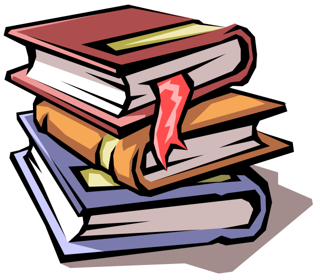
Tailieumontoan.com

Điện thoại (Zalo) 039.373.2038



TÁCH ĐỀ TOÁN CHUYÊN
VÀO LỚP 10 NĂM 2023-2024

Tài liệu sưu tầm, ngày 23 tháng 6 năm 2023

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ CĂN THỨC VÀ BIỂU THỨC

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh An Giang năm 2023-2024)*

Thực hiện phép tính: $A=\frac{\sqrt{7}+1}{3-2\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{2}-1}+\sqrt{7}-2\sqrt{2}$.

Lời giải

$$A=\frac{\sqrt{7}+1}{3-2\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{2}-1}+\sqrt{7}-2\sqrt{2}.$$

$$=\frac{\sqrt{7}+1}{3-2\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{14}.\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}+\frac{\left(\sqrt{7}-2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}{(3-2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{\sqrt{7}+1}{3-2\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{14}.\sqrt{2}-2\sqrt{14}}{3-2\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{7}-6\sqrt{2}-2\sqrt{14}+8}{3-2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{9-6\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}=\frac{3\left(3-3\sqrt{2}\right)}{3-3\sqrt{2}}=3.$$

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2023-2024)*

Rút gọn biểu thức: $P=\left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}-3}-\frac{2x}{x-1}\right):\frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}$, với $x\ge 0; x\ne 1; x\ne 9$.

Lời giải

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}-\frac{2x}{x-1}\right):\frac{1-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-2x}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}:\frac{-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$P=\frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\cdot(-(\sqrt{x}-1))=\sqrt{x}$$

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2023-2024)*

Rút gọn biểu thức $Q=\left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}+\sqrt{x-y}}+\frac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2}-x+y}\right).\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$ với $x>y>0$

Lời giải

$$Q=\left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}+\sqrt{x-y}}+\frac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2}-x+y}\right).\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}} \text{ với } x>y>0$$

$$Q=\left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}+\sqrt{x-y}}+\frac{\sqrt{(x+y)^2}}{\sqrt{(x+y)(x-y)}-\sqrt{(x-y)^2}}\right).\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\sqrt{x-y}.\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}\right).\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$=\sqrt{x-y}.\frac{\sqrt{x+y}}{y}.\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$=\frac{x^2+y^2}{y}$$

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2023-2024)*

Rút gọn biểu thức: $P=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

Lời giải

Ta có $P=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$

$=\left|\sqrt{2}+1\right|-\left|\sqrt{2}-1\right|=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2$

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Bến Tre năm 2023-2024)*

Cho biểu thức $A=\left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2}+\frac{x+\sqrt{x}}{1-x}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$, với $x>0$, $x\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $A\geq\frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}}$?

Lời giải

a) Ta có:

$$A=\left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2}+\frac{x+\sqrt{x}}{1-x}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}+\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}--1}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right):\left(\frac{2\sqrt{x}}{x-1}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{2\sqrt{x}}{x-1}\right)$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right).\left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

b) Ta có biến đổi sau

$A \ge \dfrac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \ge \dfrac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}} \Rightarrow \sqrt{2023x}+\sqrt{2023} \ge \sqrt{x}+\sqrt{2023x}$

$\Rightarrow \sqrt{x} \le \sqrt{2023} \Rightarrow x \le 2023$

Kết hợp với điều kiện xác định ban đầu, ta được $1 < x \le 2023 \left(x \in \mathbb{Z}\right)$.

Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2023-2024)*

Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right) : \dfrac{x\sqrt{x}}{x-4}$ với $x > 0,\ x \ne 4$. Tìm x để $P = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải

*) Với điều kiện $x > 0,\ x \ne 4$ ta có:

$$P = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right) : \frac{x\sqrt{x}}{x-4} = \frac{2(\sqrt{x}+2)-(\sqrt{x}-2)^2}{x-4} : \frac{x\sqrt{x}}{x-4}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}+4-x+4\sqrt{x}-4}{x-4} . \frac{x-4}{x\sqrt{x}} = \frac{6\sqrt{x}-x}{x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{6-\sqrt{x}}{x}$$

$$*)P = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{6-\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x + 3\sqrt{x} - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{x} = -6 (L) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 9 (TM)$$

Câu 7. *(Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2023-2024)*

Tính giá trị của biểu thức $\left(x^3+4x^2-23x+1\right)^{2024}$ với $x = 3\sqrt{3}-2$.

Lời giải

Theo đề $x = 3\sqrt{3}-2 \Leftrightarrow x+2 = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2+4x+4 = 27 \Leftrightarrow x^2+4x = 23$.

Ta có $\left(x^3+4x^2-23x+1\right)^{2024} = \left[x.\left(x^2+4x\right)-23x+1\right]^{2024} = \left(23x-23x+1\right)^{2024} = 1$.

Vậy giá trị của biểu thức bằng 1 khi $x = 3\sqrt{3}-2$.

Câu 8. *(Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2023-2024)*

Cho $P = \dfrac{3a+\sqrt{9a}-3}{a+\sqrt{a}-2} - \dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2} + \dfrac{\sqrt{a}-2}{1-\sqrt{a}}$ với $a \ge 0,\ a \ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm a nguyên để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) $P=\dfrac{3a+\sqrt{9a}-3}{a+\sqrt{a}-2}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}+\dfrac{\sqrt{a}-2}{1-\sqrt{a}}$

$=\dfrac{3a+\sqrt{9a}-3}{\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}-\dfrac{a-1}{\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}-\dfrac{a-4}{\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}$

$=\dfrac{a+3\sqrt{a}+2}{\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}$

$=\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}.$

b) $P=\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}=1+\dfrac{2}{\sqrt{a}-1}$. Ta có $P\in\mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $\dfrac{2}{\sqrt{a}-1}\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{a}-1=-1\\ \sqrt{a}-1=-2\\ \sqrt{a}-1=1\\ \sqrt{a}-1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\ (\text{N})\\ \text{VN}\\ a=4\ (\text{N})\\ a=9\ (\text{N}).\end{array}\right.$

Vậy $a=0;\ a=4;\ a=9$ thì $P\in\mathbb{Z}$.

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2023-2024)*

Cho biểu thức

$$Q=\left(\frac{10-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1}+\frac{6}{x-1}\right):\frac{4\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}\quad \text{với } x>0; x\neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức Q .

b) Đặt $P=Q.\left(x-\sqrt{x}+1\right)$. Chứng minh rằng $P>1$

Lời giải

a) Với $x\geq 0$ và $x\neq 4, x\neq 9$, ta có:

$P=\dfrac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

$$=\frac{2\sqrt{x}-9}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}-\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(3-\sqrt{x}\right)+\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(3-\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-9}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}-\frac{9-x+2x-3\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(3-\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-9+9-x+2x-3\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{-\sqrt{x}+x-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

b) $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}=\dfrac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3}=1+\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}$

Để P nhận giá trị là số nguyên thì $\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}$ phải nhận giá trị là số nguyên

$\Rightarrow \dfrac{4}{\sqrt{x}-3}\in\{-4;-2;-1;1;2;4\}$

*) $\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}=-4\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=-1\Rightarrow x=4$ (loại)

*) $\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}=1\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=4\Rightarrow x=49$

*) $\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}=-2\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=-2\Rightarrow x=1$

*) $\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}=2\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=2\Rightarrow x=25$

*) $\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}=-1\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=-4\Leftrightarrow \sqrt{x}=-1$ (loại)

*) $\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}=4\Leftrightarrow \sqrt{x}-3=1\Rightarrow x=16$

Vậy $x\in 1;16;25;49\}$ thì P nhận giá trị là số nguyên

Câu 10. *(Trường chuyên tỉnh Cao Bằng năm 2023-2024)*

1)Rút gọn biểu thức sau:

$$P=\left(\frac{x-108+23\sqrt{x}}{x-16}-1\right):\left(\frac{75-x}{x+\sqrt{x}-12}+\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4}\right),(x>0,x\neq 9,x\neq 16).$$

2) Cho ba số thực a,b,c thỏa mãn $abc=2023$. Tính giá trị của biểu thức:

$$M=\frac{2023a}{ab+2023a+2023}+\frac{b}{bc+b+2023}+\frac{c}{ca+c+1}$$

Lời giải

1)Điều kiện $\begin{cases}x>0\\x\neq 9\\x\neq 16\end{cases}$.

Ta có $P=\left(\frac{x-108+23\sqrt{x}}{x-16}-1\right):\left(\frac{75-x}{x+\sqrt{x}-12}+\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4}\right)$

$$=\left(\frac{x-16+23\sqrt{x}-92}{x-16}-1\right):\left[\frac{(75-x)(\sqrt{x}+4)+(\sqrt{x}+3)(x+\sqrt{x}-12)}{(\sqrt{x}+4)(x+\sqrt{x}-12)}\right]$$

$$=\frac{23(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x})^2-16}:\left[\frac{75\sqrt{x}+300-x\sqrt{x}-4x+x\sqrt{x}+x-12\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}-36}{(\sqrt{x}+4)(x+\sqrt{x}-12)}\right]$$

$$=\frac{23}{\sqrt{x}+4}:\left[\frac{66\sqrt{x}+264}{(\sqrt{x}+4)(x+\sqrt{x}-12)}\right]=\frac{23(x-16+\sqrt{x}+4)}{66(\sqrt{x}+4)}=\frac{23}{66}(\sqrt{x}-3)$$

2)Từ giả thiết $abc=2023$, ta có

$$M=\frac{2023a}{ab+2023a+2023}+\frac{b}{bc+b+2023}+\frac{c}{ca+c+1}$$

$$=\frac{a^2bc}{ab+a^2bc+abc}+\frac{b}{bc+b+abc}+\frac{c}{ac+c+1}=\frac{a^2bc}{ab(ac+c+1)}+\frac{b}{b(ac+c+1)}+\frac{c}{ca+c+1}$$

$$=\frac{ac}{ac+c+1}+\frac{1}{ac+c+1}+\frac{c}{ac+c+1}=\frac{ac+c+1}{ac+c+1}=1.$$

Câu 11. *(Trường chuyên Thành phố Đà Nẵng năm 2023-2024)*

Cho biểu thức $P=\frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}:\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\frac{x}{\sqrt{xy}+y}-\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}-x}\right)$ và biểu thức

$Q=\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$ với $x>0,\ y>0$ và $x\neq y$. Rút gọn các biểu thức P, Q và chứng minh rằng với các số x, y dương phân biệt tuỳ ý thì 4Q+1 > 2P.

Lời giải

$P=\sqrt{x}+\sqrt{y}\Rightarrow 2P=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}$

$Q=\dfrac{x+y}{2}\Rightarrow 4Q+1=2(x+y)+1$

Nhân hai vế của biểu thức $4Q+1-2P$ cho 2

$$2(4Q+1-2P)=4x+4y+2-4\sqrt{x}-4\sqrt{y}$$
$$=\left(2\sqrt{x}-1\right)^2+\left(2\sqrt{y}-1\right)^2$$

Ta có $x\neq y\Rightarrow 2(4Q+1-2P)>0\Rightarrow 4Q+1>2P$

Câu 12. *(Trường chuyên tỉnh Đak Lak năm 2023-2024)*

Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=x_1.x_2.x_3.x_4$

<u>Lời giải</u>

Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=x_1.x_2.x_3.x_4$.

Biến đổi phương trình thành: $(x^2+8x+11-4)(x^2+8x+11+4)=1$

Đặt $t=x^2+8x+11$ và giải được $t=\sqrt{17}, t=-\sqrt{17}$

Với $t=-\sqrt{17}\Rightarrow x^2+8x+11+\sqrt{17}=0$ có $x_3.x_4=11+\sqrt{17}$

Vậy $P=x_1.x_2.x_3.x_4=(11-\sqrt{17})(11+\sqrt{17})=104$

Câu 13. *(Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2023-2024)*

Cho số thực x thỏa mãn $3<x<4$. Rút gọn biểu thức

$$A=\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-2-2\sqrt{x-3}}.$$

<u>Lời giải</u>

Cách 1: Ta có

$$A=\sqrt{\left(\sqrt{x-3}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-3}-1\right)^2}$$

$$A=\left|\sqrt{x-3}+1\right|+\left|\sqrt{x-3}-1\right|$$

Vì $3<x<4$ nên $0<\sqrt{x-3}<1$, suy ra $\begin{cases}\sqrt{x-3}+1>0\\ \sqrt{x-3}-1<0\end{cases}$

Vậy $A=\sqrt{x-3}+1-\sqrt{x-3}+1=2$.

Cách 2: Ta có

$$A^2=x-2+2\sqrt{x-3}+x-2-2\sqrt{x-3}+2\sqrt{(x-2)^2-4(x-3)}.$$

$A^2 = 2x-4+2\sqrt{(x-4)^2} = 2x-4+2|x-4|$.

Vì $3<x<4$ nên $A^2 = 2x-4-2(x-4)=4$.

Do $A>0$ nên $A=2$.

Câu 14. *(Trường chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2023-2024)*

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{4}{x-2\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}+2}{2}$ với $x>0, x\neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P\geq 1$.

Lời giải

a) Ta có: $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{4}{\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}-2\right)}\right).\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}$

$=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}-2\right)}.\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}$

$=\dfrac{2(x-4)}{\sqrt{x}.(x-4)}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P\geq 1$.

$P\geq 1 \Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x}}\geq 1$

$\Rightarrow \sqrt{x}\leq 2$

$\Rightarrow x\leq 4$

Do $x>0, x\neq 4$ nên $0<x<4$

Câu 15. *(Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2023-2024, đề chung)*

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-1\right)$ (với $x\geq 0, x\neq 1$).

1. Rút gọn biểu thức P.

2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên

Lời giải

Rút gọn biểu thức P.

$$P=\frac{\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}:\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$P=\frac{2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}.\left(\sqrt{x}-1\right)$$

$$P=\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}.$$

2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

$P=2-\frac{1}{\sqrt{x}+1}$. Biểu thức P nhận giá trị nguyên $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ là số nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1$ là ước nguyên của 1

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}+1=1\\ \sqrt{x}+1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=0\\ \sqrt{x}=-2\ (VN)\end{array}\right.\Rightarrow x=0.$$

Vậy $x=0$ thỏa mãn.

Câu 16. *(Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2023-2024, đề chuyên)*

Cho biểu thức $A=\left(\frac{x\sqrt{x}-1}{1+x+\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}-\frac{\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2}\right)$ với $x\geq 0, x\neq 1, x\neq 4$.

1. Rút gọn biểu thức A.

2.Tìm tất cả các số nguyên của x để $\left|2A-1\right|+1=2A$.

Lời giải

1. Rút gọn biểu thức A.

$$A=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3-1}{1+\sqrt{x}+x}.\left[\frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}\right]$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{1+\sqrt{x}+x}.\left[\frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}\right]$$

$$=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$=\left(\sqrt{x}-1\right)\frac{2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x}+1}.$$

2. Tìm tất cả các số nguyên của x để $\left|2A-1\right|+1=2A$.

+) $\left|2A-1\right|+1=2A \Leftrightarrow \left|2A-1\right|=2A-1 \Leftrightarrow 2A-1\geq 0 \Leftrightarrow A\geq \dfrac{1}{2}$

+) $\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}\geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x}\leq 3 \Leftrightarrow x\leq 9$

Kết hợp với điều kiện $x\geq 0; x\neq 1; x\neq 4 \Rightarrow x\in\{0;2;3;5;6;7;8;9\}$

Câu 17. *(Trường chuyên Toán Thành phố Hà Nội năm 2023-2024)*

Cho a,b và c là các số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện $a^2-c^2=c, c^2-b^2=b$ và $b^2-a^2=a.$ Chứng minh $(a-b)(b-c)(c-a)=1.$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} a^2-c^2=c \\ c^2-b^2=b \Rightarrow a+b+c=0 \\ b^2-a^2=a \end{cases}$

Ta có $a^2-c^2=c \Leftrightarrow (a-c)(a+c)=c \Rightarrow (a-c)(-b)=c \Leftrightarrow b(c-a)=c$

Tương tự ta có $c^2-b^2=b \Rightarrow a(b-c)=b; b^2-a^2=a \Rightarrow c(a-b)=a.$

Do đó $b(c-a)a(b-c)c(a-b)=abc \Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a)=1$ (do $abc\neq 0$).

Câu 18. *(Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh năm 2023-2024)*

Cho a, b, c là các số thực khác không thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0.$

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a^2+2bc}+\dfrac{1}{b^2+2ca}+\dfrac{1}{c^2+2ab}=0.$

Lời giải

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0 \Leftrightarrow ab+bc+ca=0$

Ta có : $a^2+2bc=a^2+bc+(-ab-ca)=(a-b)(a-c).$

Tương tự có : $b^2+2ca=(b-c)(b-a);\ c^2+2ab=(c-a)(c-b).$

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(b-c)(a-b)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}=\frac{b-c-(a-c)+a-b}{(a-b)(b-c)(a-c)}=0$$

Câu 19. *(Trường chuyên tỉnh Hải Dương năm 2023-2024)*

1. Cho hai số a,b thoả mãn các điều kiện $a.b=1,\ a+b\neq 0$. Rút gọn biểu thức:

$$Q=\frac{1}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\frac{3}{\left(a^2+b^2+2\right)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{6}{(a+b)^4}$$

2. Cho hai số dương x, y thoả mãn $x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=\sqrt{15}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)$$

Lời giải

1)Ta có: $a^2+b^2+2=(a+b)^2$

Nên $Q=\frac{1}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\frac{3}{(a+b)^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{6}{(a+b)^4}$

$$=\frac{a^3+b^3}{(a+b)^3}+\frac{3\left(a^2+b^2\right)}{(a+b)^4}+\frac{6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{\left(a^3+b^3\right)(a+b)+3\left(a^2+b^2\right)+6}{(a+b)^4}$$

$$=\frac{a^4+b^4+ab\left(a^2+b^2\right)+3\left(a^2+b^2\right)+6}{\left(a^2+b^2+2\right)^2}$$

$$=\frac{a^4+b^4+4\left(a^2+b^2\right)+6}{\left(a^2+b^2+2\right)^2}$$

$$=\frac{\left(a^4+b^4+2a^2b^2\right)+4\left(a^2+b^2\right)+4}{\left(a^2+b^2+2\right)^2}=\frac{\left(a^2+b^2\right)^2+4\left(a^2+b^2\right)+4}{\left(a^2+b^2+2\right)^2}$$

$$=\frac{\left(a^2+b^2+2\right)^2}{\left(a^2+b^2+2\right)^2}=1$$

2) $P=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)$

$P=\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}+xy-\left(x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\right)=\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}+xy-\sqrt{15}$

Đặt $M=\sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2+1}+xy\Rightarrow M^2=\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)+x^2y^2+2xy\sqrt{x^2+1}.\sqrt{y^2+1}$

$= 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 + 2xy\sqrt{x^2+1}.\sqrt{y^2+1}$

$= x^2\left(y^2+1\right) + y^2\left(x^2+1\right) + 2x\sqrt{y^2+1}.y\sqrt{x^2+1} + 1$

$= \left(x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}\right)^2 + 1$

$= 16 \Rightarrow M = 4$. Vậy $P = 4 - \sqrt{15}$.

Câu 20. *(Trường chuyên tỉnh Hải Phòng năm 2023-2024)*

Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}+1} + \dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} - \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right) : \dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$ (với $x > 0$).

Rút gọn biểu thức A và chứng minh $A \le 2$.

Lời giải

$$A = \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)} : \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$$

$\dfrac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \le 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \le 2x - 2\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2 \ge 0$ (luôn đúng). Vậy $A \le 2$.

Câu 21. *(Trường chuyên tỉnh Hòa Bình năm 2023-2024)*

Rút gọn biểu thức: $A = (\sqrt{5}-1)\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

Lời giải

$A = (\sqrt{5}-1)\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}$

$A = (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 4$

Câu 22. *(Trường chuyên tỉnh Hưng Yên năm 2023-2024)*

Cho biểu thức P = $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}}-1} + \dfrac{2}{\sqrt{\boldsymbol{x}}-2} + \dfrac{2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\sqrt{\boldsymbol{x}}-2}{\boldsymbol{x}-3\sqrt{\boldsymbol{x}}+2}$ với $x \ge 0, x \ne 1, x \ne 4$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $|\boldsymbol{P}| - P = 0$.

a) Ta có: P = $\dfrac{x}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{2}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{2x-x\sqrt{x}-2}{x-3\sqrt{x}+2}$ $x \ge 0, x \ne 1, x \ne 4$

Lời giải

P = $\dfrac{x}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{2}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{2x-x\sqrt{x}-2}{x-3\sqrt{x}+2}$

P = $\dfrac{x\left(\sqrt{x}-2\right)+2\left(\sqrt{x}-1\right)+2x-x\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$

P = $\dfrac{x\sqrt{x}+2x-2\sqrt{x}-2+2x-x\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$

P = $\dfrac{2\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$ + $\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$

b) $|P|$ – P = 0 ⇔ $|P|$ = P ⇔ P > 0

⇔ $\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$ > 0 ⇔ $\sqrt{x}$ > 1 ⇔ x > 1

Kết hợp với ĐKXĐ: x ≠ 1, x ≠ 4

Vậy x>1, x ≠ 4 thì $|\boldsymbol{P}|$ – P = 0.

Câu 23. *(Trường chuyên tỉnh Khánh Hòa năm 2023-2024)*

Cho biểu thức $M=\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}-4\cdot\dfrac{x\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}}$, với $x>1$.

Rút gọn *M* và tìm giá trị nhỏ nhất của *M*.

Lời giải

* Rút gọn M :

$$M=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}-4\frac{x\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}}$$

$$=\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)-\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)-\frac{4x\left(\sqrt{x}-1\right)}{1-\sqrt{x}}$$

$$=2\sqrt{x-1}+4x$$

* Tìm giá trị nhỏ nhất của M :

Cách 1: Đặt $t=\sqrt{x-1}\quad (t>0)\Rightarrow x=t^2+1$

Khi đó $M=4t^2+2t+4=\left(2t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}>4,\ \forall t>0$

$$\Rightarrow M-\frac{15}{4}=\left(2t+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{M-\frac{15}{4}}=2t+\frac{1}{2}$$

Đặt $y=f(t)=2t+\dfrac{1}{2}$: HS bậc nhất, đồng biến (vì $a=2>0$)

Vì $t>0$ nên $y=f\left(t\right)>f\left(0\right)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Không tồn tại min y $\Rightarrow$ Không tồn tại min M .

Cách 2:

Do $x>1$ nên $2\sqrt{x-1}>0$ và $4x>4$. Vậy $M>4,\ \forall x>1$

Giả sử m là GTNN của M $\Rightarrow m>4$

Do $m>4$ nên tồn tại n sao cho $m>n>4$

Xét phương trình: $2\sqrt{x-1}+4x=n \quad (1)$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}+4\left(x-1\right)+4-n=0$$

Đặt $t=\sqrt{x-1}\ \ (t>0)$. Phương trình trở thành: $4t^2+2t+4-n=0 \quad (2)$

Vì $n>4$ nên $4(4-n)<0 \Rightarrow$ Phương trình (2) trái dấu

$\Rightarrow$ Phương trình (2) có một nghiệm $t>0$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có một nghiệm $x>1$

$\Rightarrow$ Tồn tại $x>1$ để $M=n$ (Điều này vô lý với giả sử m là GTNN của M)

Vậy không tồn tại GTNN của M .

Cách 3:

Đặt $t=\sqrt{x-1}\ \ (t>0) \Rightarrow x=t^2+1$

Khi đó $M=4t^2+2t+4$

$$\Leftrightarrow \frac{M}{4}=t^2+\frac{t}{2}+1=\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{M}{4}-\frac{15}{16}=\left(t+\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow Y=X^2 \text{ với } \begin{cases} Y=\frac{M}{4}-\frac{15}{16} \\ X=t+\frac{1}{4}>\frac{1}{4} \end{cases}$$

Giả sử GTNN của $Y=Y_0$ đạt được khi $X=X_0$.

Theo định nghĩa ta có: $\begin{cases} \forall X>\frac{1}{4}: Y\ge Y_0 \quad (*) \\ \exists X=X_0>\frac{1}{4}: Y\left(X_0\right)=Y_0 \end{cases}$

Vì $Y=X^2$ là hàm số đồng biến khi $X>0$ nên $Y=X^2$ cũng đồng biến khi $X>\frac{1}{4}$

Chọn $X_1 > X_0 > \frac{1}{4} \Rightarrow Y(X_1) > Y(X_0) \Rightarrow Y_1 > Y_0$ (mâu thuẫn với $(*)$)

Vậy không tồn tại GTNN của M.

Câu 24. *(Trường chuyên tỉnh Lào Cai năm 2023-2024)*

a)Cho biểu thức $P = \left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right) : \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+3}\right)$ với $x \ge 0, x \ne 4, x \ne 9$. Tìm các giá trị x để P nhận giá trị nguyên.

b)Cho a, b, c là các số thực thõa mãn điều kiện abc$\ne$0 và a+b+c$\ne$0. Chứng minh rằng nếu $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = -2$ thì $\frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}} = \frac{1}{a^{2023}+b^{2023}+c^{2023}}$.

Lời giải.

a)Với $x \ge 0, x \ne 4, x \ne 9$.

$$P = \left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right) : \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+3}\right)$$

$$= \left[\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} - \frac{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}\right] : \left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

Do $x \ge 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \ge 1 \Rightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \ge -2$

$\frac{3}{\sqrt{x}+1} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} < 1$

Nên -2$\le$P<1

$P \in Z \Rightarrow$ {-2;-1;0}

$P = -2 \Rightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Thỏa mãn)

$P = -1 \Rightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (Thỏa mãn)

$P=0\Rightarrow 1-\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}=0\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=3\Leftrightarrow \sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$ (Không thỏa mãn)

Vậy $x\in\{0;\dfrac{1}{4}\}$

b)Từ abc $\neq 0 \Rightarrow$ a,b,c $\neq 0$

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=-2\Leftrightarrow \frac{a+b}{c}+1+\frac{b+c}{a}+1+\frac{c+a}{b}+1=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{c}+\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}=1$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}(Do\ a+b+c\neq 0)$$
$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{c}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{-(a+b)}{c(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} a+b=0 \\ ab=-c(a+b+c)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} a=-b \\ c+ab+ac+bc=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} a=-b \\ (c+a)(c+b)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b\neq 0 \\ c=-a\neq 0 \\ c=-b\neq 0\end{array}\right.$$

TH1: $a=-b\neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^{2023}}+\frac{1}{b^{2023}}+\frac{1}{c^{2023}}=\frac{1}{a^{2023}}+\frac{1}{-a^{2023}}+\frac{1}{c^{2023}}=\frac{1}{c^{2023}}=\frac{1}{a^{2023}-a^{2023}+c^{2023}}=\frac{1}{a^{2023}+b^{2023}+c^{2023}}$$

Tương tự cho TH2, TH3 $\Rightarrow$ điều phải chứng minh

Câu 25. *(Trường chuyên tỉnh Long An năm 2023-2024)*

Cho biểu thức $T=\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}}{4}-\dfrac{1}{4\sqrt{a}}\right)^2$ với $a>0,\ a\neq 1.$

a) Rút gọn biểu thức T.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để $T=-\sqrt{a}-1.$

Lời giải.

a) Rút gọn biểu thức T.

$$T=\left(\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{4}-\frac{1}{4\sqrt{a}}\right)^2=\left(\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\left(\sqrt{a}-1\right)^2}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}\right)\left(\frac{a-1}{4\sqrt{a}}\right)^2$$

$$=\frac{4\sqrt{a}}{a-1}.\frac{\left(a-1\right)^2}{\left(4\sqrt{a}\right)^2}=\frac{a-1}{4\sqrt{a}}.$$

Tìm tất cả các giá trị của a để $T=-\sqrt{a}-1$.

$\frac{a-1}{4\sqrt{a}}=-\sqrt{a}-1\Leftrightarrow 5a+4\sqrt{a}-1=0$

$\sqrt{a}=-1$ hoặc $\sqrt{a}=\frac{1}{5}$. Kết luận $a=\frac{1}{25}$.

Câu 26. *(Trường chuyên tỉnh Nam Định năm 2023-2024, đề chung)*

Tính giá trị biểu thức $P=\sqrt{2024+2\sqrt{2023}}-\sqrt{2025+2\sqrt{2024}}$.

Lời giải.

$P=\sqrt{2024+2\sqrt{2023}}-\sqrt{2025+2\sqrt{2024}}$

$P=\sqrt{\left(\sqrt{2023}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2024}+1\right)^2}$

$=\sqrt{2023}+1-\left(\sqrt{2024}+1\right)=\sqrt{2023}-\sqrt{2024}$

Câu 27. *(Trường chuyên tỉnh Nam Định năm 2023-2024, đề chuyên)*

a) Cho x,y,z là ba số thực khác 0 thỏa mãn: $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ và $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0$. Chứng minh rằng: $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$

Lời giải.

Cho x,y,z là ba số thực khác 0 thỏa mãn: $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ và $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0$. Chứng minh rằng: $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$

Bằng cách quy đồng mẫu số ta được:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\Rightarrow yz+2zx+3xy=0\ \ (1)$$

Lại có:

$$\left(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}\right)^2=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}+2\left(\frac{xy}{2}+\frac{yz}{6}+\frac{zx}{3}\right)$$

$$=x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}+\frac{3xy+yz+2xz}{3}=1\ (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta được: $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$

Câu 28. *(Trường chuyên tỉnh Nam Định năm 2023-2024, đề ban xã hội)*

Cho biểu thức $P=\frac{x+4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}+\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ (với $x\ge 0$ và $x\ne 9$).

1) Rút gọn biểu thức P.
2) Tìm x để $P=5$.

Lời giải.

1)

$$P=\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}+2}+\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\sqrt{x}-3}$$

$$=\sqrt{x}+2+\sqrt{x}+3=2\sqrt{x}+5$$

2) Tìm x để $P=5$.

$P=5\Leftrightarrow\sqrt{x}=0$

$\Leftrightarrow x=0\,(tm)$.

Vậy x = 0 thì P=5

Câu 29. *(Trường chuyên tỉnh Ninh Bình năm 2023-2024)*

Cho a, b là 2 số thực nguyên dương phân biệt thỏa mãn (1 – a)(1 – b) + 2$\sqrt{ab}$ = 1. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}-\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

Lời giải

* $$P=\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}-a\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+b\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

$$=\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}-a\sqrt{a}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a-b}$$

$$=\frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

* $(1-a)(1-b)+2\sqrt{ab}=1\Leftrightarrow 1-b-a+ab+2\sqrt{ab}=1$

$\Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b=ab\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{ab}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (khi\, a>b)\\ \sqrt{a}-\sqrt{b}=-\sqrt{ab}\ (khi\, a<b)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=1\\ \dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=-1\end{array}\right.$$

* Vậy P =1 (khi a > b) hoặc P = -1 (khi a < b)

Câu 30. *(Trường chuyên tỉnh Phú Thọ năm 2023-2024)*

Cho $x; y$ là các số thực thỏa mãn $\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{3}{2x+y}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}$.

Lời giải

Từ $\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{3}{2x+y}$ (đk : $x\neq 0, y\neq 0; 2x+y\neq 0$)

$$\Rightarrow \frac{x-2y}{xy}=\frac{3}{2x+y}\Leftrightarrow (x-2y)(2x+y)=3xy$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+xy-4xy-2y^2=3xy$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-y^2\right)=6xy$$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2=3xy$$

Suy ra $P=\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{x^4+y^4}{x^2y^2}=\dfrac{\left(x^2-y^2\right)^2+4x^2y^2}{x^2y^2}=\dfrac{(3xy)^2+4x^2y^2}{x^2y^2}=\dfrac{13x^2y^2}{x^2y^2}=13$

Câu 31. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh năm 2023-2024)*

Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{5+4\sqrt{x}}{2x+5\sqrt{x}-12}-\dfrac{2}{2\sqrt{x}-3}+\dfrac{3}{\sqrt{x}+4}\right):\left(\sqrt{x}+\dfrac{5-6\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}\right)$ với $x\geq 0, x\neq \dfrac{9}{4}$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị lớn nhất của P.

Lời giải

a) $P=\left(\dfrac{5+4\sqrt{x}-2(\sqrt{x}+4)+3(2\sqrt{x}-3)}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)}\right):\left(\dfrac{x+4\sqrt{x}+5-6\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}\right)$

$P=\left(\dfrac{8\sqrt{x}-12}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)}\right):\left(\dfrac{x-2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+4}\right)$

$P=\dfrac{4}{\sqrt{x}+4}.\dfrac{\sqrt{x}+4}{x-2\sqrt{x}+5}=\dfrac{4}{x-2\sqrt{x}+5}$.

b) Ta có $x-2\sqrt{x}+5=\left(\sqrt{x}-1\right)^2+4\Rightarrow x-2\sqrt{x}+5\geq 4$ với $\forall x\geq 0, x\neq \dfrac{9}{4}$.

Khi đó $P \le 1$ với $\forall x \ge 0, x \ne \frac{9}{4}$. Dấu " = " xảy ra khi $x = 1$.

Giá trị lớn nhất của P là 1 khi $x = 1$

Câu 32. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Trị năm 2023-2024)*

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = a + b + c.$

Chứng minh $a = b = c.$

Lời giải

Ta có $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = a + b + c \Leftrightarrow (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 = abc(a + b + c)$

$\Leftrightarrow 2(ab)^2 + 2(bc)^2 + 2(ca)^2 = 2ab.bc + 2bc.ca + 2ca.ab$

$\Leftrightarrow (ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$\

Câu 33. *(Trường chuyên tỉnh Sơn La năm 2023-2024)*

Cho biểu thức $Q = \frac{x\sqrt{y} + \sqrt{x} - y\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}}$, với $x \ge 0; y \ge 0$.

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Tính giá trị biểu thức Q khi $x = 2024 + 2\sqrt{2023}; y = 2024 - 2\sqrt{2023}$

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức Q.

$$Q = \frac{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) + \sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{xy} + 1\right)}{1 + \sqrt{xy}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

b) Tính giá trị biểu thức Q khi $\boldsymbol{x} = 2024 + 2\sqrt{2023}; \boldsymbol{y} = 2024 - 2\sqrt{2023}$

$$x = 2024 + 2\sqrt{2023} = 2023 + 2\sqrt{2023} + 1 = \left(\sqrt{2023} + 1\right)^2$$

$$y = 2024 - 2\sqrt{2023} = 2023 - 2\sqrt{2023} + 1 = \left(\sqrt{2023} - 1\right)^2$$

Khi x, y nhận các giá trị trên, ta có:

$$Q = \sqrt{\left(\sqrt{2023} + 1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{2023} - 1\right)^2} = \sqrt{2023} + 1 - \sqrt{2023} + 1 = 2$$

Câu 34. *(Trường chuyên tỉnh Tây Ninh năm 2023-2024)*

Tính giá trị của biểu thức $T = \sqrt{13 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}$.

Lời giải

Ta có: $T=\sqrt{13+4\sqrt{3}}-\sqrt{13-4\sqrt{3}}=\sqrt{12+2.2\sqrt{3}.1+1}-\sqrt{12-2.2\sqrt{3}.1+1}$

$=\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2}-\sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2}=\left|2\sqrt{3}+1\right|-\left|2\sqrt{3}-1\right|=2\sqrt{3}+1-2\sqrt{3}+1=2$

Câu 35. *(Trường chuyên tỉnh Thái Bình năm 2023-2024)*

a) Cho các số thực x,y khác 0, thoả mãn: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=3$ và $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=10$.

Chứng minh $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

b) Cho các số thực không âm a,b,c thoả mãn đồng thời các điều kiện: $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=8$;

$a+b+c=26; abc=144$. Tính giá trị biểu thức: P = $\frac{1}{\sqrt{bc}-\sqrt{a}+9}+\frac{1}{\sqrt{ca}-\sqrt{b}+9}+\frac{1}{\sqrt{ab}-\sqrt{c}+9}$

Lời giải

a) Từ giả thiết ta có

$\begin{cases} x^2+y^2=3xy \\ x^3+y^3=10xy \end{cases} \Rightarrow (x+y)(x^2+y^2)=3xy(x+y) \Rightarrow x^3+y^3+xy(x+y)=3xy(x+y)$

$\Leftrightarrow 10xy=2xy(x+y) \Leftrightarrow x+y=5(x,y\neq 0)$

c) Đặt $\left(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}\right)=(x,y,z)$ điều kiện: $x,y,z\geq 0$

$\Rightarrow x+y+z=8; x^2+y^2+z^2=26; x^2y^2z^2=144$

$\Rightarrow x+y+z=8; xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=19; xyz=12$ (Do $x,y,z\geq 0$)

Ta có: $P=\frac{1}{yz-x+9}+\frac{1}{xz-y+9}+\frac{1}{xy-z+9}$

Ta có: $yz-x+9=yz-x+x+y+z+1=(z+1)(y+1)$

Tương tự: $xz-y+9=(x+1)(z+1); xy-z+9=(x+1)(y+1)$

$\Rightarrow \frac{x+1+y+1+z+1}{(x+1)(y+1)(z+1)}=\frac{x+y+z+3}{xyz+x+y+z+xy+yz+xz+1}=\frac{11}{12+19+8+1}=\frac{11}{40}$

Vậy P = $\frac{11}{40}$

Câu 36. *(Trường chuyên tỉnh Thanh Hóa năm 2023-2024)*

a) Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x^2-3xy=10$ và $y^2+xy=6$. Tính A= x + 3y.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn xyz(x + y + z) = 1. Chứng minh

$\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{z^2}\right)\left(z^2+\frac{1}{x^2}\right)}=(x+y)(y+z)(z+x)$

Lời giải

a) Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x^2-3xy=10 \text{ và } y^2+xy=6$. Tính A= x + 3y.

Từ giả thiết $x^2-3xy=10 \text{ và } y^2+xy=6$

Cho ta $x^2-3xy+9\left(y^2+xy\right)=64 <=> (x+3y)^2=64$

<=> x + 3y = 8 (vì x, y là số thực dương)

Vậy A = x + 3y = 8

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn xyz(x + y + z) = 1.

Ta có $x^2+\frac{1}{y^2}=\frac{x^2y^2+1}{y^2}=\frac{x^2y^2+xyz\,(x+y\ +z)}{y^2}=\frac{xy\left(xy+xz+yz+z^2\right)}{y^2}=\frac{x(x+z)(y+z)}{y}$

$$x^2+\frac{1}{y^2}=\frac{x^2y^2+1}{y^2}=\frac{x^2y^2+xyz(x+y+z)}{y^2}=\frac{xy(xy+\ xz+yz+z^2)}{y^2}=\frac{x(x+z)(y+z)}{y}$$

Tương tự $y^2+\frac{1}{z^2}=\frac{y(x+z)(y+x)}{z}$; $z^2+\frac{1}{x^2}=\frac{z(y+z)(y+x)}{x}$

Khi đó $\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{z^2}\right)\left(z^2+\frac{1}{x^2}\right)}=\sqrt{\frac{x(x+z)(y+z)}{y}.\frac{y(x+z)(y+x)}{z}.\frac{z(y+z)(y+x)}{x}}$

$=(x+y)(y+z)(z+x)$

Câu 37. *(Trường chuyên Quốc Học Huế năm 2023-2024)*

a) Chứng minh giá trị của biểu thức $P=\left(\frac{2+\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right):\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+a-\sqrt{a}-1}$

không phụ thuộc vào giá trị của a, với $a>0$ và $a\neq 1$.

b) Cho a, b, c là ba số nguyên dương thỏa mãn $\frac{4}{a}+\frac{2}{b}=\frac{1}{c}$. Chứng minh

$Q=a^2+4b^2+16c^2$ là một số chính phương.

Lời giải

a) Với $a>0, a\neq 1$ ta có:

$$P=\left[\frac{2+\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}-\frac{\sqrt{a}-2}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}\right]:\frac{\sqrt{a}}{(a-1)\left(\sqrt{a}+1\right)}$$

$$=\left[\frac{\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-1\right)-\left(\sqrt{a}-2\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)^2}\right].\frac{(a-1)\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}}$$

$$=\left[\frac{2\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)^2}\right].\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{\sqrt{a}}=2.$$

Vậy giá trị của P không phụ thuộc vào giá trị của a.

b) Ta có $\frac{4}{a}+\frac{2}{b}=\frac{1}{c}\Leftrightarrow ab=2ac+4bc\Leftrightarrow ab-2ac-4bc=0.$

Khi đó $Q=a^2+4b^2+16c^2=a^2+4b^2+16c^2+4\left(ab-2ac-4bc\right)$

$=(a+2b-4c)^2$ là một số chính phương.

Câu 38. *(Trường chuyên tỉnh Tiền Giang năm 2023-2024)*

Tính giá trị của biểu thức $P=\left(x^2+2x+2021\right)^{2024}$ tại $x=\sqrt{\frac{2}{x-\sqrt{15}}}-\frac{4}{\sqrt{5}-1}$.

Lời giải:

Ta có:

$$x=\sqrt{\frac{2}{4-\sqrt{15}}}-\frac{4}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{8+2\sqrt{15}}-\frac{4\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}=\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}-\left(\sqrt{5}+1\right)$$

$$=\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}-1=\sqrt{3}-1$$

Suy ra $\left(x+1\right)^2=3\Leftrightarrow x^2+2x=2$

Do đó $P=\left(x^2+2x+2021\right)^{2024}=2023^{2024}$.

Câu 39. *(Trường chuyên thành phố Hồ Chí Minh năm 2023-2024)*

Cho a,b là các số thực, $b\neq 0$ thỏa mãn điều kiện

$$a^2+b^2=\frac{4b^2}{\sqrt{a^2+b^2}+a}+a\sqrt{a^2+b^2}.$$

Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2$.

Lời giải

Vì $b^2=\left(a^2+b^2\right)-a^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)$ nên từ giả thiết, ta có:

$a^2+b^2=4\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)+a\sqrt{a^2+b^2}$, hay $a^2+b^2-4\sqrt{a^2+b^2}=a\left(\sqrt{a^2+b^2}-4\right)$

Một cách tương đương, ta có:

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}-4\right)\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)=0$$

Vì $\sqrt{a^2+b^2}>\sqrt{a^2}\geq a$ nên từ kết quả trên, ta suy ra $\sqrt{a^2+b^2}=4$, tức $P=16$.

Câu 40. *(Trường chuyên tỉnh Tuyên Quang năm 2023-2024)*

a) Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3}+\dfrac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ vơi $x\ge 0, x\ne 1$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\dfrac{a-3\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}-2}$ với $a>4$.

Câu 41. *(Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long năm 2023-2024)*

a) Tính giá trị của biểu thức: $A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

b) Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right):\left(1-\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)$voi $x\ge 0, x\ne 1$.

Lời giải

a) Ta có: A = $\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

$=\sqrt{3}+1+\sqrt{5}-1+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{5}+\dfrac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{2}=2\sqrt{5}$.

Ta có:

b) *) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+1\right)}=\dfrac{x+1-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+1\right)}$

*) $1-\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}=\dfrac{x+1-2\sqrt{x}}{x+1}$

Nên P = $\dfrac{x+1-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+1\right)}.\dfrac{x+1}{x+1-2\sqrt{x}}$

P = $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.

Câu 42. *(Trường chuyên Đại học SP vòng 2 năm 2023-2024)*

a) Rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{x^2+8\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4}+\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{16-4x}{\sqrt{x}+2}\text{ với } x>0$$

Lời giải.

A $=\dfrac{x^2+8\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4}+\dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{16-4x}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{\sqrt{x}.\left(\sqrt{x^3}+8\right)}{x-2\sqrt{x}+4}+2\sqrt{x}+1+4\left(2-\sqrt{x}\right)$

$=\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}+2\right)+2\sqrt{x}+1+4\left(2-\sqrt{x}\right)=x+9$

Vậy A $= x+9$

Câu 43. *(Trường chuyên Đại học SP vòng 2 năm 2023-2024)*

a) Cho a, b là các số thực không âm, c là số thực dương thỏa mãn đẳng thức

$$\sqrt{a}-\sqrt{a+b-c}=\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{a+b-c}$

b)Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho số $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}$ là số hữu tỷ.

Lời giải.

a) Bằng các phép biến đổi biểu thức kết hợp với a, b không âm và c thực dương, ta có:

$$\sqrt{a}-\sqrt{a+b-c}=\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{c}+\sqrt{a+b-c}$$

$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}=a+b+2\sqrt{c(a+b-c)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab}+\sqrt{c(a+b-c)}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=0 \\ (a+b-c)=0 \end{cases} \quad (*)$$

Ta cần chứng minh

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{a+b-c}$$

Ta biến đổi tương đương đẳng thức này kết hợp với a, b không âm và c thực dương, ta có:

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{a+b-c}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{a+b-c}$$

$$\Leftrightarrow a+b+3\left(\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}\right)=a+b+3\left(\sqrt[3]{c^2(a+b-c)}+\sqrt[3]{c(a+b-c)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}\right)=\left(\sqrt[3]{c^2(a+b-c)}+\sqrt[3]{c(a+b-c)^2}\right)$$

Đẳng thức cuối đúng với điều kiện (*) nên đẳng thức đầu đúng. Bài toán được chứng minh.

b) Lấy $\alpha \in \mathbb{Q}$sao cho

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}=\alpha$$

Viết lại phương trình dưới dạng

$$\sqrt{a}-\alpha\sqrt{b}=\alpha\sqrt{5}-\sqrt{3}$$

Bình phương 2 vế ta có:

$a+\alpha^2b-2\alpha\sqrt{ab}=5\alpha^2-2\alpha\sqrt{15}$

Từ đó suy ra

$$\sqrt{ab}-\sqrt{15}=\beta\in\mathbb{Q}$$

Bình phương 2 vế đẳng thức $\sqrt{ab}-\sqrt{15}+\beta$ ta được

$$ab=15+\beta^2+2\beta\sqrt{15}$$

$$\Leftrightarrow 2\beta\sqrt{15} = ab - 15 - \beta^2$$

Đẳng thức cuối xảy ra khi và chỉ khi β = 0 tức là ab = 15 . Xét tất cả khả năng có thể xảy ra, ta được.

- a = 1 , b = 15 tức là $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}+\sqrt{15}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ là1 số vô tỷ.
- a = 3, b = 5 tức là $\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ là 1 số vô tỷ.
- a = 5, b = 3 tức là $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 1$ là 1 số hữu tỷ.
- a = 15 , b = 1 , tức là $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\sqrt{5}+1} = \sqrt{3}$, 1 số vô tỷ.

Vậy tất cả các cặp (a,b) thỏa mãn là a = 5 b = 3 .

Các bạn có thể tham khảo bài toán gốc của câu 44b) như sau. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho số

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$$ là số hữu tỷ.

