 2x^2 - 8x + 1$

b) Tìm giá trị lớn nhất của $B = -5x^2 - 4x + 1$

Giải

a) $A = 2(x^2 - 4x + 4) - 7 = 2(x - 2)^2 - 7 \geq -7$

min A $= -7 \Leftrightarrow x = 2$

b) $B = -5(x^2 + \frac{4}{5}x) + 1 = -5(x^2 + 2.x.\frac{2}{5} + \frac{4}{25}) + \frac{9}{5} = \frac{9}{5} - 5(x + \frac{2}{5})^2 \leq \frac{9}{5}$

max B $= \frac{9}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$

b) Ví dụ 2: Cho tam thức bậc hai $P(x) = a\,x^2 + bx + c$

a) Tìm min P nếu $a > 0$

b) Tìm max P nếu $a < 0$

Giải

Ta có: $P = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a})$

Đặt $c - \frac{b^2}{4a} = k$. Do $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ nên:

a) Nếu $a > 0$ thì $a(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ do đó $P \geq k \Rightarrow \min P = k \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

b) Nếu $a < 0$ thì $a(x + \frac{b}{2a})^2 \leq 0$ do đó $P \leq k \Rightarrow \max P = k \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

II. Dạng 2: Đa thức có dấu giá trị tuyệt đối

1) Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $A = (3x - 1)^2 - 4|3x - 1| + 5$

đặt $|3x - 1| = y$ thì $A = y^2 - 4y + 5 = (y - 2)^2 + 1 \geq 1$

$\min A = 1 \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow |3x - 1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 1 = 2 \\ 3x - 1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$

b) $B = |x - 2| + |x - 3|$

$B = |x - 2| + |x - 3| = B = |x - 2| + |3 - x| \geq |x - 2 + 3 - x| = 1$

$\Rightarrow \min B = 1 \Leftrightarrow (x - 2)(3 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$

2) Ví dụ 2: Tìm GTNN của $C = |x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2|$

Ta có $C = |x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2| = |x^2 - x + 1| + |2 + x - x^2| \geq |x^2 - x + 1 + 2 + x - x^2| = 3$

$\min C = 3 \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(2 + x - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 2 + x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$

3) Ví dụ 3:

Tìm giá trị nhỏ nhất của : $T = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

Ta có $|x-1| + |x-4| = |x-1| + |4-x| \geq |x-1+4-x| = 3$ (1)

Và $|x-2|+|x-3|=|x-2|+|3-x|\geq|x-2+3-x|$ = 1 (2)

Vậy T = |x-1| + |x-2| +|x-3| + |x-4| $\geq$ 1 + 3 = 4

Ta có từ (1) $\Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra khi $1\leq x\leq 4$

(2) $\Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra khi $2\leq x\leq 3$

Vậy T có giá trị nhỏ nhất là 4 khi $2\leq x\leq 3$

III.Dạng 3: Đa thức bậc cao

1) Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) A = x(x – 3)(x – 4)(x – 7) = $(x^2 - 7x)(x^2 - 7x + 12)$

Đặt $x^2 - 7x + 6$ thì A = (y – 6)(y + 6) = $y^2 - 36 \geq -36$

Min A = - 36 $\Leftrightarrow$ y = 0 $\Leftrightarrow$ $x^2 - 7x + 6 = 0$ $\Leftrightarrow$ (x – 1)(x – 6) = 0 $\Leftrightarrow$ x = 1 hoặc x = 6

b) $B = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3 = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + 2$

$= (x-y)^2 + (x-1)^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

c) $C = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y = x^2 - 2x + y^2 - 2y + xy - x - y$

Ta có $C + 3 = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (xy - x - y + 1)$

$= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-1)(y-1)$. Đặt x – 1 = a; y – 1 = b thì

$C + 3 = a^2 + b^2 + ab = (a^2 + 2.a.\frac{b}{2} + \frac{b^2}{4}) + \frac{3b^2}{4} = (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$

Min (C + 3) = 0 hay min C = - 3 $\Leftrightarrow$ a = b = 0 $\Leftrightarrow$ x = y = 1

2) Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $C = (x + 8)^4 + (x + 6)^4$

Đặt x + 7 = y $\Rightarrow$ $C = (y + 1)^4 + (y - 1)^4 = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 + y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1$

$= 2y^4 + 12y^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow$ min A = 2 $\Leftrightarrow$ y = 0 $\Leftrightarrow$ x = - 7

b) $D = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = (x^4 - 6x^3 + 9x^2) + (x^2 - 6x + 9)$

$= (x^2 - 3x)^2 + (x-3)^2 \geq 0 \Rightarrow$ min D = 0 $\Leftrightarrow$ x = 3

IV. Dạng phân thức:

1. Phân thức có tử là hằng số, mẫu là tam thức bậc hai

Biểu thức dạng này đạt GTNN khi mẫu đạt GTLN

Ví dụ : Tìm GTNN của $A = \dfrac{2}{6x - 5 - 9x^2} = \dfrac{-2}{9x^2 - 6x + 5} = \dfrac{-2}{(3x - 1)^2 + 4}$