CHƯƠNG 2. BẤT ĐẲNG THỨC
VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm 2023-2024)*

Với các số thực dương a,b,c thay đổi thoả mãn $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{\sqrt{\left(1+8a^3\right)\left(1+8b^3\right)}}+\frac{b^2}{\sqrt{\left(1+8b^3\right)\left(1+8c^3\right)}}+\frac{c^2}{\sqrt{\left(1+8c^3\right)\left(1+8a^3\right)}}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta được:

$$\sqrt{1+8a^3}=\sqrt{(1+2a)\left(1-2a+4a^2\right)}\le\frac{1+2a+1-2a+4a^2}{2}=2a^2+1.$$

Tương tự, ta có: $\sqrt{1+8b^3}\le 2b^2+1;\sqrt{1+8c^3}\le 2c^2+1.$

Do đó: $P\ge\dfrac{a^2}{\left(2a^2+1\right)\left(2b^2+1\right)}+\dfrac{b^2}{\left(2b^2+1\right)\left(2c^2+1\right)}+\dfrac{c^2}{\left(2c^2+1\right)\left(2a^2+1\right)}$

Tiếp theo ta chứng minh: $\dfrac{a^2}{\left(2a^2+1\right)\left(2b^2+1\right)}+\dfrac{b^2}{\left(2b^2+1\right)\left(2c^2+1\right)}+\dfrac{c^2}{\left(2c^2+1\right)\left(2a^2+1\right)}\ge\dfrac{1}{3}(*)$

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow 3\left(2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(2a^2+1\right)\left(2b^2+1\right)\left(2c^2+1\right)$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 9.$$

Điều này hiển nhiên đúng do $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge 3\sqrt[4]{a^4b^4c^4}=3$ và $a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3.$

Vậy GTNN của $P=\dfrac{1}{3}$ đạt tại $a=b=c=1$

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2023-2024)*

Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện x + y + z = xyz. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$.

Lời giải

Từ giả thiết x + y + z = xyz, ta có $\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{yz}=\dfrac{1}{xz}=1.$

Dặt $a=\dfrac{1}{x};b=\dfrac{1}{y};c=\dfrac{1}{z}\Rightarrow a,b,c>0;$

Giả thiết trở thành ab + bc + ca = 1; $P=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}$

Để ý rằng:

$a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$

$b^2+1=b^2+ab+bc+ca=(b+a)(b+c)$

$c^2+1=c^2+ab+bc+ca=(c+a)(c+b)$

Lúc này ta có:

$$P=\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{a+b}}.\sqrt{\frac{a}{a+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+a}}.\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}.\sqrt{\frac{c}{c+b}}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si (AM-GM), ta có:

$$P\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+a}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}\right) \text{ hay } P\le\frac{3}{2}.$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ hay x = y = z = $\sqrt{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của P = $\frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow x=y=z=\sqrt{3}$.

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2023-2024)*

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{15}{ab+bc+ca}\ge 6-abc$$

Lời giải

Ta sẽ chứng minh $(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le abc$ (1).

Nếu $(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le 0$ thì (1) đúng

Ta có

$$\left.\begin{array}{l}(3-2a)(3-2b)\le\left(\frac{3-2a+3-2b}{2}\right)^2=c^2\\(3-2a)(3-2c)\le\left(\frac{3-2a+3-2c}{2}\right)^2=b^2\\(3-2c)(3-2b)\le\left(\frac{3-2c+3-2b}{2}\right)^2=a^2\end{array}\right\}\Rightarrow(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le abc.$$

Dấu "=" ở (1) xảy ra khi a = b = c = 1.

Từ (1) ta có $27-9(2a+2b+2c)+3(4ab+4bc+4ca)-8abc\le abc$

$\Leftrightarrow 27-9.6+12(ab+bc+ac)-8abc\le abc$ $(do\ a+b+c=3)$

$$\Leftrightarrow abc \ge \frac{4}{3}(ab+bc+ca)-3$$

Lúc này

$$abc+\frac{15}{ab+bc+ca} \ge \frac{4}{3}(ab+bc+ca)+\frac{12}{ab+bc+ca}+\frac{3}{ab+bc+ca}-3$$
$$\ge 2\sqrt{\frac{4}{3}(ab+bc+ca)\frac{12}{ab+bc+ca}}+\frac{9}{(a+b+c)^2}-3=8+1-3=6$$

$$Suy\,ra\ \frac{15}{ab+bc+ca} \ge 6-abc\ \ (đpcm).$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Bến Tre năm 2023-2024)*

Cho số thực x thỏa mãn $0<x<\frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{2-x}{1-2x}+\frac{1+2x}{3x}$$

Lời giải

Đặt $a=\frac{1}{x}, a>2$. Khi đó $A=\frac{2-\frac{1}{a}}{1-\frac{2}{a}}+\frac{1+\frac{2}{a}}{\frac{3}{a}}=\frac{2a-1}{a-2}+\frac{a+2}{3}=2+\frac{3}{a-2}+\frac{a-2}{3}+\frac{4}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho hai số dương $\frac{3}{a-2}$ và $\frac{a-2}{3}$, ta được

$$A \ge 2+2\sqrt{\frac{3}{a-2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{a-2}{3}}+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=5 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$.

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2023-2024)*

Cho $a,\ b,\ c$ là các số dương. Chứng minh:

$$\frac{bc}{2a+b+c}+\frac{ca}{2b+c+a}+\frac{ab}{2c+a+b} \le \frac{a+b+c}{4}.$$

Lời giải

Chứng minh được bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$.

Ta có $\frac{1}{2a+b+c}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{(a+b)+(a+c)} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)$

$$\Rightarrow \frac{bc}{2a+b+c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right) \qquad (1)$$

Tương tự, ta có

$$\frac{ac}{2b+a+c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{ac}{b+c}+\frac{ac}{b+a}\right)\qquad(2)$$

$$\frac{ab}{2c+a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}\right).\qquad(3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế ta được

$$VT\le\frac{1}{4}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ac}{b+c}+\frac{ac}{b+a}+\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{ca}{a+b}\right)+\left(\frac{bc}{a+c}+\frac{ab}{a+c}\right)+\left(\frac{ca}{b+c}+\frac{ab}{b+c}\right)\right]=\frac{a+b+c}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2023-2024)*

Cho a,b,c là các số thực không nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}\le\frac{a+b+c}{4}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}\le\frac{\sqrt{ab-1}}{2\sqrt{bc}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}-\frac{1}{bc}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{c}\left(a-\frac{1}{b}\right)}$$

Lại theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{c}\left(a-\frac{1}{b}\right)}\le\frac{1}{2}.\frac{\frac{1}{c}+a-\frac{1}{b}}{2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+a-\frac{1}{b}\right)$$

Tương tự, ta có: $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ab-1}}{\dfrac{\sqrt{bc-c}}{c+a}}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{c}+a-\dfrac{1}{b}\right)\\ \dfrac{\sqrt{ca-1}}{a}\left(\dfrac{1}{a}+b-\dfrac{1}{c}\right)\\ \dfrac{\sqrt{c+b}}{4}\left(\dfrac{1}{b}+c-\dfrac{1}{a}\right)\end{cases}$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}\le\frac{a+b+c}{4}\text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{2}$

Câu 7. *(Trường chuyên tỉnh Cao Bằng năm 2023-2024)*

Với a,b,c là ba số thực dương, chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\ge\frac{a+b+c}{5}.$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh BĐT sau: Với 4 số thực a,b,x,y và $x,y>0$. Ta có:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{\left(a+b\right)^2}{x+y}$$ (2), dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Thật vậy, ta viết BĐT (2) dưới dạng:

$a^2y\left(x+y\right)+b^2x\left(x+y\right)\ge\left(a+b\right)^2xy\Leftrightarrow\left(ay-bx\right)^2\ge0$ (luôn đúng). Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Áp dụng BĐT (2) hai lần ta được: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{\left(a+b\right)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{x+y+z}$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

Theo Bổ đề (1) ta có: $\sum\limits_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\sum\limits_{cyc}\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}$.

Mặt khác, theo BĐT GM – AM:

$$\sum_{cyc}\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}=\sum_{cyc}\left(\sqrt{3a+2b}\cdot\sqrt{a+4b}\right)\le\sum_{cyc}\frac{\left(3a+2b\right)\left(a+4b\right)}{2}=5\left(a+b+c\right)$$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{5\left(a+b+c\right)}=\frac{a+b+c}{5}$$

Hay $\sum\limits_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}\ge\frac{a+b+c}{5}$ (đpcm).

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Câu 8. *(Trường chuyên T.P Đà Nẵng năm 2023-2024)*

Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn xyz = 1. Chứng minh rằng:

$$2008\left(x^2+y^2+z^2\right)+15\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge2023\left(x+y+z\right).$$

Lời giải

+ AB.GM ba số: $x+y+z\ge3\sqrt[3]{xyz}=3$

+ Ta có:

$$2008\left(x^2+y^2+z^2\right)+15\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge2008\frac{\left(x+y+z\right)^2}{3}+15.\frac{9}{x+y+z}$$

Đặt $t=x+y+z$ $\left(t\ge3\right)$, ta phải chứng minh:

$$2008\frac{\left(x+y+z\right)^2}{3}+15.\frac{9}{x+y+z}\ge2023\left(x+y+z\right)$$

Tức là:

$$2008\frac{t^3}{3}+15.\frac{9}{t}\ge2023t$$

$\Rightarrow$ $2008t^3+405\ge6069t^2$

$\Rightarrow$ $\left(t-3\right)\left(2008t^2-45t-135\right)\ge0$ (1)

Trong đó
$2008t^2-45t-135$
$=1993t^2+15t^2-45t-135$
$=1993t^2+15t(t-3)-135$
$\geq 1993.3^2+15.3.0-135>0$
$\Rightarrow 2008t^2-45t-135>0$
Tức là (1) đúng
Vậy bài toán được chứng minh
Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2023-2024)*

Cho các số thực x,y,z,t thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+t^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=xy+xz+xt+yz+yt+3zt$.

Lời giải

Với mọi số thực $\alpha>0$, ta có

$$2\alpha A=2\alpha xy+2\alpha xz+2\alpha xt+2\alpha yz+2\alpha yt+2\alpha 3zt$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha A=\alpha(2xy)+2x(\alpha z)+2x(\alpha t)+2y(\alpha z)+2y(\alpha t)+(2zt)(3\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha A\leq \alpha(x^2+y^2)+x^2+(\alpha z)^2+x^2+(\alpha t)^2+y^2+(\alpha z)^2+y^2+(\alpha t)^2+(z^2+t^2)(3\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha A\leq(\alpha+2)(x^2+y^2)+(2\alpha^2+3\alpha)(z^2+t^2)$$

Do biểu thức trên đúng với mọi số thực $\alpha>0$ nên ta chọn $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Rightarrow \alpha+2=2\alpha^2+3\alpha=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Khi đó $2\alpha A\leq(\alpha+2)(x^2+y^2)+(2\alpha^2+3\alpha)(z^2+t^2)=(\alpha+2)(x^2+y^2+z^2+t^2)$

$$\Leftrightarrow A\leq\frac{\alpha+2}{2\alpha}=\frac{2+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$ đạt được khi

$$\begin{cases}x=y\\ z=t\\ x=\alpha z=\alpha t\\ \alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\\ x^2+y^2+z^2+t^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ z=t\\ x=\alpha z=\alpha t\\ \alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\\ x^2+y^2+z^2+t^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{20}}\\ z=t=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{20}}\end{cases}\\ \begin{cases}x=y=-\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{20}}\\ z=t=-\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{20}}\end{cases}\end{array}\right.$$

Câu 10. *(Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2023-2024)*

Cho hai số dương x và y thỏa mãn $x+y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Lời giải

Với hai số không âm a, b, ta chứng minh

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}. \qquad (1)$$

$$(a+b)^2 \leq 2\left(a^2 + b^2\right). \ (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Thật vậy

$(1) \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

$(2) \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$ (luôn đúng).

Áp dụng (2):

$(x+y)^2 \leq 2\left(x^2 + y^2\right) \Rightarrow 4 \leq 2\left(x^2 + y^2\right) \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2$.

Áp dụng (1):

$$\frac{x^2 + y^2}{4} + \frac{1}{x^2 + y^2} \geq 2\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4\left(x^2 + y^2\right)}} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{4} + \frac{1}{x^2 + y^2} \geq 1.$$

Ta có $\min B = \frac{5}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = 2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$.

Vậy $\min B = \frac{5}{2}$.

Câu 11. *(Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2023-2024)*

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}}.$$

Lời giải

Với $a, b, c > 0$, chứng minh được:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9 \Rightarrow \frac{1}{a+b+c}\le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le \sqrt{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}$$

Với $a,b>0$, ta có :

$5a^2+2ab+2b^2=(4a^2+4ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)$

$=(2a+b)^2+(a-b)^2\ge (2a+b)^2$

$\Rightarrow \sqrt{5a^2+2ab+2b^2}\ge \sqrt{(2a+b)^2}=2a+b$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}\le \frac{1}{2a+b}\le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Tương tự: $\dfrac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}\le \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$; $\dfrac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}\le \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{c}+\dfrac{1}{a}\right)$

$$P\le \frac{1}{9}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}+\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Rightarrow P\le \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$

Vậy $\max P=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Câu 12. *(Trường chuyên Tin T.P Hà Nội năm 2023-2024)*

Với các số thực a,b và c thoả mãn $(a+1)(b+1)(c+1)=(a-1)(b-1)(c-1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|a|+|b|+|c|$.

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $ab+bc+ac=-1$, có A=$|a|+|b|+|c|$, xét

$A^2=a^2+b^2+c^2+2|ab|+2|bc|+2|ac|$. Theo bất đẳng thức giá trị tuyêt đối , ta có :

$$A^2=(a+b+c)^2+2\left(|ab|+|bc|+|ac|\right)+2\ge 0+2|ab+bc+ac|+2=4$$

Từ đây kết hợp A ≥ 0 $\Rightarrow$ A $\ge$ 2.Dấu bằng xảy ra nhiều trường hợp, chẳng hạn $(a,b,c)=(0,1,-1)$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2.

Câu 13. *(Trường chuyên toán T.P Hà Nội năm 2023-2024)*

Với các số thực không âm a,b và c thỏa mãn $a+2b+3c=1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a+6b+6c)(a+b+c)$.

Lời giải

Đặt $x=b+c$

$$\begin{cases} 2x=1-a-c\le 1-a \\ 3x=1+b-a\ge 1-a \end{cases}$$

- Tìm GTLN của P

$$P \le (a+3)(1-a)\left(a+\frac{1-a}{2}\right)=\frac{1}{4}(3-2a)(2+2a)\le \frac{1}{4}.\frac{(3-2a+2+2a)^2}{4}=\frac{25}{16}$$

Vậy GTLN của $P=\frac{25}{16}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $c=0, a=\frac{1}{4}, b=\frac{3}{8}$.

- Tìm GTNN của P

$$P \ge [a+2(-a)]\left[a+\frac{1-a}{3}\right]=\frac{1}{3}(2a^2+5a+2)\ge \frac{2}{3}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b=0, c=\frac{1}{3}$.

Câu 14. *(Trường chuyên Hà Tĩnh năm 2023-2024)*
Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a>b>c; ab+bc+ca>0$ và $a+b+c=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-c}+\frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$.

Lời giải

Ta sử dụng các bất đẳng thức $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\ge \frac{4}{m+n}\ge \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}}$ với $m>0; n>0$

Dấu bằng xảy ra khi $m=n$

$$P=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-c}+\frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$$

$$P\ge \frac{4}{a-c}+\frac{1}{a-c}+\frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}=\frac{5}{a-c}+\frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Lại có: $\frac{5}{a-c}+\frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}\ge 5\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(a-c)^2+4(ab+bc+ca)}}=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)^2+4b(a+c)}}$

$$\Rightarrow P\ge \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(a+c+4b)}}=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}}\quad (do\ a+c=1-b)$$

$$\Rightarrow P\ge \frac{10\sqrt{6}}{\sqrt{(3-3b)(1+3b)}}\ge \frac{10\sqrt{6}}{\frac{3-3b+1+3b}{2}}=5\sqrt{6}$$

Giá trị nhỏ nhất của P bằng $5\sqrt{6}$ khi

$$\begin{cases} a>b>c \\ a+b+c=1 \\ a-b=b-c \\ a-c=2\sqrt{b(a+c)+ca} \\ 3-3b=1+3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>b>c \\ b=\frac{1}{3} \\ a+c=\frac{2}{3} \\ a-c=2\sqrt{\frac{2}{9}+ca} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{2+\sqrt{6}}{6} \\ b=\frac{1}{3} \\ c=\frac{2-\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

Câu 15. *(Trường chuyên Hải Dương năm 2023-2024)*

Cho a,b,c là các số không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\ge\frac{10}{(a+b+c)^2}$$

Lời giải

Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$. Khi đó :

$$c\le a\Rightarrow c^2\le ac\Rightarrow a^2+c^2\le a^2+ac\le\left(a+\frac{c}{2}\right)^2$$

$$c\le b\Rightarrow c^2\le bc\Rightarrow b^2+c^2\le b^2+bc\le\left(b+\frac{c}{2}\right)^2$$

$$a^2+b^2\le\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2$$

$$VT(*)\ge\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}$$

Đặt $x=a+\frac{c}{2};y=b+\frac{c}{2}$. Khi đó $x>0,y>0$ và $x+y=a+b+c$.

Ta có $VT(*)\ge\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}$

$$\ge\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2}{xy}=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}+\frac{3}{2xy}\ge\frac{4}{x^2+y^2+2xy}+\frac{3}{2xy}$$

$$=\frac{4}{(x+y)^2}+\frac{3}{2xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2}+3.\frac{2}{(x+y)^2}=\frac{10}{(x+y)^2}=\frac{10}{(a+b+c)^2}=VP(*)$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}c=0\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\a=b\end{cases}$. Do vai trò của a,b,c bình đẳng nên dấu "=" của $(*)$ xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a,b,c có một số bằng 0 và hai số còn lại bằng nhau.

Câu 16. *(Trường chuyên Hải Phòng năm 2023-2024)*

Cho các số thực $a,\ b,\ c$ thoả mãn $a+b+c=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2a-1}{a^2+2}+\frac{2b-1}{b^2+2}+\frac{2c-1}{c^2+2}.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $ab\ge0$. Khi đó

$$P+3\ge\frac{(a+b+2)^2}{(a+b)^2+4}+\frac{(c+1)^2}{c^2+2}=\frac{(c-2)^2}{c^2+4}+\frac{(c+1)^2}{c^2+2}.$$

Xét BĐT: $\frac{(c-2)^2}{c^2+4}+\frac{(c+1)^2}{c^2+2}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow c^2(c-2)^2\ge0$ (đúng).

Vậy $P\ge\frac{-3}{2}$; dấu đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $a=b=c=0$, $a=b=-1,c=2$. Do đó $P_{\min}=\frac{-3}{2}$

Câu 17. *(Trường chuyên Hòa Bình năm 2023-2024)*

Từ giả thiết $a(a-1)+b(b-1)=ab \Rightarrow a^2+b^2-(a+b)=ab$

$\Rightarrow a^2+b^2=ab+a+b$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: $a^2+b^2 \ge 2ab \Rightarrow ab+a+b \ge 2ab \Rightarrow a+b \ge ab$ (1)

Lại có: $ab+a+b+8=(a^2+4)+(b^2+4) \ge 4a+4b=4(a+b)$

$\Rightarrow ab+8 \ge 3(a+b) \ge 3ab$ (do (1))

$\Rightarrow ab \le 4$.

Đặt $t=\sqrt{ab} \Rightarrow 0<t\le 2 \Rightarrow \frac{2}{t} \ge 1 \Rightarrow \frac{4}{t^2} \ge 1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$F=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+2023\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{4}{ab} \ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b}.\frac{b^2}{a}}+2023.2\sqrt{\frac{1}{ab}}+\frac{4}{ab}=2t+4046.\frac{1}{t}+\frac{4}{t^2}$$

$$F \ge 2t+\frac{8}{t}+2019\cdot\frac{2}{t}+\frac{4}{t^2}.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có $2t+\frac{8}{t} \ge 2\sqrt{2t.\frac{8}{t}}=8$

$\Rightarrow F \ge 8+2019+1=2028$. Vậy $\min F=2028$, đạt khi $a=b=2$.

Câu 18. *(Trường chuyên Hưng Yên năm 2023-2024)*

Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn ab+bc+ca = 3abc.

Tìm giá trị lớn nhất của biểuthức T = $\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}}{3\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}^2+\boldsymbol{abc}}}$ + $\sqrt{\frac{\boldsymbol{b}}{3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{c}^2+\boldsymbol{abc}}}$ + $\sqrt{\frac{\boldsymbol{c}}{3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{abc}}}$

Lời giải

Theo bài ra, ta có: a, b, c > 0 và ab + bc + ca = 3abc ⇔ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$

Đặt $\frac{1}{a}$ là x; $\frac{1}{b}$ là y; $\frac{1}{c}$ là z (x, y, z > 0; x + y + z = 3)

Suy ra: $\sqrt{\frac{a}{3b^2c^2+abc}}+\sqrt{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{y^2z^2}+\frac{1}{xyz}}}+\sqrt{\frac{y^2z^2}{x(x+y+z)+yz}}=\sqrt{\frac{y^2z^2}{3x+xy}}$

Suy ra: T $\le \frac{1}{2}\left(\frac{yz+zx}{x+y}+\frac{yz+yx}{x+z}+\frac{xy+zx}{y+z}\right)=\frac{1}{2}(x+y+z)=\frac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra ⇔ a = b = c = 1

Câu 19. *(Trường chuyên Khánh Hòa năm 2023-2024)*

a) Chứng minh $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \ge \sqrt{2}(x+y-2)(z-1)$, với mọi $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.

b) Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$

$k\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right] \ge |(x+y-2)(z-1)|.$

Lời giải

a) ***Cách 1:***

*) Áp dụng bất đẳng thức B-C-S, ta có:

$$\left[(x-1)^2+(y-1)^2\right]\left[1^2+1^2\right] \ge \left[(x-1).1+(y-1).1\right]^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 \ge \frac{(x+y-2)^2}{2} \qquad (1)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1} \Leftrightarrow x=y$

*) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{(x+y-2)^2}{2}+(z-1)^2 \ge 2\sqrt{\frac{\left[(x+y-2)(z-1)\right]^2}{2}}=\sqrt{2}|(x+y-2)(z-1)| \qquad (2)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{(x+y-2)^2}{2}=(z-1)^2$

*) Mặt khác: $|(x+y-2)(z-1)| \ge (x+y-2)(z-1) \qquad (3)$

(Dấu "=" xảy ra khi $(x+y-2)(z-1) \ge 0$).

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \ge \sqrt{2}(x+y-2)(z-1) \qquad (4)$$

*) Đẳng thức (4) xảy ra khi: $\begin{cases} x=y \\ |x+y-2|=\sqrt{2}|z-1| \\ (x+y-2)(z-1)\ge 0 \end{cases}$

(Chẳng hạn tại $x=y=z=1$)

Cách 2:

Đặt $((x-1),\ (y-1),\ (z-1))=(a,\ b,\ c)$

Ta có: $VT=a^2+b^2+c^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}+c^2 \ge 2\sqrt{\frac{(a+b)^2.c^2}{2}}=\sqrt{2}|(a+b)c| \ge \sqrt{2}(a+b)c=VP$

Vậy $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \ge \sqrt{2}(x+y-2)(z-1)$ với mọi $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{z-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

(Chẳng hạn tại $x=y=z=1$)

b)

Giả sử k là số thực nhỏ nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$:

$k\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]\ge\left|(x+y-2)(z-1)\right| \qquad (*)$

$\Rightarrow$ Bắt đẳng thức $(*)$ cũng đúng khi $x=y$, $|x+y-2|=\left|\sqrt{2}(z-1)\right|$

(Hay $x=y$, $|z-1|=\sqrt{2}|x-1|$)

Do đó: $k\left[2(x-1)^2+2(x-1)^2\right]\ge\left|2(x-1).\sqrt{2}(x-1)\right|$

$\Leftrightarrow 4k(x-1)^2\ge 2\sqrt{2}(x-1)^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

Cho $x=2$, ta được: $4k\ge 2\sqrt{2}\Leftrightarrow k\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

*) Ta chứng minh với mọi $k\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì bất đẳng thức $(*)$ đúng.

Thật vậy:

$$k\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]=\left(k-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]+\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]$$

$$\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]$$

$\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}\left|(x+y-2)(z-1)\right|=\left|(x+y-2)(z-1)\right|$ (theo chứng minh của câu a).

Khi $k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì theo chứng minh câu a ta cũng có bất đẳng thức $(*)$ đúng.

Vậy giá trị k nhỏ nhất cần tìm là $k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 20. *(Trường chuyên Lai Châu năm 2023-2024)*

Cho $a;b;c$ là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Ta có $a+b+c=3\Leftrightarrow 9=(a+b+c)^2\ge 3(ab+ac+bc)\Leftrightarrow ab+ac+bc\le 3$

$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}\le\frac{bc}{\left(a^2+ab+ac+bc\right)}=\frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right)$$

Tương tự ta có : $\dfrac{ac}{\sqrt{b^2+3}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ac}{a+b}+\dfrac{ac}{b+c}\right)$; $\dfrac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ab}{b+c}+\dfrac{ab}{a+c}\right)$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ac}{a+b}+\frac{ac}{b+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{ab}{a+c}\right)\le\frac{1}{2}(a+b+c)$$

mà $a+b+c=3$ nên $\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\dfrac{ac}{\sqrt{b^2+3}}+\dfrac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\dfrac{3}{2}$

dấu "$=$" xảy ra khi $a=b=c=1$

Vậy $\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ac}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{3}{2}$

Câu 21. *(Trường chuyên Lào Cai năm 2023-2024)*

a) Cho a ≥ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=a^2+\frac{2}{3a}$

b) Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c\le 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(3bc+1)^2}{c^2(3ac+1)}+\frac{b(3ca+1)^2}{a^2(3ab+1)}+\frac{c(3ab+1)^2}{b^2(3bc+1)}\ge 12.$$

Lời giải

a) Dự đoán Q đạt giá trị nhỏ nhất tại a=3.

Ta có $Q=a^2\frac{27}{a}+\frac{27}{a}-\frac{160}{3a}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số $a^2;\frac{27}{a};\frac{27}{a}$ ta được:

$$a^2+\frac{27}{a}+\frac{27}{a}\ge 3.\sqrt{a^2.\frac{27}{a}.\frac{27}{a}}=27$$

Mà $a\ge 3\Rightarrow 0<\frac{160}{3a}\le\frac{160}{9}\Rightarrow -\frac{160}{3a}\ge\frac{160}{9}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q= $\frac{83}{9}$ tại a=3.

b) Ta đặt $x=\frac{3ab+1}{b},y=\frac{3bc+1}{c},z=\frac{3ca+1}{a}\Rightarrow x,y,z>0$

Đặt $P=\frac{a(3bc+1)^2}{c^2(3ac+1)}+\frac{b(3ca+1)^2}{a^2(3ab+1)}+\frac{c(3ab+1)^2}{b^2(3bc+1)}\Rightarrow P=\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchuy-Schwarz ta có

$$P\ge\frac{(y+z+x)^2}{x+y+z}=x+y+z(1)$$

Ta có:

$$x+y+z=3a+\frac{1}{b}+3b+\frac{1}{c}+3c+\frac{1}{a}$$

$$=\left(9a+\frac{1}{a}\right)+\left(9b+\frac{1}{b}\right)+\left(9c+\frac{1}{c}\right)-6(a+b+c)\ge 2.\sqrt{9a+\frac{1}{a}}+2.\sqrt{9b+\frac{1}{b}}+2.\sqrt{9c+\frac{1}{c}}-6(a+b+c)$$

$$=6+6+6-6(a+b+c)\ge 18-6=12(2)\ (\text{ vì } a+b+c\le 1).$$

Từ (1) và (2) suy ra P$\ge$12.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3} \Rightarrow$ đpcm.

Câu 22. *(Trường chuyên Long An năm 2023-2024)*
Cho $a \ge 0, b \ge 0$ thỏa mãn $2a + 3b \le 6$ và $2a + b \le 4$. Chứng minh rằng:

$$-\frac{22}{9} \le a^2 - 2a - b \le 0.$$

Lời giải

$2a + 3b \le 6 \Rightarrow -b \ge \frac{2}{3}a - 2$

$a^2 - 2a - b \ge a^2 - 2a + \frac{2}{3}a - 2 = \left(a - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{22}{9} \ge -\frac{22}{9}\ (1)$

$2a + b \le 4 \Rightarrow 2a^2 + ab \le 4a$

$\Rightarrow a^2 - 2a - b \le -\frac{ab}{2} - b \le 0\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Câu 23. *(Trường chuyên Nam Định năm 2023-2024)*
Cho các số thực $x; y; z$ thỏa mãn $0 \le x, y, z \le 4$. Chứng minh rằng:

$x^2y + y^2x + z^2x + 16 \ge xy^2 + yz^2 + zx^2$

Lời giải

Ta có:

$x^2y + y^2z + z^2x + 16 \ge xy^2 + yz^2 + zx^2$

$\Leftrightarrow x^2y + y^2z + z^2x + 16 - xy^2 - yz^2 - zx^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(x - z)(y - z) + 16 \ge 0$

Ta có bất đẳng thức: $ab \ge -\frac{1}{4}(a - b)^2, \forall a, b \in \mathbb{R}$

và $ab \le \frac{(a + b)^2}{4}, \forall a, b \in \mathbb{R}$

Trường hợp 1: Nếu $x \ge y$ ta có $(x - z)(y - z) \ge -\frac{1}{4}(x - y)^2$

nên $(x - y)(x - z)(y - z) + 16 \ge -\frac{1}{4}(x - y)^3 + 16 \ge -\frac{1}{4}4^3 + 16 \ge 0$

Trường hợp 2: Nếu $y > x$ ta xét

Trường hợp 2.1: Nếu $y \ge z$, ta có $(x - y)(x - z) \ge -\frac{1}{4}(y - z)^2$

nên $(x - y)(x - z)(y - z) + 16 \ge -\frac{1}{4}(y - z)^3 + 16 \ge -\frac{1}{4}4^3 + 16 \mp 0$

Trường hợp 2.2: Nếu $y<z$, ta có: $(x-y)(x-z)(y-z)+16=(y-z)(x-z)(x-y)=16$

Kết hợp với $(y-x)(z-y)\le -\frac{1}{4}(z-x)^2$ và $x<y<z$

Ta được: $(y-x)(x-z)(z-y)+16\ge \frac{1}{4}(z-x)^2(x-z)+16=-\frac{1}{4}(z-x)^3+16\ge 0$

Vậy với mọi trường hợp thì $(x-y)(x-z)(y-z)+16\ge 0$ hay

$$x^2y+y^2z+z^2x+16\ge xy^2+yz^2+zx^2$$

Câu 24. *(Trường chuyên tỉnh Nghệ An năm 2023-2024)*

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a,b,c\ge 1$ và $a^2+4b^2+c^2+2ab+12=3(a+5b+c)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{a^2}{a+(a+b)^2}+\frac{a^2}{a+c^2}$

Lời giải

Bằng các phép biến đổi giả thiết, ta có

$$3(a+b+c)=a^2+4b^2+c^2+2ab+12-12b$$

$$=(a+b)^2+c^2+3(b-2)^2\ge (a+b)^2+c^2$$

Bằng biến đổi bất đẳng thức kết hợp cộng mẫu, ta được

$$3(a+b+c)\ge (a+b)^2+c^2\ge \frac{(a+b+c)^2}{2}$$

Do đó $a+b+c\le 6$ suy ra $(a+b)^2+c^2\le 18$. Khi đó, bằng các phép biến đổi ta có

$$T=\frac{a^3}{a+(a+b)^2}+\frac{a^2}{a+c^2}\ge \frac{a^2}{a+(a+b)^2}+\frac{a^2}{a+c^2}$$

$$\ge \frac{4a^2}{2a+(a+b)^2+c^2}$$

$$\ge \frac{4a^2}{2a+18}=\frac{2a^2}{a+9}\ge \frac{2a^2}{10a}=\frac{a}{5}\ge \frac{1}{5}$$

Từ đây ta được $MinT=\frac{1}{5}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)=(1,2,3)$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $T=\frac{1}{5}$

Câu 25. *(Trường chuyên Đại Học Vinh năm 2023-2024)*

Xét các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}+\frac{1}{\sqrt{c+2}}$.

Lời giải

Ta có nhận xét sau

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}\right)^2=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)}}$$

$$=\frac{a+b+2}{ab+a+b+1}+\frac{2}{\sqrt{ab+a+b+1}}\le\frac{a+b+2}{a+b+1}+\frac{2}{\sqrt{a+b+1}}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{a+b+1}}\right)^2$$

Do đó ta được $\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}\le 1+\frac{1}{\sqrt{a+b+1}}$.

Mặt khác, ta có $(a+b+c)^2\ge a^2+b^2+c^2=1$ suy ra $a+b\ge 1-c$.

Từ đây kết hợp với $c\le 1$ (vì $c\ge 0$ và $c^2\le 1$), ta suy ra

$$P\le 1+\frac{1}{\sqrt{2-c}}+\frac{1}{\sqrt{c+2}}=1+\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2-c}}+\frac{1}{\sqrt{c+2}}\right)^2}=1+\sqrt{\frac{1}{2-c}+\frac{1}{2+c}+\frac{2}{\sqrt{4-c^2}}}$$

$$=1+\sqrt{\frac{4}{4-c^2}+\frac{2}{\sqrt{4-c^2}}}\le 1+\sqrt{\frac{4}{4-1}+\frac{2}{\sqrt{4-1}}}=2+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $a=b=0, c=1$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $2+\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 26. *(Trường chuyên tỉnh Ninh Bình năm 2022-2023)*

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a + b + c = 6. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{b}{\sqrt{c^3+1}}+\frac{c}{\sqrt{a^3+1}}\ge 2$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\sqrt{b^3+1}=\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)}\le\frac{b+1+b^2-b+1}{2}=\frac{b^2+2}{2}$$

T^2: $\sqrt{c^3+1}\le\frac{c^2+2}{2}$; $\sqrt{a^3+1}\le\frac{a^2+2}{2}$

Do đó VT $\ge\frac{2a}{b^2+2}+\frac{2b}{c^2+2}+\frac{2c}{a^2+2}$

Ta cần CM: S = $\frac{2a}{b^2+2}+\frac{2b}{c^2+2}+\frac{2c}{a^2+2}\ge 2$

Ta có: $\frac{2a}{b^2+2}=\frac{a(b^2+2)-ab^2}{b^2+2}$ = a - $\frac{ab^2}{b^2+2}$

Lại có : $\frac{ab^2}{b^2+2}=\frac{2ab^2}{b^2+b^2+4}\le\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{b^4.\,4}}=\frac{a\sqrt[3]{2b^2}}{3}\le\frac{a.(2+b+b)}{9}=\frac{2a.(b+1)}{9}$

T^2 ta được S $\ge$ a + b + c - $\frac{2.(a+b+c)}{9}$ - $\frac{2(ab+bc+ca)}{9}$ = $\frac{7.(a+b+c)}{9}$ - $\frac{2(ab+bc+ca)}{9}$

Ta có ab + bc + ca ≤ $\frac{(a+b+c)^2}{3}$

Do đó S ≥ $\frac{7.6}{9}$ - $\frac{2}{9}$. $\frac{6^2}{9}$ = 2

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 2. Ta có đpcm.

Câu 27. *(Trường chuyên Tin Phú Thọ năm 2023-2024)*

Xét ba số $x; y; z \geq 2$ thỏa mãn $4xyz = 9(x+y+z)+27$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}+\frac{\sqrt{y^2-4}}{y}+\frac{\sqrt{z^2-4}}{z}$

Lời giải

Ta có $\sqrt{5}Q = \frac{\sqrt{5(x-2)(x+2)}}{x}+\frac{\sqrt{5(y-2)(y+2)}}{y}+\frac{\sqrt{5(z-2)(z+2)}}{z}$

$\sqrt{5}Q \leq \frac{5(x-2)+x+2}{2x}+\frac{5(y-2)+y+2}{2y}+\frac{5(z-2)+z+2}{2z}$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}Q \leq \frac{6x-8}{2x}+\frac{6y-8}{2y}+\frac{6z-8}{2z} = 9-41\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

Từ $4xyz = 9(x+y+z)+27 \Leftrightarrow 4 = 9\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\right)+\frac{27}{xyz} \leq 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^3$

Đặt $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=t$

Ta có

$t^3+3t^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow t^3-t^2+4t^2-4t+4t-4 \geq 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t-2)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow t \geq 1$

Suy ra $\sqrt{5}Q \leq 9-4.1=5 \Leftrightarrow Q \leq \sqrt{5}$

Vậy $MaxQ = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x,y,z \geq 2; 4xyz = 9(x+y+z)+27 \\ 5(x-2)=x+2; 5(y-2)=y+2; 5(z-2)=z+2 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=y=z=3$

Câu 28. *(Trường chuyên Toán Phú Thọ năm 2022-2023)*

Xét các số thực dương a,b,c; Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$F = \frac{a}{\sqrt{a^2+9bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+9ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+9ab}}$.

Lời giải

Ta có $\left(a\sqrt{a^2+9bc}+b\sqrt{b^2+9ac}+c\sqrt{c^2+9ab}\right).F \geq (a+b+c)^2$

Đặt $Q = a\sqrt{a^2+9bc} + b\sqrt{b^2+9ac} + c\sqrt{c^2+9ab}$

$$Q^2 = \left[\sqrt{a}\sqrt{a^3+9ac} + \sqrt{b}\sqrt{b^3+9ac} + \sqrt{c}\sqrt{c^3+9ab}\right]^2 \le (a+b+c)(a^3+b^3+c^3+27abc)$$

Ta lại có $a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a) \le (a+b+c)^3 - 24abc$

$\Rightarrow (a+b+c)(a^3+b^3+c^3+27abc) \le (a+b+c)\left[(a+b+c)^3+3abc\right]$ mà $3abc \le \dfrac{(a+b+C)^3}{9}$

$$\Rightarrow (a+b+c)(a^3+b^3+c^3+27abc) \le \frac{10(a+b+c)^4}{9}$$

$\Rightarrow Q \le \dfrac{\sqrt{10}(a+b+c)^2}{3}$ mà $\left(a\sqrt{a^2+9bc} + b\sqrt{b^2+9ac} + c\sqrt{c^2+9ab}\right).F \ge (a+b+c)^2$

Suy ra $F \ge \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. Vậy min $F = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Câu 29. *(Trường chuyên tỉnh Phú Yên năm 2023-2024)*

Cho $x \ge 1, 0 < y \le 1$. *Chứng minh rằng:* $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} \ge \dfrac{x}{x^2+y} + \dfrac{y}{y^2+x}$

Lời giải

Với giả thiết đã cho, ta sẽ chứng minh $\dfrac{1}{y+1} \ge \dfrac{x}{x^2+1} (1)$ *và* $\dfrac{1}{x+1} \ge \dfrac{y}{y^2+x}$ *(2)*

Ta có: (1) $\Leftrightarrow xy + x - x^2 - y \le 0 \Leftrightarrow y(x-1) + x(1-x) \le 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(y-x) \le 0 (3)$

(3) đúng vì $x \ge 1, 0 < y \le 1$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1, 0 < y \le 1$

Ta cũng có: (2) $\Leftrightarrow xy + y - y^2 - x \le 0 \Leftrightarrow y(x-y) - (x-y) \le 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(y-1) \le 0$ *(4)*

(4) đúng vì $x \ge 1, 0 < y \le 1$

Dấu bất đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} \ge \dfrac{x}{x^2+y} + \dfrac{y}{y^2+x}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$

Câu 30. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Trị năm 2023-2024)*

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$.

1. Chứng minh $a + b + c \ge 9$.
2. Chứng minh $a + b + c \ge 4\left(\dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ca} + \dfrac{c}{ab}\right) + 5$.

Lời giải

Ta có $ab+bc+ca=abc \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Cách 1: Khi đó $a+b+c=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 3\sqrt[3]{abc}.3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=9$

Cách 2: $a+b+c=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 3+2+2+2=9$

Ta có $a+b+c=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(c+a)^2}{ca}-3$

$\geq \frac{4(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}-3=\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{abc}+5=4\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)+5$

Câu 31. *(Trường chuyên Sơn La năm 2023-2024)*

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\frac{1+\sqrt{z^2}}{z}\leq xyz.$$

Lời giải

Từ $x+y+z=zyz \Rightarrow .\ \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=1$

Lại có: $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}}$ (áp dụng $\sqrt{ab}\leq\frac{1}{2}(a+b)$)

$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\leq\frac{2}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}\Rightarrow\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\leq 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$

Chứng minh:

$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\leq xyz$

$\Leftrightarrow 3(xy+yz+zx)\leq(xyz)^2$

$\Leftrightarrow 3(xy+yz+zx)\leq(x+y+z)^2$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$ (đúng)

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\sqrt{3}$.

Câu 32. *(Trường chuyên Tây Ninh năm 2023-2024)*

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c\geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{1}{6}(19a+22b+25c)+2\left(\frac{5}{a}+\frac{6}{b}+\frac{7}{c}\right).$$

Lời giải

Ta có: $a+b+c\geq 6$.

$$M=\frac{1}{6}(19a+22b+25c)+2\left(\frac{5}{a}+\frac{6}{b}+\frac{7}{c}\right)=\left(\frac{19}{6}a+\frac{10}{a}\right)+\left(\frac{22}{6}b+\frac{12}{b}\right)+\left(\frac{25}{6}c+\frac{14}{c}\right)$$

Xét $k,m,n>0: ka+\frac{10}{a}\ge 2\sqrt{10k}; mb+\frac{12}{b}\ge 2\sqrt{12m}; nc+\frac{14}{c}\ge 2\sqrt{14n}$

$a=2\Rightarrow 2k+5\ge 2\sqrt{10k}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow ka=\frac{10}{a}\Rightarrow 2k=5\Leftrightarrow k=\frac{5}{2}$.

Tương tự ta tìm được: $m=3, n=\frac{7}{2}$.

Do đó: $M=\left(\frac{5}{2}a+\frac{10}{a}\right)+\left(3b+\frac{12}{b}\right)+\left(\frac{7}{2}c+\frac{14}{c}\right)+\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c$

$\Rightarrow M\ge 2\sqrt{25}+2\sqrt{36}+2\sqrt{49}+\frac{2}{3}\cdot 6=40$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=2$.

Vậy $M_{Min}=40$ khi $a=b=c=2$.

Câu 33. *(Trường chuyên Thái Bình năm 2023-2024)*

Cho 3 số thực dương x,y,z thoả mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}-x^2-28y^2-28z^2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM:

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}}=\frac{2x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}\le\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}$$

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+xy+yz+zx}}=\frac{y}{\sqrt{(y+x)(y+z)}}\le\frac{1}{4}\cdot\frac{y}{y+z}+\frac{x}{y+x}$$

$$\frac{z}{\sqrt{z^2+xy+yz+zx}}=\frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}\le\frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z+y}+\frac{x}{z+x}$$

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\le 1+1+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}\quad(1)$$

Và ta có: $x^2+28y^2+28z^2=\frac{1}{2}(x-7x)^2+\frac{1}{2}(x-7z)^2+\frac{7}{2}(y-z)^2+7\ge 7\qquad(2)$

Dấu "=" của các bất đẳng thức (1), (2) xảy ra khi $x=7y=7z$ và $xy+yz+zx=1$ khi và chỉ khi

$y=z=\frac{\sqrt{15}}{15}; x=\frac{7\sqrt{15}}{15}$

Từ (1), (2) có $P<\frac{9}{4}-7=-\frac{19}{4}$ suy ra MaxP = 7 $\Leftrightarrow y=z=\frac{\sqrt{15}}{15}$; $x=\frac{7\sqrt{15}}{15}$

Vậy MaxP = $\frac{-19}{4}$

Câu 34. *(Trường chuyên Quốc Học Huế năm 2023-2024)*

Cho hai số thực dương a,b thỏa mãn $4a^2+b^2=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\frac{4a}{2+b}+\frac{b}{1+a}+\frac{2024}{2a+b}.$$

Lời giải

Ta có $4a^2+b^2\ge 4ab \Leftrightarrow 2\left(4a^2+b^2\right)\ge(2a+b)^2$

$\Leftrightarrow 4\ge(2a+b)^2 \Leftrightarrow 2a+b\le 2 \Leftrightarrow a+\frac{b}{2}\le 1.$

Đặt $x=a; y=\frac{b}{2}$, ta có $x+y\le 1$.

Khi đó $\frac{1}{2}T=\frac{a}{1+\frac{b}{2}}+\frac{b}{2(1+a)}+\frac{506}{a+\frac{b}{2}}=\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}+\frac{506}{x+y}.$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

- $\frac{x}{1+y}+\frac{4}{9}x(1+y)\ge\frac{4}{3}x \Leftrightarrow \frac{x}{1+y}\ge\frac{8}{9}x-\frac{4}{9}xy$.
- $\frac{y}{1+x}+\frac{4}{9}y(1+x)\ge\frac{4}{3}y \Leftrightarrow \frac{y}{1+x}\ge\frac{8}{9}y-\frac{4}{9}xy$.

Suy ra $\frac{1}{2}T\ge\frac{8}{9}(x+y)-\frac{8}{9}xy+\frac{506}{x+y}\ge\frac{8}{9}(x+y)+\frac{8}{9(x+y)}+\frac{4546}{9(x+y)}-\frac{8}{9}xy.\ge\frac{8}{9}.2+\frac{4546}{9}-\frac{8}{9}.\frac{1}{4}=\frac{1520}{3}$. (để ý $xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}$)

Do đó $T\ge\frac{3040}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}$ hay $a=\frac{1}{2};b=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $\frac{3040}{3}$ đạt được khi $a=\frac{1}{2};b=1$.

Câu 35. *(Trường chuyên Tiền Giang năm 2023-2024)*

Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x>1, y>1$

a) Chứng minh rằng $\frac{x}{\sqrt{x-1}}\ge 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức T = $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}$

Lời giải

a) Chứng minh rằng $\frac{x}{\sqrt{x-1}}\ge 2$.

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho hai số thực dương $(x-1)$ và 1 ta được

$x=(x-1)+1\ge 2\sqrt{(x-1).1}=2\sqrt{x-1}.$

Vậy $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} \geq 2$ với mọi số thực $x > 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x-1=1 \Leftrightarrow x=2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức T = $\dfrac{x^2}{y-1}+\dfrac{y^2}{x-1}$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số thực dương $\dfrac{x^2}{y-1}$ và $\dfrac{y^2}{x-1}$ ta được

$$T=\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y-1}.\frac{y^2}{x-1}}=2.\frac{x}{\sqrt{x-1}}.\frac{y}{\sqrt{y-1}}\geq 2.2.2=8$$

Vậy $\min T=8$ khi $x=y=2$.

Câu 36. *(Trường chuyên T.P Hồ Chí Minh năm 2022-2023)*

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $\sqrt{1+4xy+2x+2y}+2z=5$

a) Chứng minh $\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}}+\dfrac{1}{2z+1}\geq\dfrac{2}{3}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+1}{2x+1}+\dfrac{y+1}{2y+1}+\dfrac{2z+3}{4z+2}$.

Lời giải

a) Từ giả thiết ta có $\sqrt{(2x+1)(2y+1)}=5-2z$.

Từ đó kết hợp sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwwarz, ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}}+\frac{1}{2z+1}=\frac{1}{5-2z}+\frac{1}{2z+1}\geq\frac{4}{5-2z+2z-1}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi chẳng hạn $x=y=z=1$.

b) Ta thấy rằng

$$P=\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2x+1)}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2y+1)}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2z+1}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2y+1}\right)+\frac{1}{2z+1}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương và sử dụng kết quả ở ý (a) ta được

$$P\geq\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}+}\frac{1}{2z+1}\geq\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{13}{6}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Câu 37. *(Trường chuyên Vĩnh Long năm 2023-2024)*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{x^2+10}{\sqrt{x^2+9}}$

Lời giải:

Đặt P = $\dfrac{x^2+10}{\sqrt{x^2+9}}=\sqrt{x^2+9}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$

$$=\left(\frac{1}{9}.\sqrt{x^2+9}+\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\right)+\frac{8}{9}.\sqrt{x^2+9}$$

Suy ra $P\ge 2.\frac{1}{3}+\frac{8}{9}.3=\frac{10}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là $P=\frac{10}{3}$ khi $x=0$

Câu 38. *(Trường chuyên Vĩnh Phúc năm 2022-2023)*

1. Cho ba số thực dương $a,\ b,\ c$ thoả mãn $ab+bc+ca=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

P = $\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$

2. Cho ba số thực không âm a,b,c thoả mãn $ab+bc+ca+abc\le 4$. Chứng minh rằng $a+b+c\ge ab+bc+ca$.

Lời giải:

1. Ta có:

$$P=\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}}$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$

$$=\sqrt{\frac{2a}{a+b}.\frac{2a}{a+c}}+\sqrt{\frac{2b}{b+a}.\frac{b}{2(b+c)}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}.\frac{c}{2(c+b)}}$$

$AM-GM$

$$\le\frac{1}{2}\left[\frac{2a}{a+b}+\frac{2a}{a+c}+\frac{2b}{b+a}+\frac{b}{2(b+c)}+\frac{2c}{c+a}+\frac{c}{2(c+b)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2a}{a+b}+\frac{2b}{a+b}\right)+\left(\frac{2a}{a+c}+\frac{2a}{a+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+c}+\frac{c}{b+c}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(2+2+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a=\frac{7\sqrt{15}}{15};b=c=\frac{\sqrt{15}}{15}$

Vậy P đạt GTLN là $\frac{9}{4}$ khi $a=\frac{7\sqrt{15}}{15};b=c=\frac{\sqrt{15}}{15}$

2. Ta có $ab+bc+ca+abc\le 4$

$\Leftrightarrow abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+8\le(ab+2a+2b+4)+(bc+2b+2c+4)+(ca+2c+2a+4$

$\Leftrightarrow (a+2)(b+2)(c+2)\le(a+2)(b+2)+(b+2)(c+2)+(c+2)(a+2)$

$\Leftrightarrow 1\le\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\Leftrightarrow\frac{2}{a+2}+\frac{2}{b+2}+\frac{2}{c+2}\ge 2$

$\Leftrightarrow\left(1-\frac{2}{a+2}\right)+\left(1-\frac{2}{b+2}\right)+\left(1-\frac{2}{c+2}\right)\le 1$

$\Leftrightarrow 1\ge\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz

$1\ge\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}=\frac{a^2}{a^2+2a}+\frac{b^2}{b^2+2b}+\frac{c^2}{c^2+2c}$

$C-S\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(a+b+c)}$

$\Rightarrow(a+b+c)^2\le(a^2+b^2+c^2)+2(a+b+c)$

$\Leftrightarrow a+b+c\ge ab+bc+ca$ (đpcm)

Câu 39. *(Trường chuyên KHTN năm 2023-2024)*

Với x,y,z là những số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M=\frac{x^{14}-x^6+3}{x^2y^2+zx+zy}+\frac{y^{14}-y^6+3}{y^2z^2+xy+xz}+\frac{z^{14}-z^6+3}{z^2x^2+yz+yx}$$

Lời giải:

Ta có $3(x^{14}-x^6+3)=(3x^{14}+4)-3x^6+5\ge 7x^6-3x^6+5=4x^6+5$

theo bất đẳng thức AM-GM. Lại có cũng theo bất đẳng thức AM-GM, thì

$4x^6+5=(x^6+x^6+1)+(x^6+x^6+1)+3\ge 3(x^4+x^4+1)\ge 3(x^4+2x^2)$

Suy ra $M\ge\sum\frac{x^4}{x^2y^2+xz+yz}+2\sum\frac{x^2}{x^2y^2+xz+yz}$

và áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu cho vế trái, ta

$$M\ge\frac{(x^2+y^2+z^2)^2+2(x+y+z)^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(xy+yz+zx)}\ge\frac{3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+6(xy+yz+zx)}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(xy+yz+zx)}=3$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 1 Giá trị nhỏ nhất của M là 3.

CHỦ ĐỀ 3.PHƯƠNG TRÌNH

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh An Giang năm 2023-2024)*

Phương trình $x^2+ax+b=0$ (với *a; b* là các số nguyên) có một nghiệm là $5+\sqrt{21}$. Tính nghiệm còn lại.

Lời giải

Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2+ax+b=0$ (1).

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1=5+\sqrt{21}$ và x_2 là nghiệm còn lại.

Thay $x=x_1=5+\sqrt{21}$ vào (1) ta được:

$$\left(5+\sqrt{21}\right)^2+a\left(5+\sqrt{21}\right)+b=0$$
$$\Leftrightarrow 46+10\sqrt{21}+5a+\sqrt{21}a+b=0$$
$$\Leftrightarrow (a+10)\sqrt{21}+(5a+b+46)=0$$

Vì a; b là các số nguyên nên ta có hệ:

$$\begin{cases} a+10=0 \\ 5a+b+46=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-10 \\ b=-46-5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-10 \\ b=4 \end{cases}$$

Suy ra phương trình (1) là $x^2-10x=4=0$.

Theo hệ thức Vi-ét, ta được:

$$x_1+x_2=10 \Rightarrow \left(5+\sqrt{21}\right)+x_2=10 \Rightarrow x_2=5-\sqrt{21}.$$

Vậy nghiệm còn lại là $x=5-\sqrt{21}$.

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Bà Rịa-Vũng Tàu năm 2023-2024)*

Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện: $\dfrac{b-4c}{a}\ge\dfrac{1}{4}$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ có ít nhất một nghiệm âm

Lời Giải

Từ giả thiết ta có: $a\ne 0$ và

$$\frac{a-4b+16c}{a}\le 0 \Rightarrow a(a-4b+16c)\le 0 \Rightarrow (a-2b)^2\le 4\left(b^2-4ac\right) \Rightarrow \Delta\ge 0$$

do đó phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1,x_2 mà $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ và $x_1.x_2=\dfrac{c}{a}$. Đến đây thay vào giả thiết ta thu được: $-\left(x_1+x_2\right)-4x_1x_2\ge\dfrac{1}{4} \Rightarrow \left(4x_1+1\right)\left(4x_2+1\right)\le 0$. Nếu x_1,x_2 đều không âm thì dẫn đến điều vô lý. Do vậy phương trình phải có ít nhất một nghiệm âm.

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2023-2024)*

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-2(3m-1)x+m^2-m-4=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\left(x_1+x_2+\sqrt{x_1x_2}\right)+\left(x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}=2008\right)$

Lời Giải

Phương trình $x^2-2(3m-1)x+m^2-m-4=0$ (1) có hai điểm phân biệt

$$\Rightarrow \Delta'>0 \Rightarrow (3m-1)^2-(m^2-m-4)>0 \Rightarrow 8m^2-5m+5>0 \Rightarrow 8\left(m-\frac{5}{16}\right)^2+\frac{132}{32}>0;\forall m\in R$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2

Theo Vi-ét ta có : $\begin{cases} x_1+x_2=2(3m-1) \\ x_1x_2=m^2-m-4 \end{cases}$

Đặt A= $x_1+x_2+\sqrt{x_1x_2}$; $B=x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}$

Ta có A.B = $(x_1+x_2)^2-x_1x_2=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}>0,\forall x_1x_2$

Suy ra A và B luôn cùng dấu $\Rightarrow |A|+|B|=|A+B|$

Do đó $\left|x_1+x_2+\sqrt{x_1x_2}\right|+\left|x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}\right|=2008 \Rightarrow \left|x_1+x_2+\sqrt{x_1x_2}+x_1+x_2-\sqrt{x_1x_2}\right|=2008$

$$\Rightarrow |x_1+x_2|=1004 \Rightarrow 2|3m-1|=1004 \Rightarrow |3m-1|=502 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{503}{3} \\ m=-167 \end{array}\right.$$

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2023-2024)*

Giải phương trình $4\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=x+7$.

Lời Giải

Điều kiện $x\ge 1$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow x+3-4\sqrt{x+3}+4+\sqrt{x-1}=0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}-2\right)^2+\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}=2 \\ \sqrt{x-1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Bình Dương năm 2023-2024)*

Cho phương trình $x^2+2mx-1-2m=0$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm x_1,x_2 với mọi giá trị của m.

b) Tìm m để biểu thức $P=\dfrac{2023(2x_1x_2+1)}{x_1^2-2mx_2-1-2m}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Bình Dương năm 2023-2024)*

Giải phương trình: $4x^2+5+\sqrt{3x+1}=13x$ với $x\in R$

Câu 7. *(Trường chuyên tỉnh Yên Bái năm 2023-2024)*

Giải phương trình $x^2=x+2+2\sqrt{x+1}$.

Câu 8. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2023-2024)*

Giải phương trình: $2x+3+\sqrt{4x^2+9x+2}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}$

Lời Giải

ĐK: $x \ge -\frac{1}{4}$. Ta có $(2) \Leftrightarrow 2x+3+\sqrt{(x+2)(4x+1)} = 2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}$.

Đặt $t = 2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}$ (với $t \ge \sqrt{7}$) thì $t^2 = 8x+4\sqrt{(x+2)(4x+1)}+9$ hay:

$2x+\sqrt{(x+2)(4x+1)} = \frac{t^2-9}{4}$. Phương trình (2) trở thành $\frac{t^2-9}{4}+3=t$

$\Leftrightarrow t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=3$.

Kết hợp với điều kiện $t \ge \sqrt{7}$ ta lấy $t=3$

Với t = 3 thì $2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}=3 \Leftrightarrow 2x+\sqrt{(x+2)(4x+1)}=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)(4x+1)} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ (x+2)(4x+1) = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{9}$$

Vậy phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{2}{9}$

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Bến Tre năm 2023-2024)*

Giải phương trình $\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+4x-12}\right)=8$

Lời Giải

Điều kiện xác định $\begin{cases} x+6 \ge 0 \\ x-2 \ge 0 \\ x^2+4x-120 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2$

Phương trình ban đầu tương đương

$$\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+4x-12}\right) = 8\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 8\left(1+\sqrt{x^2+4x-12}\right)=8\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+4x-12} = \sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\sqrt{x^2+4x-12}\right)^2=\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 1+x^2+4x-1+2\sqrt{x^2+4x-12} = x+6+x-2+2\sqrt{x^2+4x-12}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-15=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3(tm) \\ x=-5(loai) \end{array}\right.$$

Bình luận – Áp dụng các kĩ thuật thường gặp đối với bài toán phương trình vô tỉ, ta có các cách đánh giá hết sức tự nhiên để dẫn đến lời giải của bài toán:

i) Ta thấy nếu nhân lương liên hợp thì có $\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}\right)=$

$x+6-x+2=8$ nên ta mới đi nhân hai vế cho lượng $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}$ để triệt tiêu 8 ở hai vế của phương trình.

ii) Để ý rằng $(x+6)(x-2)=x^2+4x-12$ nên khi bình phương hai vế sẽ triệt tiêu được lượng $2\sqrt{x^2+4x-12}$ để đưa về 1 phương trình đơn giản hơn.

Đây là 1 phương trình vô tỉ không quá khó trong việc phân tích, đánh giá, tuy nhiên cần lưu ý về việc loại và nhận nghiệm dựa vào điều kiện xác định.

Câu 10. *(Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2023-2024)*

Giải phương trình: $\sqrt{4x-1}-2\sqrt{4x+1}+\sqrt{16x^2-1}=2,(x\in\mathbb{R})$.

Lời Giải

Điều kiện $x\geq\frac{1}{4}$

Ta có

$\sqrt{4x-1}-2\sqrt{4x+1}+\sqrt{16x^2-1}=2\Leftrightarrow(\sqrt{4x-1}-2)+\sqrt{4x+1}(\sqrt{4x-1}-2)=0\Leftrightarrow(\sqrt{4x-1}-2)(\sqrt{4x+1}+1)=0$ (1)

Với $x\geq\frac{1}{4}$ thì $\sqrt{4x+1}+1>0$; do đó (1) $\Leftrightarrow\sqrt{4x-1}=2\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$ (nhận).

Vậy $x=\frac{5}{4}$.

Câu 11. *(Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2023-2024)*

a) Cho phương trình $5x^2+mx-28=0$, m là tham số.
Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mã $5x_1+2x_2=1$

b) Giải phương trình: $(x+4)(x-2)=2\sqrt{x^2+2x-5}$.

Lời Giải

a) Ta có $\Delta=m^2+560>0$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt.

Theo định lí Vi-ét ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{m}{5} & (1)\\ x_1\cdot x_2=-\frac{28}{5} & (2)\end{cases}$$

Từ (1) và giả thiết ta có

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{m}{5}\\ 5x_1+2x_2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-\frac{m+1}{3}\\ x_1=\frac{2m+5}{15}\end{cases}$$

Thay các giá trị $x_1,\ x_2$ vừa tìm được vào (2) ta được

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2m+5}{15}\right)\left(-\frac{m+1}{3}\right)=-\frac{28}{5} \Leftrightarrow 2m^2+7m+5=252$$

$$\Leftrightarrow 2m^2+7m-247=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-13 \\ m=\frac{19}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy các giá trị m cần tìm là $m=-13;\ m=-\frac{19}{2}.$

b) Điều kiện: $x^2+2x-5\geq 0.$

Ta có $(x+4)(x-2)=2\sqrt{x^2+2x-5}$

$\Leftrightarrow x^2+2x-8=2\sqrt{x^2+2x-5}$

$\Leftrightarrow x^2+2x-5-2\sqrt{x^2+2x-5}-3=0.$

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x-5},\ t\geq 0.$

Ta có phương trình $t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=-1 & (\text{loại}) \\ t=3 & (\text{nhận}) \end{array}\right.$

Với $t=3$ ta có $\sqrt{x^2+2x-5}=3 \ \Leftrightarrow x^2+2x-5=9$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{15} \\ x=-1+\sqrt{15}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=-1\pm\sqrt{15}$.

Câu 12. *(Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2023-2024)*

Giải phương trình: $9x^2-53x=\sqrt{2x+1}-71$

Lời Giải

Điều kiện $2x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$

Phương trình viết lại thành:

$36x^2-212x+284=4\sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow 36x^2-212x+284+8x+5=4(2x+1)+4\sqrt{2x+1}+1$

$\Leftrightarrow 36x^2-204x+289=4(2x+1)+4\sqrt{2x+1}+1$

$\Leftrightarrow (6x-17)^2=\left(2\sqrt{2x+1}+1\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{2x+1}+1=6x-17(1) \\ 2\sqrt{2x+1}+1=17-6x(2) \end{array}\right.$$

Xét (1), ta có:

$(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1} = 6x-18$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1} = 3(2x+1)-21 (1')$

Đặt $t = \sqrt{2x+1} \geq 0$ ta có:

$(1') \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 21 = 0$

$\Leftrightarrow (t-3)(3t+7) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-3=0 \\ 3t+7=0 \end{array}\right.$

Xét (2), ta có:

$(2) \Leftrightarrow 6x + 2\sqrt{2x+1} - 16 = 0$

$\Leftrightarrow 3(2x+1) + 2\sqrt{2x+1} - 19 = 0$

Đặt $t = \sqrt{2x+1} \geq 0$ ta có:

$(2') \Leftrightarrow 3t^2 + 2t - 19 = 0$

Giải phương trình này ta được hai nghiệm $t_1 = \dfrac{-1+\sqrt{58}}{3}(nhan); t_2 = \dfrac{-1-\sqrt{58}}{3}(loai)$

Với $t_1 = \dfrac{-1+\sqrt{58}}{3}$ ta được:

$\sqrt{2x+1} = \dfrac{-1+\sqrt{58}}{3} \Leftrightarrow 2x+1 = \dfrac{59-2\sqrt{58}}{9} \Leftrightarrow 2x = \dfrac{50-2\sqrt{58}}{9}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{25-\sqrt{58}}{9}(nhan)$

Vậy $S = \left\{\dfrac{25-\sqrt{58}}{9}; 4\right\}$

Câu 13. *(Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2023-2024)*

Giải phương trình: $x^2 + 1 = 2x + \sqrt{3x-1}$

<u>Lời Giải</u>

Điều kiện xác định: $x^2 - x + 1 \geq 0$ (đúng $\forall x \in \mathbb{R}$)

$2x^2 - (x-2)\sqrt{x^2-x+1} = 5x-2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = (x-2)\sqrt{x^2-x+1}$

$\Leftrightarrow (x-2)(2x-1) = (x-2)\sqrt{x^2-x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (x-2)=0 & (1) \\ \sqrt{x^2-x+1} = 2x-1 & (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow x = 2$ (nhận)

$(2) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 4x^2 - 4x$

$\Leftrightarrow x(x-1) = 4x(x-1)$

$\Leftrightarrow 3x(x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$ (nhận)

Vậy $S=\{0,1;2\}$

Câu 14. *(Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2023-2024)*

Giải phương trình: $x^2+1=2x+\sqrt{3x-1}$

Câu 15. *(Trường chuyên tỉnh Cao Bằng năm 2023-2024)*

Giải phương trình: $x+\dfrac{1}{x}+\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-4}=3$.

Lời Giải

Điều kiện $\begin{cases} x\neq 0 \\ x^2+\dfrac{1}{x^2}-4\geq 0 \end{cases} (*)$.

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=t, |t|\geq 2\ (**)$. Khi đó $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$, phương trình (3) có dạng:

$$t+\sqrt{t^2-6}=3\Leftrightarrow \sqrt{t^2-6}=3-t\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{6}\leq t\leq 3 \\ t\leq -\sqrt{6} \end{array}\right. \\ t^2-6=(3-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{6}\leq t\leq 3 \\ t\leq -\sqrt{6} \end{array}\right. \\ t=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow t=\dfrac{5}{2}$$

Với $t=\dfrac{5}{2}$, thay vào $(**)$, ta được $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\ (\text{t/m}(*)) \\ x=2\ (\text{t/m}(*)) \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{\dfrac{1}{2};2\right\}$.

Câu 16. *(Trường chuyên tỉnh Đà Nẵng năm 2023-2024)*

Giải phương trình $10x^2+3x+2=(6x+1)\sqrt{x^2+2}$.

Lời Giải

Cách 1: Bình phương hai vế rồi casio bậc 4.

Cách 2: Đặt $t=\sqrt{x^2+2}\Rightarrow t^2=x^2+2\ (t>0)$. Ta được:

$$9x^2+3x+t^2=(6x+1)t \Rightarrow (9x^2-6xt+t^2)+3x-t=0\Rightarrow (3x-t)^2+(3x-t)=0$$

$$\Rightarrow (3x-t)(3x-t+1)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=t \\ 3x+1=t \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\sqrt{x^2+2} \\ 3x+1=\sqrt{x^2+2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 9x^2=x^2+2\ \ (3x\geq 0) \\ 9x^2+6x+1=x^2+2\ \ (3x+1)\geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{1}{2}\ \ (3x\geq 0) \\ 8x^2+6x-1=0\ \ (3x+1\geq 0) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{8} \end{array}\right.$

Vậy $S=\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{-3+\sqrt{17}}{8}\right\}$

Câu 17. *(Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2023-2024)*

Giải phương trình $(x-2)(x+1)(x+3)(x+6)+56=0$.

Lời Giải

Viết lại phương trình thành

$(x-2)(x+6)(x+1)(x+3)+56=0 \Leftrightarrow (x^2+4x-12)(x^2+4x+3)+56=0$.

Đặt $t=x^2+4x-12$, ta có

$t(t+15)+56=0 \Leftrightarrow t^2+15t+56=0$.

Ta có $\Delta=15^2-4.1.56=1$

Do đó phương trình trên có nghiệm $\left[\begin{array}{l} t=-7 \\ t=-8 \end{array}\right.$.

Với $t=-7$ thì $x^2+4x-12=-7 \Leftrightarrow x^2+4x-5=0$. Giải tương tự trên, ta được $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-5 \end{array}\right.$.

Với $t=-8$ thì $x^2+4x-12=-8 \Leftrightarrow x^2+4x-4=0$. Giải tương tự trên, ta được $\left[\begin{array}{l} x=-2+2\sqrt{2} \\ x=-2-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1;-5;-2+2\sqrt{2};-2-2\sqrt{2}\right\}$.

Câu 18. *(Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2023-2024)*

Giải phương trình $(x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=2x^2-6x+4$.

Lời Giải

$(x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=2x^2-6x+4 \Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=(x-1)(2x-4)$

$\Leftrightarrow (x-1)(\sqrt{x^2+6x+16}-2x+4)=0$

+) $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

+) $\sqrt{x^2+6x+16}=2x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4\geq 0 \\ x^2+6x+16=(2x-4)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 3x^2 - 22x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0(l) \\ x = \dfrac{22}{3}(tm) \end{array}\right. \end{cases}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1; x = \dfrac{22}{3}$

Câu 19. *(Trường chuyên tin Hà Nội năm 2023-2024)*

Giải phương trình $2x + 2 = (5 - x)\sqrt{3x - 2}$

Lời Giải

$2x + 2 = (5 - x)\sqrt{3x - 2}$ (ĐKXĐ: $x \ge \dfrac{2}{3}$)

$\Rightarrow (2x + 2)^2 = (5 - x)^2(3x - 2)$

$\Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = (x^2 - 10x + 25)(3x - 2)$

$\Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = (x^2 - 10x + 25)(3x - 2)$

$\Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = 3x^3 - 32x^2 + 95x - 50$

$\Rightarrow 3x^3 - 36x^2 + 87x - 54 = 0$

$\Rightarrow (x - 9)(x - 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x \in \{1; 2; 9\}$

Thử lại thu được: $x \in \{1; 2\}$. Vậy $x \in \{1; 2\}$

Câu 20. *(Trường chuyên toán Hà Nội năm 2023-2024)*

Giải phương trình $\sqrt{x - 3} - \sqrt{2x - 7} = 2x - 8$

Lời Giải

Điều kiện: $x \ge \dfrac{7}{2}$.

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{x - 3 - 2x + 7}{\sqrt{x - 3} + \sqrt{2x - 7}} = 2(x - 4)$

$\Leftrightarrow \dfrac{4 - x}{\sqrt{x - 3} + \sqrt{2x - 7}} = 2(x - 4)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4\ (TMDK) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x - 3} + \sqrt{2x - 7}} = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4\ (TMDK) \\ \sqrt{x - 3} + \sqrt{2x - 7} = \dfrac{-1}{2}\ (2) \end{array}\right.$

Ta có $\begin{cases}\sqrt{x-3}\ge 0\\ \sqrt{2x-7}\ge 0\end{cases}$ với mọi $x\ge\dfrac{7}{2}$ nên $\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-7}\ge 0>-2$ với mọi $x\ge\dfrac{7}{2}$.

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm $x=4$.

Câu 21. *(Trường chuyên toán tỉnh Hà Tĩnh năm 2023-2024)*

Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x+11}-\sqrt{x+2}=2x-2$.

Lời Giải

ĐK: $\begin{cases}x^2+3x+11\ge 0\\ x+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -2$

$\sqrt{x^2+3x+11}-\sqrt{x+2}=2x-2\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+5(x+2)}-\sqrt{x+2}=2(x-1)$

Xét $x=-2$ (không phải là nghiệm)

Xét $x>-2$ Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{x+2}$ ta được: $\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x+2}+5}-1=\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x+2}}$. Đặt $t=\dfrac{x-1}{\sqrt{x+2}}$ ta được phương trình: $\sqrt{t^2+5}-1=2t$

$\Leftrightarrow\sqrt{t^2+5}=2t+1\Leftrightarrow\begin{cases}2t+1\ge 0\\ t^2+5=(2t+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge-\dfrac{1}{2}\\ 3t^2+4t-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge-\dfrac{1}{2}\\ t=-2;\ t=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}$

Khi $t=\dfrac{2}{3}$ ta được phương trình: $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2}=3(x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\ge 0\\ 4(x+2)=9(x-1)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ 9x^2-22x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x=\dfrac{11\pm 4\sqrt{7}}{9}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{11+4\sqrt{7}}{9}$.

Vậy phương trình có đúng 1 nghiệm $x=\dfrac{11+4\sqrt{7}}{9}$

Chú ý: Học sinh có thể giải theo cách: Đặt $\begin{cases}a=x-1\\ b=\sqrt{x+2}\ge 0.\end{cases}$

Câu 22. *(Trường chuyên toán tỉnh Hải Dương năm 2023-2024)*

Giải phương trình: $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x-1}=2x+\sqrt{\dfrac{x^2+2x-3}{x}}$

Lời Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+3x\ge 0 \\ x-1\ge 0 \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1$

Phương trình trở thành

$$\sqrt{x(x+3)}+2\sqrt{x-1}-2x-\sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x(x+3)}-\sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{x}}\right)+\left(2\sqrt{x-1}-2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x+3}{x}}\left(x-\sqrt{x-1}\right)-2\left(x-\sqrt{x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{\frac{x+3}{x}}-2\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x-\sqrt{x-1}=0 \\ \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{x-1}\ (1) \\ \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}=2(2) \end{array}\right.$$

$(1)\Leftrightarrow x^2=x-1\Leftrightarrow x^2-x+1=0$ (vô nghiệm)

$(2)\Leftrightarrow\dfrac{x+3}{x}=4\Leftrightarrow x+3=4x\Leftrightarrow x=1$ (Thoả mãn điều kiện)

Câu 23. *(Trường chuyên toán tỉnh Hải Phòng năm 2023-2024)*

Giải phương trình: $\left(3x^2+4x+6\right)\sqrt{3x^2+4x+5}=27x^3+3x.$

Lời Giải

Đặt $\sqrt{3x^2+4x+5}=a$, $3x=b$

Khi đó phương trình trở thành: $a^3+a=b^3+b$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+1)=0\Leftrightarrow a=b$ (vì $a^2+ab+b^2+1>0$)

$\Leftrightarrow\sqrt{3x^2+4x+5}=3x\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 0 \\ 6x^2-4x-5=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{2+\sqrt{34}}{6}.$

Câu 24. *(Trường chuyên toán tỉnh Hoà Bình năm 2023-2024)*

Giải phương trình: $(4x^2-7x+4)(3x^2-4x+3)=3x^2$

Lời Giải

$(4x^2-7x+4)(3x^2-4x+3)=3x^2\quad(1)$

Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1).

Xét x khác 0, chia cả 2 vế của (1) cho x^2 ta được phương trình.

$$\left(4x-7+\frac{4}{x}\right)\left(3x-4+\frac{3}{x}\right)=3\Leftrightarrow\left[4\left(x+\frac{1}{x}\right)-7\right].\left[3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right]=3$$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t$. Ta được phương trình:

$$(4t-7)(3t-4)=3\Leftrightarrow 12t^2-37t+25=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{25}{12}\end{array}\right.$$

* Với t = 1 $\Rightarrow x+\frac{1}{x}=1\Leftrightarrow x^2-x+1=0$ (Phương trình vô nghiệm).

* Với t = $\frac{25}{12}\Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{25}{12}\Rightarrow 12x^2-25x+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{4}{3}\\ x=\frac{3}{4}\end{array}\right.$. KL....

Câu 25. *(Trường chuyên toán tỉnh Hoà Bình năm 2023-2024)*

Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một con Robot được lập trình để chuyển động thẳng đều trên một quãng đường từ điểm A đến điểm B theo quy tắc: Đi được $120cm$ thì dừng lại 1 *phút*, đi tiếp $240cm$ rồi dừng lại 2 *phút*, đi tiếp $360cm$ rồi dừng lại 3 *phút*..., tổng thời gian từ khi bắt đầu di chuyển từ A cho đến B là 253 *phút*. Tính quãng đường từ A đến B biết vận tốc của Robot không đổi là 40*cm*/*phút*.

<u>Lời Giải</u>

Gọi số lần đi của Robot (theo quy luật đi rồi lại nghỉ) là *x* ($x>1, x\in\mathbb{N}^*$)

Thời gian đi của Robot theo quy luật là: $\frac{120}{40}+\frac{240}{40}+\frac{360}{40}+...+\frac{120x}{40}=3+6+9+...+3x=\frac{3x(x+1)}{2}$ (phút)

Thời gian nghỉ của Robot là: $1+2+3+....+x-1=\frac{x(x-1)}{2}$ (phút)

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{3x(x+1)}{2}+\frac{x(x-1)}{2}=253\Leftrightarrow 2x^2+x-253=0$

Giải phương trình tìm được: $x_1=11\ (TM)$; $x_2=-\frac{23}{2}\ (KTM)$

Quãng đường từ A đến B là: $\frac{3.11.12}{2}.40=7920\ (cm)$

Câu 26. *(Trường chuyên toán tỉnh Hưng Yên năm 2023-2024)*

Giải phương trình $3x^3-7x^2+6x+4=3\sqrt[3]{\frac{16x^2+6x+2}{3}}$.

<u>Lời Giải</u>

ĐKXĐ: $\forall x \in R$

$3x^3 - 7x^2 + 6x + 4 = 3\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$

$\Leftrightarrow 3x^3 + 9x^2 + 12x + 6 = 16x^2 + 6x + 2 + 3\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$

Đặt $\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}} = t$, ta có:

$3x^3 + 9x^2 + 12x + 6 = 3t^3 + 3t$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = t^3 + t$

$\Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = t^3 + t$

$\Leftrightarrow (x+1-t)\left[(x+1)^2 - (x+1)t + t^2 + 1\right] = 0$

Mà $(x+1)^2 - (x+1)t + t^2 + 1 > 0 \Rightarrow x + 1 - t = 0$

$\Rightarrow x + 1 = t$

$\Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{\dfrac{16x^2+6x+2}{3}}$

$\Leftrightarrow 3x^3 + 9x^2 + 12x + 6 = 16x^2 + 6x + 2$

$\Leftrightarrow 3x^3 - 7x^2 + 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 4x - x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(3x^2 - 4x + 1) = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3} \\ x=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3} \end{array}\right.$$

Thử lại thấy cả 3 nghiệm thoả mãn.

Vậy $x \in \left\{1; \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}; \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right\}$

Câu 27. *(Trường chuyên toán tỉnh Khánh Hoà năm 2023-2024)*

Cho phương trình $x^2 + bx - 7 + 2b = 0\ (1)$ (ẩn x), với b là tham số nguyên.

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$. Tìm b để $x_2^2=9x_1$.

b) Chứng minh rằng nếu b là số nguyên lẻ thì phương trình (1) không có nghiệm hữu tỉ.

Lời Giải

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2. Tìm b để $x_2^2=9x_1$.

+) Ta có: $\Delta=b^2-4.1.(-7+2b)=b^2-8b+28=(b-4)^2+12\ge 12>0\ \ \forall b$

$\Rightarrow$ (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2.

+) $\begin{cases} x_1+x_2=-b \\ x_1.x_2=2b-7 \end{cases}(*)$

Với $x_2^2=9x_1 \Rightarrow \begin{cases} x_2+\dfrac{x_2^2}{9}=-b \\ \dfrac{x_2^2}{9}\cdot x_2=2b-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2+\dfrac{2x_2^2}{9}=-2b \\ \dfrac{x_2^2}{9}\cdot x_2=2b-7 \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta được: $2x_2+\dfrac{2x_2^2}{9}+\dfrac{x_2^3}{9}=-7$

$\Leftrightarrow x_2^3+2x_2^2+18x_2+63=0$

$\Leftrightarrow (x_2+3).(x_2^2-x_2+21)=0$

$\Leftrightarrow x_2=-3$

$\Rightarrow x_1=\dfrac{x_2^2}{9}=1$

$(*)\Rightarrow \begin{cases} -2=-b \\ -3=2b-7 \end{cases} \Leftrightarrow b=2\in\mathbb{Z}$ (thỏa mãn)

b) Chứng minh rằng nếu b là số nguyên lẻ thì phương trình (1) không có nghiệm hữu tỉ.

<u>Cách 1:</u> Nếu b lẻ $\Rightarrow b-4$ lẻ

Đặt $b-4=2k+1\ (k\in\mathbb{Z})$

Ta cần chứng minh Δ không là số chính phương.

Phản chứng: Δ là số chính phương

$\Rightarrow$ Đặt $(2k+1)^2+12=m^2 \Rightarrow m$ lẻ

Đặt $m=2l+1 \Rightarrow \Delta=4k^2+4k+13=4l^2+4l+1$

$\Rightarrow k^2+k+3=l^2+l$ (vô lí) $\left(Do \begin{cases} k^2+k: chẵn \\ l^2+l: chẵn \\ 3: lẻ \end{cases} \right)$

Vậy Δ không là số chính phương $\Rightarrow$ (1) không có nghiệm hữu tỉ.

Cách 2: Giả sử (1) có nghiệm hữu tỉ, gọi là: $\frac{p}{q}\left(p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}^*,(p,q)=1\right)$.

Theo tính chất về nghiệm hữu tỉ của đa thức nguyên, ta có $q\,|\,1$ và $p\,|\,2b-7$ $\Rightarrow q=1$ và p lẻ.

Hơn nữa, do $q=1$ nên p là nghiệm nguyên của (1) $\Rightarrow p^2+bp-7+2b=0$.

Mà điều này là vô lí do $p^2+bp-7+2b$ lẻ $\Rightarrow$ Điều giả sử là sai hay (1) không có nghiệm hữu tỉ.

Cách 3: Đặt $b^2-4.(2b-7)=a^2, a\in\mathbb{N}$ (*)

Nếu b lẻ $\Rightarrow$ VP lẻ $\Rightarrow$ a lẻ

Từ (*) $\Rightarrow b^2-a^2=4.(2b-7)$

Vì a, b đều lẻ nên $a^2,b^2\equiv 1 \pmod 8$

$\Rightarrow 8\,|\,a^2-b^2$

Mà $4.(2b-7)$ không chia hết cho 8 (Do $2b-7$ lẻ).

$\Rightarrow$ Mâu thuẫn

Vậy khi b là số nguyên lẻ thì phương trình không thể có nghiệm hữu tỉ.

Câu 28. *(Trường chuyên toán tỉnh Lào Cai năm 2023-2024)*

Cho phương trình $x^2-(m-4)x-m-2=0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt x_1 , x_2 thõa mãn điều kiện:

$$\sqrt{x_1^2+2023}+x_1(m-8-x_1)=\sqrt{x_2^2+2023}+x_2(m-x_2).$$

Lời Giải

$x^2-(m-4)x-m-2=0(1)$

$\Delta'=(m-4)^2-4(-m-2)=m^2-8m+16+4m+8=m^2-4m+24=(m-2)^2+20>0,\forall m$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.

Áp dụng định lí Vi-ét: $\begin{cases} x_1+x_2=m-4 \\ x_1x_2=-m-2 \end{cases}$

$\sqrt{x_1^2+2023}+x_1(m-8-x_1)=\sqrt{x_2^2+2023}+x_2(m-x_2)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+2023}+x_1(x_1+x_2-4-x_1)=\sqrt{x_2^2+2023}+x_2(x_1+x_2-4-x_2)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+2023}-\sqrt{x_2^2+2023}+x_1(x_2-4)-x_2(x_1+4)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+2023}+\sqrt{x_2^2+2023}}+x_1x_2-4x_1-x_1x_2-4x_2=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\sqrt{x_1^2+2023}+\sqrt{x_2^2+2023}}-4(x_1+x_2)=0$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)\left(\dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1^2+2023}+\sqrt{x_2^2+2023}}\right)=0(2)$

Ta có: $\sqrt{x_1^2+2023}+\sqrt{x_2^2+2023}>\sqrt{x_1^2}+\sqrt{x_2^2}=|x_1|+|x_2|$

$x_1-x_2\le|x_1-x_2|\le|x_1|+|x_2|$

$\Rightarrow \dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1^2+2023}+\sqrt{x_2^2+2023}}<\dfrac{|x_1|+|x_2|}{|x_1|+|x_2|}=1$

$\Rightarrow \dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1^2+2023}+\sqrt{x_2^2+2023}}-4<0$

$(2)\Leftrightarrow x_1+x_2=0\Leftrightarrow m-4=0\Leftrightarrow m=4$

Vậy m = 4.

Câu 29. *(Trường chuyên toán tỉnh Long An 2023-2024)*

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-(2m-1)x+m^2-7=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $4x_1+3x_2=1$.

Lời Giải

Ta có $\Delta=-4m+29$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta>0\Leftrightarrow m<\dfrac{29}{4}$

Theo hệ thức Vi-ét ta có : $x_1+x_2=2m-1;\ \ x_1.x_2=m^2-7$

Ta có : $\begin{cases}x_1+x_2=2m-1\\4x_1+3x_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=4-6m\\x_2=8m-5\end{cases}$

$x_1.x_2=m^2-7\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\dfrac{13}{49}\end{array}\right.$ (nhận).

Câu 30. *(Trường chuyên toán tỉnh Long An 2023-2024)*

Giải phương trình $x^2-5x+2+(3-2x)\sqrt{x^2+x+2}=0$.

Lời Giải

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+x+2}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+3\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+2}-2x=0$ (vì $\sqrt{x^2+x+2}+3>0\,\forall x$)

$\Rightarrow 3x^2-x-2=0 \Rightarrow x=1,\ x=-\dfrac{2}{3}$

Thử lại và kết luận nghiệm của phương trình đã cho là $x=1$.

Câu 31. *(Trường chuyên toán tỉnh Nam Định 2023-2024)*

1) Cho phương trình $x^2-(2m+1)x+4m-2=0$ (1) (với m là tham số).

a) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm tất cả giá trị của m để $x_1,\ x_2$ là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{13}$.

2) Giải phương trình $6\sqrt{2x+5}+4\sqrt{x+2}=3x+20$.

Lời Giải

1) Cho phương trình $x^2-(2m+1)x+4m-2=0$ (1) (với m là tham số).

a) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $\Delta=(2m+1)^2-4(4m-2)=4m^2-12m+9$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta>0 \Leftrightarrow m\neq\dfrac{3}{2}$.

b) Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm tất cả giá trị của m để $x_1,\ x_2$ là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{13}$.

Với $m\neq\dfrac{3}{2}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x=2, x=2m-1$.

Vì $x_1,\ x_2$ là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật nên $2m-1>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$.

Ta có $x_1^2+x_2^2=13 \Leftrightarrow 2^2+(2m-1)^2=13 \Leftrightarrow m^2-m-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1(l) \\ m=2(tm) \end{array}\right.$.

Vậy $m=2$.

2) Giải phương trình $6\sqrt{2x+5}+4\sqrt{x+2}=3x+20$.

Điều kiện: $x \geq -2$.

Phương trình trở thành $\left[(2x+5)-6\sqrt{2x+5}+9\right]+\left[(x+2)-4\sqrt{x+2}+4\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+5}-3\right)^2+\left(\sqrt{x+2}-2\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+5}-3=0 \\ \sqrt{x+2}-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \sqrt{x+2}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2(tm).$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$.

Câu 32. *(Trường chuyên KHXH tỉnh Nam Định 2023-2024)*

1)Cho phương trình $x^2-(2m+1)x+4m-2=0$ (1) (với m là tham số).

a) Giải phương trình (1) với $m=0$.

b) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=13$.

2) Giải phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}=\sqrt{2x+9}$.

1) Cho phương trình $x^2-(2m+1)x+4m-2=0$ (1) (với m là tham số).

a) Giải phương trình (1) với $m=0$.

Với $m=0$, phương trình (1) trở thành $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

b) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=13$.

Ta có $\Delta=(2m+1)^2-4(4m-2)=4m^2-12m+9=(2m-3)^2 \geq 0\ \forall m$.

Áp dụng Viet $\begin{cases} x_1+x_2=2m+1 \\ x_1x_2=4m-2 \end{cases}$

Ta có $x_1^2+x_2^2=13 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=13 \Leftrightarrow (2m+1)^2-2(4m-2)=13 \Leftrightarrow m^2-m-2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1(tm) \\ m=2(tm) \end{array}\right..$$

Vậy $m=-1$, $m=2$.

2) Giải phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}=\sqrt{2x+9}$.

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 4$.

Phương trình trở thành $\Leftrightarrow x+1+2\sqrt{(x+1)(4-x)}+4-x=2x+9 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)}=x+2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ -x^2+3x+4=x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x^2+x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(tm) \\ x=-\dfrac{1}{2}(tm) \end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-\dfrac{1}{2},\ x=0$.

Câu 33. *(Trường chuyên toán PBC-Nghệ An 2023-2024)*

Giải phương trình $x^4-4x^3+6x^2-4x-3=0$

Lời Giải

Ta biến đổi phương trình như sau

$$x^4-4x^3+6x^2-4x-3=0 \Leftrightarrow \left(x^2-2x-1\right)\left(x^2-2x+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-1=0\ \left(vì\ x^2-2x+3=(x-1)^2+2>2>0\right)$$

$$\Leftrightarrow x\in\left\{1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\right\}$$

Như vậy, tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\right\}$

Câu 34. *(Trường chuyên toán ĐH Vinh - Nghệ An 2023-2024)*

Giải phương trình $x^4-4x^3+6x^2-4x-3=0$

Lời Giải

Điều kiện xác định: $x\ge 0$. Đặt $t=(x-1)\sqrt{x}$ phương trình trở thành

$$x^3-2x^2+x-5(x-1)\sqrt{x}-6=0 \Leftrightarrow x(x-1)^2-5(x-1)\sqrt{x}-6=0$$

$$\Leftrightarrow t^2-5t-6=0 \Leftrightarrow (t+1)(t-6)=0$$

Trường hợp 1. $t=-1$suy ra $0\le x<1$. Đặt $\sqrt{x}=a\quad(0\le a<1)$, khi đó ta có

$$(x-1)\sqrt{x}=-1 \Leftrightarrow a^3-a+1=0\ \text{(vô lý } a^3+1-a>0\text{)}.$$

Trường hợp 2. $t=6$. Đặt $\sqrt{x}=a\ \ (a\ge 0)$, khi đó ta có

$$(x-1)\sqrt{x}=6 \Leftrightarrow a^3-a-6=0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)\left(a^2+2a+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a=2\ \ \left(\text{vì } a^2+2a+3=(a+1)^2+2>2>0\right)$$

$$\Leftrightarrow x=4\ \ \text{(thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy tất cả các nghiệm thỏa mãn phương trình là $x=4$.

Câu 35. *(Trường chuyên toán tỉnh Ninh Bình 2023-2024)*

Giải phương trình $\left(\sqrt{x+23}-\sqrt{x+7}\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right) = 8$

Lời Giải

ĐK: -7 ≤ x ≤ 6

Với đk trên thì $\sqrt{x+23}+\sqrt{x+7} \neq 0$

Do đó (*) ⇔ $16\left(\sqrt{6-x}+2\right) = 8\left(\sqrt{x+23}-\sqrt{x+7}\right)$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{6-x}+2\right) = \sqrt{x+23}-\sqrt{x+7}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+23} - 5 + \sqrt{x+7} - 3 + 2\left(2-\sqrt{6-x}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x+23}+5} + \frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3} + 2.\frac{x-2}{\left(2+\sqrt{6-x}\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x+23}+5}+\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}+\frac{2}{\left(2+\sqrt{6-x}\right)}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow x-2=0$ (do $\dfrac{1}{\sqrt{x+23}+5}+\dfrac{1}{\sqrt{x+7}+3}+\dfrac{2}{\left(2+\sqrt{6-x}\right)} > 0$)

⇔ x = 2 (t/m đk)

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất x = 2

Câu 36. *(Trường chuyên toán tỉnh Phú Thọ 2023-2024)*

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2-2m-8=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+6=\sqrt{x_2}$.

Lời Giải

Phương trình (1) có $\Delta'=\left[-(m-1)\right]^2-1.\left(m^2-2m-8\right)=m^2-2m+1-m^2+2m+8=9>0$ với mọi $m \Rightarrow \sqrt{\Delta'}=\sqrt{9}=3$ suy ra phương trình (1) có hai nghiệm: $m+2$ và $m-4$.

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $x_1=m+2; x_2=m-4$ để $x_1+6=\sqrt{x_2}$ thì

$m+2+6=\sqrt{m-4}\ (dk: m\geq 4)$

$$\Rightarrow m+8=\sqrt{m-4}$$
$$\Leftrightarrow m^2+16m+64=m-4$$
$$\Leftrightarrow m^2+15m+68=0\quad (2)$$

Phương trình (2) có $\Delta_m=15^2-4.1.68=-47<0$ suy ra phương trình(2) vô nghiệm

Trường hợp 2: $x_1=m-4; x_2=m+2$ để $x_1+6=\sqrt{x_2}$ thì

$$m-4+6=\sqrt{m+2}\,(dk: m\geq -2)$$
$$\Leftrightarrow m+2=\sqrt{m+2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m+2}\left(\sqrt{m+2}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2=0 \\ m+2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=-1 \end{array}\right. (tm)$$

Vậy $m \in \{-2;-1\}$

Câu 37. *(Trường chuyên toán tỉnh Phú Yên 2023-2024)*

Giải phương trình: $\left(x-\sqrt{3}\right)^3+\left(x+\sqrt{5}\right)^3+\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x\right)^3=0$

Lời Giải

Đặt $u=x-\sqrt{3},\ v=x+\sqrt{5}$, *khi đó* $\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x=-(u+v)$

PTCĐ viết lại là: $u^3+v^3-(u+v)^3=0 \Leftrightarrow 3(u+v)uv=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u+v=0 \\ u=0 \\ v=0 \end{array}\right.$

(1): $u+v=0 \Leftrightarrow x-\sqrt{3}+x+\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}$

(2):u = 0 $\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ *; (3):* $v=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{5}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2};\sqrt{3};\sqrt{5}\right\}$

Cách 2: Đặt $a=x-\sqrt{3}+x+\sqrt{5}$, *c=* $\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x$. *Khi đó:*

$a^3+b^3+c^3=3abc$ *(chứng minh). Từ đó ta có nghiệm như cách 1*

Câu 38. *(Trường chuyên toán tỉnh Phú Yên 2023-2024)*

Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$, *với a,b,c là số thực thỏa* $2a-b+c=0$. *Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt và 2 nghiệm không thể đều dương.*

Lời Giải

Ta có biểu thức: $\Delta=b^2-4ac=b^2-4a(b-2a)=(2a-b)^2+4a^2>0,\forall a\neq 0$*; do đó, phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.*

Giả sử 2 nghiệm đã cho là x_1,x_2*.Theo định lí Viét, ta có* $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{array}\right.$

Từ giả thiết $2a-b+c=0 \Rightarrow \dfrac{b}{a}-\dfrac{c}{a}=2$, *do đó*

$-(x_1+x_2)-x_1x_2=2(x_1+1)(x_2+1)=-1$*(*). Nếu 2 nghiệm đều dương thì* $(x_1+1)(x_2+1)>1$, *mâu thuẫn với (*).*

Vậy 2 nghiệm của phương trình không thể đều dương.

Câu 39. *(Trường chuyên toán tỉnh Quảng Ninh 2023-2024)*

Giải phương trình $x^2+x-6=3(x-2)\sqrt{x+1}$.

Lời Giải

Điều kiện: $x\ge -1$

Ta có $x^2+x-6=3(x-2)\sqrt{x+1}\Leftrightarrow (x-2)(x+3)-3(x-2)\sqrt{x+1}=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+3-3\sqrt{x+1})=0\Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn đk) hoặc $x+3-3\sqrt{x+1}=0$

$x+3-3\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow x+3=3\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow x_1=0;x_2=3$ (thỏa mãn đk)

Tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;2;3\}$.

Câu 40. *(Trường chuyên toán tỉnh Quảng Trị 2023-2024)*

Giải phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=1$.

Lời Giải

Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{2}$.

Ta có $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=1\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}=1+\sqrt{2x-1}$

Bình phương hai vế, rút gọn, ta được $2\sqrt{2x-1}=x+1$

$$2\sqrt{2x-1}=x+1\Leftrightarrow 4(2x-1)=(x+1)^2\Leftrightarrow x^2-6x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=5\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{1;5\}$

Câu 41. *(Trường chuyên toán tỉnh Sơn La 2023-2024)*

Giải phương trình: $x^2-4x+\sqrt{x^2-4x-5}=7$.