Vì $(3x - 1)^2 \ge 0 \Rightarrow (3x - 1)^2 + 4 \ge 4 \Rightarrow \dfrac{1}{(3x - 1)^2 + 4} \le \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{-2}{(3x - 1)^2 + 4} \ge \dfrac{-2}{4} \Rightarrow A \ge -\dfrac{1}{2}$

$\min A = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

2. Phân thức có mẫu là bình phương của một nhị thức

a) Ví dụ 1: Tìm GTNN của $A = \dfrac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

+) Cách 1: Tách tử thành các nhóm có nhân tử chung với mẫu

$A = \dfrac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{3(x^2 - 2x + 1) - 2(x - 1) + 1}{(x - 1)^2} = 3 - \dfrac{2}{x - 1} + \dfrac{1}{(x - 1)^2}$. Đặt $y = \dfrac{1}{x - 1}$ Thì

$A = 3 - 2y + y^2 = (y - 1)^2 + 2 \ge 2 \Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x - 1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$

+) Cách 2: Viết biểu thức A thành tổng của một số với một phân thức không âm

$A = \dfrac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{2(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 4x + 4)}{(x - 1)^2} = 2 + \dfrac{(x - 2)^2}{(x - 1)^2} \ge 2$

$\Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

b) Ví dụ 2: Tìm GTLN của $B = \dfrac{x}{x^2 + 20x + 100}$

Ta có $B = \dfrac{x}{x^2 + 20x + 100} = \dfrac{x}{(x + 10)^2}$. Đặt $y = \dfrac{1}{x + 10} \Rightarrow x = \dfrac{1}{y} - 10$ thì

$B = (\dfrac{1}{y} - 10).y^2 = -10y^2 + y = -10(y^2 - 2.y.\dfrac{1}{20}y + \dfrac{1}{400}) + \dfrac{1}{40} = -10\left(y - \dfrac{1}{10}\right)^2 + \dfrac{1}{40} \le \dfrac{1}{40}$

$\text{Max } B = \dfrac{1}{40} \Leftrightarrow y - \dfrac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow x = 10$

c) Ví dụ 3: Tìm GTNN của $C = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

Ta có: $C = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \dfrac{\frac{1}{2}\left[(x + y)^2 + (x - y)^2\right]}{(x + y)^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}.\dfrac{(x - y)^2}{(x + y)^2} \ge \dfrac{1}{2} \Rightarrow \min A = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = y$

3. Các phân thức có dạng khác

a)Ví dụ : Tìm GTNN, GTLN (Cực trị) của $A = \frac{3 - 4x}{x^2 + 1}$

Ta có: $A = \frac{3 - 4x}{x^2 + 1} = \frac{(4x^2 - 4x + 4) - (x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{(x - 2)^2}{x^2 + 1} - 1 \geq -1 \Rightarrow \min A = -1 \Leftrightarrow x = 2$

Ta lại có: $A = \frac{3 - 4x}{x^2 + 1} = \frac{(4x^2 + 4) - (4x^2 + 4x + 1)}{x^2 + 1} = 4 - \frac{(2x + 1)^2}{x^2 + 1} \leq 4 \Rightarrow \max A = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

C. Tìm GTNN, GTLN của một biểu thức biết quan hệ giữa các biến

1) Ví dụ 1: Cho x + y = 1. Tìm GTNN của $A = x^3 + y^3 + xy$

Ta có $A = (x + y)(x^2 - xy + y^2) + xy = x^2 + y^2$ (vì x + y = 1)

a) Cách 1: Biểu thị ẩn này qua ẩn kia, rồi đưa về một tam thức bậc hai

Từ $x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y$

nên $A = (1 - y)^2 + y^2 = 2(y^2 - y) + 1 = 2(y^2 - 2.y.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

Vậy $\min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

b) Cách 2: Sử dụng đk đã cho, làm xuất hiện một biểu thức mới có chứa A

Từ $x + y = 1 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 1$(1). Mặt khác $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ (2)

Cộng (1) với (2) vế theo vế, ta có:

$2(x^2 + y^2) \geq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

2)Ví dụ 2: Cho x + y + z = 3

a) Tìm GTNN của $A = x^2 + y^2 + z^2$

b) Tìm GTLN của B = xy + yz + xz

Từ Cho $x + y + z = 3 \Rightarrow$ Cho $(x + y + z)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 9$ (1)

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}.2.(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{2}\left[(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2\right] \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ (2)

Đẳng thức xẩy ra khi x = y = z

a) Từ (1) và (2) suy ra

$9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) \leq x^2 + y^2 + z^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 3 \Rightarrow \min A = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

b) Từ (1) và (2) suy ra

$9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) \geq xy + yz + zx + 2(xy + yz + xz) = 3(xy + yz + zx)$

$\Rightarrow xy + yz + zx \leq 3 \Rightarrow \max B = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

3) Ví dụ 3:

Tìm giá trị lớn nhất của $S = xyz.(x+y).(y+z).(z+x)$ với $x,y,z > 0$ và $x + y + z = 1$

Vì $x,y,z > 0$,áp dụng BĐT Côsi ta có: $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow xyz \leq \frac{1}{27}$

áp dụng bất đẳng thức Côsi cho x+y ; y+z ; x+z ta có

$$(x+y).(y+z).(z+x) \geq 3\sqrt[3]{(x+y).(y+z).(x+z)} \quad \Rightarrow 2 \geq 3\sqrt[3]{(x+y).(y+z).(z+x)}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3} \Rightarrow S \leq \frac{8}{27}.\frac{1}{27} = \frac{8}{729}$

Vậy S có giá trị lớn nhất là $\frac{8}{729}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

4) Ví dụ 4: Cho $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x^4 + y^4 + z^4$

Áp dụng BĐT Bunhiacốpski cho 6 số (x,y,z) ;(x,y,z)

Ta có $(xy + yz + zx)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \Rightarrow 1 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2$ (1)

áp dụng BĐT Bunhiacốpski cho (x^2, y^2, z^2) và (1,1,1)

Ta có $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^4 + y^4 + z^4) \Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq 3(x^4 + y^4 + z^4)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 1 \leq 3(x^4 + y^4 + z^4) \Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \leq \frac{1}{3}$

Vậy $x^4 + y^4 + z^4$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{3}$ khi $x = y = z = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. Một số chú ý:

1) Khi tìm GTNN, GTLN ta có thể đổi biến

Ví dụ : Khi tìm GTNN của $A = (x - 1)^2 + (x - 3)^2$, ta đặt $x - 2 = y$ thì

$A = (y + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2y^2 + 2 \geq 2\ldots$

2) Khi tìm cực trị của một biểu thức, ta có thể thay đk của biểu thức này đạt cực trị bởi đk tương đương là biểu thức khác đạt cực trị:

+) -A lớn nhất $\Leftrightarrow$ A nhỏ nhất ; +) $\frac{1}{B}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ B nhỏ nhất (với B > 0)

+) C lớn nhất $\Leftrightarrow$ C^2 lớn nhất

Ví dụ: Tìm cực trị của A = $\frac{x^4 + 1}{\left(x^2 + 1\right)^2}$

a) Ta có A > 0 nên A nhỏ nhất khi $\frac{1}{A}$ lớn nhất, ta có

$\frac{1}{A} = \frac{\left(x^2 + 1\right)^2}{x^4 + 1} = 1 + \frac{2x^2}{x^4 + 1} \geq 1 \Rightarrow \min \frac{1}{A} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \max A = 1 \Leftrightarrow x = 0$

b) Ta có $(x^2 – 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow x^4 + 1 \geq 2x^2$. (Dấu bằng xẩy ra khi $x^2 = 1$)

Vì $x^4 + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{x^4 + 1} \leq 1 \Rightarrow 1 + \frac{2x^2}{x^4 + 1} \leq 1 + 1 = 2 \Rightarrow \max \frac{1}{A} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$

3) Nhiều khi ta tìm cực trị của biểu thức trong các khoảng của biến, sau đó so sámh các cực trị đó để để tìm GTNN, GTLN trong toàn bộ tập xác định của biến

Ví dụ: Tìm GTLN của B = $\frac{y}{5 - (x + y)}$

a) xét $x + y \leq 4$

- Nếu x = 0 thì A = 0

- Nếu $1 \leq y \leq 3$ thì $A \leq 3$

- Nếu y = 4 thì x = 0 và A = 4

b) xét $x + y \geq 6$ thì $A \leq 0$

So sánh các giá trị trên của A, ta thấy max A = 4 $\Leftrightarrow$ x = 0; y = 4

4) Sử dụng các hằng bất đẳng thức

Ví dụ: Tìm GTLN của A = $|2x + 3y|$ biết $x^2 + y^2 = 52$

Aùp dụng Bđt Bunhiacốpxki: $(a x + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ cho các số 2, x , 3, y ta có:

$(2x + 3y)^2 \leq (2^2 + 3^2)(x^2 + y^2) = (4 + 9).52 = 26^2 \Rightarrow |2x + 3y| \leq 26$

Max A = 26 $\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = \frac{3x}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 = 52 \Leftrightarrow 13x^2 = 52.4 \Leftrightarrow x = \pm 4$

Vậy: Ma x A = 26 $\Leftrightarrow$ x = 4; y = 6 hoặc x = - 4; y = - 6

5) Hai số có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau

Hai số có tích không đổi thì tổng của chúng lớn nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau

a)Ví dụ 1: Tìm GTLN của $A = (x^2 - 3x + 1)(21 + 3x - x^2)$

Vì $(x^2 - 3x + 1) + (21 + 3x - x^2) = 22$ không đổi nên tích $(x^2 - 3x + 1)(21 + 3x - x^2)$ lớn nhất khi và chỉ khi $x^2 - 3x + 1 = 21 + 3x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ hoặc $x = -2$