Lời Giải

ĐK: $x^2-4x-5\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -1\\x\ge 5\end{array}\right.$

Phương trình đã cho $x^2-4x-5+\sqrt{x^2-4x-5}-2=0$

Đặt $t=\sqrt{x^2-4x-5},(t\ge 0)$, ta được phương trình :

$$t^2+t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\,(nhan)\\t=-2(loai)\end{array}\right.$$

+ Với $t=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4x-5}=1\Leftrightarrow x^2-4x-6=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2+\sqrt{10}\\x=2-\sqrt{10}\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm: $x=2\pm\sqrt{10}$.

Câu 42. *(Trường chuyên toán tỉnh Thái Bình 2023-2024)*

Giải phương trình: $3x^2 + x - 6 = 4x\left(\sqrt{5x-6} - 1\right)$

Lời Giải

Điều kiện: $x \ge \frac{6}{5}$

Từ giả thiết ta có: $-x^2 + 5x - 6 = 4x\left(\sqrt{5x-6} - x\right) \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 = 4x.\frac{-x^2 + 5x - 6}{\sqrt{5x-6} + x}$

Vì $x \ge \frac{6}{5}$ nên phương trình tương đương: $\Leftrightarrow (x-2)(x-3)\left(1 - \frac{-x^2 + 5x - 6}{x + \sqrt{5x-6}}\right) = 0$

Do đó x = 2 hoặc x = 3 (thoả mãn điều kiện) hoặc: $3x = \sqrt{5x-6}$ (*)

Giải phương trình (*): $9x^2 = 5x - 6 \Leftrightarrow x\left(x - \frac{5}{9}\right) + \frac{2}{3} = 0$ (vô nghiệm vì $x \ge \frac{6}{5} > \frac{5}{9}$)

Vậy phương trình có nghiệm x = 2 và x = 3

Câu 42. *(Trường chuyên toán tỉnh Thanh Hoá 2023-2024)*

Giải phương trình $2(3x+1) + \frac{7}{x} = 5\sqrt{2x+7}$

Lời Giải

ĐK: $x \neq 0;\ x \ \ge \frac{-7}{2}$

phương trình trở thành $2x(3x+1) + 7 = 5x\sqrt{2x+7}$

$$\Leftrightarrow\ 6x^2 + 2x + 7 = 5x\sqrt{2x+7} \quad (1)$$

Đặt $u = \sqrt{2x+7}$

Khi đó: phương trình (1) trở thành $6x^2 - 5xu + u^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ (2x – u)(3x – u) = 0

$\Leftrightarrow$ u = 2x hoặc u = 3x

TH1: Với u = 2x ta được $2x = \sqrt{2x+7}$ (ĐK $x \ge 0$)

$\Leftrightarrow 4x^2 = 2x + 7$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{4}$ (TMĐK)

TH2: Với u = 3x ta được $3x = \sqrt{2x+7}$ (ĐK $x \ge 0$)

$\Leftrightarrow 9x^2 = 2x + 7$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 2x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ (TMĐK)

Vậy $S \in \left\{\frac{1 \pm \sqrt{29}}{4}; 1\right\}$

Câu 43. *(Trường chuyên toán Quốc học Huế 2023-2024)*

a) Tìm m để phương trình $x^2-2(m-1)x-m^2+2m-3=0$ (x là ẩn số) có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $\sqrt{x_1^2+1}-x_1=\sqrt{x_2^2+1}+x_2$.

b) Giải phương trình $2\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{9-x}+3\right)=9.$

Lời Giải

a) Ta có $ac=-(m-1)^2-2<0$, với mọi m.

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Ta có $\sqrt{x_1^2+1}-x_1=\sqrt{x_2^2+1}+x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}=x_1+x_2$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}=x_1+x_2 \Leftrightarrow \frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}=x_1+x_2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1+x_2=0 \\ \sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}=x_1-x_2 \end{array}\right. .$$

TH1: $x_1+x_2=0 \Leftrightarrow 2(m-1)=0 \Leftrightarrow m=1$.

TH2: $\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}=x_1-x_2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x_1^2+1}-x_1\right)+\left(\sqrt{x_2^2+1}+x_2\right)=0$ (vô lý).

Vậy $m=1$.

b) Giải phương trình $\mathbf{2\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{9-x}+3\right)=9.}$

Điều kiện: $-9\le x\le 9$.

Ta có $\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{9-x}+3\right)=\frac{9}{2} \Leftrightarrow \sqrt{81-x^2}+3\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{9-x}\right)-\frac{27}{2}=0.$

Đặt $t=\sqrt{x+9}-\sqrt{9-x}$, suy ra $t^2=18-2\sqrt{81-x^2}$, ta có phương trình

$$\frac{18-t^2}{2}+3t-\frac{27}{2}=0 \Leftrightarrow -\frac{t^2}{2}+3t-\frac{9}{2}=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(t-3)^2=0 \Leftrightarrow t=3.$$

Với $t=3$, ta có $\sqrt{x+9}-\sqrt{9-x}=3 \Leftrightarrow \sqrt{x+9}=3+\sqrt{9-x}$

$$\Leftrightarrow x+9=18-x+6\sqrt{9-x} \Leftrightarrow 6\sqrt{9-x}=2x-9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{9}{2} \\ 36(9-x)=4x^2-36x+81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{9}{2} \\ 4x^2=243 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$ (thỏa mãn).

Vậy $S=\left\{\frac{9\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Câu 44. *(Trường chuyên toán tỉnh Tiền Giang 2023-2024)*

Giải phương trình $2x^2+2x-1=3x\sqrt{2x-1}.$

Lời Giải

Điều kiện: $x\ge \frac{1}{2}.$

Đặt $t=\sqrt{2x-1}\ge 0$, phương trình đã cho trở thành

$$2x^2+t^2=3xt \Leftrightarrow t^2-3xt+2x^2=0 \Leftrightarrow (t-x)(t-2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=x \\ t=2x \end{array}\right.$$

Với $t=x, x\ge \frac{1}{2}$ nên $\sqrt{2x-1}=x \Leftrightarrow 2x-1=x^2 \Leftrightarrow x=1.$

Với $t=2x, x\ge \frac{1}{2}$ nên $\sqrt{2x-1}=2x \Leftrightarrow 2x-1=4x^2 \Leftrightarrow 4x^2-2x+1=0,$ phương trình vô nghiệm do $\Delta'<0$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{1\}.$

Câu 45. *(Trường chuyên toán TP Hồ Chí Minh 2023-2024)*

Giải phương trình: $x=\frac{5}{x-1}+2\sqrt{x-2}$.

Lời Giải

Điều kiện: $x\ge 2$. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$x^2-x-5=2(x-1)\left(\sqrt{x-2}\right),$$

Hay: $(x-1)^2+(x-2)-2(x-1)\sqrt{x-2}=4$.

Một cách tương đương, ta có: $\left(x-1-\sqrt{x-2}\right)^2=4.$

Vì $(x-1)^2-(x-2)=x^2-3x+3>0$ nên $x-1-\sqrt{x-2}>0$. Kết hợp với phương trình trên, ta được $x-1-\sqrt{x-2}=2$, hay $x-3=\sqrt{x-2}$. Từ đây, ta suy ra $x\ge 3$ và $(x-3)^2=x-2$.

Giải ra, ta được $x=\frac{7+\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn). Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{7+\sqrt{5}}{2}.$

Câu 46. *(Trường chuyên toán tỉnh Tuyên Quang 2023-2024)*

Cho phương trình $x^4-4x^2+m+2=0$ (1), với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m=-7$.

b) Tìm m để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3,x_4 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}=2x_1x_2x_3x_4$$

Câu 47. *(Trường chuyên toán tỉnh Vĩnh Long 2023-2024)*

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2-5x+3m+1=0$ (x là ẩn, m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\left|x_1^2-x_2^2\right|=15$.

Lời Giải

Phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 Khi $\Delta=5^2-4(3m+1)>0 \Leftrightarrow 21-12m>0$ $\Leftrightarrow m<\dfrac{7}{4}$

Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ x_1x_2=3m+1 \end{cases}$

Ta có: $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{5^2-4(3m+1)}=\sqrt{21-12m}$.

Theo yêu cầu đề bài: $\left|x_1^2-x_2^2\right|=\left|(x_1+x_2)(x_1-x_2)\right|=\left|5(x_1-x_2)\right|=5|x_1-x_2|=5\sqrt{21-12m}$

Suy ra $\left|x_1^2-x_2^2\right|=15 \Leftrightarrow 5\sqrt{21-12m}=15 \Leftrightarrow \sqrt{21-12m}=3$

$\Leftrightarrow 21-12m=9 \Leftrightarrow 12m=12 \Leftrightarrow m=1$ (nhận). Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

Câu 48. *(Trường chuyên toán tỉnh Vĩnh Phúc 2023-2024)*

Giải các phương trình sau:

1. $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)=160$
2. $x^2+3x+8=2(x+1)\sqrt{x+7}$

Lời Giải

1. $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)=160$

$\Leftrightarrow \left[(x-1)(x+6)\right]\left[(x+2)(x+3)\right]=160$

$\Leftrightarrow (x^2+5x-6)(x^2+5x+6)=160$

$\Leftrightarrow (x^2+5x)^2-36=160$ $\Leftrightarrow (x^2+5x)^2=196$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+5x=14 \\ x^2+5x=-14(\text{vô nghiem}) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow (x+7)(x-2)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{2;-7\}$

2. $x^2+3x+8=2(x+1)\sqrt{x+7}$ (*)

ĐKXĐ: $x\ge -7$

(*) $\Leftrightarrow (x+1)^2 + x + 7 - 2(x+1)\sqrt{x+7} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{x+7}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{x+7}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2 + 2x + 1 = x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ (TM ĐKXĐ)

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{2\}$

Câu 49. *(Trường chuyên KHTN-Hà Nội 2023-2024)*

Giải phương trình: $2x + 1 + 2\sqrt{4x^2 + 6x} = 4\sqrt{5x - x^2}$

Lời Giải

Điều kiện: $0 \le x < 5$. Ta biến đổi phương trình thành

$$x + 2\sqrt{x}\sqrt{4x+6} + 4x + 6 = 4x + 4\sqrt{x}\sqrt{5-x} + 5 - x$$

Sử dụng hằng đẳng thức, ta thu được

$$(\sqrt{x} + \sqrt{4x+6})^2 = (2\sqrt{x} + \sqrt{5-x})^2$$

Suy ra $\sqrt{x} + \sqrt{4x+6} = 2\sqrt{x} + \sqrt{5-x}$ (do từng vế đều không âm), hay

$$\sqrt{4x+6} = \sqrt{x} + \sqrt{5-x}$$

Bình phương hai vế của phương trình này ta có

$$4x + 6 = x + 5 - x + 2\sqrt{x(5-x)}$$

Hay $4x + 1 = 2\sqrt{x(5-x)}$. Tiếp tục hay Tiếp tục ta bình phương hai vế với điều kiện $4x + 1 \ge 0$ (đã thoả mãn được)

$$16x^2 + 8x + 1 = 4x(5-x)$$

Giải phương trình trên ta thu được $x = \frac{1}{2} và\, x = \frac{1}{10}$ (đều thoả mãn điều kiện).

Vậy, phương trình đã cho có đúng hai nghiệm $x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{10}$

Câu 50. *(Trường chuyên Sư phạm-Hà Nội 2023-2024)*

Cho phương trình $x^2 - (2m-1)x - (m^2+1) = 0$ (1) (m là tham số). Chứng minh với mọi giá trị của m, phương trình (1) luôn có 2 nghiệm x_1, x_2.Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 sao cho hệ thức đó không phụ thuộc vào m.

Lời Giải

$x^2-(2m+1)x-(m^2+1)=0$

Các hệ số $a=1, b=-(2m+1), c=-(m^2+1)$

Vì $ac=-(m^2+1)<0$ nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm.

Hệ thức liên hệ không phụ thuộc vào m cần tìm là: $x_1.x_2+\frac{(x_1+x_2+1)^2}{4}+1=0$

CHƯƠNG 4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh An Giang năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{3}y=6-2\sqrt{3} \\ x+y=2 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} x+\sqrt{3}y=6-2\sqrt{3} & (1) \\ x+y=2 & (2) \end{cases}$$

Trừ (1) và (2) theo vế ta được:

$$\left(\sqrt{3}-1\right)y=4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2 \Rightarrow y=\sqrt{3}-1$$

Thay vào (2) được $x=2-y=2-\left(\sqrt{3}-1\right)=3-\sqrt{3}.$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(3-\sqrt{3};\sqrt{3}-1\right).$

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2-2x^2-xy-y+2x=0 \\ \sqrt{x^2-y-1}+x+y=1 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x^2-y-1\geq 0$. Xét hệ pt: $\begin{cases} y^2-2x^2-xy-y+2x=0 & (1) \\ \sqrt{x^2-y-1}+x+y=1 & (2) \end{cases}$

ta có: (1) $\Leftrightarrow (y-2x)(y+x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x \\ y=1-x \end{array}\right.$

* Trường hợp 1: với $y=2x$ thay vào (2), thu được:

$$\sqrt{x^2-2x-1}=1-3x \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \dfrac{1}{3} \\ x^2-2x-1=1-6x+9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \dfrac{1}{3} \\ 8x^2-4x+2=0 \end{cases} \quad \text{(vô nghiệm)}$$

* Trường hợp 2: với $y=1-x$ thay vào (2), thu được: $\sqrt{x^2+x-2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của hệ pt đã cho là: $S=\{(1\ ;\ 0)\ ;(-2\ ;\ 3)\}$

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+x-2xy=2 \\ x^4+x^2-4x^3y=4-4x^2y^2 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} x^2+x-2xy=2 \\ x^4+x^2-4x^3y=4-4x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2xy=2-x \\ \left(x^4-4x^3y+4x^2y^2\right)+x^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2xy=2-x \\ \left(x^2-2xy\right)^2+x^2-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2xy=2-x \\ (2-x)^2-x^2-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2xy=2-x\,(*) \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases}$$

+) với x = 0 , thay vào (*) ta được 0 = 2 (vô lý)

+) với x = 2, thay vào (*) ta được y = 1

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (2;1)

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Yên Bái năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+1)(x+3y)=20 \\ x^2+2x+3y=12 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} x(x+1)(x+3y)=20 \\ x^2+2x+3y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+x\right)(x+3y)=20 \\ \left(x^2+x\right)+(x+3y)=12 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x^2+x=a \\ x+3y=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab=20 \\ a+b=12 \end{cases}$ khi đó a, b là nghiệm của phương trình

$$t^2-12t+20=0 \Leftrightarrow (t-2)(t-10)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=10 \end{array}\right.$$

Do đó:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=10 \end{cases} \\ \begin{cases} a=10 \\ b=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x=2 \\ x+3y=10 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+x=10 \\ x+3y=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[x=-2 \vee x=1\right. \\ x+3y=10 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{41}}{2} \\ x+3y=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow (x;y)=(-2;4),(1;3),\left(\frac{-1-\sqrt{41}}{2};\frac{5+\sqrt{41}}{6}\right),\left(\frac{-1+\sqrt{41}}{2};\frac{5-\sqrt{41}}{6}\right)$$

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x+6y=2023|xy| \\ x-2y=3xy \end{cases}$

Lời giải

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 6x+6y=2023|xy| \\ x-2y=3xy \end{cases}$ (1)

Nếu xy > 0 thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{y}+\dfrac{6}{x}=2023 \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}=\dfrac{2032}{9} \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{2005}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{18}{2005} \\ y=\dfrac{9}{2032} \end{cases}$ (thoả mãn xy > 0)

Nếu xy < 0 thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{y}+\dfrac{6}{x}=-2023 \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}=-\dfrac{2014}{9} \\ \dfrac{1}{x}=-\dfrac{2041}{18} \end{cases}$ (loại, vì không thỏa mãn xy < 0)

Nếu xy = 0 thì từ (1) ta tính được x = y = 0

Vậy hệ phương trình (1) có đúng 2 nghiệm là (0; 0) và $\left(\dfrac{18}{2005};\dfrac{9}{2032}\right)$.

Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Bến Tre năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{x} \\ x+y-\dfrac{4}{x}=\dfrac{4y}{x^2} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x^2+y^2\neq 0$

Ta có $(2)\Leftrightarrow x+y=\dfrac{4}{x^2}(x+y)\Leftrightarrow (x+y)\left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ \dfrac{4}{x^2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$$

- Với $x=-y$, thay vào (1), ta được

$$\frac{1}{y}=-\frac{9}{y}\Rightarrow \frac{10}{y}=0 \text{ (vô lý).}$$

- Với $x=2$, thay vào (1), ta được

$$y+\frac{1}{y}=\frac{9}{2}-2\Rightarrow 2y^2-5y+2=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2}(TM) \\ y=2(TM) \end{array}\right.$$

- Với $x=-2$, thay vào(1), ta được $y+\dfrac{1}{y}=-\dfrac{9}{2}+2\Rightarrow 2y^2+5y+2=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{2}(TM) \\ y=-2(TM) \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)\in\left\{(2;2),(-2;-2),\left(2;\dfrac{1}{2}\right),\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$

Câu 7. *(Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(y+2)+2=5y \\ (xy-1)^2+3(1-y^2)=0 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} x(y+2)+2=5y \\ (xy-1)^2+3(1-y^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+2x+2=5y \\ x^2y^2-2xy+4=3y^2 \end{cases}$

+ Với $y=0$ thì hệ vô nghiệm

+ Với $y \neq 0$ hệ đã cho trở thành $\begin{cases} x+\dfrac{2x}{y}+\dfrac{2}{y}=5 \\ x^2-\dfrac{2x}{y}+\dfrac{4}{y^2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{y}+2\dfrac{x}{y}=5 \\ \left(x+\dfrac{2}{y}\right)^2-6\dfrac{x}{y}=3 \end{cases}$

Đặt : $\begin{cases} a=x+\dfrac{2}{y} \\ b=\dfrac{x}{y} \end{cases}$ Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} a+2b=5 & (1) \\ a^2-6b=3 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có: $a=5-2b \quad (*)$

Thay (*) vào (2) ta được $4b^2-26b+22=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=\dfrac{11}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b=\dfrac{11}{2} \\ a=-6 \end{cases}$

+ Với $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{y}=3 \\ \dfrac{x}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{x}=3 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$

+ Với $\begin{cases} a=-6 \\ b=\dfrac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{y}=-6 \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{11y}{2}+\dfrac{2}{y}=-6 \\ x=\dfrac{11y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y^2+12y+4=0 \quad (3) \\ x=\dfrac{11y}{2} \end{cases}$

Phương trình (3) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Vậy $(1;1), (2;2)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Câu 8. *(Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ (x+y)(4+3xy)=-2 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ (x+y)(4+3xy)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-3xy(x+y)=7 \\ 4(x+y)+3xy(x+y)=-2 \end{cases}$

Suy ra $(x+y)^3+4(x+y)-5=0 \Leftrightarrow (x+y-1).\left[(x+y)^2+(x+y)+5\right]=0$ (2)

Vì $(x+y)^2+(x+y)+5=\left(x+y+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{19}{4}>0$ với mọi x, y.

Do đó (2) $\Leftrightarrow x+y=1$, khi đó ta có $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow x, y$ là hai nghiệm của phương trình $u^2-u-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=-1 \\ u=2 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x;y)=(-1;2),(2;-1)$.

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy+7x-5y+6=0 \\ 4x^2-y^2+9x+9=\sqrt{2x+y+2}+\sqrt{x+4y+1} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+y+2\ge 0 \\ x+4y+1\ge 0. \end{cases}$

Xét phương trình (1): $2x^2+y^2-3xy+7x-5y+6=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+(7-3y)x+y^2-5y+6=0$ (*)

Ta xem (*) là phương trình bậc hai theo biến x. Biệt thức

$$\Delta_x=(7-3y)^2-4\cdot 2\cdot\left(y^2-5y+6\right)=(y-1)^2.$$

Phương trình (*) có hai nghiệm

$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3y-7+y-1}{4}=y-2 \\ x=\dfrac{3y-7-(y-1)}{4}=\dfrac{y-3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x+2 \\ y=2x+3. \end{array}\right.$

+) Với $y=x+2$, thay vào phương trình (2) ta được:

$3x^2+5x+5=\sqrt{3x+4}+\sqrt{5x+9}$

$\Leftrightarrow 3x^2+3x+\left[(x+2)-\sqrt{3x+4}\right]+\left[(x+3)-\sqrt{5x+9}\right]=0$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2+x\right)+\dfrac{x^2+x}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\dfrac{x^2+x}{x+3+\sqrt{5x+9}}=0$

$\Leftrightarrow x(x+1)\left[3+\dfrac{1}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\dfrac{1}{x+3+\sqrt{5x-9}}\right]=0$ (**)

Với điều kiện $\begin{cases} 3x+4 \geq 0 \\ 5x+9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{4}{3}$, ta có

$$3+\frac{1}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\frac{1}{x+3+\sqrt{5x-9}}>0$$

Do đó $(**) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \quad \Rightarrow y=2 \\ x=-1 \Rightarrow y=1. \end{array}\right.$

$$\sqrt{4x+5}+\sqrt{9x+13}+3x=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4x+5}-1\right)+\left(\sqrt{9x+13}-2\right)+3x+3=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x+1)}{\sqrt{4x+5}+1}+\frac{9(x+1)}{\sqrt{9x+13}+2}+3(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[\frac{4}{\sqrt{4x+5}+1}+\frac{9}{\sqrt{9x+13}+2}+3\right]=0 \ (***)$$

Với điều kiện $\begin{cases} 4x+5 \geq 0 \\ 9x+13 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{5}{4}$, ta có

$$\frac{4}{\sqrt{4x+5}+1}+\frac{9}{\sqrt{9x+13}+2}+3>0.$$

Do đó $(***) \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=1.$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x;y)=\{(0;2),(-1;1)\}$.

Câu 10. *(Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy-x+y=0 \\ x^2-2x-y+2=0 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} x^3-y^3-35=0 \\ 2x^2-4x+3y^2+9y=0 \end{cases}$$

Nhân hai vế của (2) với 3 ta được:

$$3\left(2x^2-4x+3y+9y\right)=0 \Leftrightarrow 6x^2-12x+9y^2+27y=0$$

lấy $(1)-(3)$ ta được:

$$x^3-y^3-35-6x^2+12x-9y^2-27y=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8-y^3-9y^2-27y-27=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^{2.2}+3x.2^2-2^3-y^3-3y^{2.3}-3y.3^2-3^3=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3-(y+3)^3=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3=(y+3)^3$$

$$\Leftrightarrow x-2=y+3$$

$$\Leftrightarrow x=y+5$$

$(1)\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=25$

Thay $x=y+5$ vào (4) ta được:

$(y+5)^2+y(y+5)+y^2=7$

$\Leftrightarrow y^2+10y+25+y^2+5y+y^2=7$

$\Leftrightarrow 3y^2+15y+18=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=-3 \end{array}\right.$

- Với $y=-2$, ta có $x=3$
- Với $y=-3$, ta có $x=2$

Vậy nghiệm của hệ là $(3;-2)$ và $(2;-3)$

Câu 11. *(Trường chuyên tỉnh Cao Bằng năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} |x|+y^2=10 \\ 2|x|-3y^2=-25 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ sau: $\begin{cases} 2|x|+2y^2=20 & (1) \\ 2|x|-3y^2=-25 & (2) \end{cases}$

Trừ từng vế phương trình (2) và (1), ta được: $5y^2=45\Leftrightarrow y^2=9\Rightarrow y=\pm 3$

Với $y=\pm 3$, thay vào phương trình (1), ta được $|x|=1\Rightarrow x=\pm 1$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là $S=\{(-1;3),(1;3),(-1;-3),(1;-3)\}$

Câu 12. *(Trường chuyên tỉnh Đà Nẵng năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x^2-y\right)\sqrt{x-2}=x(y-x+2) \\ (y-1)(y-3x-3)=x^2-3x+3-8\sqrt{x-2} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 2$

Xét phương trình (1):

$\left(x^2-y\right)\sqrt{x-2}=x(y-x+2)\ \Rightarrow\ x^2\sqrt{x-2}-y\sqrt{x-2}=xy-x(x-2)$

$\Rightarrow\ x^2\sqrt{x-2}-xy+x(x-2)-y\sqrt{x-2}=0\Rightarrow\ x\left(x\sqrt{x-2}-y\right)+\sqrt{x-2}\left(x\sqrt{x-2}-y\right)=0$

$\Rightarrow\ \left(x\sqrt{x-2}-y\right)\left(\underbrace{x+\sqrt{x-2}}_{>0 \text{ vì } x\ge 2}\right)=0\Rightarrow\ x\sqrt{x-2}-y=0$

$\Rightarrow\ y=x\sqrt{x-2}$

Xét phương trình:

$(y-1)(y-3x-3)=x^2-3x+3-8\sqrt{x-2}\ \Rightarrow\ y^2-3xy-4y+3x+3=x^2-3x+3-8\sqrt{x-2}$

$\Rightarrow\ x^2(x-2)-3x^2\sqrt{x-2}-4x\sqrt{x-2}-x^2+6x+8\sqrt{x-2}=0$

$\Rightarrow\ \left(x^3-3x^2+6x\right)-\sqrt{x-2}\left(3x^2+4x-8\right)=0\Rightarrow\ x^3-3x(x-2)-\sqrt{x-2}\left(3x^2+4x-8\right)=0$

Đặt $t=\sqrt{x-2}$ thì $t^2=x-2$ và $4x-8=4t^2$

$\left(x^3-3xt^2\right)-t\left(3x^2+4t^2\right)=0 \Rightarrow x^3-3x^2t-3xt^2-4t^3=0 \Rightarrow (x-4t)\left(x^2+tx+t^2\right)=0$

Mà $x^2+tx+t^2=\left(x+\frac{t}{2}\right)^2+\frac{3}{4}t^2>0$ (dấu bằng không xảy ra)

Ta được:

$x=4t \Rightarrow x=4\sqrt{x-2} \Rightarrow x^2=16(x-2) \Rightarrow x^2-16x+32=0$

$x=8\pm4\sqrt{2}$: nhận

$x=8+4\sqrt{2} \Rightarrow y=x\sqrt{x-2}=\left(8+4\sqrt{2}\right).\sqrt{6+4\sqrt{2}}=\left(8+4\sqrt{2}\right).\left(2+\sqrt{2}\right)=32+16\sqrt{2}$

$x=8-4\sqrt{2} \Rightarrow y=x\sqrt{x-2}=\left(8-4\sqrt{2}\right).\sqrt{6-4\sqrt{2}}=\left(8-4\sqrt{2}\right).\left(2-\sqrt{2}\right)=32-16\sqrt{2}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm : $\begin{cases} x=8+4\sqrt{2} \\ y=32+16\sqrt{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} x=8-4\sqrt{2} \\ y=32-16\sqrt{2} \end{cases}$

Câu 13. *(Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x^3-6x^2+13x-10-(x-y+2)\sqrt{x-y+1}=0 \\ \left(3x^2+18x-2xy+6y-y^2\right)\sqrt{x-y+6}-24x-8y=0. \end{cases}$

Lời giải

Xét phương trình $x^3-6x^2+13x-10-(x-y+2)\sqrt{x-y+1}=0(1)$

Điều kiện: $x-y+1\geq 0$.

$(1)\Leftrightarrow\left(x^3-6x^2+12x-8\right)+(x-2)=\sqrt{x-y+1}(x-y+1)+\sqrt{x-y+1}$

$\Leftrightarrow(x-2)^3+(x-2)=\left(\sqrt{x-y+1}\right)^3+\sqrt{x-y+1}(2)$.

Đặt $\begin{cases} u=x-2 \\ v=\sqrt{x-y+1} \end{cases}$, khi đó $(2)\Leftrightarrow u^3+u=v^3+v \Leftrightarrow(u-v)\left(u^2+v^2+uv+1\right)=0\Leftrightarrow u=v$

$\Leftrightarrow\sqrt{x-y+1}=x-2$

Xét phương trình $\left(3x^2+18x-2xy+6y-y^2\right)\sqrt{x-y+6}-24x-8y=0$

$\Leftrightarrow\left(3x^2-2xy-y^2+18x+6y\right)\sqrt{x-y+6}-24x-8y=0$

$\Leftrightarrow\left[\left(3x^2-2xy-y^2\right)+6(3x+y)\right]\sqrt{x-y+6}-8(3x+y)=0$

$\Leftrightarrow\left[(3x+y)(x-y)+6(3x+y)\right]\sqrt{x-y+6}-8(3x+y)=0$

$\Leftrightarrow(3x+y)\left[\left(\sqrt{x-y+6}\right)^3-8\right]=0\Leftrightarrow 3x+y=0$ (do $x-y+1\geq 0\Rightarrow\left(\sqrt{x+y+6}\right)^3-8>0$)

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3x = -y \\ \sqrt{x-y+1} = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -y \\ \sqrt{4x+1} = x-2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -y \\ x \geq 2 \\ x^2 - 8x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -y \\ \left[\begin{array}{l} x = 4+\sqrt{13} \\ x = 4-\sqrt{13} \end{array}\right. \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4+\sqrt{13} \\ y = -12-3\sqrt{13} \end{cases}$$

Câu 14. *(Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ (x+1)(y+1) = 6 \end{cases}$

Lời giải

Cách 1:

Đặt $\begin{cases} S = x+y \\ P = xy \end{cases}$. Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} S^2 - 2P = 5 \\ S + P = 5 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2(5-S) = 5 \\ P = 5-S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S - 15 = 0 \quad (*) \\ P = 5-S \end{cases}.$$

Phương trình (*) có $\Delta' = 1^2 + 1.15 = 16$ nên $\left[\begin{array}{l} S = -5,\ P = 10 \\ S = 3,\ P = 2 \end{array}\right.$.

Với $\begin{cases} S = -5 \\ P = 10 \end{cases}$ thì x, y là hai nghiệm của phương trình

$X^2 + 5X + 10 = 0$ (phương trình vô nghiệm).

Với $\begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$ thì x, y là hai nghiệm của phương trình

$X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = 2 \end{array}\right.$ (vì $a+b+c = 1-3+2 = 0$).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(1;\ 2)$ và $(2;\ 1)$.

Cách 2:

Từ phương trình sau suy ra $x \neq -1, y \neq -1$ và $y = \dfrac{5-x}{x+1}$.

Thế vào phương trình đầu, ta được $x^2 + \left(\dfrac{5-x}{x+1}\right)^2 = 5$.

$$\Leftrightarrow x^2(x+1)^2+(5-x)^2=5(x+1)^2.$$

$$\Leftrightarrow x^4+2x^3-3x^2-20x+20=0$$

$$\Leftrightarrow (x^4-2x^3+2x^2)+(5x^3-15x^2+10x)+(10x^2-30x+20)=0.$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+2)(x^2+5x+10)=0$$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$ (vì $x^2+5x+10=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$ với mọi x).

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=2 \\ x=2\Rightarrow y=1 \end{array}\right..$$

Câu 15. *(Trường chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(3y+1)-y=3 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} x(3y+1)-y=3 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+3xy=3 \\ (x-y)^2+3xy=3 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u=x-y \\ v=xy \end{cases}$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} u+3v=3 \\ u^2+3v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+3v=3 \\ u^2-u=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=\dfrac{3-u}{3} \\ \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=1 \\ v=\dfrac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right.$

Với $\begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ xy=1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-1 \end{array}\right..$

Với $\begin{cases} u=1 \\ v=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ xy=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow$ hệ có nghiệm là $\begin{cases} x=\dfrac{3+\sqrt{33}}{6} \\ y=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{6} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\dfrac{3-\sqrt{33}}{6} \\ y=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6} \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $(1;1)$, $(-1;-1)$, $\left(\dfrac{3+\sqrt{33}}{6};\dfrac{-3+\sqrt{33}}{6}\right)$, $\left(\dfrac{3-\sqrt{33}}{6};\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}\right)$.

Câu 16. *(Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{y}=4 \\ \sqrt{x-1}-\dfrac{1}{y}=-1 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện xác định $x \ge 1; y \ne 0$

Đặt $a=\sqrt{x-1}\left(a\ge 0\right); b=\dfrac{1}{y}$. Hệ trở thành $\begin{cases} 2a+b=4 \\ a-b=-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy hệ có một nghiệm $\left(x;y\right)=\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$

Câu 17. *(Trường chuyên toán tỉnh Hà Nam năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3+xy(2y-x)+2x^2+6x=xy+y^3+3y \quad (1) \\ \sqrt{3(x^2+y)+7}+\sqrt{5x^2+5y+14}=4-y-x^2 \ (2) \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 3(x^2+y)+7\ge 0 \\ 5x^2+5y+14\ge 0 \end{cases}$

Phương trình (1) tương đương với

$$2x^3+2xy^2-x^2y+2x^2+6x=xy+y^3+3y$$

$$\Leftrightarrow (2x^3-x^2y)+(2xy^2-y^3)+(2x^2-xy)+(6x-3y)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(2x-y)+y^2(2x-y)+x(2x-y)+3(2x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-y)(x^2+y^2+x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-y)[(x+\frac{1}{2})^2+y^2+\frac{11}{4}]=0$$

$$\Leftrightarrow 2x-y=0 \Leftrightarrow y=2x$$

Thay $y=2x$ vào phương trình (2) ta được

$$\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x^2+6x+7}-2)+(\sqrt{5x^2+10x+14}-3)+(x^2+2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x+1)^2}{\sqrt{3x^2+6x+7}+2}+\frac{5(x+1)^2}{\sqrt{5x^2+10x+14}+3}+(x+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2\left(\frac{3}{\sqrt{3x^2+6x+7}+2}+\frac{5}{\sqrt{5x^2+10x+14}+3}+1\right)=0$$

Vì $\frac{3}{\sqrt{3x^2+6x+7}+2}+\frac{5}{\sqrt{5x^2+10x+14}+3}+1>0$ nên phương trình tương đương với

$(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=-2\ (tm)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(-1;-2)$

Câu 18. *(Trường chuyên toán tin Hà Nội năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+3xy=9 \\ x^3+y^3=9 \end{cases}$

Lời giải

Đặt $x+y=a; xy=b\left(a^2\geq 4b\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+3b=9(1) \\ a^3-3ab=9(2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow$ $a=9-3b$ $\Rightarrow$ $(9-3b)^3-3(9-3b)b=9$

$\Rightarrow -27b^3+252b^2-756b+729=9 \Rightarrow -27b^3+252b^2-756b+720=0$

$\Rightarrow b\in\left\{2;4;\frac{10}{3}\right\}$

TH1: $b=2$ $\Rightarrow$ $a=3$ $\Rightarrow$ $(x,y)\in\{(1,2);(2,1)\}$

TH2: $b=4$ $\Rightarrow$ $a=-3$ (loại do $a^2\geq 4b$.)

TH3: $b=\frac{10}{3}$ $\Rightarrow$ $a=-1$ (loại do $a^2\geq 4b$)

Từ các trường hợp trên $\Rightarrow$ $(x,y)\in\{(1,2);(2,1)\}$ (Thử lại thoả mãn)

Vậy $(x,y)\in\{(1,2);(2,1)\}$

Câu 19. *(Trường chuyên toán Hà Tĩnh năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+2)(2-y)=8 \\ \sqrt{11-4(x-y)}+x^2y^2+1=3xy. \end{cases}$

Lời giải

ĐK: $\begin{cases} x^2+3x+11\geq 0 \\ x+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq -2$

$\sqrt{x^2+3x+11}-\sqrt{x+2}=2x-2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+5(x+2)}-\sqrt{x+2}=2(x-1)$

Xét $x=-2$ (không phải là nghiệm)

Xét $x > -2$ Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{x+2}$ ta được: $\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x+2}+5}-1=\frac{2(x-1)}{\sqrt{x+2}}$. Đặt $t=\frac{x-1}{\sqrt{x+2}}$ ta được phương trình: $\sqrt{t^2+5}-1=2t$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2+5}=2t+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+1\ge 0 \\ t^2+5=(2t+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge -\frac{1}{2} \\ 3t^2+4t-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge -\frac{1}{2} \\ t=-2;\ t=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$$

Khi $t=\frac{2}{3}$ ta được phương trình: $\frac{x-1}{\sqrt{x+2}}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2}=3(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ 4(x+2)=9(x-1)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ 9x^2-22x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x=\frac{11\pm 4\sqrt{7}}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{11+4\sqrt{7}}{9}.$$

Vậy phương trình có đúng 1 nghiệm $x=\frac{11+4\sqrt{7}}{9}$

Chú ý: Học sinh có thể giải theo cách: Đặt $\begin{cases} a=x-1 \\ b=\sqrt{x+2}\ge 0. \end{cases}$

Câu 20. *(Trường chuyên toán Hải Dương năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+2x+y=2 \\ x^2+y^2+2x+4y=3 \end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} (x+1)(y+2)=4 \\ (x+1)^2+(y+2)^2=8 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a=x+1 \\ b=y+2 \end{cases}$ ta được hệ $\begin{cases} a.b=4 \\ a^2+b^2=8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ (a+b)^2-2ab=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ (a+b)^2=16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=4 \\ \left[\begin{array}{l} a+b=4 \\ a+b=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab=4 \\ a+b=4 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} ab=4 \\ a+b=-4 \end{cases} (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$$

Câu 21. *(Trường chuyên toán Hải Phòng năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{y}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=1\\ y+4\sqrt{y}=x^2+3x-3-2(x+1)\sqrt{x}.\end{cases}$

Lời giải

ĐKXĐ: $x\ge 0;\ y\ge 0$. PT thứ nhất $\Leftrightarrow \sqrt{y}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ (1).

PT thứ hai $\Leftrightarrow \left(\sqrt{y}+2\right)^2=\left(x+1-\sqrt{x}\right)^2$.

+TH1: $\sqrt{y}+2=x+1-\sqrt{x}\Leftrightarrow \sqrt{y}=x-\sqrt{x}-1$. Kết kợp với (1):

$$\sqrt{x+1}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x^2-3x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3; y=7-4\sqrt{3}\ \text{(tmđkxđ)}.$$

+TH2: $\sqrt{y}+2=-x-1+\sqrt{x}$ (Vô lý vì $\sqrt{y}+2>0; -x-1+\sqrt{x}<0$).

Vậy $x=3; y=7-4\sqrt{3}$.

Câu 22. *(Trường chuyên toán Hòa Bình năm 2023-2024)*

Cho hệ phương trình: $\begin{cases}x+my=3m-3\\ mx+y=2m-2\end{cases}$ (m là tham số). Tìm các giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$, trong đó $x;y$ là các số nguyên.

Lời giải

$$\begin{cases}x+my=3m-3\\ mx+y=2m-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+my=3m-3\\ (m^2-1)x=2m^2-5m+3\end{cases}$$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì $m^2-1\ne 0\Leftrightarrow m\ne\pm 1$

Suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\begin{cases}x=\dfrac{2m-3}{m+1}=2-\dfrac{5}{m+1}\\ y=3-\dfrac{5}{m+1}\end{cases}$

Vì m nguyên để hệ phương trình có nghiệm duy nhất là các số nguyên thì m + 1 phải là ước của 5 $\Rightarrow m+1\in\{1;-1;5;-5\}$

$\Rightarrow m\in\{0;-2;4;-6\}(TM)$.

Câu 23. *(Trường chuyên toán Hòa Bình năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(2-x)\sqrt{1-x}-y\sqrt{y-1}=0\\ \sqrt{x+2}+\sqrt{y+1}=3\end{cases}$

Lời giải

ĐKXĐ: $x\le 1; y\ge 1$

$(1) \Leftrightarrow (1-x)\sqrt{1-x} - (y-1)\sqrt{y-1} + \sqrt{1-x} - \sqrt{y-1} = 0$

Đặt $\sqrt{1-x} = u\ (u \ge 0);\ \sqrt{y-1} = t\ (t \ge 0)$ ta được phương trình:

$$u^3 - t^3 + u - t = 0 \Leftrightarrow (u-t)(u^2 + ut + t^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u - t = 0 \\ u^2 + ut + t^2 + 1 = 0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow u - t = 0 \Rightarrow 1 - x = y - 1 \Leftrightarrow x = 2 - y$.

Từ (2) suy ra $\sqrt{4-y} + \sqrt{y+1} = 3$ (ĐKXĐ: $1 \le y \le 4$)

$\Rightarrow 5 + 2\sqrt{(4-y)(y+1)} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{4 + 3y - y^2} = 2 \Rightarrow 3y - y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0\ (KTM) \\ y = 3\ (TM) \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (-1; 3)$.

Câu 24. *(Trường chuyên toán toán Hưng Yên năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$

Lời giải

$$2.\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 (1) \\ 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 (2) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow 2x^2 + 3(1-y)x + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1-y)(2x+1-y) = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{y-1}{2} \\ x = y - 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2x+1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2 + (2x+1)^2 + x + 2x + 1 = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = -3 \\ x = \dfrac{3}{5} \Rightarrow y = \dfrac{11}{5} \end{array}\right. \\ y = x + 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2 + (x+1)^2 + x + x + 1 = 8 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 2 \\ x = -3; y = -2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$(x; y) \in \left\{(-2; -3); \left(\frac{3}{5}; \frac{11}{5}\right); (1; 2); (-3; -2)\right\}$$

Câu 25. *(Trường chuyên toán Lai Châu năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 & (1) \\ 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 & (1) \\ 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ (x - y + 1)(2x - y + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ \left[\begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} (*) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} (**) \end{array}\right.$$

Giải $(*)$ $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1 \\ 2y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-1 \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases} \end{array}\right.$

Giải $(**)$ $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ 2x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(2x+1)^2+x+2x+1=8 \\ y=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+7x-6=0 \\ y=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{5} \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{11}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm $(1;2);(-3;-2);(-2;-3);\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{11}{5}\right)$

Câu 26. *(Trường chuyên Nam Định năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{4x^2+3}-2\sqrt{y}=\sqrt{y^2+3}-2\sqrt{2x} \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{y+3-x^2} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 0\le x\le 3 \\ y\ge 0 \\ y+3-x^2\ge 0 \end{cases}$.

Phương trình (1) trở thành $\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{2x}-2\sqrt{y}=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x}-\sqrt{y}\right)\left[\dfrac{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{y}\right)(2x+y)}{\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{y^2+3}}+2\right]=0 \Leftrightarrow y=2x.$

Thay vào phương trình (2) ta được

$\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{2x+3-x^2}$

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x} \Rightarrow \sqrt{2x+3-x^2}=\dfrac{t^2-4}{2}$

Khi đó $t=2+\dfrac{t^2-4}{2} \Leftrightarrow t^2-2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2 \end{array}\right.$

Với $t=0$ ta được $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=0\,(vn)$.

Với $t=2$ ta được $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(3-x)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1(l) \\ x=3(tm) \end{array}\right.$.

Với $x=3 \Rightarrow y=6$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(3;6)$.

Câu 27. *(Trường chuyên toán toán Nam Định năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=xy+x-y+2 \\ x^3+y^3=y(x+y+4)+x \end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-xy+y^2=x-y+2 & (1) \\ (x+y)(x^2-xy+y^2=xy+y^2+4y+x & (2) \end{cases}$

Thế (1) và (2) ta được: $(x+y)(x-y+2)=xy+y^2+4y+x$

$$\Leftrightarrow x^2-xy-2y^2+x-2y=0 \Leftrightarrow (x-2y)(x+y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=-y-1 \end{array}\right.$$

Với $x=2y$, thay vào (1) ta có:

$$4y^2-2y^2+y^2=y+2 \Leftrightarrow 3y^2-y-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Khi đó $(x;y)=(2;1)$ và $(x;y)=(-\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}$

Với $x=-y-1$, thế vào (1) ta được:

$$(y+1)^2+(y+1)y+y^2=-y-1-y+2 \Leftrightarrow 3y^2+5y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$$

Khi đó $(x;y)=(-1;0)$ và $x;y)=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm $(x;y)=\in\left\{(2;1),\left(-\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right),(-1;0),\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{3}\right)\right\}$

Câu 28. *(Trường chuyên toán chung Nam Định năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{4x+5}+2x=\sqrt{2y+5}+y \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{y+3-x^2} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} -1 \le x \le 3 \\ y \ge -\dfrac{5}{2} \\ y+3-x^2 \ge 0 \end{cases}$.

Phương trình (1) trở thành $\left(\sqrt{4x+5}-\sqrt{2y+5}\right)+(2x-y)=0$

$$\Leftrightarrow (2x-y)\left(\frac{2}{\sqrt{4x+5}+\sqrt{2y+5}}+1\right)=0 \Leftrightarrow y=2x.$$

Thay vào phương trình (2) ta được

$\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{2x+3-x^2}$

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x} \Rightarrow \sqrt{2x+3-x^2}=\dfrac{t^2-4}{2}$

Khi đó $t=2+\dfrac{t^2-4}{2} \Leftrightarrow t^2-2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2 \end{array}\right.$

Với $t=0$ ta được $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=0\,(vn)$.

Với $t=2$ ta được $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(3-x)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\,(tm) \\ x=3\,(tm) \end{array}\right.$.

Với $x=-1 \Rightarrow y=-2$.

Với $x=3 \Rightarrow y=6$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(-1;-2)$, $(3;6)$.

Câu 29. *(Trường chuyên toán Phan Bộ Châu – Nghệ An năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x-\sqrt{x+y}=\sqrt{2y-x^2+2x} \\ \left(2-\sqrt{x+y}\right)\sqrt{x^2+4}=2\sqrt{3}x \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x+y \ge 0, 2y-x^2+2x \ge 0$

Trước hết ta có biến đổi sau

$$2x-\sqrt{x+y}=\sqrt{2y-x^2+2x} \Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{x+y}\right)^2=2y-x^2+2x$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4x\sqrt{x+y}+x+y=2y-x^2+2x$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-4x\sqrt{x+y}-(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow 5x\left(x-\sqrt{x+y}\right)+\sqrt{x+y}\left(x-\sqrt{x+y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+y}\right)\left(5x=\sqrt{x+y}\right)=0$$

Lúc này, ta xét hai trường hợp sau

- Trường hợp 1. $x-\sqrt{x+y}=0$ suy ra $x=\sqrt{x+y}\,(x \ge 0)$

  Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

  $$(2-x)\sqrt{x^2+4}=2\sqrt{3}x \Leftrightarrow (2-x)^2\left(x^2+4\right)=12x^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-4x+4\right)\left(x^2+4\right)=12x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4+4x^2-4x^3-16x+4x^2+16=12x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4-4x^3-4x^2-16x+16=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-6x+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+4=0\left(vì\ x^2+2x+2=\left(x+1\right)^2+1>1>0\right)$$

$$\Leftrightarrow x\in\left\{3-\sqrt{5},3+\sqrt{5}\right\}$$

Để ý điều kiện $0\le x\le 2$ nên $x=3+\sqrt{5}$ loại suy ra $x=3-\sqrt{5}$

Khi đó, thay vào biểu thức ta được $3-\sqrt{5}=\sqrt{3-\sqrt{5}+y}$ suy ra $y=11-5\sqrt{5}$

Thử lại, ta thấy nghiệm trên thỏa mãn

- Trường hợp 2. $5x+\sqrt{x+y}=0$ suy ra $\sqrt{x+y}=-5x\left(x\le 0\right)$

  Thay vào phương trình đầu của hệ, ta có

$$7x=\sqrt{2y-x^2+2x}$$

  Từ đây kết hợp $x\le 0$ suy ra $x=y=0$. Thử lại, ta thấy nghiệm trên không thỏa

Như vậy, tất cả các nghiệm của hệ phương trình là $\left(x,y\right)=\left\{3-\sqrt{5},11-5\sqrt{5}\right\}$

Câu 30. *(Trường chuyên toán Vinh – Nghệ An năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}5x+y=x^2y^2-15\\ 2x+3y=3x^2y^2-13xy-6\end{cases}$

Lời giải

Ta đặt phương trình như sau $\begin{cases}5x+y=x^2y^2-15 & (1)\\ 2x+3y=3x^2y^2-13xy-6 & (2).\end{cases}$

Trường hợp 1. Nếu $x=0$ thì $-15=y=-2$ vô lý nên trường hợp này vô nghiệm.