Khi đó A = 11. 11 = 121 $\Rightarrow$ Max A = 121 $\Leftrightarrow$ x = 5 hoặc x = - 2

b) Ví dụ 2: Tìm GTNN của $B = \dfrac{(x+4)(x+9)}{x}$

Ta có: $B = \dfrac{(x+4)(x+9)}{x} = \dfrac{x^2+13x+36}{x} = x + \dfrac{36}{x} + 13$

Vì các số x và $\dfrac{36}{x}$ có tích $x.\dfrac{36}{x} = 36$ không đổi nên $x + \dfrac{36}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = \dfrac{36}{x} \Leftrightarrow x = 6$

$\Rightarrow A = x + \dfrac{36}{x} + 13$ nhỏ nhất là min A = 25 $\Leftrightarrow$ x = 6

6)Trong khi tìm cực trị chỉ cần chỉ ra rằng tồn tại một giá trị của biến để xẩy ra đẳng thức chứ không cần chỉ ra mọi giá trị để xẩy ra đẳng thức

Ví dụ: Tìm GTNN của $A = \left|11^m - 5^n\right|$

Ta thấy 11^m tận cùng bằng 1, 5^n tận cùng bằng 5

Nếu $11^m > 5^n$ thì A tận cùng bằng 6, nếu $11^m < 5^n$ thì A tận cùng bằng 4

khi m = 2; n = 3 thÌ $A = \left|121 - 124\right| = 4 \Rightarrow$ min A = 4, chẳng hạn khi m = 2, n = 3

CHUYÊN ĐỀ 20 – PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

❋ - ***PHƯƠNG PHÁP 1***: Phương pháp đưa về dạng tổng

✪ Phương pháp: *Phương pháp này thường sử dụng với các phương trình có các biểu thức chứa ẩn viết được dưới dạng tổng các bình phương.*

- Biến đổi phương trình về dạng một vế là một tổng của các bình phương các biểu thức chứa ẩn; vế còn lại là tổng bình phương của các số nguyên (*số số hạng của hai vế bằng nhau*).

Các ví dụ minh hoạ:

- Ví dụ 1: Tìm $x;y \in Z$ thoả mãn: $5x^2 - 4xy + y^2 = 169 \quad (1)$

$$(1) \Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 = 144 + 25 = 169 + 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (2x-y)^2 + x^2 = 144 + 25 \\ (2x-y)^2 + x^2 = 169 + 0 \end{array} \right. \qquad (II)$$

Từ (I) ta có:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (2x-y)^2 = 12^2 \\ x^2 = 5^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pm 5 \\ y = \mp 2 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x = \pm 5 \\ y = \mp 22 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} (2x-y)^2 = 5^2 \\ x^2 = 12^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pm 12 \\ y = \mp 19 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x = \pm 12 \\ y = \mp 29 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Tương tự từ (II) ta có:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (2x-y)^2 = 13^2 \\ x^2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \pm 13 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} (2x-y)^2 = 0 \\ x^2 = 13^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pm 13 \\ y = \pm 26 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Vậy $(x,y) \in \left\{ \begin{array}{l} (5;-2);(5;-22);(-5;2);(-5;22);(12;-19);(12;-29) \\ (-12;19);(-12;29);(0;13);(0;-13);(13;26);(-13;-26) \end{array} \right\}$

Ví dụ 2: Tìm $x;y \in Z$ thoả mãn: $x^2 + y^2 - x - y = 8 \quad (2)$

$$(2) \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 4y^2 - 4y = 32 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1 = 34 \Leftrightarrow (2x-1)^2 + (2y-1)^2 = 5^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (2x-1)^2 = 3^2 \\ (2y-1)^2 = 5^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2; x = -1 \\ y = 3; y = -2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} (2x-1)^2 = 5^2 \\ (2y-1)^2 = 3^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3; x = -2 \\ y = 2; y = -1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Vậy $(x;y) \in \{(2;3);(2;-2);(-1;3);(-1;-2);(3;2);(3;-1);(-2;2);(-2;-1)\}$

Ví dụ 3: Tìm $x;y \in Z$ thoả mãn: $x^3 - y^3 = 91 \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) = 91.1 = 13.7$ (Vì $(x^2+xy+y^2) > 0$)

$$(x-y).(x^2+xy+y^2) = 91.1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=1 \\ (x^2+xy+y^2)=91 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases}; \begin{cases} x=-5 \\ y=-6 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=91 \\ (x^2+xy+y^2)=1 \end{cases} \Rightarrow VN \end{array}\right.$$