Trường hợp 2. Nếu $x\ne 0$, ta có biến đổi như sau

$$\left(1\right).3-\left(2\right)\Leftrightarrow 13x=13xy-39\Leftrightarrow xy=x+3\Leftrightarrow y=1+\frac{3}{x}$$

Thế $y=1+\frac{3}{x}$ vào phương trình $\left(1\right)$, ta có

$$5x+1+\frac{3}{x}=\left(x+3\right)^2-15\Leftrightarrow 5x^2+x+3=x\left(x^2+6x+9\right)-15x$$

$$\Leftrightarrow x^3+x^2-7x-3=0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x^2-2x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow x\in\{-3;1+\sqrt{2};1-\sqrt{2}\}.$$

Nếu $x=-3$ thì $y=1+\frac{3}{x}=0$.

Nếu $x=1+\sqrt{2}$ thì $y=1+\frac{3}{x}=-2+3\sqrt{2}$.

Nếu $x=1-\sqrt{2}$ thì $y=1+\frac{3}{x}=-2-3\sqrt{2}$.

Vậy tất cả các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn là $(-3;0);(1+\sqrt{2},-2+3\sqrt{2});(1-\sqrt{2},-2-3\sqrt{2})$.

Câu 31. *(Trường chuyên toán Ninh Bình năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{9}{2} \\ \frac{9}{4}+\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{y}\right)=\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right) \end{cases}$

Lời giải

ĐK: $x\neq 0$; $y\neq 0$

Đặt a = $x+\frac{1}{y}$, b = $y+\frac{1}{x}$

HPT đã cho trở thành $\begin{cases} a+b=\frac{9}{2} & (1) \\ \frac{9}{4}+\frac{3}{2}a=ab & (2) \end{cases}$

Từ (1): b = $\frac{9}{2}-a$. Thay vào (2):

$\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a$ = a$\left(\frac{9}{2}-a\right)$ $\Leftrightarrow$ 9 + 6a = 2a (9 – 2a)

$\Leftrightarrow$ $4a^2 - 12a + 9 = 0$ $\Leftrightarrow (2a-3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ 2a – 3 = 0 $\Leftrightarrow$ a = $\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ b = 3

Vậy $\begin{cases} x+\frac{1}{y}=\frac{3}{2} \\ y+\frac{1}{x}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy+2=3y & (3) \\ xy+1=3x & (4) \end{cases}$

$\Rightarrow$ y = 2x. Thay vào (4):

$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

$x = 1 \to y = 2$

$x = \dfrac{1}{2} \to y = 1$ (t/m đk)

Vậy (x;y) $\in \left\{(1;2);\left(\dfrac{1}{2};1\right)\right\}$

Câu 32. *(Trường chuyên toán Phú Thọ năm 2023-2024)*

Giải hệ $\begin{cases} 2\sqrt{x-3y} = 16-3x+9y \quad (1) \\ 2\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3} = 5y+1 \;(2) \end{cases}$ $(x; y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases} x \ge 3 \\ y \ge -3 \\ x \ge 3y \end{cases}$

Đặt $\sqrt{x-3y} = t \ge 0$ thay vào (1) ta được

$$2t = 16 - 3t^2 \Leftrightarrow 9t^2 + 6t + 1 = 49 \Leftrightarrow (3t+1)^2 = 7^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\dfrac{-8}{3}\ (loai) \end{array}\right.$$

Với $t = 2 \Rightarrow x - 2y = 4$ thay vào (2) ta được $2\sqrt{3y+1}+\sqrt{y+3} = 5y+1$ (3) ĐK $y \ge \dfrac{-1}{5}$

Suy ra $4y - 2\sqrt{3y+1} + y + 1 - \sqrt{y+3} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{16y^2-12y-4}{4y+2\sqrt{3y+1}} + \frac{y^2+y-2}{y+1+\sqrt{y+3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(4y+1)(y-1)}{4y+2\sqrt{3y+1}} + \frac{(y+2)(y-1)}{y+1+\sqrt{y+3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)\left[\frac{4(4y+1)}{4y+2\sqrt{3y+1}} + \frac{(y+2)}{y+1+\sqrt{y+3}}\right] = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

(vì $y \ge \dfrac{-1}{5}$)

Từ $y = 1 \Rightarrow x = 7$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) = (7;1)$

Câu 33. *(Trường chuyên toán Phú Thọ năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(x+\sqrt{x^2-x+1} = 1-y+\sqrt{y^2+3} \\ y^2-2(x-2) = 3\sqrt{(y+1)(y^2+2x)} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải

$$\begin{cases} 2\left(x+\sqrt{x^2-x+1}\right)=1-y+\sqrt{y^2+3} & (1) \\ y^2-2(x-2)=3\sqrt{(y+1)\left(y^2+2x\right)} & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1)

$$\Rightarrow (2x+y-1)=\sqrt{y^2+3}-2\sqrt{x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow (2x+y-1)=\left[y^2+3-4\left(x^2-x+1\right)\right].\frac{1}{\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$\Leftrightarrow (2x+y-1)=\left[y^2+3-4\left(x^2-x+1\right)\right].\frac{1}{\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$\Leftrightarrow (2x+y-1)=\left[y^2-(2x-1)^2\right].\frac{1}{\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$\Leftrightarrow (2x+y-1)=(y-2x+1).(y+2x-1).\frac{1}{\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$\Leftrightarrow (2x+y-1)\left[\frac{y-2x+1}{\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1}}-1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+y-1=0 \\ y-2x+1=\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1} \end{array}\right.$$

+) Trường hợp 1: $2x+y-1=0 \Rightarrow 2x=-y+1$ thay vào phương trình (2) ta được

(2) $\Leftrightarrow y^2-1+y+4=3\sqrt{(y+1\left(y^2-y+1\right)} \Leftrightarrow y^2-y+1+2y+2=3\sqrt{(y+1)\left(y^2-y+1\right)}$

Đặt $a=y+1; b=y^2-y+1 \Rightarrow 2a^2-3ab+b^2=0 \Leftrightarrow (a-b)(2a-b)=0$

Với $a=b \Rightarrow y+1=y^2-y+1 \Leftrightarrow y^2-2y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ y=2 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Với $2a=b \Rightarrow 2y+2=y^2-y+1 \Leftrightarrow y^2-3y-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{\sqrt{13}+3}{2} \Rightarrow x=\frac{-\sqrt{13}-1}{4} \\ y=\frac{-\sqrt{13}+3}{2} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{13}-5}{4} \end{array}\right.$

+) Trường hợp 2: $y-2x+1=\sqrt{y^2+3}+2\sqrt{x^2-x+1}$ ĐK $y-2x+1\ge 0$

Bình phương hai vế ta được

$$(y-2x+1)^2=y^2+3=4\left(x^2-x+1\right)+4\sqrt{\left(y^2+3\right)\left(x^2-x+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow y^2+4x^2+1-4xy-4x+2y=y^2+4x^2-4x+7+4\sqrt{\left(y^2+3\right)\left(x^2-x+1\right)}$$

$\Leftrightarrow -4x+2y-6=4\sqrt{(y^2+3)(x^2-x+1)}$ (3)

Điều kiện: $y \ge 2x+3$

Bình phương hai vế của (3) ta được

$$\left(-2x^2+y-3\right)^2=4\left(y^2+3\right)\left(x^2-x+1\right)$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+y^2+9-4xy+12x-6y=4x^2y^2-4xy^2+4y^2+12x^2-12x+12$$
$$\Leftrightarrow 3\left(4x^2+y^2+1-4xy-4x+2y\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (2x-y-1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow 2x-y-1=0$$
$$\Leftrightarrow 2x=y+1$$

Kết hợp với điều kiện $y \ge 2x+3$

Ta có $2x=y+1 \ge 2x+4 \Leftrightarrow 0 \ge 4$ (vô lí)

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm

$$(x;y)\in\left\{\left(\frac{1}{2};0\right);\left(\frac{-1}{2};2\right);\left(\frac{-\sqrt{13}-1}{4};\frac{\sqrt{13}+3}{2}\right);\left(\frac{\sqrt{13}-5}{4};\frac{-\sqrt{13}+3}{2}\right)\right\}$$

Câu 34. *(Trường chuyên toán Phú Yên năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(xy)^3+\left(x+\sqrt{5}\right)^3+\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x\right)^3=0\\ 3xy^3=y^2+2\end{cases}$

Lời giải

$)\begin{cases}(xy)^3+3xy^3+2=6y^2 & (1)\\ 3xy^3=y^2+2 & (2)\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}u=xy\\ v=y^2\end{cases}$. Dễ thấy $y\neq 0$. Từ(2) suy ra $3xy=\dfrac{y^2+2}{y^2}>0$, do đó ta luôn có $u>0, v>0(3)$

Ta có hệ phương trình mới: $\begin{cases}u^3+3uv+2=6v(4)\\ 3uv=v+2 & (5)\end{cases}$

Thế (5) và (4) ta được: $v=\dfrac{u^3+4}{5}$ (6)

Thế (6) vào (5) ta được:

$3u^4-u^3+12u-14=0 \Leftrightarrow (u-1)(3u^3+2u^2+2u+14)=0\,(7)$

Đối chiếu với điều kiện(3) thì $3u^3+2u^2+2u+14>0$ nên(7) có nghiệm $u=1$

Với $u=1$, từ (6) suy ra $v=1$ hay $y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1 \Rightarrow x=\pm 1$.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $(x;y)=(1;1)$ và $(x;y)=(-1;-1)$

Câu 35. *(Trường chuyên toán Quảng Ninh năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2x-xy+y+1=0 \\ x^2+3x-\sqrt{y^2+5x-1}-2=0 \end{cases}$.

Lời giải

$x^2-2x-xy+y+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-1-y)=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $y=x-1$

Với $x=1$ ta có phương trình $\sqrt{y^2+4}=2 \Leftrightarrow y=0$

Với $y=x-1$ ta có phương trình $x^2+3x-\sqrt{x^2+3x}-2=0$

Đặt $t=\sqrt{x^2+3x}$, $t\geq 0$, pt trở thành $t^2-t-2=0 \Leftrightarrow t_1=-1$ (loại), $t=2$ (thỏa mãn)

Với $t=2$ ta được $x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x_1=1;\ x_2=-4$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(1;0);(-4;-5)$.

Câu 36. *(Trường chuyên toán Quảng Trị năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} xy\geq 0 \\ x,y\geq -1 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=x.y \end{cases}$ $(S^2\geq 4P)$ hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} S-\sqrt{P}=3 \\ S+2+2\sqrt{S+P+1}=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S-\sqrt{P}=3 \\ S+2+2\sqrt{S+P+1}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S\geq 3; \\ P=(S-3)^2 \\ 2\sqrt{S+(S-3)^2+1}=7-S \end{cases}$$

$2\sqrt{S+(S-3)^2+1}=7-S \Rightarrow 4(S^2-5S+10)=49-14S+S^2$

$\Leftrightarrow 3S^2-6S-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=-1 \\ S=3 \end{array}\right.$

Thử lại thấy $S=3$ thỏa mãn. Khi đó ta được $\begin{cases} S=3 \\ P=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ xy=0 \end{cases}$.

Giải ra ta được tập nghiệm của hệ $S=\{(0;3);(3;0)\}$.

Câu 37. *(Trường chuyên toán Sơn La năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=x+2y \\ x^3+2x^2y=x^2+y^2-1 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=x+2y & (1) \\ x^3+2x^2y=x^2+y^2-1 & (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow x^2+(y-1)x-2y^2-2y=0$

$$\Delta=y^2-2y+1+8y^2+8y=9y^2+6y+1=(3y+1)^2$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-y+3y+1}{2}=y+1 \\ x=\dfrac{1-y-3y-1}{2}=-2y \end{array}\right.$

+Với $x=y+1$ thế vào (2) ta được:

$$x^3+2x^2(x-1)=x^2+(x-1)^2-1 \Leftrightarrow x^3+2x^3-2x^2=x^2+x^2-2x+1-1$$

$$\Leftrightarrow 3x^3-4x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=-1 \\ 3x^2-4x+2=0\ (vô\,nghiem) \end{array}\right.$$

+ Với $x=-2y$ thế vào (2) ta được:

$$-8y^3+2(-2y)^2.y=4y^2+y^2-1 \Leftrightarrow 5y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow x=-2\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

Kết luận: hệ phương trình có 3 nghiệm phân biệt: $(x;y)=\left\{(0;-1);\left(\dfrac{-2\sqrt{5}}{5};\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right);\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5};\dfrac{-\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$

Câu 38. *(Trường chuyên toán Thái Bình năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-xy^2-6y=0 \\ (x+y)(x+2y)=3(xy+2) \end{cases}$

Lời giải

$\begin{cases} x^3-xy^2-6y=0 & (1) \\ (x+y)(x+2y)=3(xy+2) & (2) \end{cases}$

Xét (2): $(x+y)(x+2y)=3(xy+2) \Leftrightarrow x^2+2y^2=6$

Từ (1): $x^3-xy^2-y(x^2+2y^2)=0 \Leftrightarrow x^3-xy^2-yx^2-2y^3=0$

$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2+xy+y^2)=0$

Ta để ý (x, y) = (0,0) không là nghiệm của hệ

do đó $x^2+xy+y^2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2>0$.

Vậy $x=2y \Rightarrow 6y^2=6 \Rightarrow y=\pm 1$

Nếu $y=1 \Rightarrow x=2$ (Thử lại thoả mãn)

Nếu $y=-1 \Rightarrow x=-2$ (Thử lại thoả mãn)

Vậy (x,y) = (2,1) và (x,y) = (−2,−1) là nghiệm của hệ.

Câu 39. *(Trường chuyên toán Thanh Hóa năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3-3y^2+3x-6y-4=0 \\ x^2-3x-2y+\sqrt{3x+y+5}=0 \end{cases}$

Lời giải

Từ Phương trình (1) ta có $x^3+3x=y^3+3y^2+6y+4$

$$\Leftrightarrow x^3+3x=(y+1)^3+3(y+1) \quad (3)$$

Đặt u = y + 1

Phương trình (3) trở thành $x^3+3x=u^3+3u$

$\Leftrightarrow \quad x^3+3x-u^3-3u=0$

$\Leftrightarrow (x-u)(x^2+xu+u^2+3)=0$

Do $x^2+xu+u^2+3=\left(x+\frac{u}{2}\right)^2+\frac{3}{4}u^2+3>0$ với mọi u, x

Khi đó x – u = 0 => x = u = y + 1 => y = 1 – x Thay vào (2)ta được

$$x^2-5x+2+2\sqrt{x+1}=0\left(ĐK\ x\geq -1\right)$$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4-(x+1)+2\sqrt{x+1}-1=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=\sqrt{x+1}-1 \\ x-2=-\sqrt{x+1}+1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=\sqrt{x+1} \\ 3-x=-\sqrt{x+1} \end{array}\right.$

TH1: $x-1=\sqrt{x+1}$ (ĐK x ≥ 1)

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=x+1$

$\Leftrightarrow$ x = 0(Loại) hoặc x = 3 (TMĐK) =>y = - 2

TH2: $3-x=\sqrt{x+1}$ (ĐK x ≤ 3)

$\Leftrightarrow x^2-6x+9=x+1$

$\Leftrightarrow x^2-7x+8=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7-\sqrt{17}}{2}(TMĐK)\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{17}-5}{2} \\ x=\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}(Loai) \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ pt (x, y) = (3; - 2); $\left(\dfrac{7-\sqrt{17}}{2};\dfrac{\sqrt{17}-5}{2}\right)$

Câu 40. *(Trường chuyên toán Thừa Thiên Huế năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x-2y-3}+2y^2+4y=0 \\ x^2+1=xy\end{cases}$.

Lời giải

Dễ thấy $x=0$ không thỏa (2) nên $(2)\Leftrightarrow y=x+\dfrac{1}{x}$. Thay vào (1), ta được

$$\sqrt{-x-\frac{2}{x}-3}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x-\frac{2}{x}-3}+2\left(x^2+2x+1\right)+2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x-\frac{2}{x}-3}+2(x+1)^2+2\left(\frac{1}{x}+1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow -x-\frac{2}{x}-3=x+1=\frac{1}{x}+1=0$$

$\Leftrightarrow x=-1$.

Với $x=-1$, ta suy ra $y=-2$.

Vậy hệ pt đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-1;-2)$.

Câu 41. *(Trường chuyên toán Tiền Giang năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x^3=2x+4y & (1) \\ 2x^3+y^3=3x+3y & (2)\end{cases}$

Lời giải

Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2) vế theo vế ta được

$$x^3-y^3=-x+y\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)+x-y=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=y \text{ do } x^2+xy+y^2+1=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+1>0,\forall x,y$$

Thay $y=x$ vào phương trình (1), ta được $3x^3=6x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0 \\ x=\pm\sqrt{2}.\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là $S = \left\{(0;);(\sqrt{2};\sqrt{2};(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right\}$.

Câu 42. *(Trường chuyên toán TP Hồ Chí Minh năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{9y+49}{x+y}+x+y=23 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=7(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0$ và $x+y \neq 0$. Với chú ý

$x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x+y-\sqrt{xy}\right)$.

Và $\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$, phương trình thứ hai của hệ có thể được viết lại thành

$$x+y-\sqrt{xy}=7. \quad (1)$$

Phương trình thứ nhất của hệ có thể được viết lại thành $9y+49+(x+y)^2=23(x+y)$, hay

$$9\left(7+\sqrt{xy}-x\right)+49+\left(\sqrt{xy}+7\right)^2=23\left(\sqrt{xy}+7\right).$$

Sau khi thu gọn, ta được $x(y-9)=0$. Từ đó $x=0$ hoặc $y=9$. . Kết hợp với (1), ta tìm được các nghiệm $(x;y)$ của hệ phương trình đã cho là (0, 7), *1, 9) và (4, 9).

Câu 43. *(Trường chuyên toán Vĩnh Long năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6} \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 0; y \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{xy}=\dfrac{5}{6} \\ x^2-y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=6 & (1) \\ x^2-y^2=5 & (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow x^4-5x^2-36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2=9 & (n) \\ x^2=-4 & (l) \end{array}\right.$

Với $x^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow y=2 \\ x=-3 \Rightarrow y=-2 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (3;2); (-3;-2).

Câu 44. *(Trường chuyên toán Vĩnh Phúc năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+\dfrac{x+2y}{xy}=6 \\ x^2+y^2+\dfrac{x^2+4y^2}{(xy)^2}=14 \end{cases}$

Lời giải

ĐKXĐ: $x, y \neq 0$

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{x}=6 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{4}{x^2}=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{x}+y+\dfrac{1}{y}=6 \\ \left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=20 \end{cases}$$

Đặt $x+\dfrac{2}{x}=a, y+\dfrac{1}{y}=b$

Ta có hệ $\begin{cases} a+b=6 \\ a^2+b^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ (a-b)^2=2\left(a^2+b^2\right)-(a+b)^2=4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ \left[\begin{array}{l} a-b=2 \\ a-b=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4, b=2 \\ a=2, b=4 \end{array}\right.$$

- $a=4, b=2 \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{x}=4 \\ y+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+2=0 \\ y^2-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\pm\sqrt{2} \\ y=1 \end{cases} (TMĐK)$

- $a=2, b=4 \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{x}=2 \\ y+\dfrac{1}{y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+2=0 \\ y^2-4y+1=0 \end{cases} (\text{vô nghiem})$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y)=\left\{\left(2+\sqrt{2};1\right),\left(2-\sqrt{2};1\right)\right\}$

Câu 45. *(Trường chuyên toán Khoa học tự nhiên năm 2023-2024)*

Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=30+\sqrt{x+y+120} \end{cases}$

Lời giải

Đặt $S=x+y, P=xy$. Ta có $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=S^3-3SP$

Khi đó hệ phương trình trở thành $\begin{cases} SP=30 \\ S^3-3SP=30+\sqrt[3]{S+120} \end{cases}$

Thay SP = 30 vào phương trình thứ hai ta có $S^3=120+\sqrt[3]{S+120}$

hay $S^3 + S = (S+120) + \sqrt[3]{S+120}$ Ta nhận thấy

Nếu $S > \sqrt[3]{S+120}$ thì $S^3 > S+120$, suy ra $S^3 + S > (S+120) + \sqrt[3]{S+120}$ loại.

Nếu $S < \sqrt[3]{S+120}$ thì $S^3 < S+120$ suy ra $S^3 + S < (S+120) + \sqrt[3]{S+120}$ loại.

Như vậy ta có $S = \sqrt[3]{S+120}, hay\, S^3 - S - 120$ Giải phương trình ta thu được S = 5 khi đó

$P = \dfrac{30}{S} = 6$. Vậy ta có $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$

Theo Vi-ét đảo thì x,y là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$

Giải phương trình ta được $(x,y) = (2,3),(3,2)$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm (x,y) là $(2,3)$ và $(3,2)$

Câu 46. *(Trường chuyên toán sư phạm năm 2023-2024)*

Tìm các cặp số nguyên (x, y) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2xy - x = 10 \\ x+y+xy=12 \end{cases}$

Lời giải

Bằng các phép biến đổi ta được hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2xy - x = 10 \\ x+y+xy=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2y-1)=10 \\ (x+1)(y+1)=12 \end{cases} \quad (1)$$

Vì 2, y nguyên nên x , 2y - 1 nguyên do đó 2y - 1 là ước lẻ của 10. Ta xét các trường hợp sau.

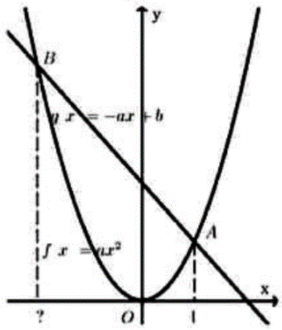
- 2y - 1 = 1 suy ra y = 1 và x = 10 thay vào (1) không thỏa mãn.
- 2y - 1 = - 1 suy ra y = 0 và x = - 10 thay vào (1) ta thấy không thỏa mãn.
- 2y - 1 = 5 suy ra y = 3 và x = 2 thay vào (1) ta thấy thỏa mãn.
- 2y - 1 = - 5 suy ra y = - 2 và x = - 2 thay vào (1) ta thấy không thỏa mãn.

Vậy cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn duy nhất là (x, y) = (2, 3) .

CHƯƠNG 5. HÀM SỐ

Câu 1. (Toán chuyên An Giang năm 2023-2024)

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f(x) = ax^2$ và $g(x) = -ax + b$ (a; b là các số thực), điểm chung thứ nhất có hoành độ bằng 1. Tìm hoành độ của điểm chung thứ hai của hai đồ thị.



Lời giải

Hình vẽ cho biết $a > 0$.

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$ax^2 = -ax + b \Leftrightarrow ax^2 + ax - b = 0 \ (*)$.

Gọi nghiệm còn lại của (*) là x_0. Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$1 + x_0 = -\frac{a}{a} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

Vậy hoành độ của điểm chung thứ hai là $x = -2$.

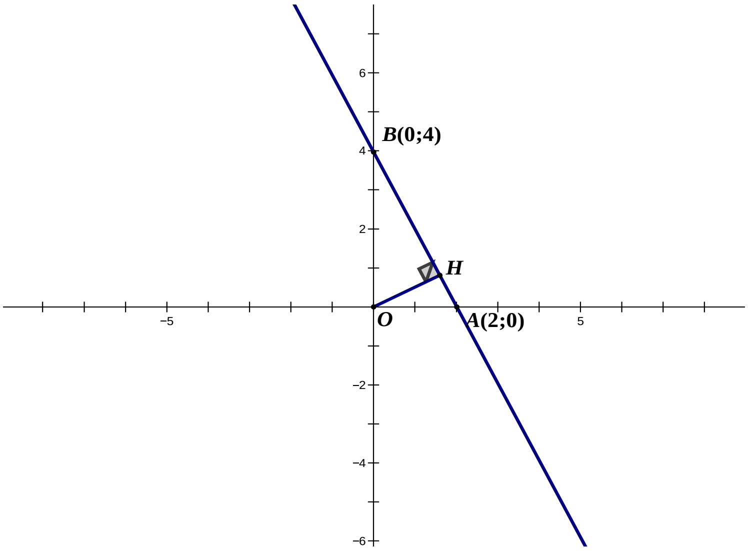
Câu 2. (Toán chuyên Yên Bái năm 2023-2024)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x - m - 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 1 = 2x_2$.

Câu 3. (Toán chuyên Bắc Ninh năm 2023-2024)

Vẽ đường thẳng d là đồ thị của hàm số $y = 2x - 4$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d.

Lời giải



Vẽ đường thẳng d là đồ thị của hàm số y = 2x – 4

Đường thẳng d cắt trục Ox tại A(2; 0), cắt trục Oy tại B(0; 4)

Tính được OA = 2; OB = 4. Gọi H là hình chiếu của O trên AB. Ta có

$$\frac{1}{\mathrm{OH}^2}=\frac{1}{\mathrm{OA}^2}+\frac{1}{\mathrm{OB}^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}\Rightarrow \mathrm{OH}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Vậy khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d là $\mathrm{OH}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Câu 4. (Toán chuyên Bến Tre năm 2023-2024)

Cho Parabol $y=\frac{1}{2}x^2\left(P\right)$, đường thẳng (d): $y=-\frac{2}{m}x+2$ với $m\neq 0$ và điểm I(0;2)

a)Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt.

b)Gọi *H, K* lần lượt là hình chiếu của *A, B* trên trục hoành. Chứng minh rằng tam giác IHK là tam giác vuông.

c)Chứng minh rằng độ dài của đoạn thẳng *AB* lớn hơn 4

Lời giải

a)Phương trình hoành độ giao điểm của(P) và (d) là

$$\frac{1}{2}x^2=-\frac{2}{m}x+2, m\neq 0\left(1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2+\frac{2}{m}x-2=0$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{4}{m}x-4=0$$

□Do $\Delta'_x=\frac{4}{m^2}+4>0, \forall m\neq 0$ nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt.

□Mặt khác, số nghiệm của phương trình(1) chính là số giao điểm của (P) và (d).

□Vậy đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm *A, B* phân biệt.

b)Ta đặt A$(x_1;y_1), B\left(x_2;y_2\right)$ hay A$\left(x_1;\frac{1}{2}x_1^2\right)$, B$\left(x_2;\frac{1}{2}x_2^2\right)$. Khi đó H$(x_1;o), K\left(x_2;0\right)$.

□Áp dụng Viết cho phương trình (1) với 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{4}{m} \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$

□Ta tính được $\begin{cases} HK^2 = (X_2 - X_1)^2 = (X_1 + X_2)^2 - 4X_1X_2 = \dfrac{16}{m^2} + 16 \\ IH^2 = (X_1 - 0)^2 + (0-2)^2 = X_1^2 + 4 \\ IK^2 = (X_2 - 0)^2 + (0-2)^2 = X_2^2 + 4 \\ IH^2 + IK^2 = X_1^2 + X_2^2 + 8 = (X_1 + X_2)^2 - 2X_1X_2 + 8 = \dfrac{16}{m^2} + 16 \end{cases}$

□Suy ra $HK^2 = IH^2 + IK^2$, hay tam giác IHK vuông tại I.

c) Ta đi chứng minh $AB^2 > 16$ với mọi $m \neq 0$. Thật vậy,

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + \left(\dfrac{1}{2}x_2^2 - \dfrac{1}{2}x_1^2\right)^2$

$= (x_2 - x_1)^2 + \dfrac{1}{4}(x_1 + x_2)^2(x_2 - x_1)^2$

$= (x_2 - x_1)^2 + \left[1 + \dfrac{1}{4}(x_1 + x_2)^2\right]$

$= \left(\dfrac{16}{m^2} + 16\right)\left(1 + \dfrac{4}{m^2}\right)$

$= \dfrac{64}{m^4} + \dfrac{80}{m^2} + 16 > 16, \forall m \neq 0$

Bình luận – Mấu chốt của bài toán là áp dụng định lý Vi-ét và công thức tính độ dài của đoạn thẳng từ hai điểm có tọa độ cho trước. Ta chú ý tính toán và biến đổi thật kỉ lưỡng để đảm bảo độ chính xác

Câu 5. (Toán chuyên Cần Thơ năm 2023-2024)

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $(d): y = 2mx - 4m + 5$ (m là tham số) và parabol $(P): y = x^2$. Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ba điểm O, A, B tạo thành tam giác vuông tại O.

Lời giải

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$x^2 = 2mx - 4m + 5$

$\Rightarrow x^2 - 2mx + 4m - 5 = 0$

$\Delta = 4m^2 - 16m + 20 > 0 (\forall m)$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$\begin{cases} x_A = \dfrac{2m + \sqrt{4m^2 - 16m + 20}}{2} = m + \sqrt{m^2 - 4m + 5} \Rightarrow y_A = \left(m + \sqrt{m^2 - 4m + 5}\right)^2 \\ x_B = \dfrac{2m - \sqrt{4m^2 - 16m + 20}}{2} = m - \sqrt{m^2 - 4m + 5} \Rightarrow y_B = \left(m - \sqrt{m^2 - 4m + 5}\right)^2 \end{cases}$

ΔAOB vuông tại O

$\Rightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2$ (Định lý Pythagoras)

$\Leftrightarrow x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2 = \left(x_A - x_B\right)^2 + \left(y_A - y_B\right)^2$

$\Leftrightarrow x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2 = x_A^2 - 2x_Ax_B + x_B^2 + y_A^2 - 2y_Ay_B + y_B^2$

$\Leftrightarrow x_Ax_B + y_Ay_B = 0$

$\Leftrightarrow \left(m+\sqrt{m^2-4m+5}\right)\left(m-\sqrt{m^2-4m+5}\right)+\left(m+\sqrt{m^2-4m+5}\right)^2\left(m-\sqrt{m^2-4m+5}\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(m+\sqrt{m^2-4m+5}\right)\left(m-\sqrt{m^2-4m+5}\right)=0\\ \left(m+\sqrt{m^2-4m+5}\right)\left(m-\sqrt{m^2-4m+5}\right)=-1\end{array}\right.$$

Giải (1):

$\left(m+\sqrt{m^2-4m+5}\right)\left(m-\sqrt{m^2-4m+5}\right)=0$

$\Leftrightarrow m^2 - \left(m^2-4m+5\right) = 0$

$\Leftrightarrow 4m-5=0$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{5}{4}$ (loại vì khi $m = \dfrac{5}{4}$ thì sẽ nhận được $x_B = 0$ và $y_B = 0$, điểm B trùng với điểm O không tạo được tam giác)

Giải (2):

$\left(m+\sqrt{m^2-4m+5}\right)\left(m-\sqrt{m^2-4m+5}\right)=-1$

$\Leftrightarrow m^2 - \left(m^2-4m+5\right) = -1$

$\Leftrightarrow 4m-5=-1$

$\Leftrightarrow m=1$ (nhận)

vậy $m=1$

Câu 6. (Toán chuyên Cao Bằng năm 2023-2024)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x+6$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Tính tổng độ dài OA và OB (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) là

$$x^2 = -x+6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=2\end{array}\right.$$

Tọa độ giao điểm A, B của (P) và (d) là $A(-3;9), B(2;4)$.

Do đó, tổng độ dài của hai đoạn thẳng OA và OB là

$$T = OA + OB = \sqrt{(0+3)^2+(0-9)^2} + \sqrt{(0-2)^2+(0-4)^2} = \sqrt{90}+\sqrt{20} \approx 13,96$$

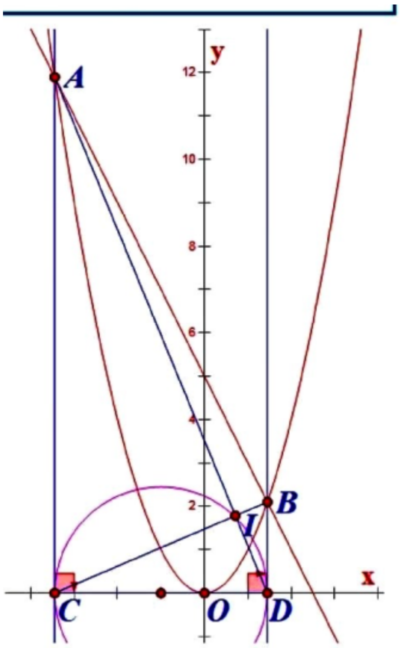
Câu 7. (Toán chuyên Đà Nẵng năm 2023-2024)

Trên cùng một mặt phẳng toạ độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = kx+5$. Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm A và **B.** Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của A, B trên trục Ox.

a) Khi k = -4, tính diện tích hình thang ABDC

b) Tìm tất cả các giá trị của k để AD và BC cắt nhau tại 1 điểm nằm trên đường tròn đường kính CD.

Lời giải



a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$x^2 = -4x + 5$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

$a + b + c = 1 + 4 - 5 = 0$

$x = 1, x = -5$

$x = 1 \Rightarrow y = x^2 = 1$

$x = -5 \Rightarrow y = x^2 = 2$

$A(-5;25)$ và $B(1;1)$

Diện tích hình thanh $ABDC$:

$\dfrac{(AC + BD).CD}{2} = \dfrac{(25+1).6}{2} = 78$ (đvdt)

b) + Gọi I là giao điểm của AD và BC.

Vì I thuộc đường tròn đường kính CD nên:

$\widehat{CID} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AD \perp BC$

+ Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$x^2 = kx + 5$

$\Leftrightarrow x^2 - kx - 5 = 0$

$c.a = -5 < 0$

Do đó hai đồ thị luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

Toạ độ hai giao điểm là $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$.

+ Theo định lí Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1 x_2 = -5 \end{cases}$

+ Phương trình đường thẳng AD có dạng: $y = ax + b$. Ta có:

$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_D = ax_D + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx_1 + 5 = ax_1 + b \\ 0 = ax_2 + b \end{cases}$

$\Rightarrow kx_1 + 5 = a(x_1 - x_2)$ (trừ theo vế)

+ Phương trình đường thẳng BC có dạng: $y = a'x + b'$. Tương tự như trên ta có:

$kx_2 + 5 = a'(x_2 - x_1)$

Nhân theo vế hai ý vừa có được:

$(kx_1 + 5)(kx_2 + 5) = -a.a'.(x_1 - x_2)^2$

$\Leftrightarrow k^2x_1x_2 + 5k(x_1 + x_2) + 25 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \Leftrightarrow -5k^2 + 5k^2 + 25 = k^2 + 20$

$\Leftrightarrow k^2 = 5 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{5}$

Vậy $k = \pm\sqrt{5}$

Câu 8. (Chung Hà Nam năm 2023-2024)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = 2mx - m^2 - m - 2$ (với m là tham số).

1. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) biết điểm M có hoành độ bằng -3.

2. Tìm điều kiện của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ là hai giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P), xác định m để $x_1y_2 + x_2y_1 = 2m^3 + 6$.

Lời giải

1. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) biết điểm M có hoành độ bằng -3.

$x = -3 \Rightarrow y = 9$

Vậy $M(-3;9)$.

2. Tìm điều kiện của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là hai giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P), xác định m để $x_1y_2 + x_2y_1 = 2m^3 + 6$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$x^2 = 2mx - m^2 - m - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 + m + 2 = 0$ (1)

$\Delta' = (-m)^2 - (m^2 + m + 2) = -m - 2$

(d) cắt parabol (P) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -m - 2 > 0 \Leftrightarrow m < -2$ (*)

Ta có $x_1 + x_2 = 2m,\quad x_1x_2 = m^2 + m + 2$ $x_1y_2 + x_2y_1 = x_1.x_2^2 + x_2.x_1^2 = x_1.x_2(x_1 + x_2) = 2m(m^2 + m + 2)$

$= 2m^3 + 2m^2 + 4m$ $2m^3 + 2m^2 + 4m = 2m^3 + 6 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$

Đối chiếu (*) vậy $m = -3$.

Câu 9. (Toán chuyên Hòa Bình năm 2023-2024)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y=(m+2)x+3$. Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt hai trục Ox; Oy lần lượt tại 2 điểm A và B sao cho tam giác AOB cân.

Lời giải

Ta có tam giác AOB cân tại O nên $OA=OB \Leftrightarrow \left|\dfrac{3}{m+2}\right|=3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{3}{m+2}=3\\ \dfrac{3}{m+2}=-3\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\ (TM)\\ m=-3\ (TM)\end{array}\right.$$

Câu 10. (Toán chuyên Hưng Yên năm 2023-2024)

Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (m + 2)x - m - 8$ (với m là tham số). Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung, có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 - x_2 = 0$.

Lời giải

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2=(m+2)x-m-8$

$\Leftrightarrow x^2-(m+2)x+m+8=0$

Vì phương trình có hai nghiệm nằm bên phải trục tung nên phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Rightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ m+2>0\\ m+8>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-28>0\\ m+2>0\\ m+8>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>2\sqrt{7}\\ m>-2\\ m>-8\end{cases} \Rightarrow m>2\sqrt{7}$$

Áp dụng Vi-et và kết hợp giả thiết ta có:

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases}x_1^3-x_2=0(1)\\ x_1+x_2=m+2\\ x_1x_2=m+8\end{cases} \Rightarrow (I) \Rightarrow \begin{cases}x_1=\sqrt[4]{m+8}\\ x_2=\left(\sqrt[3]{m+8}\right)^3\end{cases}$. Thay vào (1) ta có:

$\sqrt[4]{m+8}+\left(\sqrt[4]{m+8}\right)^3=m+2$. Đặt $\sqrt[4]{m+8}=a\left(a>\sqrt[4]{2\sqrt{7}+8}\right)$. Phương trình trở thành:

$a+a^3=a^4-6 \Leftrightarrow a^4-a^3-a-6=0$

$\Leftrightarrow (a-2)\left(a^3+a^2+2a+3\right)=0 \Rightarrow a=2$

$a=2 \Rightarrow \sqrt[4]{m+8}=2 \Leftrightarrow m=8(tmdk)$

Vậy $m=8$.

Câu 11. (THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội đề chung năm 2023-2024)

Cho parabol $(P): y=ax^2$ $(a\neq 0)$ đi qua điểm $A(-1;\dfrac{1}{2})$. Tìm toạ độ của điểm M trên parabol (P) sao cho khoảng cách từ điểm M đến trục tung gấp hai lần khoảng cách từ điểm M đến trục hoành.

Lời giải

Vì (P) $y = ax^2$ đi qua điểm $M(-1,\frac{1}{2})$ nên $a = \frac{1}{2}$

Gọi toạ độ của M là $(x_0, y_0) \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}.x_0^{\ 2}$

Theo giả thiết đề bài ta suy ra: $|x_0| = 2.|y_0| \Rightarrow |x_0| = x_0^{\ 2} \Rightarrow x_0 \in \{0;\pm 1\}$

Do đó toạ độ điểm M cần tìm là $(0,0);(1,\frac{1}{2});(-1,\frac{1}{2})$.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-1)x + 3$.

Câu 12. (Toán chuyên Tiền Giang năm 2023-2024)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 5$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$x^2 = 2(m-1)x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x - 3 = 0$

□Do $1.(-3) = -3 < 0$ nên phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

□Do đó đường thẳng (d) luôn cắt parabo; (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2.

□Theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) & (1) \\ x_1x_2 = -3 & (2) \end{cases}$

□Lấy $x_1 + 2x_2 = 5$ trừ (1) vế theo vế ta được $\begin{cases} x_2 = 7 - 2m \\ x_1 = 2(m-1) - (7-2m) = 4m - 9 \end{cases}$

□Thay vào (2) ta được $(7-2m)(4m-9) = -3 \Leftrightarrow -8m^2 + 46m - 60 = 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 23m + 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \frac{15}{4} \end{array}\right.$

Vay $m \in \left\{2; \frac{15}{4}\right\}$

Câu 13. (Toán chuyên Quốc học Huế năm 2023-2024)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = \frac{1}{2}x + m$. Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại#A.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$2x^2 = \frac{1}{2}x + m \Leftrightarrow 4x^2 - x - 2m = 0$ (1).

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = 1 + 32m > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{32}$.

Vì tam giác OAB vuông tại A nên $OA \perp AB$, hay $OA \perp (d)$.

Mặt khác, đường thẳng OA đi qua O nên OA có phương trình là $y = -2x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của OA và (P): $2x^2 = -2x$.

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 0; x_2 = -1$, suy ra $A(-1;2)$.

Vì (d) đi qua A nên $2 = \dfrac{1}{2}.(-1) + m$, suy ra $m = \dfrac{5}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy $m = \dfrac{5}{2}$ là giá trị cần tìm

Câu 14. (Toán chuyên Tây Ninh năm 2023-2024)

Cho hai đường thẳng $(d_1): y = ax + 5$ và $(d_2): y = 3x + b - 2$. Tìm a, b biết (d_1) và (d_2) cùng đi qua điểm $M(2;-3)$.

Lời giải

Do (d_1) và (d_2) cùng đi qua điểm $M(2;-3)$ nên ta có: $\begin{cases} 2a + 5 = -3 \\ 6 + b - 2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -7 \end{cases}$.

Vậy $a = -4; b = -7$

Câu 15. (Toán chuyên Sơn La năm 2023-2024)

Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (2m-3)x + 3m - 5$ (m là tham số)

a) Xác định giá trị của m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-2;3)$.

b) Tìm m để đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol (P).

Lời giải

a) $(d): y = (2m-3)x + 3m - 5$ đi qua $A(-2;3)$

$\Leftrightarrow A \in (d) \Leftrightarrow (2m-3).(-2) + 3m - 5 = 3 \Leftrightarrow -4m + 6 + 3m - 5 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow -m = 2 \Leftrightarrow m = -2$.

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$x^2 = (2m-3)x + 3m - 5 \Leftrightarrow x^2 - (2m-3)x - 3m + 5 = 0$ (*)

(d) tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$\Leftrightarrow \left[-(2m-3)\right]^2 - 4(-3m+5) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 + 12m - 20 = 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 = 11 \Leftrightarrow m^2 = \dfrac{11}{4} \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

Câu 16. (Chuyên Nam Định ban xã hội năm 2023-2024)

Tìm tọa độ của điểm M là giao điểm của đường thẳng $y=x+1$ với trục Ox.

Lời giải

Tọa độ giao điểm là $M\left(-1;0\right)$.

Câu 17. (Chuyên Nam Định toán chung năm 2023-2024)

Tìm tọa độ của điểm M là giao điểm của đường thẳng $y=x+1$ với trục Oy.

Lời giải

Tọa độ giao điểm là $M\left(0;1\right)$.

Câu 18. (Toán chuyên Lai Châu năm 2023-2024)

Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $\left(d\right): y=-x+m+1$ cắt $\left(P\right): y=x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1{}^2-x_2-4m+1=0$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ tương giao của $\left(P\right)$ và $\left(d\right)$: $x^2=-x+m+1 \Leftrightarrow x^2+x-m-1=0\left(*\right)$

để $\left(d\right)$ cắt $\left(P\right)$ tại 2 điểm phân biệt $x_1;x_2$ thì $\left(*\right)$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 1+4\left(m+1\right)>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{-5}{4}$

Ta có $x_1{}^2-x_2-4m+1=0\left(1\right)$

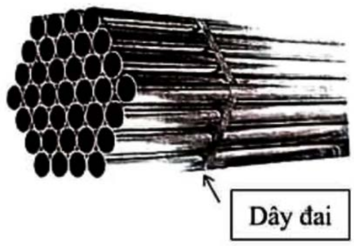
Vì x_1 là nghiệm của $\left(*\right)$ suy ra $x_1{}^2=-x_1+m+1$ thay vào $\left(1\right)$ ta được $-x_1+m+1-x_2-4m+1=0 \Leftrightarrow -\left(x_1+x_2\right)-3m+2=0$

Theo viet ta có: $x_1+x_2=-1 \Rightarrow m=1$(nhận)

Vậy $m=1$ thỏa mãn đề bài.

CHƯƠNG 6. CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ

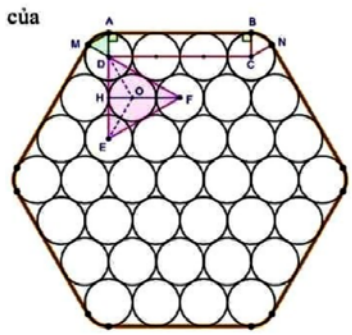
Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh An Giang năm 2023-2024)*
Một nhà máy sản xuất ống thép khi xuất xưởng các ống thép được bó lại tạo thành khối gồm 37 ống như hình vẽ. Biết các ống có dạng hình trụ đường kính đáy bằng nhau và bằng $10cm$. Tính độ dài của một sợi dây đai để buột các ống thép lại với nhau.



Lời giải

Đặt $d,r\left(cm\right)$ lần lượt là đường kính và bán kính của các ống thép $\Rightarrow d=10cm;r=d/2=5cm.$

Ký hiệu các điểm như hình minh họa bên.



Trong đó:

A, B, M, N, H là các tiếp điểm giữa dây đai với các ống thép.

D, C, E, F, O là tâm của một số ống thép.

Giả sử các ống thép tiếp xúc khít nhau và dây đai buộc chính xác.

Dễ thấy ABCD là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow AB=CD=3d=3.10=30\left(cm\right)\ (1)$$

Nên hiển hiên các điểm A, D, H, E thẳng hàng.

Xét ΔDEF có:

$$DE=2DH=2\sqrt{OD^2-OH^2}=2\sqrt{\left(2r\right)^2-r^2}=2\sqrt{3}r=10\sqrt{3}\left(cm\right)$$

Tương tự cũng tính được $DF=10\sqrt{3}\left(cm\right)$ và $EF=10\sqrt{3}\left(cm\right)$.

Như vậy $DE=EF=DF=10\sqrt{3}\left(cm\right)$ nên ΔDEF là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{EDF}=60^0$.

Suy ra $\widehat{ADM}=\widehat{EDF}=60^0$ (đối đỉnh).

Chiều dài cung AM bằng

$$\frac{\pi.5.60}{180}=\frac{5}{3}\pi\ \left(cm\right)\quad (2)$$

Từ hình vẽ, kết hợp (1) và (2) ta tính được chiều dài dây đai là:

$$l=6.\frac{5}{3}\pi+6.30=180+10\pi\left(cm\right).$$

Câu 2. *(Trường chuyên toán tỉnh Gia Lai năm 2023-2024)*

Bạn Tuấn lập kế hoạch tiết kiệm tiền để mua một cái laptop phục vụ cho việc học tập như sau: Hằng tháng, Tuấn tiết kiệm các khoản chi tiêu cá nhân để dành ra một triệu đồng. Vào ngày 01 hằng tháng Tuấn gửi vào tài khoản tiết kiệm của mình một triệu đồng và bắt đầu gửi vào ngày 01 tháng 7 năm 2023 để hưởng lãi suất *0,5%/tháng* theo hình thức lãi kép (*nghĩa là tiền lãi của tháng trước được cộng vào vốn để tính lãi cho tháng sau*) và duy trì việc này liên tục trong 3 năm. (Biết tài khoản ban đầu của Tuấn là 0 đồng và hàng tháng Tuấn không rút vốn, lãi).

a) Tính số tiền tiết kiệm Tuấn có được trong tài khoản tính đến ngày 02/8/2023.

b) Tính đến ngày 02/10/2023 thì số tiền trong tài khoản tiết kiệm của Tuấn là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

c) Hãy đề xuất công thức tính tổng số tiền trong tài khoản tiết kiệm sau kỳ gửi tháng thứ n (n là số tự nhiên, $n \geq 3$). Sử dụng công thức đó để tính số tiền Tuấn có được trong tài khoản tính đến ngày 02/7/2026.

Lời giải

a) Ta có: $1.000.000\left(1+0,005\right)+1.000.000=2.005.000$ (VNĐ)

b) Đến ngày 02/10/2023 thì số tiền trong tài khoản tiết kiệm của Tuấn là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Đến ngày 02/09/2023 số tiền có được trong tài khoản tiết kiệm là:

$2.005.000\left(1+0,005\right)+1.000.000=3.015.025$ (VNĐ)

Đến ngày 02/10/2023 số tiền có được trong tài khoản tiết kiệm là:

$$1.000.000\left[1+1,005+1,005^2+1,005^3\right]\simeq 4.030.100 \text{ (VNĐ)}$$

c) Hãy đề xuất công thức tính tổng số tiền trong tài khoản tiết kiệm sau kỳ gửi tháng thứ n (n là số tự nhiên, $n \geq 3$). Sử dụng công thức đó để tính số tiền Tuấn có được trong tài khoản tính đến ngày 02/7/2026.

Sau kỳ gởi tháng thứ n số tiền được tính theo công thức

$$T_n=1.000.000\left[1+1,005+1,005^2+\cdots+1,005^n\right]$$

Vào ngày 02/7/2026 bạn Tuấn đã tiết kiệm được 3 năm (36 tháng).

$$T_{36}=1.000.000\left[1+1,005+1,005^2+\cdots+1,005^{36}\right]$$

$$1,005T_{36}=1.000.000\left[1,005+1,005^2+\cdots+1,005^{36}+1,005^{37}\right]$$

$$1,005T_{36}-T_{36}=1.000.000\left[1,005^{37}-1\right]$$

$$\Rightarrow T_{36}=\frac{1.000.000\left[1,005^{37}-1\right]}{0,005}\approx 40.532.785 \text{ (VNĐ)}$$

Câu 3. *(Trường chuyên Đồng Tháp năm 2023-2024)*

Phiên chợ hè Lotus sử dụng hai loại thẻ: loại thẻ giá 3000 đồng và loại thẻ giá 4000 đồng. Vào dịp nghỉ hè, bạn An muốn dùng hết số tiền tiết kiệm của mình để mua x thẻ loại giá 3000 đồng và y thẻ loại giá 4000 đồng. Tìm số cách mua có đủ cả hai loại thẻ nếu tiền tiết kiệm của bạn An là 2023000 đồng.

Lời giải

Ta có phương trình $3000x+4000y=2023000 \Leftrightarrow 3x+4y=2023$

Suy ra $y=\dfrac{2023-3x}{4}\geq 1 \Rightarrow 1\leq x\leq \dfrac{2019}{3}=673$

Mặt khác ta có $y=\dfrac{2023-3x}{4}=\dfrac{2024-4x-1+x}{4}=506-x+\dfrac{x-1}{4}$

Để y nguyên thì $x-1$ chia hết cho 4, suy ra $x=1+4k, k\in\mathbb{Z}$.

Kéo theo $y=505-3k$.

Do đó $1\leq 1+4k\leq 673 \Leftrightarrow 0\leq k\leq 168$.

Vậy có 169 cặp $(x;y)$

Câu 4. *(Trường chuyên tin SGD Hà Nội năm 2023-2024)*

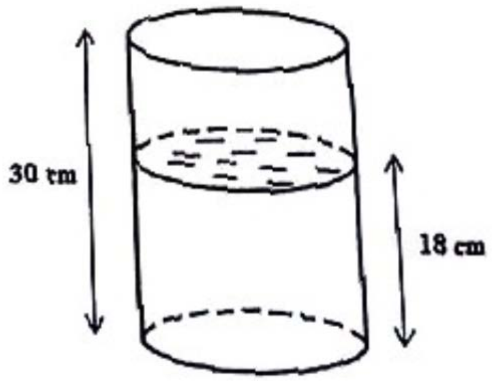
Trên bàn có hai túi kẹo: túi thứ nhất có 18 viên kẹo, túi thứ hai có 21 viên kẹo.An và Bình cùng chơi 1 trò chơi như sau: mỗi lượt chơi, 1 bạn sẽ lấy đi 1 viên kẹo từ 1 túi bất kì hoặc là mỗi túi lấy đi 1 viên kẹo. 2 bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình.Người đầu tiên không thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc, người còn lại là người thắng cuộc.Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.

Lời giải

Đầu tiên An sẽ bốc 1 viên từ túi thứ hai, hai túi lúc này lần lượt có 18 và 20 viên kẹo. Tại lượt tiếp theo, chiến thuật An sẽ là nếu Bình bốc như thế nào thì An sẽ bố y hệt như vậy. Khi đó ta thấy Bình sẽ phải bắt đầu bốc với hai túi đều có số chẵn viên kẹo, hay nói riêng, là còn kẹo. Như vậy khi đến lượt An thì An hoàn toàn có thể sao chép cách bốc của Bình, do cứ túi nào mà Bình bốc thì phải còn kẹo. Khi đó đến lượt Bình thì Bình lại phải bốc với hai túi còn số chẵn viên kẹo, và An vẫn có thể lặp lại chiến thuật như trên. Trong quá trình bốc này, ta thấy An luôn có thể bốc kẹo, cho nên An không thể là người thua cuộc, nói cách khác, An sẽ là người thắng cuộc với chiến thuật này.

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Hưng Yên năm 2023-2024)*

Có một bình thủy tinh hình trụ cao 30cm chứa nước, diện tích đáy bình bằng $\dfrac{1}{6}$ diện tích xung quanh, mặt nước cách đáy bình là 18cm (hình vẽ bên). Cần đổ thêm bao nhiêu lít nước nữa để nước vừa đầy bình (Bỏ qua bề dày của bình, cho t = 3,14 và kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) ?



Lời giải

Diện tích đáy bình bằng $\frac{1}{6}$ diện tích xung quanh $\Rightarrow \pi r2 = \frac{1}{6}.2\pi rh \Rightarrow h = 3r$

Ta có: $h = 30 \Rightarrow r = 10$

Thể tích nước cần đổ thêm để vừa đầy bình là: $V = \pi r^2.(h - 18) = 3,14.10^2.12 = 3768(cm^3)$

Câu 5. *(Trường chuyên Long An năm 2023-2024)*

Nhân dịp kỉ niệm 10 năm thành lập, cửa hàng GNH có thực hiện chương trình giảm giá cho mặt hàng X là 20% và mặt hàng Y là 15% so với giá niêm yết. Bà Giới mua 2 món hàng X và 1 món hàng Y phải trả số tiền là 395000 đồng. Ngày cuối cùng của chương trình, cửa hàng thay đổi bằng cách giảm giá mặt hàng X là 30% và mặt hàng Y là $25\%.$ Vào ngày hôm đó, cô Định mua 3 món hàng X và 2 món hàng Y thì trả số tiền là 603000 đồng. Tính giá niêm yết của mỗi món hàng X và Y *(giá niêm yết là giá ghi trên món hàng nhưng chưa thực hiện giảm giá).*

Lời giải:

Gọi giá niêm yết của mặt hàng X và Y lần lượt là x, y (đồng)

Lập được hệ phương trình $\begin{cases} 2x\left(1-20\%\right)+y\left(1-15\%\right) & = 395000 \\ 3x\left(1-30\%\right)+2y\left(1-25\%\right) & = 603000 \end{cases}$

Giải được $\begin{cases} x = 130000 \\ y = 220000 \end{cases}$

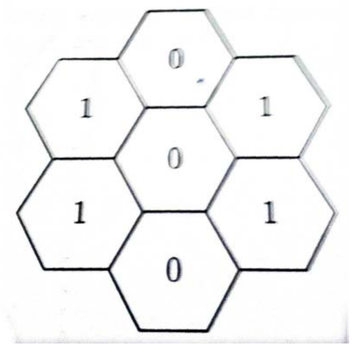
Kết luận đúng.

Câu 6. *(Trường chuyên Sư phạm Hà Nội năm 2023-2024)*

Bảy lục giác đều được sắp xếp và tô màu bằng hai màu trắng, đen như ở Hình 1. Mỗi lần cho phép chọn ra một lục giác đều, đổi màu của lục giác đó và của tất cả các lục giác đều chung cạnh với lục giác đó (trắng thành đen và đen thành trắng). Chứng minh rằng dù có thực hiện cách làm trên bao nhiêu lần đi nữa, cũng không thể nhận được các lục giác đều được ô màu như ở Hình 2.

Lời giải.:

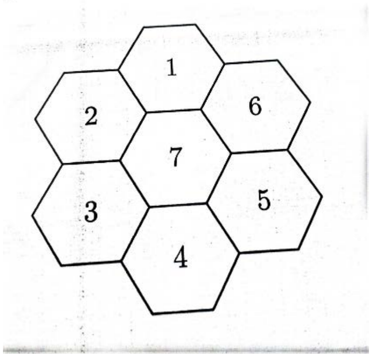
Cách 1. Đánh số vào các hình lục giác như hình vẽ.



Ta xét một hình lục giác được điền số a_i thì $a_i \equiv b_i$ (mod 2) trong đó b_i là tổng các số được điền trong các hình lục giác chung cạnh với hình lục giác đang xét. Do đó, khi đổi màu theo đề bài thì số dư trong phép chia cho 2 của tổng các số trong các hình lục giác tô đen luôn không đổi.

Đối với hình 1 thì số dư này bằng 1, còn đối với hình 2 thì số dư này bằng 0 nên không thể có cách đổi màu nào biến hình 1 thành hình 2.

Cách 2.



Xét các ô 2,3,5,6. Mỗi bước ta đổi màu hai hoặc cả bốn ô đó nên số ô đen không thay đổi tính chẵn, lẻ. Ban đầu trong bốn ô nói trên có hai ô đen nên không thể có trạng thái trong bốn ô đó có đúng một ô đen.

CHƯƠNG 7. CÁC BÀI TOÁN SỐ HỌC VÀ TỔ HỢP

Câu 1. *(Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2023-2024)*

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn đẳng thức:

$$x^3+x^2y-2xy+2x-2y^2+2y+1=0$$

b) Cho 31 điểm bất kì nằm bên trong hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng 12 . Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 nằm bên trong hình vuông ABCD và không chứa điểm nào trong 31 điểm đã cho.

Lời giải

a) Ta có: $(x+y)\left(x^2-2y+2\right)=-1$. Do đó có hai khả năng xảy ra:

TH1: $\begin{cases}x+y=1\\x^2-2y+2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-x\\x^2+2x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$.

TH2: $\begin{cases}x+y=-1\\x^2-2y+2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1-x\\x^2+2x+3=0\end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy có duy nhất cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn yêu cầu là: (-1 ; 2) .

b) Ta chia hình vuông ABCD thành 36 hình vuông có độ dài cạnh bằng 2. Khi đó có ít nhất một hình vuông không chứa điểm nào trong 31 điểm đã cho . Hình tròn nội tiếp hình vuông đã cho là hình tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2023-2024)*

1) Tìm các bộ ba số nguyên dương (x,y,z) thỏa mãn đẳng thức dưới đây:

$$x^3+y^3+x^2(3y+2z)+y^2(3x+2z)+z^2(x+y)+4xyz=2023.$$

2) Trên mặt phẳng cho 2×2024 điểm phân biệt, trong đó không có bất kì 3 điểm nào thẳng hàng người ta tô 2024 điểm trong các điểm màu đỏ và tô 2024 điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh rằng, bao giờ cũng tồn tại một cách nối tất cả các điểm màu đỏ với tất cả các điểm màu xanh bởi 2024 đoạn thẳng (mỗi đoạn thẳng có hai điểm đầu mút là một cặp điểm đỏ-xanh) sao cho hai đoạn thẳng bất kì trong đó không có điểm chung .

Lời giải

1) $x^3+y^3+x^2(3y+2z)+y^2(3x+2z)+z^2(x+y)+4xyz=2023.$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+3x^2y+2x^2z+3xy^2+2y^2z+z^2x+z^2y+4xyz=2023$

$\Leftrightarrow \left(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\right)+\left(2x^2z+2y^2z+4xyz\right)+\left(z^2x+z^2y\right)=2023$

$\Leftrightarrow (x+y)^3+2z(x+y)^2+z^2(x+y)=2023$

$\Leftrightarrow (x+y)\left[(x+y)^2+2z(x+y)+z^2\right]=2023$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x+y+z)^2 = 7.17^2$$

Vì x,y,z nguyên dương nếu ta có x + y + z > 0, do đó : $\begin{cases} x+y=7 \\ x+y+z=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ z=10 \end{cases}$

Có x + y = 7 mà x, y nguyên dương nên ta có

x	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1

KL: các bộ số cần tìm là (1;6;10);(3;4;10);(94;3;10);(5;2;10);(6;1;10)

2) Xét tất cả các cách nối 2024 cặp điểm (đỏ với xanh) bằng 2024 đoạn thẳng. các cách nối như vậy luôn luôn tồn tại do chỉ có 2024 cặp điểm nên số tất cả các cách nối như vậy là hữu hạn.

Do đó, tìm được một cách nối có tổng độ dài bằng các đoạn thẳng là ngắn nhất.

Ta chứng minh rằng đây là một cách nối phải tìm

Thật vậy , giả sử ngược lại ta có hai đoạn thẳng AX và BY mà cắt nhau tại điểm O (giả sử A và B tô màu đỏ, còn X và Y tô màu xanh).khi đó nếu ta thay đoạn thẳng AX và BY bằng hai đoạn thẳng AY và BX, các đoạn thẳng khác giữ nguyên thì ta có cách nối này có tính chất:

$AY+BX < (AO+OY) = (AO+OX)+(BO+OY) \Rightarrow AY+BX < AX+BY$

Như vậy , việc thay hai đoạn thẳng AX và BY bằng hai đoạn thẳng AY và BX , ta nhận được một cách nối mới có tổng độ dài các đoạn thẳng là nhỏ hơn. Vô lý, vì trái với giả thiết là đã chọn một cách nối có tổng các độ dài là bé nhất.

Điều vô lý chứng tỏ: cách nối có tổng độ dài các đoạn thẳng là ngắn nhất là không có điểm chung.

Câu 3. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2023-2024)*

Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=18(x+y+z)$.

1. Chứng minh rằng $x+y+z$ chia hết cho 6.
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức F = xyz.

Lời giải

1.Từ giả thiết ta có $(x^3-x)+(y^3-y)+(z^3-z)=17(x+y+z)$

Tích của ba số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 6 nên $x^3-x=(x-1)x(x+1)\vdots 6$

Tương tự $y^3-y\vdots 6,\ z^3-z\vdots 6 \Rightarrow\ 17(x+y+z)\vdots 6$

Mà 17 và 6 nguyên tố cùng nhau nên $x+y+z\vdots 6$

2. Ta có $x+y+z=6m,\ x^3+y^3+z^3=108m,$ với $m\in N^*$.

Vì $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}\ge\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$ nên $\dfrac{108m}{3}\ge\left(\dfrac{6m}{3}\right)^3 \Leftrightarrow m^2\le\dfrac{9}{2}$, suy ra $m\le 2$

Lúc này $F = xyz \le \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3 \le \left(\dfrac{12}{3}\right)^3 = 64$ (1)

Từ $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ suy ra

$108m - 3F = 6m(36m^2 - 3(xy+yz+zx)) \Leftrightarrow F = 36m - 6m(12m^2 - (xy+yz+zx))$.

Do đó $F \vdots 6$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $F \le 60$ (3).

Đẳng thức ở (3) xảy ra, chẳng hạn khi

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ 60 = 72 - 12(48-(xy+yz+zx)) \\ xyz = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ xy+yz+zx=47 \\ xyz=60 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y;z) \text{ là hoán vị của } (3;4;5)$$

Vậy giá trị lớn nhất của F là 60, đạt được chẳng hạn khi $(x;y;z)$ là hoán vị của $(3;4;5)$

Câu 4. *(Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2023-2024)*

Tìm tất cả giá trị nguyên của n để $n^2 + 2026$ là một số chính phương.

Lời giải

Đặt $n^2 + 2026 = m^2 \left(m \in \mathbb{N}^*, m \ge 46\right) \Leftrightarrow (m-n)(m+n) = 2026 = 2.1013$ (*)

Vì $m-n, m+n$ cùng tính chẵn lẻ $\Rightarrow$ không có cặp số m, n thỏa phương trình (*)

Vậy không có giá trị nguyên của n thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2023-2024)*

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2+xy+y^2 = x^2y^2$.

b) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

Lời giải

a) Ta có $x^2+xy+y^2 = x^2y^2$

$$\Leftrightarrow x^2 - x^2y^2 + xy + y^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (1-y^2)x^2 + xy + y^2 = 0 \quad (1)$$

Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $1-y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$.

- Với $y=1$ ta có $x^2+x+1 = x^2 \Leftrightarrow x=-1$.
- Với $y=-1$ ta có $x^2-x+1 = x^2 \Leftrightarrow x = 1$.

Trường hợp 2: $1-y^2 \ne 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \ne 1 \\ y \ne -1. \end{cases}$

Xét phương trình bậc hai $(1-y^2)x^2 + xy + y^2 = 0$, có

$$\Delta_x = y^2 - 4\left(1 - y^2\right)y^2 = y^2\left(4y^2 - 3\right).$$

- Nếu $y = 0$ ta có $x = 0$.
- Nếu $y \neq 0$, phương trình (1) có nghiệm nguyên khi và chỉ khi $4y^2 - 3$ là số chính phương.

Đặt $4y^2 - 3 = k^2 \ (k \in \mathbb{N})$.

$$4y^2 - 3 = k^2 \Leftrightarrow (2y-k)(2y+k) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2y - k = 1\\ 2y + k = 3\end{cases}\\ \begin{cases}2y - k = -3\\ 2y + k = -1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y = 1\\ k = 1\end{cases} (\text{loại})\\ \begin{cases}y = -1\\ k = 1\end{cases} (\text{loại}).\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $(0;0)$, $(1;-1)$, $(-1;1)$.

b) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, ta có $p = 2k+1$

$(k \in \mathbb{N},\ k > 1)$.

Do đó ta có $(p-1)(p+1) = 2k(2k+2) = 4k(k+1) \ \vdots\ 8$

- Nếu $p = 3k \Rightarrow p = 3$ (loại vì p là số nguyên tố lớn hơn 3).
- Nếu $p = 3k+1$, ta có $(p-1)(p+1) = 3k(3k+2) \ \vdots\ 3$.
- Nếu $p = 3k+2$, ta có $(p-1)(p+1) = 3(3k+1)(k+1) \ \vdots\ 3$.

Vì $(3;8) = 1$ nên $(p-1)(p+1) \ \vdots\ 24$ với p là số nguyên tố lớn hơn 3.

Câu 6. *(Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2023-2024)*

a) Kí hiệu S(n) là tổng các chữ số của số nguyên dương n. Biết a và b là hai số nguyên dương thỏa S(a) = S(b) = S(a + b) . Chứng minh rằng a và b chia hết cho 9.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + (x+1)^2 = y^4 + (y+1)^4$

Lời giải

a) Ta áp dụng tính chất a - S (a) $\vdots$ 9 với mọi số nguyên dương a (bạn đọc tự chứng minh tính chất này)

Vậy (a + b - S(a) = a + b - S(a+b)$\vdots$9

$\Rightarrow (a - S(a)) + b \vdots 9 \Rightarrow b \vdots 9$

Tương tự , ta được $a \vdots 9$. Vậy a , b chia hết cho 9 (đpcm)

b) Phương trình viết lại:

$$2x^2 + 2x + 1 = 2y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x + 2 = 2y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 1 = \left(y^2 + y + 1\right)^2$$

Vậy từ đây ta được x^2+x+1 là số chính phương hay $4x^2+4x+4=(2x+1)^2+3$ là số chính phương.

Đặt $(2x+1)^2+3=t^2\,(t\in Z)$ (**)

Ta có:

$$(**)\Leftrightarrow t^2-(2x+1)^2=3$$
$$\Leftrightarrow (t-2x-1)(t+2x+1)=3$$

Xét tất cả các trường hợp sau:

$t-2x-1$	1	3	-1	-3
$t+2x+1$	3	1	-3	-1
t	2	2	-2	-2
x	0	-1	-1	0

Vậy $x=0\,và\,x=-1$

Với x = 0 thay vào (*), ta được:

$$(*)\Leftrightarrow (y^2+y+1)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2+y+1=1\Leftrightarrow y^2+y=0\Leftrightarrow y(y+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\\ y=-1\end{array}\right.\\ y^2+y+1=-1(vô\,nghiem)\end{array}\right.$$

Với x = - 1 thay vào (*), ta được:

$$(*)\Leftrightarrow (y^2+y+1)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\\ y=-1\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có các nghiệm (x; y) = (0; 0); (0; - 1); (- 1; 0); (- 1; - 1)

Câu 7. *(Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2023-2024)*

Tìm tất cả cặp sốnguyên $(x;y)$ thoả mãn phương trình $x^2-2y^2-xy+2x+5y-5=0$.

Lời giải

$x^2-2y^2-xy+2x+5y-5=0\,(x,y\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+3x+xy-2y^2+3y-x+2y-3=2$

$\Leftrightarrow x(x-2y+3)+y(x-2y+3)-(x-2y+3)=2$

$\Leftrightarrow (x+y-1)(x-2y+3)=2$

Do đó ta có bốn trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases} x+y-1=2\\ x-2y+3=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{3}\\ y=\dfrac{5}{3}\end{cases}$ (Loại)

Trường hợp 1: $\begin{cases} x+y-1=1\\ x-2y+3=2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=1\\ y=1\end{cases}$ (Nhận)

Trường hợp 1: $\begin{cases} x+y-1=-1 \\ x-2y+3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases}$ (Loại)

Trường hợp 1: $\begin{cases} x+y-1=-2 \\ x-2y+3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ (Nhận)

Vậy cặp $(x;y)$ nguyên cần tìm là: $(1;1)$ và $(-2;1)$

Câu 8. *(Trường chuyên tỉnh Đăk lak năm 2023-2024)*

1) Cho 9 hình vuông có độ dài các cạnh là 9 số nguyên dương liên tiếp. Gọi S là tổng diện tích của 9 hình vuông đã cho. Tồn tại hay không một hình vuông có cạnh là một số nguyên dương và có diện tích là S.

2) Vẽ bất kì 17 đường tròn, mỗi đường tròn có độ dài đường kính là một số nguyên dương. Chứng minh rằng trong 17 đường tròn đó ta luôn chọn được năm đường tròn có tổng độ dài các đường kính là một số chia hết cho 5.

Lời giải

1) Gọi $x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, x+6, x+7, x+8$ với x là số nguyên dương lần lượt là cạnh của các hình vuông đã cho, suy ra

$S = x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 + (x+5)^2 + (x+6)^2 + (x+7)^2 + (x+8)^2$

Rút gọn $S = 9x^2 + 72x + 204$. Gọi hình vuông cần tìm có cạnh là y với y là số nguyên dương, ta có $9x^2 + 72x + 204 = y^2\,(1)$

Ta có $9x^2 + 72x + 204 = 9\left(x^2 + 8x + 22\right) + 6$ chia cho 9 dư 6.

Mặt khác y^2 chia cho 9 có số dư là $r \in \{0;1;4;7\}$ suy ra phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy không tồn tại hình vuông thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2) Gọi các số tự nhiên $a_1, a_2, ..., a_{17}$ lần lượt là độ dài đường kính 17 đường tròn đã vẽ và $r_1, r_2, ..., r_{17}$ là số dư khi chia lần lượt $a_1, a_2, ..., a_{17}$ cho 5. Ta có: $r_1, r_2, ..., r_{17} \in \{0;1;2;3;4\}$

Nếu trong 17 số $r_1, r_2, ..., r_{17}$ tồn tại năm số bằng nhau, chẳng hạn: $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5$ thì ta có $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ chia hết cho 5.

Nếu trong 17 số $r_1, r_2, ..., r_{17}$ không có năm số nào bằng nhau, tức là tối đa 4 số bằng nhau, chẳng hạn có 4 nhóm 4 số bằng nhau, như vậy 17 số dư được phân thành 4 lớp mà mỗi lớp có 4 phần tử và 1 lớp có 1 phần tử với các phần tử đại diện là 0;1;2;3;4. Lúc đó lấy trong mỗi lớp 1 số sẽ được năm số có giá trị đôi một khác nhau. Chẳng hạn $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq r_4 \neq r_5$ và $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 10$ nên $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ chia hết cho 5.

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2023-2024)*

Tìm các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2023^z + 35$.

Lời giải

Do vai trò của x, y đối xứng nhau nên giả sử $x \le y$.

Với $z = 0$ thì

$$x^2 + y^2 = 36. \qquad (1)$$

Vì $x \le y$ nên $x^2 \le 18 \Rightarrow 0 \le x \le 4$.

Thử trực tiếp, ta được $\begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases}$ thỏa (1).

Với $z \ge 1$:

Do $2023 \vdots 7, 35 \vdots 7$ nên

$$x^2 + y^2 \vdots 7. \qquad (2)$$

Đặt $x = 7a + r, y = 7b + t$ với a, b, r, t là các số tự nhiên thỏa $0 \le r \le 6, 0 \le t \le 6$. Khi đó

$$x^2 + y^2 = 49a^2 + 14ar + 49b^2 + 14bt + r^2 + t^2. \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $r^2 + t^2 \vdots 7$.

Thử trực tiếp, ta thấy chỉ có $r = 0, t = 0$ thỏa mãn.

Do đó $x = 7a, y = 7b$.

Thay vào phương trình ban đầu:

$$49a^2 + 49b^2 = 2023^z + 35 \Leftrightarrow 7\left(a^2 + b^2\right) = 289^z.7^{z-1} + 5.$$

Nếu $z > 1$ ta có vế trái chia hết cho 7 và vế phải không chia hết cho 7 (vô lý).

Nếu $z = 1$ ta có:

$$7\left(a^2 + b^2\right) = 289 + 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 42.$$

Dễ dàng kiểm tra được phương trình $a^2 + b^2 = 42$ không có nghiệm tự nhiên.

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 6, \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 6 \\ y = 0. \\ z = 0 \end{cases}$$

Câu 10. *(Trường chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2023-2024)*

Phiên chợ hè Lotus sử dụng hai loại thẻ: loại thẻ giá 3000 đồng và loại thẻ giá 4000 đồng. Vào dịp nghỉ hè, bạn An muốn dùng hết số tiền tiết kiệm của mình để mua x thẻ loại giá 3000

đồng và y thẻ loại giá 4000 đồng. Tìm số cách mua có đủ cả hai loại thẻ nếu tiền tiết kiệm của bạn An là 2023000 đồng.

Lời giải

Ta có phương trình $3000x+4000y=2023000 \Leftrightarrow 3x+4y=2023$

Suy ra $y=\dfrac{2023-3x}{4}\geq 1 \Rightarrow 1\leq x\leq \dfrac{2019}{3}=673$

Mặt khác ta có $y=\dfrac{2023-3x}{4}=\dfrac{2024-4x-1+x}{4}=506-x+\dfrac{x-1}{4}$

Để y nguyên thì $x-1$ chia hết cho 4, suy ra $x=1+4k, k\in\mathbb{Z}$.

Kéo theo $y=505-3k$.

Do đó $1\leq 1+4k\leq 673 \Leftrightarrow 0\leq k\leq 168$.

Vậy có 169 cặp $(x;y)$

Câu 11. *(Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2023-2024)*

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^{2024}+2^{2027}+2^n$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử số tự nhiên n thỏa mãn đề bài. Khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho

$2^{2024}+2^{2027}+2^n=k^2 \Leftrightarrow 9.2^{2024}+2^n=k^2 \Leftrightarrow \left(k+3.2^{1012}\right)\left(k-3.2^{1012}\right)=2^n$.

$$\Rightarrow \begin{cases} k+3.2^{1012}=2^a \\ k-3.2^{1012}=2^b \\ a,b\in\mathbb{N}, a+b=n \end{cases} \Rightarrow 2^a-2^b=3.2^{1013}$$

$$\Leftrightarrow 2^b(2^{a-b}-1)=3.2^{1013} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{a-b}-1=3 \\ 2^b=2^{1013} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ b=1013 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1015 \\ b=1013 \end{cases} \Rightarrow n=2028$$

Vậy với $n=2028$ thì $2^{2024}+2^{2027}+2^n$ là số chính phương

Câu 12. *(Trường chuyên Hà Nội chuyên tin năm 2023-2024)*

1) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh số $A=2^{p^2+2}-8$ chia hết cho 21.
2) Tìm tất cả các số nguyên x và y thoả mãn $x^3-y^3=2(x-y)^2+17$

Lời giải

1) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ nên p^2+2 là số lẻ $\Rightarrow$ $2^{p^2+2}\equiv 2(mod\,3)$ $\Rightarrow$ $2^{p^2+2}-8\vdots 3(1)$

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p^2\equiv 1(mod\,3)$ $\Rightarrow$ $p^2+2\vdots 3$ $\Rightarrow$ $2^{p^2+2}\equiv 1(mod\,7)$ $\Rightarrow$ $2^{p^2+2}-8\vdots 7(2)$.

Mà $(3,7)=1$ (3). Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow$ $2^{p^2+2}-8 \vdots 21$ (ĐPCM).

2) $x^3-y^3=2(x-y)^2+17$.

Đặt $x-y=a, xy=b\left(a^2\geq -4b\right)$.

Vì $2(x-y)^2+17>0$ $\Rightarrow$ $x^3-y^3>0$ $\Rightarrow$ $x-y>0$ $\Rightarrow$ $a>0$.

Ta có: $x^3-y^3=2(x-y)^2+17 \Rightarrow$ $a^3+3ab=2a^2+17$ $\Rightarrow$ $17 \vdots a$ $\Rightarrow$ $a\in\{1;17\}$ (do $a>0$)

TH1: $a=1$ $\Rightarrow$ $b=6$ $\Rightarrow$ $(x,y)\in\{(3,2);(-2,-3)\}$ (thử lại thoả mãn)

TH2: $a=17$ $\Rightarrow$ $b=\dfrac{-254}{3}$(loai)

Vậy $(x,y)\in\{(3,2);(-2,-3)\}$

Câu 13. *(Trường chuyên Hà Nội chuyên toán năm 2023-2024)*

1) Cho ba số nguyên a,b và c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-2abc$ chia hết cho 6. Chứng minh abc chia hết cho 54.
2) Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x,y) thỏa mãn $x^3y-x^2y-4x^2+5xy-y^2=0$.

Lời giải

1) Nếu a,b,c đều không chia hết cho 3 thì a^2,b^2,c^2 chia cho 3 dư 1.

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2+c^2 \not\vdots\, 3\\ abc \not\vdots\, 3\end{cases}\Rightarrow M \not\vdots\, 3 \text{ (vô lý)}$$

Nếu a,b,c có một hoặc hai số không chia hết cho 3 và các số còn lại chia hết cho 3

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2+c^2 \not\vdots\, 3\\ abc \vdots 3\end{cases}\Rightarrow M \not\vdots\, 3 \text{ (vô lý)}$$

Vậy $a,b,c \vdots 3 \Rightarrow abc \vdots 27$ (1)

Lại có, nếu a,b,c đều lẻ thì $\begin{cases}a^2+b^2+c^2 \not\vdots\, 2\\ 2abc \vdots 2\end{cases}\Rightarrow M \not\vdots\, 2$ (vô lý)

Vậy a,b,c có ít nhất một số chẵn $\Rightarrow abc \vdots 2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow abc \vdots 54$ vì $(2,27)=1$.

2) $x^3y-x^2y-4x^2+5xy-y^2=0 \Leftrightarrow xy\left(x^2-x+1\right)=(2x-y)^2$ (1)

Gọi $d=(x;y)\Rightarrow x=da; y=db$ với $(a;b)=1$ và a,b,d nguyên dương.

Khi đó (1) trở thành $d^2ab\left(d^2a^2-da+1\right)=d^2(2a-b)^2 \Leftrightarrow ab\left(d^2a^2-da+1\right)=(2a-b)^2$.

Suy ra $(2a-b)^2 \vdots a$ và $(2a-b)^2 \vdots b$

Ta có $(2a-b)^2 \vdots a$ mà $(a;b)=1 \Rightarrow (2a-b;a)=1 \Rightarrow \left((2a-b)^2;a\right)=1$ do đó $a=1$.

Từ $(2a-b)^2 \vdots b \Rightarrow 4a^2 \vdots b$ mà $(a;b)=1 \Rightarrow 4 \vdots b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=2 \text{ (do } b>0) \\ b=4 \end{array}\right.$

+) TH1: $a=b=1 \Rightarrow x=y=d$.

Thay vào giả thiết ta được $d^4-d^3=0 \Rightarrow d=1$ (do d nguyên dương) $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

+) TH2: $a=1;b=2$ không thỏa mãn.

+) TH3: $a=1;b=4$ suy ra $x=d;y=4d$

Thay vào giả thiết ta được $d^4-d^3=0 \Rightarrow d=1$(do d nguyên dương) $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$.

Thử lại ta thấy cặp số $(x;y) \in \{(1;1);(1;4)\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14. *(Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh năm 2023-2024)*

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 thì $A=n^{2024}+n^{2023}+n^4-n+1$ không phải là số nguyên tố.

Lời giải

Ta có $A=n^{2024}+n^{2023}+n^4-n+1=\left(n^{2024}-n^2\right)+\left(n^{2023}-n\right)+\left(n^4+n^2+1\right)$

$=n^2\left(n^{2022}-1\right)+n\left(n^{2022}-1\right)+\left(n^4+n^2+1\right)=\left(n^2+n\right)\left(n^{2022}-1\right)+\left(n^4+n^2+1\right)$

Ta có $\left(n^2+n\right)\left(n^{2022}-1\right)=\left(n^2+n\right)\left[\left(n^3\right)^{674}-1\right]$

$=\left(n^2+n\right)\left(n^3-1\right).B=\left(n^2+n\right)(n-1)\left(n^2+n+1\right).B$ chia hết cho n^2+n+1

Lại có $n^4+n^2+1=n^4+2n^2+1-n^2=\left(n^2+1\right)^2-n^2$

$=\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$ chia hết cho n^2+n+1

Vậy $A=n^{2024}+n^{2023}+n^4-n+1$ chia hết cho n^2+n+1 với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 nên A không phải là số nguyên tố.

Câu 15. *(Trường chuyên tỉnh Hải Dương năm 2023-2024)*

1. Tìm tất cả các số nguyên tố p lẻ sao cho $2p^4-p^2+16$ là số chính phương.

2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2+7xy+2y^2+x+y-2=0$.

Lời giải

1.Đặt $A=2p^4-p^2+16$

Với $p=3$ thì $A=169=13^2$ là số chính phương. Vậy $p=3$ thoả mãn.

Với $p>3$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Suy ra $p^4=\left(p^2\right)^2 \equiv 1 \pmod 3$

Suy ra $A=2p^4-p^2+16 \equiv 2.1-1+16 \equiv 2 \pmod 3$

Do các số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên A không là số chính phương.

2.Ta có phương trình

$$6x^2+7xy+2y^2+x+y-1=1$$
$$\Leftrightarrow 6x^2+(7y+1)x+2y^2+y-1=1$$
$$\Leftrightarrow (2x+y+1)(3x+2y-1)=1$$
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+y+1=1\\3x+2y-1=1\end{cases}(1)\\ \begin{cases}2x+y+1=-1\\3x+2y-1=-1\end{cases}(2)\end{array}\right.$$
$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=4\end{cases}$$
$$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=6\end{cases}$$

Câu 16. *(Trường chuyên tỉnh Hải Phòng năm 2023-2024)*

Tìm các số nguyên tố a, b và số nguyên dương m thoả mãn $a^2+b^2+18ab=4.5^m$.

Lời giải

Ta có $(a-b)^2=4.5^m-20ab\,\vdots\,5\Rightarrow(a-b)\,\vdots\,5\Rightarrow(a-b)^2\,\vdots\,25$.

$$a,b\ge 2\Rightarrow a^2+b^2+18ab=4.5^m\ge 80\Rightarrow m\ge 2$$
$$\Rightarrow 20ab=(a-b)^2-4.5^m\,\vdots\,25\Rightarrow 20ab\,\vdots\,25\Rightarrow ab\,\vdots\,5$$
$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a\,\vdots\,5\\b\,\vdots\,5\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}a\,\vdots\,5\\b\,\vdots\,5\end{cases}\Rightarrow a=b=5;m=3.$$

Câu 17. *(Trường chuyên Hưng Yên năm 2023-2024)*

Tìm các nghiệm nguyên (x; y) của phương trình $2024(x^2+y^2)-2023(2xy+1)=5$.

Lời giải

$2024(x^2+y^2)-2023(2xy+1)=5$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2023(x^2+y^2)-2023.2xy-2023=5$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2023(x^2+y^2-2xy)=5+2023$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2023(x-y)^2=2028$ (*)

Vì x, y $\in$ Z. Do đó $|x-y|$ là số tự nhiên

Nhận xét: Nếu $|x-y|\ge 2$ thì $(x-y)^2\ge 4\Rightarrow 2023(x-y)^2\ge 8092$

Do đó $x^2+y^2+2023(x-y)^2>2028$

Nên (*) không xảy ra. Nên $|x-y|\le 1$

Vậy có $|x-y| \in \{0;1\}$

* Xét $|x-y| = 0$. Ta có: $x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$

Với $x = y$, từ (*) có $2x^2 = 2028$ mà x;y $\in$ Z nên loại.

* Xét $|x-y| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$

Với $x = y$, từ (*) có $x^2 + (x-y)^2 = 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 = 5$

+ Xét y = x – 1. Ta có $x^2 + (x-1)^2 = 5 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 = 5$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$. Với $\left[\begin{array}{l} x=2\ \ y=2 \\ x=-1 y=-1 \end{array}\right.$

Vậy các cặp số nguyên (x;y) cần tìm là (–1; –2), (2;1), (1;2), (–2; –1)

Câu 18. *(Trường chuyên Khánh Hòa năm 2023-2024)*

Chứng minh $p^4 - 1$ chia hết cho 240 với mọi số nguyên tố $p > 5$.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p không chia hết cho 2, 3 và 5 (1)

Ta có p^2 là số chính phương $\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} p^2 \equiv 0 \pmod 3 \\ p^2 \equiv 1 \pmod 3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} p^2 \equiv 0 \pmod 5 \\ p^2 \equiv 1 \pmod 5 \\ p^2 \equiv 4 \pmod 5 \end{array}\right. \end{cases}$

Kết hợp với (1) $\Rightarrow \begin{cases} p^2 \equiv 1 \pmod 3 \\ \left[\begin{array}{l} p^2 \equiv 1 \pmod 5 \\ p^2 \equiv 4 \pmod 5 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} p^4 \equiv 1 \pmod 3 \\ p^4 \equiv 1 \pmod 5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (p^4 - 1) \,\vdots\, 3 \\ (p^4 - 1) \,\vdots\, 5 \end{cases}$ (*)

Mặt khác từ (1) $\Rightarrow p$ lẻ

$\Rightarrow p^4 \equiv 1 \pmod{16}$

$\Rightarrow \left(p^4-1\right) \vdots 16$ (**)

Từ (*), (**) và 3, 5, 16 nguyên tố cùng nhau suy ra $\left(p^4-1\right) \vdots (3\cdot 5\cdot 16) \Rightarrow \left(p^4-1\right) \vdots 240$.

Vậy p^4-1 chia hết cho 240 với mọi số nguyên tố $p>5$.

Câu 19. *(Trường chuyên Khoa học Tự Nhiên HN năm 2023-2024)*

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x;y) thỏa mãn

$$4^x+\left(1+3^y\right)\left(1+7^y\right)=2^x\left(3^y+7^y+2\right)$$

Lời giải

Cách 1. Ta có các biến đổi phương trình sau

$$4^x+\left(1+3^y\right)\left(1+7^y\right)=2^x\left(3^y+7^y+2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x}-1+2+3^y+7^y+21^y=2^x\left(3^y+7^y+2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x-1\right)\left(3^y+7^y+1-2^k\right)=21^y \quad (1)$$

Ta chứng minh UCLN $\left(2^x-1;3^x+7^y+1-2^x\right)=1$ .Thật vậy, nếu UCLN($2^x-1;3^x+7^y+1-2^x$) > 1 thì gọi p là ước nguyên tố chung của $2^x-1,3^x+7^y+1-2^x$. Suy ra p | 3^y+7^y . chú ý là 3^y+7^y đều không chia hết cho 3, 7 nên $p\neq 3,7$. Lại có p| 21^y nên p ∈ {3, 7} mâu thuẫn.

Vậy UCLN$\left(2^x-1;3^x+7^y+1-2^x\right)=1$ Ta xét hai trường hợp sau

- Nếu x là số chẵn thì 2^x-1 chia hết cho 3 và $3^x+7^y+1-2^x$ chia 3 dư 1.
  Khi đó, từ phương trình (1) ta có

$$\begin{cases} 2^x-1=3^y \\ 3^x+7^y+1-2^x=7^y \end{cases}$$

Suy ra $2^x=3^y+1$,Chi ý là $3^y\equiv 1,3$ (mod 8) nên 3^y+1 không chia hết cho 8. Từ đó $x=2$ *và* $y=1$. . Vậy (x, y) = (2, 1)

- Nếu x là số lẻ thì 2^x-1 chia 3 dư 1 và $3^x+7^y+1-2^x$ chia hết cho 3.
  Khi đó, từ phương trình (1) ta có

$$\begin{cases} 2^x-1=7^y \\ 3^x+7^y+1-2^x=3^y \end{cases}$$

Suy ra $2^x=7^y+1$. Vế phải chia 7 dư 1 nên vế trái chia 7 dư 1. Từ đó $x=3k, k\in N^*$ và thay vào phương trình được

$$\left(2^k-1\right)\left(2^{2k}+2^k+1\right)=7^y$$

Vì UCLN $\left(2^k-1;2^{2k}+2^k+1\right)\in\{1,3\}$ nên UCLN$\left(2^k-1;2^{2k}+2^k+1\right)=1$. Vì $2^{2k}+2^k+1>1$ nên $2^k-1=1$ suy ra $k=1$ và $7^y=7$ nên $y=1$ và $x=3k=3$. Vậy $(x,y)=(3,1)$.

Vậy tất cả các cặp số (x, y) thỏa mãn là (2, 1), (3, 1) .

Cách 2. Phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$\left(2^x-7^y-1\right)\left(2^x-3^y-1\right)=0$$

Tới đây giải giống hai trường hợp ở trên.

Câu 20. *(Trường chuyên Lai Châu năm 2023-2024)*

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(2x+y)(x-y)+x+8y=22$

Lời giải

Ta có: $(2x+y)(x-y)+x+8y=22 \Leftrightarrow (2x+y)(x-y)+3(2x+y)-5(x-y)=22$

$\Leftrightarrow (2x+y)(x-y+3)-5(x-y+3)=7$

$\Leftrightarrow (x-y+3)(2x+y-5)=7$

Khi đó ta có các khả năng sau:

KN1: $\begin{cases}x-y+3=-7\\2x+y-5=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=8\end{cases}$

KN2: $\begin{cases}x-y+3=-1\\2x+y-5=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=2\end{cases}$

KN3: $\begin{cases}x-y+3=7\\2x+y-5=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{10}{3}\\y=\dfrac{-2}{3}\end{cases}(l)$

KN4: $\begin{cases}x-y+3=1\\2x+y-5=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{10}{3}\\y=\dfrac{16}{3}\end{cases}(l)$

Vậy nghiệm của phương trình là $(x;y)\in\{(-2;8);(-2;2)\}$

Câu 21. *(Trường chuyên Lao Cai năm 2023-2024)*

a) Số nguyên dương m được gọi là *số tốt* nếu tổng các bình phương của tất cả các ước dương của nó(không tính 1 và m) bằng 6m+8. Chứng minh rằng nếu có hai số a pq là số tốt thì pq + 2 là số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $x^{2025}+y^{2025}+y^{1350}+y^{675}=2$

Lời giải

a)Do p. q là các số nguyên nên pq có các ước dương là 1, p, q, pq.

Vì p, q là số tốt nên $p^2+q^2=6pq+8$ (1)

$\Leftrightarrow pq+2=p^2+q^2-5pq-6=p^2+q^2-2pq-3pq-6=(p-q)^2-3(qp+2)$

$\Leftrightarrow 4(qp+2)=(p-q)^2 \Rightarrow pq+2=\left(\dfrac{p-q}{2}\right)^2 (2)$

Từ (1) $\Leftrightarrow (p-q)^2=4pq+8$

Do $4pq+8 \vdots 2$ nên $(p-q)^2 \vdots 2$

$\Rightarrow p-q \vdots 2$ (Do 2 là số nguyên tố)

$\Rightarrow \dfrac{p-q}{2} \in Z$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow pq+2$ là số chính phương.

b) $x^{2025}-y^{2025}+y^{1350}+y^{675}=2$. Đặt $x^{675}=m : y^{675}=n \Rightarrow y^{2025}=n^3 : y^{1350}=n^2$

Do x,y $\in$Z phương trình đã cho trở thành $m^3=n^3-n^2-n+2$

Xét $(n-1)^3-m^3=-2n^2+4n-3=-2(n^2-2n+1)-1-2(n-1)^2-1<0$

Do $-2(n-1)^2-1<0$ với mọi n $\Rightarrow (n-1)^3<m^3$ (1)

Xét $(n+3)^3-m^3=10n^2+28n+25=10\left(n^2+\dfrac{14}{5}+\dfrac{49}{25}\right)+\dfrac{27}{5}=10\left(n+\dfrac{7}{5}\right)^2+\dfrac{27}{5}$

Do $10\left(n+\dfrac{7}{5}\right)^2+\dfrac{27}{5}>0$ với mọi n.

Suy ra $(n+3)^3>m^3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $(n+1)^3<m^3<(n+3)^3$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} m^3=n^3 \\ m^3=(n+1)^3 \\ m^3=(n+2)^3 \end{array}\right.$

*TH1: $m^3=n^3 \Leftrightarrow n^2+n-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=1 \\ n=-2 \end{array}\right.$ Với $n=1 \Rightarrow y^{675}=1 \Rightarrow y=1(TM)$

Với $n=-2 \Rightarrow y^{675}=-2 \Rightarrow$ không có giá trị nào của y $\in Z$ thỏa mãn.

Thay y=1 vào phương trình đã cho

$\Leftrightarrow x^{2025}+1=2$

$\Leftrightarrow x^{2025}=1$

$\Leftrightarrow x=1(TM)$

*TH2: $m^3=(n+1)^3 \Leftrightarrow 4n^2+4n-1=0$

$\Delta = 8$ không là số chính phương.

Suy ra không có giá trị $n \in Z$.