Ví dụ 4: Tìm $x; y \in Z$ thoả mãn: $x^2+x-y^2=0 \quad (2)$

$x^2+x-y^2=0 \Rightarrow 4x^2+4x-4y^2=0 \Rightarrow (2x+1)^2-(2y)^2=1 \Rightarrow (2x+2y+1)(2x-xy+1)=1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+2y+1=1 \\ 2x-2y+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2y+1=-1 \\ 2x-2y+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy: $(x;y) \in \{(0;0);(-1;0)\}$

❋ - ***PHƯƠNG PHÁP 2***: Phương pháp cực hạn

✪ Phương pháp: *Phương pháp này thường sử dụng với các phương trình đối xứng*

- Vì phương trình đối xứng nên $x;y;z$ có vai trò bình đẳng như nhau. Do đó; ta giả thiết $x \le y \le z$; tìm điều kiện của các nghiệm; loại trừ dần các ẩn để có phương trình đơn giản. Giải phương trình; dùng phép hoán vị để suy ra nghiệm.

✠ Ta thường giả thiết $1 \le x \le y \le z \le ....$

❀**Các ví dụ minh hoạ**:

Ví dụ 1: Tìm $x;y;z \in Z^+$ thoả mãn: $x+y+z = x.y.z \quad (1)$

◆ *Nhận xét – Tìm hướng giải*:

Ta thấy đây là phương trình đối xứng.

Giả sử $1 \le x \le y \le z$. Khi đó:

$(1) \Rightarrow x.y.z = x+y+z \le 3z \Rightarrow x.y \le 3$ (Vì $x;y;z \in Z^+$) $\Rightarrow x.y \in \{1;2;3\}$

* Nếu: $x.y=1 \Rightarrow x=y=1 \Rightarrow 2+z=z$ (vô lí)

* Nếu: $x.y=2 \Rightarrow x=1; y=2; z=3$

* Nếu: $x.y=3 \Rightarrow x=1; y=3 \Rightarrow z=2<y$ (vô lí)

Vậy: $x;y;z$ là hoán vị của $(1;2;3)$

Ví dụ 2: Tìm $x;y;z \in Z^{+}$ thoả mãn: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ (2)

◆ *Nhận xét – Tìm hướng giải*:

Đây là phương trình đối xứng.

Giả sử $1 \le x \le y \le z$. Khi đó:

$(2) \Rightarrow 2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{3}{x} \Rightarrow x \le \frac{3}{2} \Rightarrow x=1$

Với: $x=1 \Rightarrow 1=\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{2}{y} \Rightarrow y \le 2 \Rightarrow y \in \{1;2\}$

♦.Nếu: $y=1 \Rightarrow \frac{1}{z}=0$ (vô lí)

♦.Nếu: $y=2 \Rightarrow z=2$

Vậy: $x;y;z$ là hoán vị của $(1;2;2)$

❋ - ***PHƯƠNG PHÁP 3***: Phương pháp sử dụng tính chất chia hết

❁**Các ví dụ minh hoạ**:

Ví dụ 1: Tìm $x;y \in Z$ để: $A=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}$ nhận giá trị nguyên

Ta có: $A=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}=\frac{x^2+x+1-1}{x^2+x+1}=1+\frac{1}{x^2+x+1}$. Khi đó:

Để A nhận giá trị nguyên thì $\frac{1}{x^2+x+1}$ nhận giá trị nguyên.

$\Rightarrow 1 \vdots \left(x^2+x+1\right) \Rightarrow \left(x^2+x+1\right) \in U_{(1)}=\{-1;1\}$

Vì : $\left(x^2+x+1\right)>0;\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2+x+1=1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Vậy để A nhận giá trị nguyên thì: $x=0$ hoặc $x=-1$

Ví dụ 2: Tìm $x;y \in Z$ thoả mãn: $2y^2x+x+y+1=x^2+2y^2+x.y$

$(2) \Rightarrow 2y^2.(x-1)-x.(x-1)-y.(x-1)+1=0(*)$

Với: $x=1;(*) \Rightarrow 1=0 \Rightarrow x=1$ không phải là ngiệm của phương trình. Nên:

$2y^2 - x - y + \dfrac{1}{x-1} = 0(**)$.

Phương trình có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x-1) \in U(1) = \{1;-1\} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

Ví dụ 3: Tìm $x; y \in Z^+$ thoả mãn: $3^x + 1 = (y+1)^2$ (3)

Ta có:

$(3) \Rightarrow 3^x = (y-1)^2 - 1 = y(y+2).3^x$ là số lẻ $\Rightarrow y;(y+2)$ là hai số lẻ liên tiếp $\Rightarrow (y;y+2) = 1 \Rightarrow y; y+2$ là các luỹ thừa của 3, nên:

$$\begin{cases} y = 3^m\ (*) \\ y+2 = 3^n\ (**) \end{cases} (m+n=x) \Rightarrow 3^m + 2 = 3^n \Rightarrow m < n$$

- Với: $m = 0; \Rightarrow n = 1 \Rightarrow y = 1; x = 1$.
- Với: $m \ge 1; \Rightarrow n > 1$ Từ $(*);(**) \Rightarrow \begin{cases} y \vdots 3 \\ (y+2) \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow (y;(y+2)) \ne 1$(vô lí)