*TH3: $m^3 = (n+2)^3 \Leftrightarrow 7n^2 + 13n + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (n+1)(7n+6) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -1 \\ n = \dfrac{-6}{7} \end{array}\right.$ (loại vì n không thuộc Z)

Với $n = -1 \Rightarrow y^{675} = -1 \Leftrightarrow y = -1(TM)$

Thay y=-1 vào phương trình ban đầu ta có:

$x^{2025} + 1 = 2 \Leftrightarrow ^{2025} = 1 \Leftrightarrow x = 1(TM)$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(x, y) \in \{(1;1);(1;-1)\}$

Câu 22. *(Trường chuyên Nam Định năm 2023-2024)*

a) Cho hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^3 \vdots b; b^3 \vdots a$. Chứng minh $\left(a^4 + b^4\right) \vdots ab$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x\left(x^2 - y\right) + (y-3)\left(x^2+1\right) = 0$

Lời giải

a) Vì $a^3 \vdots b$ nên $a^3.a \vdots b.a$ hây $a^4 \vdots ab$. Tương tự, vì $b^3 \vdots a$ nên $b^3.b \vdots a.b$ hay $b^4 \vdots ab$. Từ đấy suy ra $\left(a^4 + b^4\right) \vdots ab$.

b) Từ đề bài $x\left(x^2 - y\right) + (y-3)\left(x^2+1\right) = 0$ ta rút ra $y = \dfrac{-x^3 + 3x^2 + 3}{x^2 - x + 1} = -x + 2 + \dfrac{3x+1}{x^2 - x + 1}$

(Vì $x^2 - x + 1 > 0 \, voi \; moi \; x$)

Khi x nguyên, để y là nguyên thì $(3x+1) \vdots \left(x^2 - x + 1\right)$ do đó;

$(3x+1)^2 = \left(9x^2 + 6x + 1\right) = 9\left(x^2 - x + 1\right) + (15x - 8) \vdots \left(x^2 - x + 1\right)$ hay $(15x - 8) \vdots \left(x^2 - x + 1\right)$

Suy ra 3=$\left[5(3x+1) - (15x-8)\right] \vdots \left(x^2 - x + 1\right)$

Như vậy:

❖ $x^2 - x + 1 = 13 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = -3$ hoặc $x = 4$

Với $x = -3$ thì $y = \dfrac{57}{13}$ (không nguyên); với $x = 4$ thì $y = -1$ (nguyên).

❖ $x^2 - x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc

Với $x = 0$ thì $y = 3$ (nguyên); với $x = 1$ thì $y = 5$ (nguyên).

Thử lại thấy các nghiệm trên đều thỏa mãn. Vậy có 3 cặp $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là (0; 3), (1;5) và (4; -1).

Câu 23. *(Trường chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An năm 2023-2024)*

a) Tìm $x \in \mathbb{R}$ sao cho $x+\sqrt{2024}$ và $\frac{1}{x}-\sqrt{2024}$ đều là các số nguyên

b) Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho 2a là số lập phương và 5a là số chính phương

Lời giải

a) Theo giả thiết ta có thể đặt như sau $x+\sqrt{2024}=a, \frac{1}{x}-\sqrt{2024}=b$ thì $a, b \in \mathbb{Z}$

Bằng các phép biến đổi ta được

$$\left(a-\sqrt{2024}\right)\left(b+\sqrt{2024}\right)=1 \Leftrightarrow \sqrt{2024}(a-b)=2025-ab$$

Vì $\sqrt{2024}$ vô tỷ và a – b, 2025 – ab nguyên nên a = b và 2025 = ab suy ra $a=b=\pm 45$

Khi đó bằng phép thế ta được

$$x+\sqrt{2024}=a=\pm 45 \Leftrightarrow x \in \left\{45-\sqrt{2024}, -45-\sqrt{2024}\right\}$$

Vậy tất cả giá trị x thỏa mãn là $x \in \left\{45-\sqrt{2024}, -45-\sqrt{2024}\right\}$

b) Theo giả thiết $2a=b^3\,(1)$ và $5a=c^2\,(2)$ với b,c là các số nguyên dương.

Từ (1) suy ra b^3 chia hết cho 2, mà 2 là số nguyên tố nên b chia hết cho 2.

Đặt b = 2d, thay vào (1) được $2a=8d^3$, hay là $a=4d^3\,(3)$.

Từ (2) suy ra c^2 chia hết cho 5, mà 5 là số nguyên tố nên c chia hết cho 5

Đặt c = 5e, thay vào (2) được $5a=25e^2$, hay là $a=5e^2\,(4)$

Từ (3) và (4) có $a=4d^3=5e^2\,(5)$ với d,e là các số nguyên dương. Do 4 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau nên từ (5) thì d^3 chia hết cho 5, suy ra d chia hết cho 5

Đặt d = 5k, thay vào (5) được $a=5e^2=500k^3$ với k là số nguyên dương

Từ đó $e^2=100k^3=10^2k^3$. Điều này xảy ra với số k nhỏ nhất là k = 1, e = 10 và a = 500

Lúc đó $2a=1000=10^3$ và $5a=2500=50^2$ thỏa mãn bài toán

Vậy số nguyên dương a nhỏ nhất thỏa mãn là a – 500

Câu 24. *(Trường chuyên ĐH Vinh - Nghệ An năm 2023-2024)*

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2-y^2+2(3y+y)=23.$

b) Cho đa thức $P(x)=x^2+bx+c$ có hai nghiệm nguyên. Biết rằng $|c|\le 16$ và $|P(9)|$ là số nguyên tố. Tìm các hệ số b, c.

Lời giải

a) Ta biến đổi phương trình như sau

$x^2 - y^2 + 2(3x + y) = 23 \Leftrightarrow (x^2 + 6x + 9) - (y^2 - 2y + 1) = 31 \Leftrightarrow (x+3)^2 - (y-1)^2 = 31$

$\Leftrightarrow (x - y + 4)(x + y + 2) = 31$

Từ đây, ta xét bảng sau

$x - y + 4$	31	1	-31	-1
$x + y + 2$	1	31	-1	-31
x	13	13	-19	-19
y	-14	16	16	-14

Vậy tất cả các nghiệm (x, y) thỏa mãn là $(13,-14);(13,16);(-19,16);(-19,-14)$.

b) Gọi hai nghiệm nguyên của $P(x) = x^2 + bx + c$ là u, v.

Theo định lý Vi – et ta được $u + v = -b$, $uv = c$.

Vì $|P(9)|$ là số nguyên tố nên $|(9-u)(9-v)|$ là số nguyên tố dẫn đến $|9-u| = 1$ hoặc $|9-v| = 1$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $|9-u| = 1 \Leftrightarrow u \in \{8;10\}$.

Trường hợp 1. $u = 10$, vì $|c| \le 16$, nên $|v| \in \{0;1\} \Leftrightarrow v \in \{-1;0;1\}$.

Mặt khác $9-1=8,\ 9-0=9,\ 9+1=10$ đều không là số nguyên tố nên trường hợp này loại.

Trường hợp 2. $u = 8$, vì $|c| \le 16$, nên $|v| \le 2$.

Mà v phải là số chẵn nên từ đây suy ra $v \in \{-2;2\}$. Thử lại cả hai giá trị này thỏa mãn và ta nhận được giá trị của b, c tương ứng là $-10,16$ và $-6,-16$.

Vậy tất cả cặp (b, c) thỏa mãn là $(b,c) \in \{(-10,16);(-6,-16)\}$.

Câu 25. *(Trường chuyên tỉnh Ninh Bình năm 2023-2024)*

Cho p là một số nguyên tố.

a) Chứng minh nếu p lẻ và tồn tại số nguyên x sao cho $(x^2 + 1) \vdots p$ thì $(p - 1) \vdots 4$.

b) Chứng minh $2023p + 23^p - 24$ không là số chính phương.

Lời giải

a) Vì p là SNT lẻ nên p chỉ có 1 trong 2 dạng:

$4k + 1$ hoặc $4k + 3$

Vì $(x^2 + 1) \vdots p$ nên p có dạng $4x + 1$, hay $p - 1 = 4k \vdots 4$.

b) Tồn tại STN x sao cho $2023p + 23^p - 24 = x^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 2023p + 23^p - 23$

Theo Fermat nhỏ, ta có $23^p - 23 \equiv 0 \pmod p$

=> $2023p + 23^p - 23 \equiv 0 \pmod p$

=> $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$ => $p = 4k + 1$

=> $2023p + 23^p - 24 \equiv -p + (-1)^p \equiv 2 \pmod 4$

Mà $x^2 \equiv 0,1$ (mod 4), mâu thuẫn

Vậy 2023p + 23^p – 24 không là số chính phương.

Câu 26. *(Trường chuyên tỉnh Phú Thọ chuyên tin năm 2023-2024)*

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $\left(x^2-x-1\right)\left(y^2+xy-9\right)=2x+1$

b) Cho n là số nguyên dương lẻ sao cho 3^n+7^n chia hết cho 11. Tìm số dư khi chia $2^n+6^n+2023^n$ cho 11.

Lời giải

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $\left(x^2-x-1\right)\left(y^2+xy-9\right)=2x+1$

Vì $(x;y)$ nguyên dương nên từ điều kiện $2x+1 \vdots x^2-x-1$

$$2x^2+x \vdots x^2-x-1$$

$$\Rightarrow 2x^2-2x-2+3x+2 \vdots x^2-x-1 \Rightarrow 3x+2 \vdots x^2-x-1$$

Từ đó suy ra $\begin{cases}2x+1 \vdots x^2-x-1\\3x+2 \vdots x^2-x-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6x+3 \vdots x^2-x-1\\6x+3 \vdots x^2-x-1\end{cases} \Rightarrow 1 \vdots x^2-x-1$

Suy ra $\left[\begin{array}{l}x^2-x-1=1\\x^2-x-1=-1\end{array}\right.$

+) Với $x^2-x-1=1 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\ (loai)\end{array}\right.$

Từ $x=2 \Rightarrow \left(y^2+2y-9\right)=5 \Leftrightarrow (y+1)^2=15$ (loại)

+ Với $x^2-x-1=-1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\ (loai)\end{array}\right.$

Từ $x=1 \Rightarrow -\left(y^2+y-9\right)=3 \Leftrightarrow y^2+y-6=0 \Leftrightarrow (y+3)(y-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=-3\ (loai)\\y=2\end{array}\right.$

Vậy cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $\left(x^2-x-1\right)\left(y^2+xy-9\right)=2x+1$ là $x;y)=(1;2)$.

b) Cho n là số nguyên dương lẻ sao cho 3^n+7^n chia hết cho 11. Tìm số dư khi chia $2^n+6^n+2023^n$ cho 11.

Ta có: $3^n+8^n+7^n+4^n \vdots 11$ (vì n lẻ)

$$\Rightarrow 4^n+8^n \vdots 11 \Rightarrow 4^n\left(1+2^n\right) \vdots 11 \Rightarrow 2^n+1 \vdots 11$$

$$n=10k+5\ (k \in \mathbb{N}$$

Ta có $6^n=6^{10k+5}=\left(6^{10}\right)^k.6^5 \equiv -1(mod 11); 2023^n \equiv -1(mod 11)$

Suy ra $2^n+6^n+2023^n \equiv -3 \equiv 8(mod 11)$

Vậy $2^n+6^n+2023^n \equiv 8(mod 11)$

Câu 27. *(Trường chuyên tỉnh Phú Thọ chuyên toán năm 2023-2024)*

a) Cho các số nguyên a,b,c,d thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3-8c^3+28d^3=0$. Chứng minh rằng $(a+b+c+d)^2$ chia hết cho 9.

b) Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x)$ có hệ số thực, bậc 2024 thỏa mãn điều kiện $P(x^2-2)$ chia hết cho $P(x)$.

Lời giải

a) Ta có: $a^3+b^3-8c^3+28d^3=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3+d^3 \vdots 3$

$$\Rightarrow (a+b)^3-3ab(a+b)+(c+d)^3-3cd(c+d) \vdots 3$$

$$\Rightarrow (a+b)^3+(c+d)^3 \vdots 3$$

$$\Rightarrow (a+b+c+d)^3-3(a+b)(c+d)(a+b+c+d) \vdots 3$$

$$\Rightarrow (a+b+c+d)^3 \vdots 3$$

$$\Rightarrow a+b+c+d \vdots 3$$

$$\Rightarrow (a+b+c+d)^2 \vdots 9 \text{ (đpcm)}$$

b) Xét đa thức $P(x)=a(x+1)^{1012}(x-2)^{1012}$, với $a \in \mathbb{R}$, đa thức $P(x)$ có bậc là 2024

Ta có:

$$P(x^2-2)=a.(x^2-1)^{1012}(x^2-4)^{1012}=a(x+1)^{1012}(x-2)^{1012}(x-a)^{1012}(x+2)^{1012}$$

$$=P(x)(x-1)^{1012}(x+2)^{1012}$$

$\Rightarrow P(x^2-2)$ chia hết cho đa thức $P(x)$

Vậy tồn tại đa thức $P(x)=a(x+1)^{1012}(x-2)^{1012}$ với hệ số thức, có bậc 2024 thỏa mãn đã thức $P(x^2-2)$ chia hết cho đa thức $P(x)$.

Câu 28. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh năm 2023-2024)*

a) Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn x^2-y và x^2+y đều là các số chính phương. Chứng minh y là số chẵn.

b) Tìm các số nguyên dương a,b thỏa mãn $a^3-2(a+b)^2=b^3+19$.

Lời giải

a) $x^2-y=a^2; x^2+y=b^2$ với a,b là các số tự nhiên $\Rightarrow 2y=b^2-a^2$

Ta có b^2-a^2 là số chẵn suy ra a,b là hai số cùng chẵn hoặc cùng lẻ$\Rightarrow (b-a)(b+a) \vdots 4$ $\Rightarrow y \vdots 2$.

b) $a^3-2(a+b)^2=b^3+19 \Leftrightarrow (a-b-2)(a^2+ab+b^2)=2ab+19$

Vì $2ab+19>0,\ a^2+ab+b^2>0 \Rightarrow a-b-2 \geq 1 \Rightarrow a-b \geq 3$

Từ $a-b-2 \geq 1 \Rightarrow a^2+ab+b^2 \leq 2ab+19 \Rightarrow (a-b)^2 < 19 \Rightarrow a-b \leq 4$

Vì $2ab+19$ lẻ $\Rightarrow a-b-2$ lẻ $\Rightarrow a-b$ lẻ $\Rightarrow$ $a-b=3$

Từ $a-b=3 \Rightarrow b^2+3b-10=0 \Rightarrow b=-5$ (loại) hoặc $b=2$. Vậy $b=2; a=5$.

Câu 29. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Trị năm 2023-2024)*

1. Chứng minh n^2+3n+1 là số lẻ với mọi số tự nhiên n.
2. Tìm tất cả các số nguyên dương a,b sao cho $4a^2+b+4$; $4b^2+a+4$ đều là số chính phương.

Lời giải

1. Ta có $n^2+3n+1=n(n+1)+2n+1$.

Do $n(n+1)$ chẵn, $2n+1$ lẻ nên n^2+3n+1 là số lẻ.

2. Do vai trò a,b bình đẳng nên ta có thể giả sử $b \le a$.

Khi đó $(2a)^2 < 4a^2+b+4 \le 4a^2+a+4 \le 4a^2+4a+1=(2a+1)^2$

Suy ra $4a^2+b+4=(2a+1)^2 \Rightarrow b=4a-3$.

Khi đó $(8a-6)^2 < 4b^2+a+4=64a^2-95a+40 < (8a-4)^2$

Suy ra $64a^2-95a+40=(8a-5)^2 \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=1$.

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $a=1; b=1$.

Câu 30. *(Trường chuyên tỉnh Tây Ninh năm 2023-2024)*

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x+y)^2+2y^2(x+1)+(y+2)^2-9=0$

Lời giải

$$(x+y)^2+2y^2(x+1)+(y+2)^2-9=0\,(*)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy+2xy^2+2y^2+y^2+4y+4-9=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-4+2x(y^2+y)+4(y^2+y)=1$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-2)+2(y^2+y)(x+2)=1$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-2+2y^2+2y)=1$$

TH1: $\begin{cases} x+2=1 \\ x-2+2y^2+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 2y^2+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow (-1;1),\ (-1;-2)$

TH2: $\begin{cases} x+2=1 \\ x-2+2y^2+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ 2y^2+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow (-3;1),\ (-3;-2)$

Câu 31. *(Trường chuyên tỉnh Thái Bình năm 2023-2024)*

Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì (7 − p)(7 + p) chia hết cho 24

Lời giải

Do p nguyên tố $p>3 \Rightarrow p$ không là bội của 3 và 2

$\Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod 3$ và $p^2 \equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow p^2-1 \vdots 3$ và 8 suy ra $\Rightarrow p^2-1 \vdots 24$

Vì $(3,8)=1$ nên $(7-p)(7+p)=49-p^2=48-(p^2-1) \vdots 24$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 32. *(Trường chuyên tỉnh Thanh Hóa năm 2023-2024)*

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^5+2024x=y^5+1$

b) Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn $44x^2+1=y^2.$ *Chứng minh* $2y+2$ *là số chính phương.*

Lời giải

a) Ta có $x^5-x+2025x=y^5+1$

⇔ x$(x^4-1)+2025x=y^5+1$

⇔ x(x -1)(x + 1)(x^2+1)+2025x = y^5+1

⇔ x(x -1)(x + 1)(x^2-4+5) + 2025x = y^5+1

⇔ x(x -1)(x + 1)$(x+2)(x-2)+5x(x+1)$+2025x = $y^5+1(1)$

Do x(x -1)(x + 1)$(x+2)(x-2)$ *là tích của* 5 *số liên tiếp nên*

chia hết cho 5.

Khi đó VT (1) = x(x -1)(x + 1)$(x+2)(x-2)+5x(x+1)$+2025x

Chia hết cho 5.

VP(1) = y^5+1 chia cho 5 dư 2 hoặc 1

Vậy vế trái của (1) chia hết cho 5, vế phải của (1) không chia hết cho 5 nên phương trình (1) vô nghiệm, hay phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

b) Dễ thấy y là số lẻ nên đặt y = 2k + 1(k∈ N)

Khi đó ta có $44x^2+1=4k^2+4k+1$

=> $11x^2=k(k+1)$ (*)

=> k(k + 1) chia hết cho 11

Do 11 là SNT nên hoặc k chia hết cho 11 hoặc k + 1 chia hết cho 11

TH1: $k\ \vdots\ 11$, đặt $k=11.m$ $(m\ \in N)$ Thay và (*) ta có

$$x^2=m(11m+1)$$

Lại có (m; 11m+1) = 1⇒ m và 11m +1 đều là các số chính phương.

=> $\begin{cases} m=a^2 \\ m+1=b^2 \end{cases}$ vớ a,b la STN, b > 0

Khi đó 2y + 2 = 4k + 4 = 44m + 4 = $4b^2$ là SCP.

TH2: $k+1\ \vdots\ 11$, đặt $k+1=11.n$ $(n\ \in N)$ Thay và (*) ta có

$$x^2 = n(11n-1)$$

Lại có (n; 11n – 1) = 1⇒ n và 11n – 1 đều là các số chính phương.

=> $\begin{cases} n = c^2 \\ n-1 = d^2 \end{cases}$ vớ c, d là STN khác 0

Khi đó ta có $11c^2 - d^2 = 1 \Rightarrow 12c^2 = c^2 + d^2 + 1$ (**)

Ta thấy VT(**) = $12c^2$ *chia hết cho* 4

VP(**) = $c^2 + d^2 + 1$ chia cho 4 chỉ có thể có số dư là 1; 2 hoặc 3 nên (**) không xảy ra.

Vậy nếu các số nguyên dương x, y thỏa mãn $44x^2 + 1 = y^2$

thì $2y + 2$ *là số chính phương.*

Câu 33. *(Trường chuyên tỉnh Quốc Học Huế năm 2023-2024)*

Tìm tất cả các số thực a sao cho $a+\sqrt{2023}$ và $\frac{999}{a}+\sqrt{2023}$ đều là các số nguyên.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} x = a+\sqrt{2023} \\ y = \frac{999}{a}+\sqrt{2023} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x-\sqrt{2023} \\ y = \frac{999}{x-\sqrt{2023}}+\sqrt{2023} \end{cases}$.

Ta có $y = \frac{999}{x-\sqrt{2023}}+\sqrt{2023} \Leftrightarrow xy - y\sqrt{2023} = 999 + x\sqrt{2023} - 2023$

$\Leftrightarrow xy + 1024 = (x+y)\sqrt{2023}$

Vì x, y nguyên nên $x+y=0$, suy ra $y=-x$ và $xy+1024=0$.

Do đó $x=\pm 32$. Vậy $a = \pm 32 - \sqrt{2023}$.

Câu 34. *(Trường chuyên tỉnh Tiền Giang năm 2023-2024)*

Cho hai số nguyên p,q thỏa mãn đẳng thức $p^2+q^2 = 2(3pq-4)$ (*)

1) Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai số p,q là bội của 3

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên (p,q) thỏa (*)

Lời giải

a) Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai số p,q là bội của 3

- Giả sử trong hai số p,q không có số nào chia hết cho 3.
- Khi đó p^2, q^2 chia 3 dư 1. Suy ra:

 +) p^2+q^2 chia 3 dư 2;

 +) Trong khi vế phải $2(3pq-4) = 6pq - 9 + 1$ chia 3 dư 1, vô lý

- Do đó trong hai số p,q phải có ít nhất một số là bội của 3.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (p,q) thỏa (*)

- Do vai trò của p,q như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử q là bội của 3.
- Do q nguyên tố nên $q=3$
- Khi đó từ (*) ta có $p^2+9=2(2p-4) \Leftrightarrow p^2-18p+17=0 \Leftrightarrow p=1$ hoặc $p=17$
- Do p nguyên tố nên $p=17$.

Vậy các cặp số $(p;q)$ thỏa mãn (*) là $(p;q) \in \{(17;3);(3;17)\}$.

Câu 35. *(Trường chuyên tp Hồ Chí Minh năm 2023-2024)*

Xét các số nguyên $a<b<c$ thỏa mãn $n=a^3+b^3=c^3=3abc$ là số nguyên tố.

a) Chứng minh $a<0$.

b) Tìm tất cả các số nguyên a,b,c $(a<b<c)$ sao cho n là một ước của 2023.

Lời giải

a) Giả sử $a \ge 0$, khi đó $b \ge 1$ và $c \ge 2$. Ta có

$n=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ là số nguyên tố, mà $a+b+c>1$

Nên $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=1$, hay $(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2=2$.

Vì $c>b>a$ nên $(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2 \ge 1^2+1^2+2^2>2$. Từ mâu thuẫn nhận được, ta suy ra $a<0$.

b) Nếu $c \le 0$, thì ta có $a+b+c<0$, suy ra $n<0$, mâu thuẫn. Do đó $c \ge 1$. Như vậy

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2\right]$$
$$\ge \frac{1}{2}(c-a)^2 \ge \frac{1}{2}\left[1-(-1)\right]^2=2>1.$$

Vì n là số nguyên tố và là ước của 2023 = 7.17^2 nên $n \in \{7,17\}$.

Trường hợp 1: $n=17$. Theo chứng minh ở trên, ta phải có $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=17$ và $a+b+c=1$. Từ đó, ta dễ dàng tính được

$$3(a^2+b^2+c^2)=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+(a+b+c)^2=35.$$

Mâu thuẫn vì 35 không chia hết cho 3

Trường hợp 2: $n=7$. Theo chứng minh ở trên, ta phải có $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=7$ và $a+b+c=1$. Từ đó $3(a^2+b^2+c^2=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+(a+b+c)^2=15$, suy ra $a^2+b^2+c^2=5$ và $ab+bc+ca=-2$.

Do $5=a^2+b^2+c^2 \ge 1+c^2$ nên $c \le 2$. Mà $c \ge 1$ nên $c \in \{1;2\}$.

- Nếu $c=2$, thì ta có $a^2+b^2=1$. Suy ra $a^2\le 1$, tức $a\ge -1$. Mà $a<0$ nên $a=-1$ và $b=0$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.
- Nếu $c=1$, thì ta có $a^2+b^2=4$. Suy ra $a^2\le 4$, tức $a\ge -2$. Mà $a<0$ nên $a\in\{-1,-2\}$. Thử trực tiếp, ta được $a=-2$ và $b=0$. Tuy nhiên, các số $a=-2, b=0$ và $c=1$ không thỏa mãn $a+b+c=1$.

Vậy, có duy nhất một bộ số (a,b,c) thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(-1,0,2)$.

Câu 36. *(Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long năm 2023-2024)*

a) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho giá trị của biểu thức x^2+x+6 là một số chính phương.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2=-2\left(x^6-x^3y-32\right)$.

Lời giải

a) Ta có $x^2+x+6=n^2;(n,x\in\mathbb{Z})\Rightarrow 4x^2+4x+24=4n^2$

$$\Leftrightarrow 4x^2+4x+1-4n^2=-23\Leftrightarrow(2x+1-2n)(2x+1+2n)=-23$$

TH1: $\begin{cases}2x+1-2n=1\\2x+1+2n=3\end{cases}\Rightarrow x=5$

TH2: $\begin{cases}2x+1-2n=1\\2x+1+2n=-23\end{cases}\Rightarrow x=-6$

b)Ta có $y^2=-2(x^6-x^3y-32\Leftrightarrow x^6+\left(y-x^3\right)^2=64$

$\Rightarrow x^6\le 64\Leftrightarrow x\le 2$ do $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-1;-2;0;1;2\}$

Xét các trường hợp:

+ $x=2\Rightarrow\left(y-x^3\right)^2=0\Rightarrow y=8$

+ $x=1\Rightarrow\left(y-x^3\right)^2=63\Rightarrow y\notin\mathbb{Z}$ (loại)

+ $x=0\Rightarrow\left(y-x^3\right)^2=64\Rightarrow y=8$ và $y=-8$

+ $x=-1\Rightarrow\left(y-x^3\right)^2=63\Rightarrow y\notin\mathbb{Z}$ (loại)

+ $x=-2\Rightarrow\left(y-x^3\right)^2=0\Rightarrow y=-8$

Vậy nghiệm của phương trình là: $(0;8);(0;-8);(2;8);(-2;-8)$.

Câu 37. *(Trường chuyên ĐH Sư Phạm HN – vòng 2 năm 2023-2024)*

Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho số $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}$ là số hữu tỷ.

Lời giải

Lấy $\alpha\in\mathbb{Q}$sao cho

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}=\alpha$$

Viết lại phương trình dưới dạng

$$\sqrt{a}-\alpha\sqrt{b}=\alpha\sqrt{5}-\sqrt{3}$$

Bình phương 2 vế ta có:

$a+\alpha^2 b-2\alpha\sqrt{ab}=5\alpha^2-2\alpha\sqrt{15}$

Từ đó suy ra

$$\sqrt{ab}-\sqrt{15}=\beta\in\mathbb{Q}$$

Bình phương 2 vế đẳng thức $\sqrt{ab}=\sqrt{15}+\beta$ ta được

$$ab=15+\beta^2+2\beta\sqrt{15}$$

$$\Leftrightarrow 2\beta\sqrt{15}=ab-15-\beta^2$$

Đẳng thức cuối xảy ra khi và chỉ khi $\beta=0$ tức là ab = 15 . Xét tất cả khả năng có thể xảy ra, ta được.

- a = 1 , b = 15 tức là $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}+\sqrt{15}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ là1 số vô tỷ.
- a = 3, b = 5 tức là $\alpha=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ là 1 số vô tỷ.
- a = 5, b = 3 tức là $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=1$ là 1 số hữu tỷ.
- a = 15 , b = 1 , tức là $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\sqrt{5}+1}=\sqrt{3}$, 1 số vô tỷ.

Vậy tất cả các cặp (a,b) thỏa mãn là a = 5 b = 3 .

Câu 38. *(Trường chuyên ĐHSPHN – vòng 1 năm 2023-2024)*

Có hay không các số nguyên a,b sao cho $(a+b\sqrt{2023})^2=2024+2023\sqrt{2023}$?

Lời giải

Giả sử tồn tại các số nguyên a,b thoả mãn đề bài.

Khi đó $(a+b\sqrt{2023})^2=2024+2023\sqrt{2023}$

$$\Rightarrow a^2+2ab.\sqrt{2023}+2023b^2=2024+2023\sqrt{2023}$$

$$\Rightarrow a^2+2023b^2-2024=2023\sqrt{2023}-2ab.\sqrt{2023}$$

$$\Rightarrow a^2+2023b^2-2024=\sqrt{2023}(2023-2ab)$$

Vì $a^2+2023b^2-2024$ là số hữu tỉ, còn $\sqrt{2023}\left(2023-2ab\right)$ là số vô tỉ nên $2ab=2023$. Điều này là vô lí vì 1 vế là chẵn 1 vế là lẻ.Suy ra giả sử trên sai.Vậy không tồn tại các số nguyên a,b thoả mãn đề bài.

CHƯƠNG 8. CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

Câu 1 . *(Trường chuyên tỉnh An Giang năm 2023-2024)*

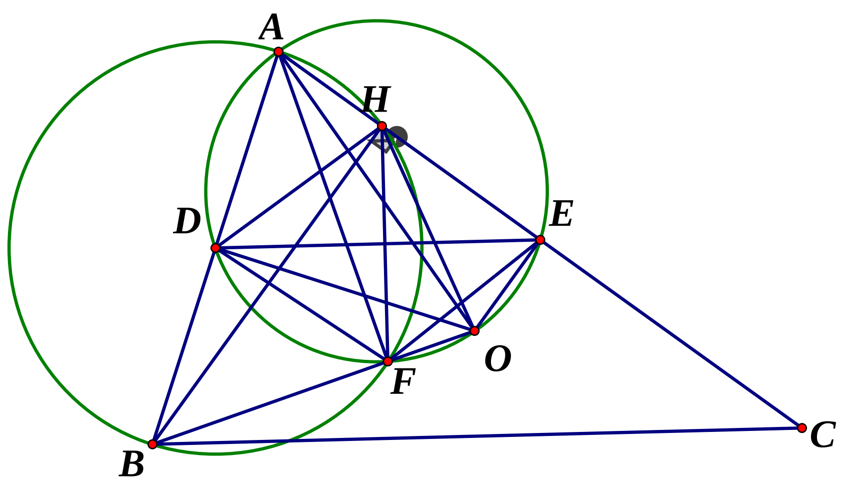
Cho tam giác *ABC* có ba góc đều nhọn, *BH* là đường cao kẻ từ *B* $(H \in AC)$. Gọi *D, E* lần lượt là trung điểm của *AB* và *AC*, *F* là điểm đối xứng của điểm *H* qua *DE*.

a. Chứng minh rằng tứ giác *ABFH* nội tiếp.

b. Chứng minh $\widehat{FBA} = \widehat{EFH}$.

c. Chứng minh rằng B*F* đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

Lời giải



a) Xét ΔAHB vuông cân tại *H* có *D* là trung điểm $AB \Rightarrow DA = DB = DH$ (1).

Vì *F* là điểm đối xứng của điểm *H* qua *DE* nên $DH = DF$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DA = DH = DB = DF$.

Suy ra bốn điểm *A, H, B, F* cùng thuộc được tròn đường kính *AB*.

Vậy tứ giác *ABFH* nội tiếp.

b) Tứ giác *ABFH* nội tiếp (câu 6a) $\Rightarrow \widehat{FBA} = \widehat{FHE}$ (3).

Vì *F* là điểm đối xứng của điểm *H* qua *DE* nên $EH = EF$.

Suy ra ΔEHF cân tại E $\Rightarrow \widehat{FHE} = \widehat{EFH}$ (4).

Từ (3), (4) $\Rightarrow \widehat{FBA} = \widehat{EFH}$.

c) Vì *F* là điểm đối xứng của điểm *H* qua *DE* nên

$$\widehat{FDE} = \frac{1}{2}\widehat{HDF} \quad (5)$$

Từ câu 6a, có *A, H, B, F* thuộc đường tròn tâm *D* đường kính *AB* nên

$\widehat{HAF} = \frac{1}{2}\widehat{HDF}$ (6).

Từ (5), (6) $\Rightarrow \widehat{FDE} = \widehat{HAF} = \widehat{EAF}$.

Suy ra tứ giác *FDAE* nội tiếp. (7)

Xét đường tròn (O) tâm O ngoại tiếp ΔABC có

D là trung điểm dây $AB \Rightarrow \widehat{ODA} = 90^0$

E là trung điểm dây $AC \Rightarrow \widehat{OEA} = 90^0$

Xét tứ giác $ODAE$ có:

$$\widehat{ODA} + \widehat{OEA} = 180^0$$

Nên tứ giác $ODAE$ nội tiếp đường tròn đường kính AO. (8)

Kết hợp (7), (8) $\Rightarrow A, D, F, O, E$ cùng thuộc đường tròn đường kính AO.

$\Rightarrow \widehat{AFO} = \widehat{ADO} = 90^0$ (cùng chắn cung AO).

Mặt khác: $\widehat{AFB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB)

Suy ra: $\widehat{AFO} + \widehat{AFB} = 180^0$, nghĩa là B, F, O thẳng hàng.

Vậy BF đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Câu 2. *(Trường chuyên tỉnh An Giang năm 2023-2024)*

Một nhà máy sản xuất ống thép khi xuất xưởng các ống thép được bó lại tạo thành khối gồm 37 ống như hình vẽ. Biết các ống có dạng hình trụ đường kính đáy bằng nhau và bằng $10cm$. Tính độ dài của một sợi dây đai để buột các ống thép lại với nhau

<u>Lời giải</u>

Đặt $d, r(cm)$ lần lượt là đường kính và bán kính của các ống thép $\Rightarrow d = 10cm; r = d/2 = 5cm.$

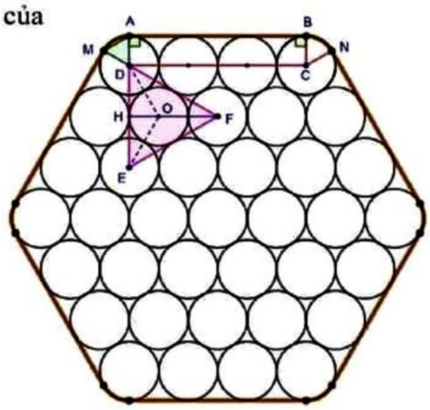
Ký hiệu các điểm như hình minh họa bên.

Trong đó:

A, B, M, N, H là các tiếp điểm giữa dây đai với các ống thép.

HÌNH VẼ

của



D, C, E, F, O là tâm của một số ống thép.

Giả sử các ống thép tiếp xúc khít nhau và dây đai buộc chính xác.

Dễ thấy ABCD là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow AB = CD = 3d = 3.10 = 30(cm)\ (1)$$

Nên hiển hiên các điểm A, D, H, E thẳng hàng.

Xét ΔDEF có:

$$DE = 2DH = 2\sqrt{OD^2 - OH^2} = 2\sqrt{(2r)^2 - r^2} = 2\sqrt{3}r = 10\sqrt{3}(cm)$$

Tương tự cũng tính được $DF = 10\sqrt{3}(cm)$ và $EF = 10\sqrt{3}(cm)$.

Như vậy $DE = EF = DF = 10\sqrt{3}(cm)$ nên ΔDEF là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{EDF} = 60^0$.

Suy ra $\widehat{ADM} = \widehat{EDF} = 60^0$ (đối đỉnh).

Chiều dài cung AM bằng

$$\frac{\pi.5.60}{180} = \frac{5}{3}\pi\ (cm)\quad (2)$$

Từ hình vẽ, kết hợp (1) và (2) ta tính được chiều dài dây đai là:

$$l = 6.\frac{5}{3}\pi + 6.30 = 180 + 10\pi(cm).$$

Câu 3 . *(Trường chuyên tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm 2023-2024)*

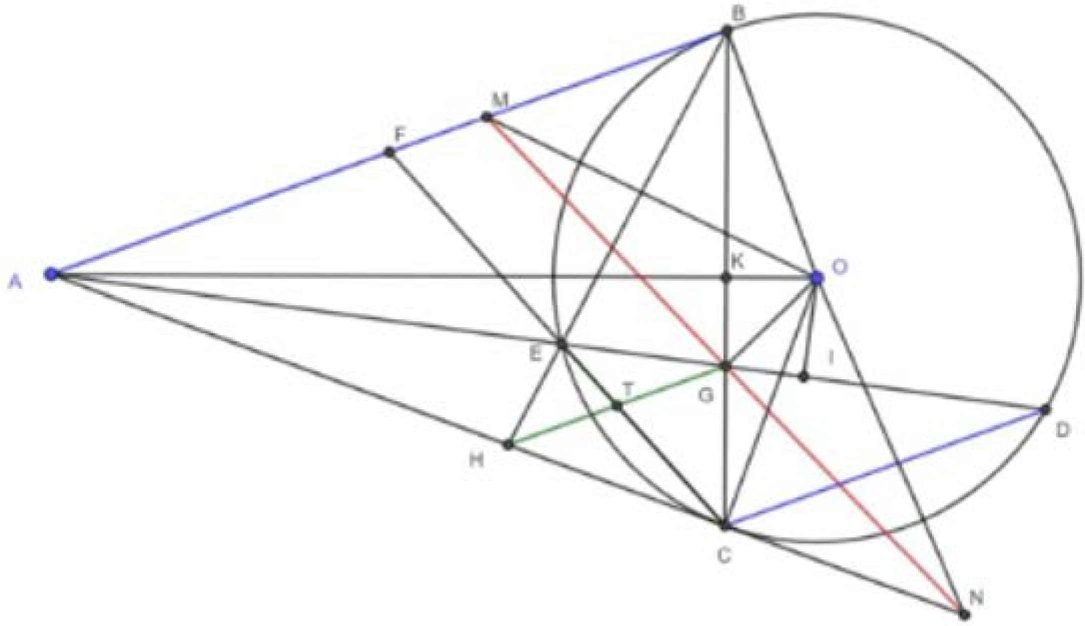
Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A sao cho $OA > 2R$. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của (O) (B, C là hai tiếp điểm). Vẽ dây cung CD của (O) song song với AB. Đường thẳng AD cắt (O) tại E khác A và cắt BC tại G. Qua G vẽ đường thẳng vuông góc với OG lần lượt cắt hai đường thẳng AB, AC tại M và N.

a) Chứng minh tam giác OMN cân

b) Gọi I là trung điểm của DE, OA cắt BC tại K. Chứng minh: $IE^2 = IA \cdot IG$

c) Tia BE cắt AC ở H . Chứng minh CE đi qua trung điểm của HG.

Lời giải



a) Tứ giác OGMB nội tiếp đường tròn đường kính MO $\Rightarrow \widehat{OMG} = \widehat{OBG}$.

Tứ giác OGCN nội tiếp đường tròn đường kính NO $\Rightarrow \widehat{ONG} = \widehat{OCG}$

Tuy nhiên tam giác OBC cân tại O $\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} \Rightarrow \widehat{OMG} = \widehat{ONG} \Rightarrow \Delta OMN$ cân tại O.

b) ta có: $\angle AKG = \angle AIO = 90^\circ \Rightarrow \Delta AKG, \Delta AIO$ đồng dạng $\Rightarrow AG.AI = AK.AO$.

Mặt khác, dễ thấy: $AK.AO = AB^2$ và $AB^2 = AE \cdot AD \Rightarrow AG \cdot AI = AE \cdot AD$

Khi đó: $AG \cdot AI = (AI - IE)(AI + IE) = AI^2 - IE^2 \Rightarrow IE^2 = AI^2 - AG \cdot AI = IG \cdot IA$

c) Gọi T là giao điểm của HG và CE . Ta có: $\widehat{BED} = \widehat{BCD} = \widehat{CBA} = \widehat{ACB} \Rightarrow HEGC$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{HGC} = \widehat{HEC} = \widehat{CDB} = \widehat{CBA}$. Đến đây ta chứng minh hai đường thẳng HG, AB song song với nhau .

Kéo dài CE cắt AB tại F.

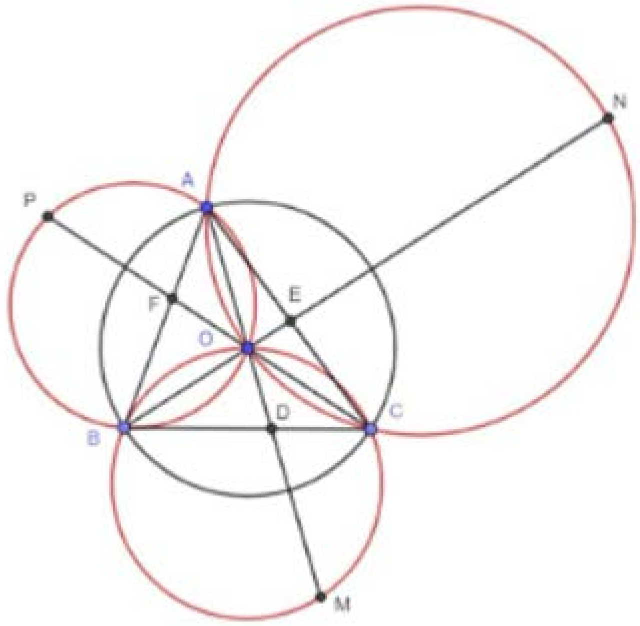
Dễ thấy: $\angle FAE = \angle EDC = \angle ECA \Rightarrow \Delta FAE, \Delta FCA$ đồng dạng $\Rightarrow FA^2 = FE.FC$, mà $FB^2 = FE.FC \Rightarrow F$ là trung điểm của AB. Đến đây sử dụng định lý Ta-lét , thì :

$\dfrac{TG}{FB} = \dfrac{CT}{CF} = \dfrac{TH}{FA} \Rightarrow TG = TH$ hay T là trung điểm của GH.

Câu 4 . *(Trường chuyên tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm 2023-2024)*

Cho đường tròn (O) bán kính 1. Ba điểm phân biệt A, B, C thay đổi nằm trên đường tròn (O) sao cho điểm O nằm bên trong tam giác ABC . Các đường thẳng OA, OB, OC lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC, OCA, OAB tại M, N, P khác O. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = OM^2 + ON^2 + OP^2$

Lời giải



Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của OA, OB, OC với các đường thẳng BC, CA, AB

Dễ thấy hai tam giác OCD, OMC đồng dạng $\Rightarrow OD.OM = OC^2 = 1 \Rightarrow OM = \dfrac{1}{OD}$

Tương tự: $ON = \dfrac{1}{OE}; OP = \dfrac{1}{OF}$

Đặt: $x = S_{OBC}; y = S_{OCA}; z = S_{OAB} \Rightarrow \dfrac{1}{OD} = \dfrac{OA}{OD} = \dfrac{y+z}{x}$

Tương tự: $\dfrac{1}{OE} = \dfrac{x+z}{y}; \dfrac{1}{OF} = \dfrac{y+z}{x}$

Khi đó: $\dfrac{1}{OD} + \dfrac{1}{OE} + \dfrac{1}{OF} = \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) + \left(\dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{x}\right) + \left(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y}\right) \geq 6.$

Do đó: $S = \dfrac{1}{OD^2} + \dfrac{1}{OE^2} + \dfrac{1}{OF^2} \geq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{OD} + \dfrac{1}{OE} + \dfrac{1}{OF}\right)^2 \geq 12.$

Vậy GTNN của biểu thức S là 12 đạt được khi tam giác ABC đều.

Câu 5. *(Trường chuyên tỉnh Bắc Giang năm 2023-2024)*

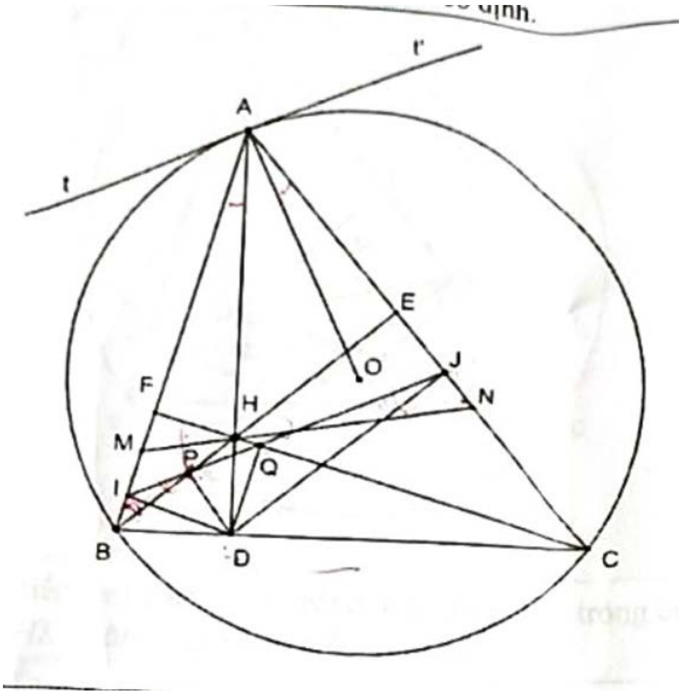
Cho đường tròn (O:R) và dây cung BC cố định của đường tròn thỏa mãn $BC < 2R$. Một điểm A di chuyển trên (O:R) sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Đường phân giác của $\widehat{CHE}$ kéo dài về hai phía cắt AB và AC lần lượt tại M,N.

1. Chứng minh tam giác AMN cân tại A.

2. Gọi I , P, Q, J lần lượt là hình chiếu của D trên cạnh AB, BE, CF, AC. Chứng minh rằng bốn điểm I, P, Q, J cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với AO.

3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ tại điểm thứ hai K. chứng minh rằng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



4.1. chứng minh tam giác AMN cân tại A.

Vì BE $\perp$ AC = E nên HEC = 90°

Vì CF $\perp$ AB = F nên HFB = 90°

$$\Rightarrow FMH + MHF = 90°; ENH + NHE = 90° \,(1)$$

Vì HN là phân giác của góc CHE nên CHN = NHE

Lại có CHN=MHF (đối đỉnh) nên NHE = MHF (2)

Từ (1) và (2) suy ra FMH = ENH hay AMN =ANM

Vậy ΔAMN cân tai A.

2. Chỉ ra tứ giác BIPD nội tiếp nên IBD + IPD =180° (3)

Chỉ ra IBD = FHA (cùng phụ với góc FAH);

Lại có FHA = QHD(đối đỉnh)$\Rightarrow$ IBD = QHD;

Chỉ ra tứ giác DPHQ nội tiếp nên QHD = QPD$\Rightarrow$ IBD = QPD (4)

Từ (3) và (4) suy ra QPD + IPD =180^0 nên ba điểm I, P, Q thẳng hàng

Chứng minh tương tự ta được P, Q, J thẳng hàng.

Vậy 4 điểm I, P, Q, J thẳng hàng.

Từ tứ giác BIPD nội tiếp chỉ ra MIP = PDB

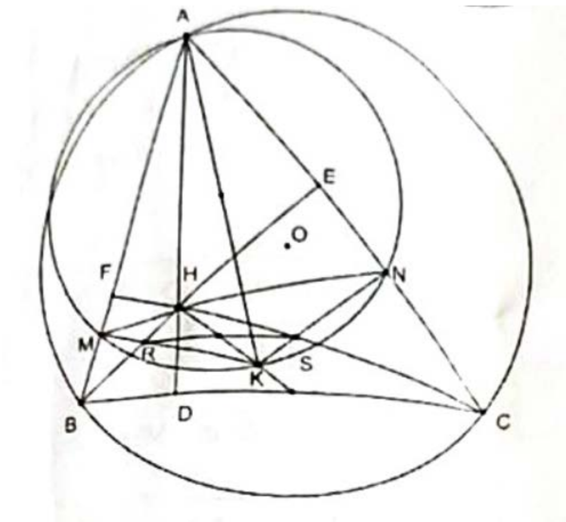
Lại có PD//AC (cùng vuông góc với BE) nên PDB = ACB

Qua A kẻ tiếp tuyến tAt' của (O)suy ra $AO \perp At; tAB = ACB\left(\text{ cùng bang } {}^{1}\!/_{2}\,\text{sđ } AB\right)$

Suy ra tAI = AIP

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên IP//At $\Rightarrow IP \perp AO\,(\text{đpcm})$

3.