Phương trình có nghiệm nguyên: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

❋ - ***PHƯƠNG PHÁP 4***: Phương pháp sử dụng bất đẳng thức

✪ Phương pháp: *Phương pháp này thường sử dụng với các phương trình mà hai vế là những đa thức có tính biến thiên khác nhau.*

- Áp dụng các bất đẳng thức thường gặp:

*Bất đẳng thức Cô – si:

Cho n số không âm: $a_1; a_2; a_3; ......; a_n$. Khi đó:

$\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3.......a_n}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$

* Bất đẳng thức Bunhiacôpxki:

Cho 2n số thực: $a_1; a_2; a_3; ......; a_n$ và $b_1; b_2; b_3; ......; b_n$. Khi đó:

$$(a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 + ... + a_n.b_n)^2 \le (a_1. + a_2. + a_3 + ... + a_n)(b_1 + b_2. + b_3 + ... + b_n).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_i = kb_i\ (i = \overline{1;n})$.

*Bất đẳng thứcgiá trị tuyết đối:

$$|a|+|b|=\left[\begin{array}{l}|a+b| \Leftrightarrow a.b \geq 0 \\ |a-b| \Leftrightarrow a.b<0\end{array}\right.$$

Các ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1: Tìm $x;y \in Z^+$ thoả: $\frac{x.y}{z}+\frac{y.z}{x}+\frac{z.x}{y}=3$ (1)

Áp dụng BĐT Cô – si. Ta có: $3=\frac{x.y}{z}+\frac{y.z}{x}+\frac{z.x}{y} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{x.y}{z}.\frac{y.z}{x}.\frac{z.x}{y}}=3.\sqrt[3]{x.y.z}$.

$\Rightarrow \sqrt[3]{x.y.z} \leq 1 \Leftrightarrow x.y.z \leq 1 \Rightarrow x=y=z=1$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=y=z=1$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(x+y+1)^2=3(x^2+y^2+1)$ (2)

(*Toán Tuổi thơ 2*)

Theo Bunhiacôpxki,ta có:

$(x+y+1)^2 \leq (1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+1)=3(x^2+y^2+1)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{1}{1} \Rightarrow x=y=1$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=y=1$

Ví dụ 3: Tìm tất cả các số nguyên x thoả mãn:

$$|x-3|+|x-10|+|x+101|+|x+990|+|x+1000|=2004 \quad (3)$$

- *Nhận xét – Tìm hướng giải*:

Ta nhận thấy: 2104 = 3 + 10 + 101 + 990 + 1000 =101 + 2003 và $|a|=|-a|$

Ta có:(3)$\Rightarrow |3-x|+|10-x|+|x+101|+|x+990|+|x+1000|=2004$.

Mà $|a| \geq a \Rightarrow \begin{cases}|3-x| \geq 3-x \\ |10-x| \geq 10-x \\ |x+101| \geq x+101 \\ |x+990| \geq x+990 \\ |x+1000| \geq x+1000\end{cases} \Rightarrow 2004 \geq |x+101|+2003 \Rightarrow |x+101| \leq 1$

Do đó: $-1 \leq (x+101) \leq 1 \Rightarrow (x+101) \in \{-1;0;1\} \Rightarrow x \in \{-102;-101;-100\}$.

Với $x=-101\Rightarrow 2004=2003$ (vô lí). Vậy nghiệm của phương trình là: $x\in\{-102;-100\}$

1) Tìm các số nguyên x,y,z thoả mãn: $x^2+y^2+z^2\le xy+3y+2z-3$

Vì x,y,z là các số nguyên nên

$x^2+y^2+z^2\le xy+3y+2z-3$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-3y-2z+3\le 0\Leftrightarrow\left(x^2-xy+\frac{y^2}{4}\right)+\left(\frac{3y^2}{4}-3y+3\right)+\left(z^2-2z+1\right)\le 0$

$\Leftrightarrow\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(z-1\right)^2\le 0$ (*) Mà $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(z-1\right)^2\ge 0\quad\forall x,y\in R$

$\Rightarrow\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(z-1\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{y}{2}=0\\ \frac{y}{2}-1=0\\ z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=1\end{cases}$ Các số x,y,z phải tìm là $\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=1\end{cases}$

<u>PHƯƠNG PHÁP 5</u>: Phương pháp lựa chọn

Phương pháp: *Phương pháp này được sử dụng với các phương trình mà ta có thể nhẩm (*phát hiện dể dàng*) được một vài giá trị nghiệm*

- Trên cơ sở các giá trị nghiệm đã biết. Áp dụng các tính chất như chia hết; số dư; số chính phương; chữ số tận cùng ….. ta chứng tỏ rằng với các giá trị khác phương trình vô nghiệm

Các ví dụ minh hoạ:

<u>Ví dụ 1</u>: Tìm $x;y\in Z^+$ thoả mãn: $x^6+3x^3+1=y^4$

◆ *Nhận xét – Tìm hướng giải*:

Ta thấy với $x=0;y=\pm1$ thì phương trình được nghiệm đúng. Ta cần chứng minh phương trình vô nghiệm với $x\ne 0$

+ Với $x=0;y=\pm1$ thì phương trình được nghiệm đúng

+ Với $x>0$. Khi đó:

$x^6+2x^3+1<x^6+3x^3+1<x^6+4x^3+4\Rightarrow\left(x^3+1\right)^2<y^4<\left(x^3+2\right)^2$ (*)

Vì $\left(x^3+1\right);\left(x^3+2\right)$ là hai số nguyên liên tiếp nên không có giá trị nào của y thoả (*)

Vậy $x=0; y=\pm 1$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2: Tìm $x; y \in Z^{+}$ thoả: $x^2+x-1=3^{2y+1}$ (2)

(*Tạp chí Toán học và tuổi trẻ*)

Gọi b là chữ số tận cùng của x (Với $b\in\{0;1;2;...;9\}$. Khi đó: (x^2+x-1) có chữ số tận cùng là: 1, 5 hoặc 9. (*)

Mặt khác: 3^{2y+1} là luỹ thừa bậc lẻ của 3 nên có tận cùng là 3 hoặc 7. (**)

Từ (*) và (**) suy ra phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3: Tìm $x; y \in Z^{+}$ thoả mãn: $x^2-6xy+13y^2=100$ (3)

(3) $\Rightarrow (x-3)^2=4(25-y^2) \Rightarrow \begin{cases} |y|\le 5 \\ (25-y^2)=n^2\ (n\in \mathbb{N}) \end{cases}$

Do đó: $y\in\{-5;-4;-3;0;3;4;5\} \Rightarrow x\in\{3;9;11;13\}$

Phương trình có nghiệm nguyên: $(x;y)\in\{(-5;3);(-4;9);(-3;11);(0;13);(3;11);(4;9);(5;3)\}$

PHƯƠNG PHÁP 6: Phương pháp lùi vô hạn *(xuống thang)*

Phương pháp: *Phương pháp này thường sử dụng với những phương trình có (*n – 1) *ẩn mà hệ số có ước chung khác* 1

- Dựa vào tính chất chia hết ta biểu diễn ẩn theo ẩn phụ nhằm "hạ" (giảm bớt) hằng số tự do, để có được phương trình đơn giản hơn.
- Sử dụng linh hoạt các phương pháp để giải phương trình đó.

Các ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^3-3y^3-9z^3=0$ (1)

◆ *Nhận xét – Tìm hướng giải*:

Ta thấy $x^3-3y^3-9z^3=0 \Rightarrow (x^3-3y^3-9z^3)\,\vdots\,3$ mà $(-3y^3-9z^3)\,\vdots\,3$ nên $x^3\,\vdots\,3$

Ta có: (1)$\Rightarrow (x^3-3y^3-9z^3)\,\vdots\,3 \Rightarrow x^3\,\vdots\,3 \Rightarrow x\,\vdots\,3 \Rightarrow x=3x_1$

Khi đó: (1)$\Rightarrow (27x_1^3-3y^3-9z^3)\,\vdots\,3 \Rightarrow (9x_1^3-y^3-3z^3)\,\vdots\,3 \Rightarrow y^3\,\vdots\,3 \Rightarrow y\,\vdots\,3 \Rightarrow y=3y_1$.

$\Rightarrow (9x_1^3-27y_1^3-3z^3)\,\vdots\,3 \Rightarrow z^3\,\vdots\,3 \Rightarrow z\,\vdots\,3 \Rightarrow y=3z_1$.

* Tiếp tục sự biểu diễn trên và nếu gọi $x_0; y_0; z_0$ là nghiệm của (1) và thì $3 \in U_{(x_0; y_0; z_0)}$ và $0 \le x_0; y_0; z_0 \le 9$. Thực hiện thử chọn ta được: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

CÁC BÀI TẬP KHÁC

1/Dùng định nghĩa

1) Cho abc = 1 và $a^3 > 36$. . Chứng minh rằng $\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$

Giải

Ta có hiệu:

$\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12} + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$

$= (\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 - ab - ac + 2bc) + \frac{a^2}{12} - 3bc = (\frac{a}{2} - b - c)^2 + \frac{a^3 - 36abc}{12a}$

$= (\frac{a}{2} - b - c)^2 + \frac{a^3 - 36abc}{12a} > 0$ (vì abc=1 và $a^3 > 36$ nên $a > 0$)

Vậy : $\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$ Điều phải chứng minh

2) Chứng minh rằng

a) $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x.(xy^2 - x + z + 1)$

b) với mọi số thực a , b, c ta có : $a^2 + 5b^2 - 4ab + 2a - 6b + 3 > 0$

c) $a^2 + 2b^2 - 2ab + 2a - 4b + 2 \geq 0$

Giải :

a) Xét hiệu :

$H = x^4 + y^4 + z^2 + 1 - 2x^2y^2 + 2x^2 - 2xz - 2x = (x^2 - y^2)^2 + (x - z)^2 + (x - 1)^2$

$H \geq 0$ ta có điều phải chứng minh

b) Vế trái có thể viết

$H = (a - 2b + 1)^2 + (b - 1)^2 + 1$

$\Rightarrow H > 0$ ta có điều phải chứng minh

c) vế trái có thể viết

$H = (a - b + 1)^2 + (b - 1)^2$

$\Rightarrow H \geq 0$ ta có điều phải chứng minh

Ii / Dùng biến đổi tương đương

1) Cho x > y và xy =1 .Chứng minh rằng : $\frac{(x^2+y^2)^2}{(x-y)^2} \geq 8$

Giải :

Ta có $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(x-y)^2+2$ (vì xy = 1)

$\Rightarrow (x^2+y^2)^2=(x-y)^4+4.(x-y)^2+4$

Do đó BĐT cần chứng minh tương đương với

$(x-y)^4+4(x-y)^2+4\geq 8.(x-y)^2 \Leftrightarrow (x-y)^4-4(x-y)^2+4\geq 0 \Leftrightarrow \left[(x-y)^2-2\right]^2\geq 0$

BĐT cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh

2) Cho xy $\geq$ 1 .Chứng minh rằng : $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\geq\frac{2}{1+xy}$

Giải :

Ta có $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\geq\frac{2}{1+xy} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+y^2}\right)+\left(\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{1+xy}\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{xy-x^2}{(1+x^2).(1+xy)}+\frac{xy-y^2}{(1+y^2).(1+xy)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2).(1+xy)}+\frac{y(x-y)}{(1+y^2).(1+xy)}\geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2).(1+y^2).(1+xy)}\geq 0$

BĐT cuối này đúng do xy > 1 .Vậy ta có điều phải chứng minh

Iii / dùng bất đẳng thức phụ

1) Cho a , b, c là các số thực và a + b +c =1

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$

Giải :

áp dụng BĐT BunhiaCôpski cho 3 số (1,1,1) và (a,b,c)

Ta có $(1.a+1.b+1.c)^2\leq(1+1+1).(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2\leq 3.(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow \quad a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$ (vì a+b+c =1) (đpcm)

2) Cho a,b,c là các số dương

Chứng minh rằng $(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ (1)

<u>Giải</u> :

(1) $\Leftrightarrow \; 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+1 \geq 9 \Leftrightarrow \; 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq 9$

áp dụng BĐT phụ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$ Với x,y > 0

Ta có BĐT cuối cùng luôn đúng

Vậy $(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ (đpcm)

Iv <u>/ dùng phương pháp bắc cầu</u>

1) Cho 0 < a, b,c <1 .Chứng minh rằng :

$2a^3+2b^3+2c^3 < 3+a^2b+b^2c+c^2a$

<u>Giải</u> :

Do a <1 $\Rightarrow \; a^2 < 1$ và b <1 Nên $(1-a^2).(1-b^2) > 0 \Rightarrow 1+a^2b-a^2-b > 0$

Hay $1+a^2b > a^2+b$ (1)

Mặt khác 0 <a,b <1 $\Rightarrow \; a^2 > a^3$; $b > b^3 \Rightarrow 1+a^2 > a^3+b^3$

Vậy $a^3+b^3 < 1+a^2b$

Tương tự ta có : $b^3+c^3 < 1+b^2c$
$a^3+c^3 < 1+c^2a$

$\Rightarrow \; 2a^3+2b^3+2c^3 < 3+a^2b+b^2c+c^2a$ (đpcm)

2) So sánh 31^{11} và 17^{14}

<u>Giải</u> :

Ta thấy $31^{11} < 32^{11} = \left(2^5\right)^{11} = 2^{55} < 2^{56}$

Mặt khác $2^{56} = 2^{4.14} = \left(2^4\right)^{14} = 16^{14} < 17^{14}$

Vởy $31^{11} < 17^{14}$ (đpcm)

V/ dùng tính chất tỉ số

ví dụ 4: Cho 4 số a,b,c,d bất kỳ, chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$

Giải: Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski

ta có ac + bd $\leq \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}$

mà $(a+c)^2+(b+d)^2 = a^2+b^2+2(ac+bd)+c^2+d^2 \leq (a^2+b^2)+2\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}+c^2+d^2$

$$\Rightarrow \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$

Trọng anh đã sưu tầm và chọn lọc được tài liệu:

20 CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG TOÁN 8

xin chia sẻ tới các quý thầy, cô và các độc giả

Kính mong các quý Thầy, cô đóng góp bổ xung để chuyên đề hữu ích hơn nữa,

link gốc đã chỉnh sửa một số lần

http://c2tienthang.violet.vn/present/show/entry_id/4266741/cm_id/1932704#1932704