Vì tam giác AMN cân tại A và AK là phân giác góc MAN nên AK là trung trực của MN suy ra AK là đường kính của đường tròn ngoại tiếp AMN

$AKM = ANK = 90° \Rightarrow KM//CF\ ; KN//BE$

Gọi $R = KM \cap BH; s = KN \cap HC \Rightarrow HRKS$ là hình bình hành suy ra HK đi quả trung điểm của RS (5)

Từ MR//FH$\Rightarrow \dfrac{HR}{RB} = \dfrac{FM}{MB};$

Vì HN là phân giác của góc CHE nên HM là phân giác của góc BHF $\Rightarrow \dfrac{FM}{MB} = \dfrac{FH}{HB}$

Từ SN//HE $\Rightarrow \dfrac{HS}{SC} = \dfrac{EN}{NC};$

Vì HN là phân giác của góc CHE nên $\dfrac{EN}{NC} = \dfrac{HE}{HC}$

Chỉ ra $\Delta FHB \sim \Delta EHC\left(\text{ góc} - \text{góc}\right) \Rightarrow \dfrac{FH}{NC} = \dfrac{HE}{HC}$

$\Rightarrow \dfrac{HR}{RB}=\dfrac{HS}{SC} \Rightarrow RS//BC$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra HK luôn đi qua trung điểm của BC (cố định).

Câu 6 . *(Trường chuyên tỉnh Bình Dương năm 2023-2024)*

Cho tam giác nhọn ABC (AB > AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh A, B. Gọi F là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng AO.

a) Chứng minh rằng 4 điểm B, E, D, F là 4 đỉnh của một hình thang cân.

b) Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của BC.

c) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng AO với đường tròn (O), M, N lần lượt là trung điểm của EF và CP. Tính số đo góc BMN.

Lời giải

Câu 7 . *(Trường chuyên tỉnh Yên Bái năm 2023-2024)*

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, các đường cao AD, BE, CF $(D\in BC, E\in CA, F\in AB)$. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt DF tại M, MC cắt (O) tại I khác C, IB cắt MD tại N.

a) Chứng minh rằng $MA//EF$.

b) Chứng minh rằng $\triangle MAF$ cân, tú giác $AINF$ nội tiếp.

c) Chứng minh rằng $MA^2 = MN \cdot MD$.

d) Gọi K là giao điểm của CF và đường tròn (O). Chứng minh rằng A, N, K thẳng hàng.

Lời giải

Câu 8 . *(Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2023-2024)*

1. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), $AB < AC$, có các đường cao BE và CF. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại S. Gọi M là giao điểm của BC và SO.

a. Chứng minh rằng tam giác EAB đồng dạng với tam giác MBS, từ đó suy ra tam giác AEM đồng dạng với tam giác ABS.

b. Gọi N là giao điểm của AM và EF, P là giao điểm của SA và BC. Chứng minh rằng NP vuông góc với BC.

2. Cho hình chữ nhật ABCD. Lấy các điểm E, F thuộc cạnh AB (E nằm giữa A, F); G, H thuộc cạnh BC (C nằm giữa B, H); I, J thuộc cạnh CD (I nằm giữa C, J); K, M thuộc cạnh DA (K nằm giữa D, M) sao cho E, F, G, H, I, J, K, M đôi một phân biệt và khác các đỉnh của hình chữ nhật ABCD, đồng thời hình đa giác EFGHIJKM có các góc bằng nhau. Chứng minh rằng nếu độ dài các cạnh của hình đa giác EFGHIJKM là các số hữu tỉ (theo đơn vị cm) thì EF = IJ.

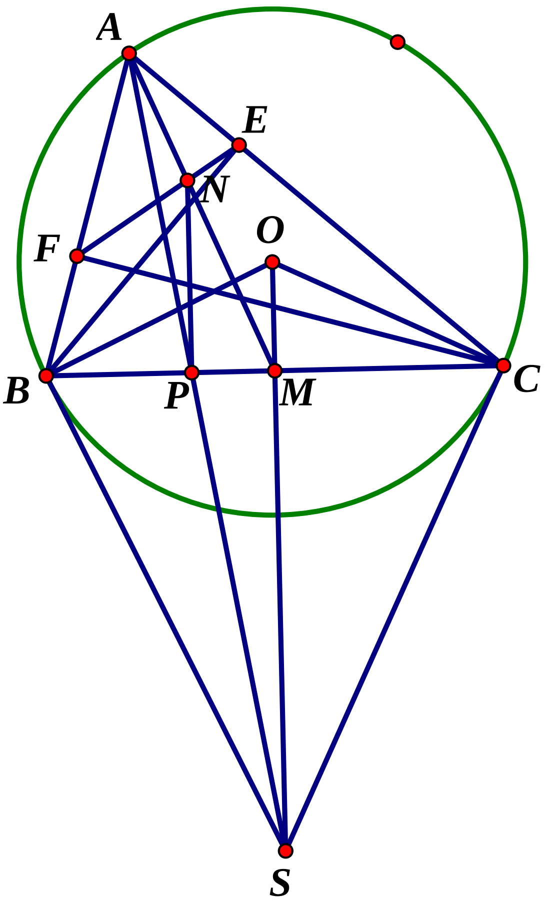
Lời giải a. Ta có $OS \perp BC$ tại trung điểm M của BC. Nên $\widehat{BEA} = \widehat{SMB} = 90^0$.

Mà $\widehat{BAC} = \widehat{SBC} = \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{BC}$. Suy ra ΔEAB đồng dạng ΔMBS.

Hai tam giác EAB, MBS đồng dạng nên $\frac{AB}{AE} = \frac{BS}{BM}$.

Tam giác BEC vuông tại E, EM là trung tuyến nên BM = ME.

Suy ra $\frac{AB}{AE} = \frac{BS}{ME}$ (1)



Tam giác MEC cân tại M, nên $\widehat{MEC} = \widehat{MCE}$. Mặt khác

$\widehat{ABS} + \widehat{ACB} = 180^0 = \widehat{AEM} + \widehat{MEC}$

$= \widehat{AEM} + \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \widehat{ABS} = \widehat{AEM}$ (2).

Từ (1), (2) suy ra hai tam giác AEM, ABS đồng dạng.

b. Hai tam giác AEM, ABS đồng dạng nên $\widehat{BAP} = \widehat{EAN}$; $\widehat{AME} = \widehat{ASB}$ (3).

Mà tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn đường kính BC nên $\widehat{ABP}=\widehat{AEN}$. Suy ra hai tam giác AEN, ABP đồng dạng, dẫn tới $\frac{AN}{AP}=\frac{NE}{BP}$ (4)

Ta có: $\widehat{NEM}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=\widehat{NEM}+\widehat{AEN}+\widehat{MEC}=180^0$.

Suy ra: $\widehat{NEM}=\widehat{BAC}=\widehat{SBP}$ (5)

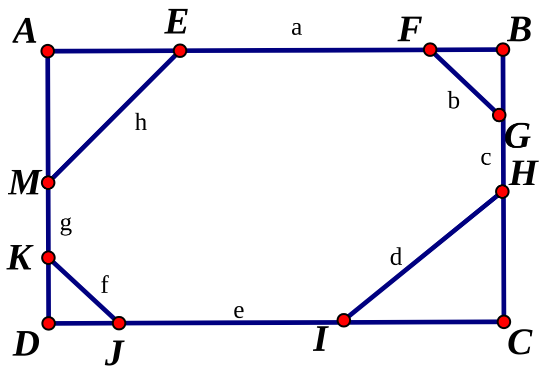
Từ (3) và (5) suy ra hai tam giác EMN, BSP đồng dạng. Do đó $\frac{NE}{BP}=\frac{MN}{PS}$ (6)

Từ (4) và (6) suy ra $\frac{AN}{AP}=\frac{NM}{PS}\Rightarrow\frac{AN}{MN}=\frac{AP}{PS}\Rightarrow NP//MS$.

Mà $SM\perp BC\Rightarrow NP\perp BC$.

2. Gọi $EF=a;\ FG=b;\ GH=c;\ HI=d;\ IJ=e;\ JK=f;\ KM=g;\ ME=h$ (theo đơn vị cm, với $a,b,c,d,e,f,g,,h$ là các số hữu tỉ dương).

Do các góc của hình bát giác EFGHIJKM bằng nhau nên mỗi góc trong của hình bát giác đó có số đo là $\frac{(8-2).180^0}{8}=135^0$.



Suy ra mỗi góc ngoài của hình bát giác này là $180^0-135^0=45^0$.

Do đó các tam giác MAE; FBG; CIH; DKJ là các tam giác vuông cân.

Ta có: $MA=ME=\frac{h}{\sqrt{2}};\ BF=BG=\frac{b}{\sqrt{2}};\ CH=CI=\frac{d}{\sqrt{2}};\ DK=DJ=\frac{f}{\sqrt{2}}$.

Vì AB = CD nên $\frac{h}{\sqrt{2}}+a+\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{f}{\sqrt{2}}+e+\frac{d}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow(e-a)\sqrt{2}=h+b-f-d$.

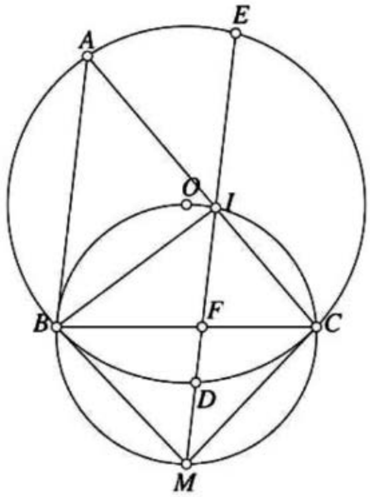
Nếu $e-a\neq0$ thì $\sqrt{2}=\frac{h+b-f-d}{e-a}$, điều này vô lí, do $\sqrt{2}$ là số vô tỉ, còn $\frac{h+b-f-d}{e-a}$, là số hữu tỉ. Vậy $e-a=0\Leftrightarrow e=a$ hay EF = IJ (đpcm)

Câu 9. *(Trường chuyên tỉnh Bến Tre năm 2023-2024)*

Cho tam giác ABC không có góc tù (*AB < AC, BC < 2R)* nội tiếp đường tròn (O;R) (B, C cố định, A di động trên cung lớn BC). Các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M. Từ M kẻ đường thẳng song song với AB, đường thẳng này cắt (O) tại D và E (D $\neq$ E, D thuộc cung nhỏ BC), cắt BC tại F và cắt AC tại I.

a) Chứng minh rằng MBIC là tức giác nội tiếp.
b) Chứng minh rằng FI.FM= FD.FE
c) Tìm vị trí của điểm A trên cung lớn BC sao cho tam giác *IBC* có diện tích lớn nhất

Lời giải



Lời giải.

a) Do MB thuộc tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) và MI || AB nên ta có
$\widehat{MBC} = \widehat{BAC} = \widehat{MIC}$.
Do đó, MIBC là tứ giác nội tiếp.

b) Ta có $\Delta BFI \sim \Delta MFC$ (g.g) vì $\begin{cases} \widehat{BFI} = \widehat{MFC} \left(đoi\, đinh\right) \\ \widehat{BIF} = \widehat{MCF} \left(cùng\, chan\, cung\, BM\right) \end{cases}$

Từ đây suy ra

Tương tự với cặp tam giác BFE và DFC, ta cũng có $FB.FC = FD.FE$
Suy ra $FI.FM = FD.FE$.

c) Ta có
$S_{IBC} = \frac{1}{2}.BC.d\left(I,BC\right)$.
Do B và C là hai điểm cố định nên độ dài của đoạn BC không đổi nên S_{IBC} có diện tích lớn nhất khi cà chỉ khi $d\left(I,BC\right)$ đạt giá trị lớn nhất.
Mặt khác, do MB và MC lần lượt là hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) nên $\widehat{MOB} = \widehat{MCO} = 90^{\circ}$, tức là tứ giác MBOC nội tiếp đường tròn đường kính OM (gọi là đường tròn $\mathcal{C}$), lại có MBIC là tứ giác nội tiếp 5 điểm M, B, O, I, C cùng thuộc một đường tròn cố định $\mathcal{C}$ (do O, M cố định).
Lại có $OB = OC = R$ nên O là điểm chính giữa cùng BC của $\mathcal{C}$, vì I di chuyển trên cung này nên $d\left(I,BC\right) \le d\left(O,BC\right) = const$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $I \equiv O$, hay A, O, C thẳng hàng.
Vậy khi A là giao điểm của OC và $\left(O\right)$ thì tam giác IBC có diện tích lớn nhất.

Bình Luận - Đối với ý b), nếu học sinh đã được làm quen với "phương tích của một điểm đối với đường tròn" thì ý này sẽ rất dễ dàng, dù vậy cách tiếp cận bằng tam giác đồng dạng cũng rất dễ nhận ra. Ý c) có thể xem là câu hỏi "lấy điểm 10" của đề; đối với dạng cực trị hình học như này, ta có thể tiến hành phân tích như sau:

i. Ta có $S_{IBC} = \frac{1}{2}.BC.d\left(I,BC\right)$ mà $BC = const$ nên ta chỉ cần biện luận vị trí của I để $d\left(I,BC\right)$ lớn nhất.

ii. Dựa vào các thành phần cố định, ta đi tìm quỹ tích của điểm I và tiếp hành lý luận để dẫn đến lời giải cho bài toán.

Câu 10. *(Trường chuyên tỉnh Gia lai năm 2023-2024)*

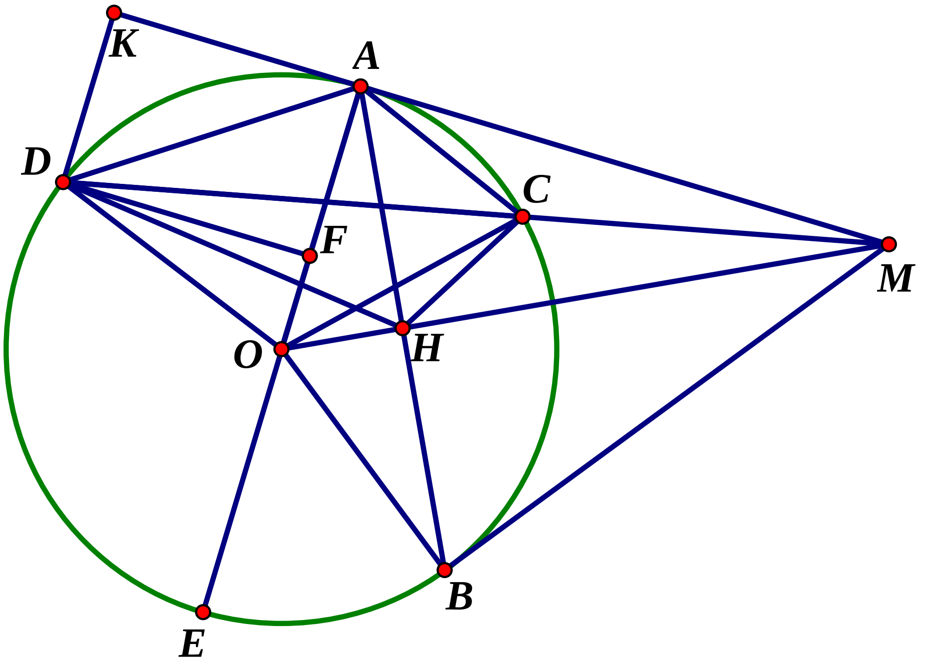
Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là tiếp điểm), cát tuyến MCD không đi qua tâm O, $MD > MC$.

a) Chứng minh rằng $MA^2 = MC.MD$.

b) Gọi H là giao điểm của MO và AB. Chứng minh rằng tứ giác $CHOD$ nội tiếp.

c) Tìm vị trí của điểm D trên đường tròn (O) để tam giác MAD có diện tích lớn nhất.

Lời giải



Xét ΔMAC và ΔMDA có

$\widehat{AMD}$ chung

$\widehat{MAC} = \widehat{MDA}$ (Cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$)

Suy ra $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC.MD$

Gọi H là giao điểm của MO và AB. Chứng minh rằng tứ giác $CHOD$ nội tiếp

Ta có: $\widehat{OAM} = 90^0$ (tính chất của tiếp tuyến)

$MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $OA = OB$

$\Rightarrow OM$ là trung trực AB hay $OM \perp AB$ tại H

$\Rightarrow AM^2 = MH.MO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Rightarrow MH.MO = MC.MD\left(= MA^2\right)$

$\dfrac{MH}{MC} = \dfrac{MD}{MO}$ và $\widehat{DMO}$ chung

$\Rightarrow \Delta MHD \backsim \Delta MCO$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{MDH} = \widehat{MOC}$ (hai góc tương ứng) hay $\widehat{CDH} = \widehat{HOC}$

$\Rightarrow$ tứ giác $DOHC$ nội tiếp đường tròn

Tìm vị trí của D để tam giác MAD có diện tích lớn nhất.

Dựng đường cao DK của ΔMAD. Khi đó $S_{\Delta MAD} = \dfrac{1}{2}MA.DK$

$S_{\Delta MAD} = \dfrac{1}{2}MA.DK$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi DK lớn nhất (MA không đổi)

Gọi E là điểm đối xứng với A qua O. Qua D dựng đường thẳng song song MA cắt AE tại $F \Rightarrow DK = AF$

Khi D di chuyển trên cung lớn AB thì F di chuyển trên đường kính AE. Suy ra AF lớn nhất khi AF là đường kính hay $D \equiv F \equiv E$

Câu 11. *(Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2023-2024)*

Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác CDE, BDF.

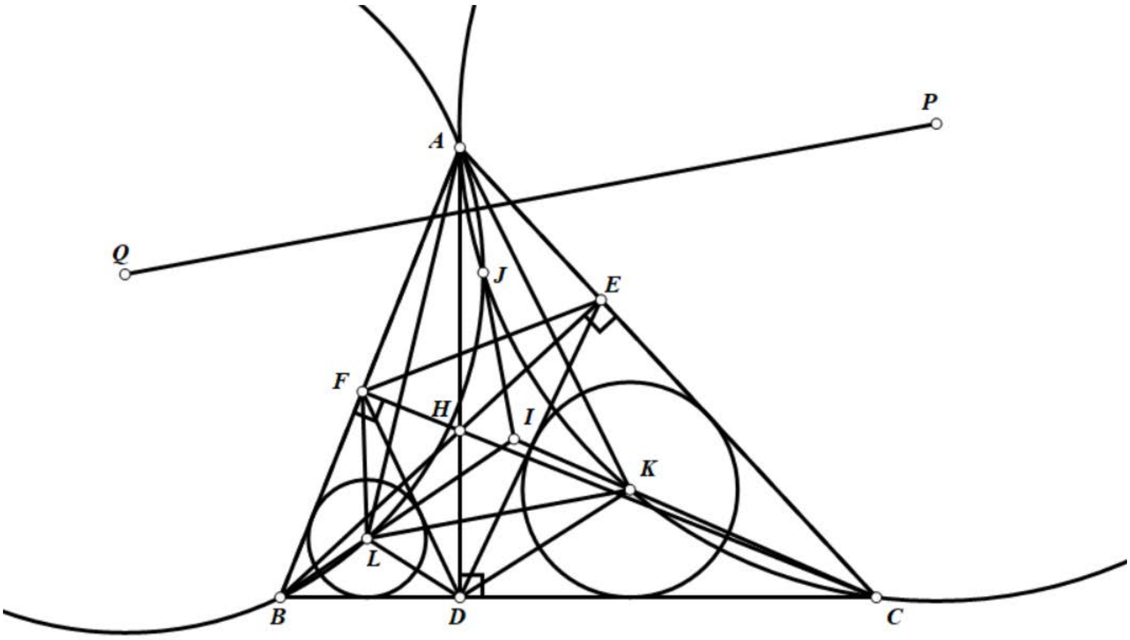
1. Chứng minh $\widehat{LDF} = \widehat{KDC}$.

2. Chứng minh hai tam giác LDF và KDC đồng dạng, hai tam giác LDK và FDC đồng dạng.

3. Chứng minh tứ giác $BLKC$ nội tiếp.

4. Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AKC, ALB, chứng minh PQ song song với KL.

Lời giải



1. Gọi H là trực tâm của ΔABC.

Vì K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác $CDE, BDF \Rightarrow DL$ là tia phân giác của $\widehat{FDB}; FL$ là tia phân giác của $\widehat{BFD}; CK$ là tia phân giác của $\widehat{ECD}; DK$ là tia phân giác của $\widehat{EDC}$.

Vì tứ giác $DHEC$ có: $\widehat{HDC} + \widehat{HEC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Suy ra tứ giác $DHEC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{EHC} \Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{FHB}$

Vì tứ giác $DFHB$ có: $\widehat{FDB} + \widehat{FHB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Suy ra tứ giác $DHFB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FDB} = \widehat{FHB}$.

Do đó: $\widehat{EDC} = \widehat{FDB} \Rightarrow \widehat{LDF} = \widehat{KDC}$.

2. Tứ giác $ACDF$ có: $\widehat{AFC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ACDF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{LFD} = \widehat{KCD}$

Xét ΔLDK và ΔKDC, ta có: $\widehat{LDF} = \widehat{KDC}$ và $\widehat{LFD} = \widehat{KCD} \Rightarrow \Delta LDF \backsim \Delta KDC\ (g.g)$.

$$\Delta LDF \backsim \Delta KDC \Rightarrow \frac{LD}{KD} = \frac{DF}{DC} \Rightarrow \frac{LD}{DF} = \frac{KD}{DC} \quad (1)$$

Vì $\begin{cases} \widehat{EDC} = \widehat{FDB} \Rightarrow \widehat{LDB} = \widehat{KDC} \Rightarrow \widehat{LDK} + 2\widehat{LDB} = 180^\circ \\ \widehat{FDC} + \widehat{FDB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{FDC} + 2\widehat{LDB} = 180^\circ \end{cases}$

Nên $\widehat{LDK} = \widehat{FDC}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\Delta LDK \backsim \Delta FDC\ (c.g.c)$.

3. Vì $\widehat{LFD}=\widehat{KCD}$ và $\widehat{DFC}=\widehat{DLK}\Rightarrow\widehat{DLK}+\widehat{KCD}=\widehat{DFC}+\widehat{LFD}=\widehat{LFC}=90^\circ-\widehat{BFL}$.

Vì L là tâm đường tròn nội tiếp ΔBDF nên $\widehat{BLD}=90^\circ+\widehat{BFL}$.

Khi đó $\widehat{BLK}+\widehat{KCD}=\widehat{BLD}+\widehat{DLK}+\widehat{KCD}=90^\circ+\widehat{BFL}+90^\circ-\widehat{BFL}=180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCKL$ nội tiếp.

4. Gọi J,I lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của ΔAEF và $\Delta ABC\Rightarrow J\in AI$.

Tương tự ý $1,2,3$ ta suy ra các tứ giác $ABLJ,ACKJ$ nội tiếp

$\Rightarrow J$ là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (P) và (Q)

$\Rightarrow PQ\perp AJ\Rightarrow PQ\perp AI$ (3)

Ta có: $\begin{cases}\widehat{LIK}=90^\circ+\dfrac{\widehat{ABC}}{2}\Leftrightarrow\widehat{LIK}=90^\circ+\widehat{IAK}+\widehat{KAC}\Leftrightarrow\widehat{IAK}=\widehat{LIK}-\widehat{KAC}-90^\circ\\ \widehat{LKA}=\widehat{LKI}+\widehat{IKA}=\widehat{LKI}+\widehat{KAC}+\widehat{KCA}=\widehat{LKI}+\widehat{KAC}+\widehat{KCB}=\widehat{LKI}+\widehat{KAC}+\widehat{ILK}\end{cases}$

Do đó $\widehat{IAK}+\widehat{LKA}=\widehat{LIK}+\widehat{LKI}+\widehat{ILK}-90^\circ=90^\circ\Rightarrow AI\perp LK$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $PQ//LK$.

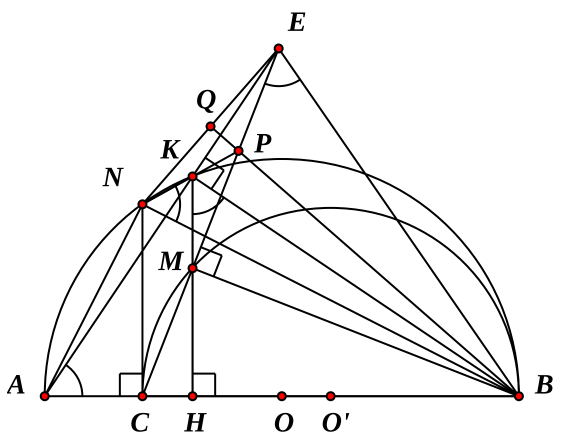
Câu 12. *(Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2023-2024)*

Cho đoạn thẳng AB và C là điểm nằm trên đoạn AB sao cho $BC>AC$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, vẽ nửa đường tròn đường kính AB và nửa đường tròn đường kính BC. Lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đường kính BC ($M\neq B$, $M\neq C$). Kẻ MH vuông góc với BC $\left(H\in BC\right)$, đường thẳng MH cắt nửa đường tròn đường kính AB tại K. Hai đường thẳng AK và CM cắt nhau tại E.

a) Chứng minh tứ giác $BMKE$ nội tiếp và $BE^2=BA\cdot BC$.

b) Từ C kẻ CN vuông góc với AB (N thuộc nửa đường tròn đường kính AB), gọi P là giao điểm của NK và CE. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BNE và PNE cùng nằm trên đường thẳng BP.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{BME}=\widehat{BKE}=90^\circ$ nên tứ giác $BMKE$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{HKB}=\widehat{CEB}$

mà $\widehat{HKB}=\widehat{BAE}$ (cùng phụ với $\widehat{HKA}$)

$\Rightarrow \widehat{BAE}=\widehat{CEB}$.

ΔBEC đồng dạng với ΔBAE (vì $\widehat{ABE}$ chung và $\widehat{BAE}=\widehat{CEB}$)

Do đó $\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{BC}{BE}\Rightarrow BE^2=BC\cdot AB$.

b) Xét tam giác vuông ABN có $CN\perp AB\Rightarrow BN^2=BC\cdot AB$

mà $BE^2=BC\cdot AB$ suy ra $BN=BE$ hay ΔBNE cân tại B, suy ra $\widehat{BNE}=\widehat{BEN}$. (1)

Mặt khác, theo câu trên ta có $\widehat{CEB}=\widehat{BAE}$ và $\widehat{BAE}=\widehat{BNP}$ suy ra $\widehat{CEB}=\widehat{BNP}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PNE}=\widehat{PEN}$ hay ΔPNE cân tại P $\Rightarrow NP=PE$.

Vì $NP=PE$ và $BN=BE$ nên $BP\perp NE$.

Suy ra BP là đường phân giác của các góc $\widehat{EBN}$ và $\widehat{EPN}$.

Do đó tâm đường tròn nội tiếp các tam giác BNE và PNE cùng nằm trên đường thẳng BP

Câu 13. *(Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2023-2024)*

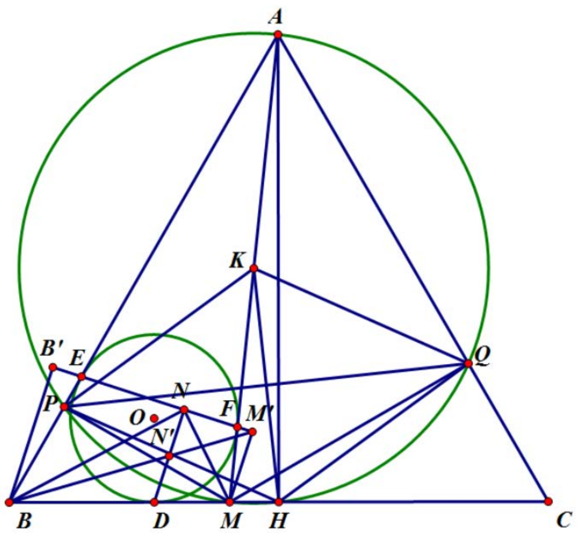
Cho tam giác đều ABC có đường cao AH. Trên cạnh BC lấy điểm M tùy ý (M không trùng B,H,C). Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC.

a) Chứng minh MP + MQ = AH

b) Gọi K là trung điểm của AM. Chứng minh rằng KH $\perp$ PQ

c) Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABM. Gọi D,E,F theo thứ tự là tiếp điểm của (O) với các cạnh BM,AB,AM. Vẽ DN vuông góc với EF tại N. Chứng minh $\widehat{BNE}=\widehat{MNF}$

Lời giải



a) Trong ΔBMP vuông ở P. ta có: $MP = MB.\sin \widehat{MBP} = MB.sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}MB$

Tương tự, ta chứng minh được: $MQ = \frac{\sqrt{3}}{2}MC$

Vậy $MP + MQ = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = AH$

b) Do $\widehat{APM} = \widehat{AQM} = \widehat{AHM} = 90°$ nên A, M, P, Q, H cùng nằm trên đường tròn đường kính AM. Do đó, K là tâm của đường tròn này $\Rightarrow$ KP = KH = KQ

Trong Δ PKH cân ở K có $\widehat{PHK} = 2\widehat{PAH} = 2\widehat{BAH}$ =2. 30 °= 60°. Vậy Δ PKH đều $\Rightarrow HP = HK\left(1\right)$

Tương tự, là chứng minh được ΔQKH đều $\Rightarrow HQ = HK\left(2\right)$

Từ (1), (2) ta được:

$$\left.\begin{array}{r} HQ = HK \\ Mà\, PQ = PK \end{array}\right\} \Rightarrow PQ \text{ là đường trung trực của } HK \Rightarrow PQ \perp HK$$

c) Gọi B', M' lần lượt là hình chiếu của B, M lên EF. Khi đó do BB'||DN||MM' Gọi N là giao điểm của DN và BM.

Áp dụng định lý Thales trong Δ BMM'; Δ M'BB' có BB'||DN|| MM'; D $\in BM; N' \in BM'; N \in B'M'$, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{MD}{DB} = \frac{M'N'}{N'B} \\ \frac{M'N'}{N'B} = \frac{M'N}{NB'} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{BD}{DM} = \frac{B'N}{NM'}(3)$$

Xét ΔBB'E và Δ MM'F , ta có:

$\widehat{BB'E} = \widehat{MM'F} = 90°$

$\widehat{BEB'} = \widehat{AEF} = \widehat{AFE}$ (ΔAEF cân tại F do AE = AF theo tính chất tiếp tuyến)

$= \widehat{MFM'}$

Vậy $\Delta BB'E \sim \Delta MM'F\left(g.g\right) \Rightarrow \frac{B'E}{M'F} = \frac{BE}{MF} = \frac{BD}{DM}$ (4) (do $BE = BD$; $MF = MD$ theo tính chất tiếp tuyến)

Từ (3) và (4), ta được $\dfrac{B'M}{NM'}=\dfrac{B'E}{M'F}=\dfrac{B'N-B'E}{NM'-M'F}=\dfrac{EN}{FN}$

Xét ΔBNE và ΔMNF, ta có :

$$\widehat{BEN}=\widehat{MFN}$$

$$\frac{EN}{FN}=\frac{B'N}{MN'}=\frac{BE}{MF}(CMT)$$

Vậy $\Delta BNE \sim \Delta MNF\,(c.g.c) \Rightarrow \widehat{BNE}=\widehat{MNF}\,(ĐPCM)$

Câu 14 . *(Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2023-2024)*

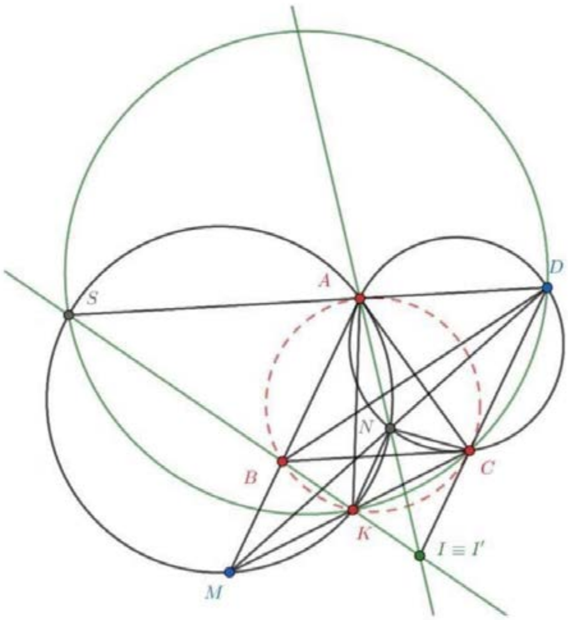
Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Dựng bên ngoài tam giác ABC các tam giác đều ANI và BMK . Gọi điểm D là hình chiếu vuông góc của điểm A lên cạnh BC , điểm E là trung điểm của đoạn thẳng IK .

a) Chứng minh tứ giác $AKBD$ nội tiếp.

b) Chứng minh điểm E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD .

c) Tính số đo của $\widehat{NEM}$

Lời giải



a) Ta có:

$CA=CB$ mà $CB=DA$ ($ABCD$ là hình bình hành)

$\Rightarrow AC=AD \Rightarrow \Delta ACD$ cân

$\widehat{ADC}=\widehat{ACD}$

Mà $\widehat{ACD}=\widehat{BAC}$ (so le trong)

$\Rightarrow \widehat{BAC}=\widehat{ADC} \Rightarrow AB$ là tiếp tuyến của (ADC)

Tương tự, ta có CD là tiếp tuyến của (ABC)

Ta có: $\widehat{AMN}=\widehat{NDC}$ (so le trong)

Mà $\widehat{NDC}=\widehat{NAC}$ ($ADCN$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{NAC} \Rightarrow AC$ là tiếp tuyến của (AMN)

Xét hai tam giác ΔAKC và ΔMAC có:

$\widehat{ACK}$ là góc chung

$\widehat{KMA} = \widehat{KAC}$ (vì AC là tiếp tuyến của (AMN))

$\Rightarrow \Delta AKC \backsim \Delta MAC\,(g-g)$

$\Rightarrow \widehat{AKC} = \widehat{MAC}$

Mà do $CA = CB$

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại C

$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{ABC}$

Do đó, ta có $\widehat{AKC} = \widehat{ABC}\left(= \widehat{MAC}\right)$

$\Rightarrow ABKC$ nội tiếp (đpcm)

b) Gọi S là giao điển của BK và (AMN)

Ta có $\widehat{SAM} = \widehat{SKM}$

Mà $\widehat{SKM} = 180^\circ - \widehat{BKC} = \widehat{BAC} = \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BAD}$

$\Rightarrow \widehat{SAM} = 180^\circ - \widehat{BAD}$

$\Rightarrow \widehat{SAM} + \widehat{BAD} = 180^\circ$

$\Rightarrow S, A, D$ thẳng hàng

Khi đó, ta có:

$\widehat{SDC} = \widehat{ACD} = \widehat{CAB} = \widehat{SKM}$

$\Rightarrow \widehat{SDC} = \widehat{SKM}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $SDCK$ nội tiếp

I là giao điểm AN và SK

Gọi I' là giao điểm của SK và CD

Khi đó, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{NKI'} = \widehat{SAN} \\ \widehat{NCI'} = \widehat{DAN} \\ \widehat{SAN} + \widehat{DAN} = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{NKI'} + \widehat{NCI'} = 180^\circ$$

$\Rightarrow NKI'C$ nội tiếp

Vì $NKI'C$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KCI'} = \widehat{KNI'}$

Mà $\widehat{KCI'} = \widehat{DSK}$ (do $SDCK$ nội tiếp)

Mà $\widehat{DSK} = \widehat{ASK} = \widehat{KNI}$

Từ đây suy ra: $\widehat{KNI'} = \widehat{KNI} \Rightarrow I \equiv I'$

Do đó $I \in CD$, mà CD cố định

Vậy I thuộc đường thẳng CD cố định khi M thay đổi (đpcm)

Câu 15. *(Trường chuyên tỉnh Cao Bằng năm 2023-2024)*

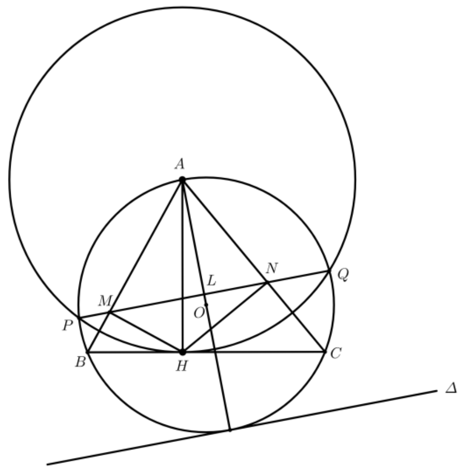
Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), $AB < AC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. Kẻ HM, HN lần lượt vuông góc với $AB, AC\,(M \in AB, N \in AC)$.

a) Chứng minh tứ giác $AMHN$ nội tiếp.

b) Gọi giao điểm của đường tròn tâm A bán kính AH với cung nhỏ AC của đường tròn (O) là điểm Q. Chứng minh ba điểm M, N, Q thẳng hàng.

c) Khi điểm A cố định và hai điểm B, C di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC luôn là tam giác nhọn. Chứng minh MN song song với một đường thẳng cố định.

Lời giải



a) Ta có $HN \perp AC \Rightarrow \widehat{HNA} = 90^\circ$; $HM \perp AB \Rightarrow \widehat{HMA} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $AMHN$, có $\widehat{HNA} + \widehat{HMA} = 180^\circ$, hai góc $\widehat{HNA}$ và $\widehat{HMA}$ ở vị trí đối nhau. Do đó tứ giác $AMHN$ nội tiếp đường tròn đường kính AH.

b) Xét ΔAHB vuông tại H, có đường cao HM, ta có $AH^2 = AM \cdot AB$

ΔAHC vuông tại H, có đường cao HN, ta có $AH^2 = AN \cdot AC$

Do đó $AM \cdot AB = AN \cdot AC$ hay $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AN}{AB}$

Lại có $\widehat{A}$ chung nên $\Delta AMN \sim \Delta ACB \Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{ABC}$.

Kẻ AO cắt đường tròn (O) tại điểm K. Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{AKC}$. Do đó $\widehat{ANM} = \widehat{AKC}$ (1)

Mặt khác, Q thuộc đường tròn tâm A, bán kính AH nên $AQ = AH$.

$AQ^2 = AH^2 = AN \cdot AC \Rightarrow \dfrac{AQ}{AN} = \dfrac{AC}{AQ} \Rightarrow \Delta AQC \sim \Delta ANQ \Rightarrow \widehat{AQC} = \widehat{ANQ}$

Tứ giác $AQCK$ nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{AQC} + \widehat{AKC} = 180^\circ$.

Suy ra $\widehat{ANQ} + \widehat{AKC} = 180^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ANM} + \widehat{ANQ} = 180^\circ$ hay ba điểm M, N, Q thẳng hàng.

c) Gọi giao điểm thứ hai của đường tròn (O) và đường tròn tâm A, bán kính AH là P.

Chứng minh tương tự ý b) ta có ba điểm M,N,P thẳng hàng.

Gọi Δ là tiếp tuyến với đường tròn (O) tại K. Ta có $PQ \perp AK$ (tính chất đường kính và dây cung chắn bởi giao điểm của hai đường tròn) $\Rightarrow PQ // \Delta$.

Vì A cố định, (O) cố định nên Δ cố định. Do đó B,C khi thay đổi trên đường tròn (O) sao cho ΔABC luôn là tam giác nhọn thì MN luôn song song với tiếp tuyến Δ cố định của đường tròn (O)

Câu 16 . *(Trường chuyên tỉnh Đà Nẵng năm 2023-2024)*

1) Cho tam giác nhọn ABC, với AB < AC, nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở D. Đường tròn đường kính AD cắt đường tròn đường kính OD tại điểm E (khác D). Gọi F là giao điểm của đoạn thẳng OE và đường tròn (O).

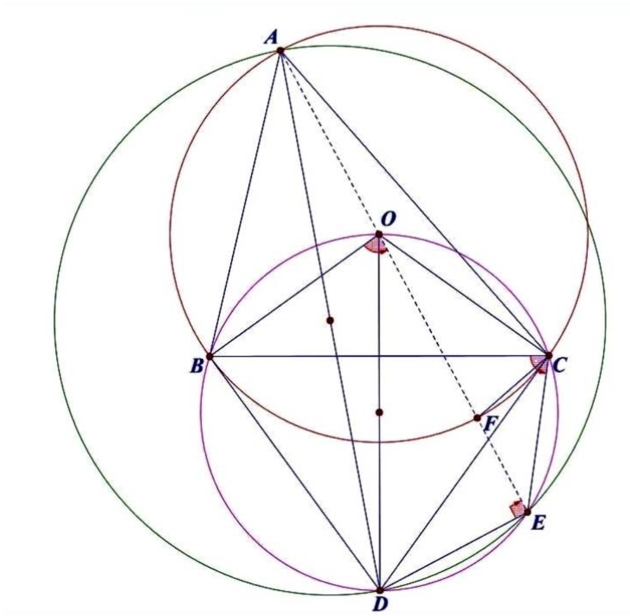
a) Chứng minh rằng 3 điểm A, O, E thẳng hàng và CF là tia phân giác của góc BCE.

b) Các tia AB, AC lần lượt cắt đường tròn đường kính AD tại các điểm G, K (đều khác A). Chứng minh rằng OD đi qua trung điểm của đoạn thẳng GK.

2) Cho tam giác nhọn ABC có AB < AC < BC, đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại M. Lấy điểm E nằm giữa A và M. Trên cạnh AC, BC lần lượt lấy điểm D, F sao cho AD = AE và BF = BE. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF lần lượt cắt AB và BC tại G (khác E) và H (khác F). Chứng minh rằng (O) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF và các đường thẳng CM, ED, GH đồng quy.

Lời giải

1)



a) Chứng minh A,O,E và CF là tia phân giác của $\widehat{BCE}$.

b) Các tia AB, AC lần lượt cắt đường tròn đường kính AD tại các điểm G, K (khác A). Chứng minh rằng OD đi qua trung điểm của đoạn thẳng GK.

a) + Xét đường tròn đường kính OD:

$\widehat{OED} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

+Xét đường tròn đường kính AD:

$\widehat{AED} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{OED} = \widehat{AED} = 90°$

$\Rightarrow \overline{A, O, E}$

+Trong đường tròn đường kính AD:

$\widehat{BCE} = \widehat{BOE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$)

+ Trong đường tròn (O):

$\widehat{BCF} = \frac{1}{2}\widehat{BOE}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{BF}$)

$\Rightarrow \widehat{BCF} = \frac{1}{2}\widehat{BCE}$

$\Rightarrow$ CF là tia phân giác của $\widehat{BCE}$

b) + Gọi I là giao điểm thức hai của AD và (O) và L là giao điểm của GK và OD.

+ Gội M là giao điểm của OD và BC. Dễ dàng ta chứng minh được OD là trung trực của BC.

$\widehat{CMD} = 90°$ mà $\widehat{CKD} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AD)

$\Rightarrow$ CMDK nộp tiếp$\Rightarrow \widehat{LDK} = \widehat{ACB}$, mà $\widehat{ACB} = \widehat{AIB}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O))$\Rightarrow \widehat{LDK} = \widehat{AIB}$

+ $\widehat{BAI} = \widehat{DKL}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{GD}$ của đường tròn đường kính AD)

Ta được: $\Delta ABI \backsim \Delta KLD$ (g – g) $\Rightarrow \frac{LK}{LD} = \frac{BA}{BI}$

Tương tự: $\Delta ACI \backsim \Delta GLD$ (g – g) $\Rightarrow \frac{LG}{LD} = \frac{CA}{CI}$

Mà $\frac{BA}{BI} = \frac{CA}{CI}$

Đây là bổ đề quen thuộc từ hai tiếp tuyến và một cát tuyến, ta chứng minh được như sau:

$\Delta DIB \backsim \Delta DBA$ (g – g) $\Rightarrow \frac{BA}{BI} = \frac{BD}{DI}$

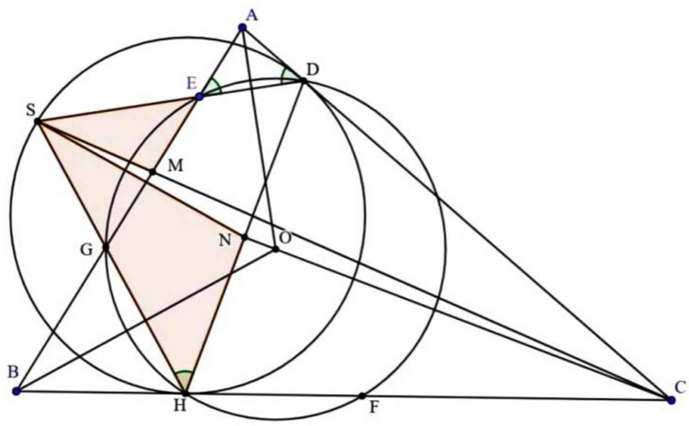
$\Delta DIC \backsim \Delta DCA$ (g – g) $\Rightarrow \frac{CA}{CI} = \frac{CD}{DI}$

Mà $\frac{BD}{DI} = \frac{CD}{DI}$ nên $\frac{BA}{BI} = \frac{CA}{CI}$

Do đó: $\frac{LK}{LD} = \frac{LG}{KD} \Rightarrow LK = LG$

Vậy OD đi qua trung điểm L của GK

2)



Gọi S là giao của DE và GH. Ta đi chứng minh C, M, S thẳng hàng.

Ta có $\widehat{ADE}=\widehat{AED}=\widehat{DHS}\Rightarrow$ CD là tiếp tuyến của (SHD) tại D
Tương tự ta cũng có CH là tiếp tuyến của (SHD) tại H
Khi đó SC là đường đối trung của tam giác SHD
Gọi N là trung điểm HD. Theo bổ đề đường dối trung, ta có:
$\widehat{HSN}=\widehat{CSD}$ (1) Lại có tam giác SEG $\backsim$ SHD
$\Rightarrow$ Tam giác SEM $\backsim$ SHN (Chia đôi tỉ số đường trung tuyến)
$\Rightarrow\widehat{SEM}=\widehat{HSN}\left(2\right)$

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{CSD}=\widehat{ESM}\Rightarrow$(đpcm)

Câu 17. *(Trường chuyên tỉnh* **ĐAK LAK** *năm 2023-2024)*

Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}=90°, BC=CD$, M là trung điểm của AB, đường tròn tâm C bán kính BC cắt MD tại $E\left(E\neq D\right)$, H là giao điểm của AC và BD.

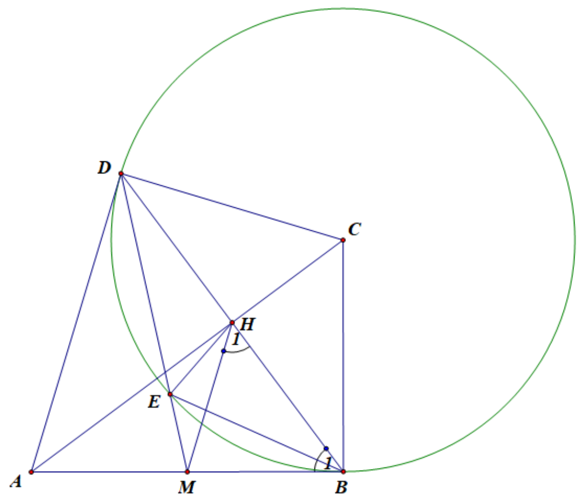
1) Chứng minh rằng tứ giác $BHEM$ là tứ giác nội tiếp.

2) Gọi F là giao điểm của AE và đường tròn $\left(C\right)\left(F\neq E\right)$. Chứng minh $BC\perp DF$

3) Gọi I là giao điểm của đường thẳng BC và đường tròn $\left(C\right)\left(I\neq B\right)$, J là giao điểm của AI và DF. Tính tỉ số $\dfrac{DJ}{DF}$

Lời giải

Chứng minh rằng tứ giác $BHEM$ là tứ giác nội tiếp.



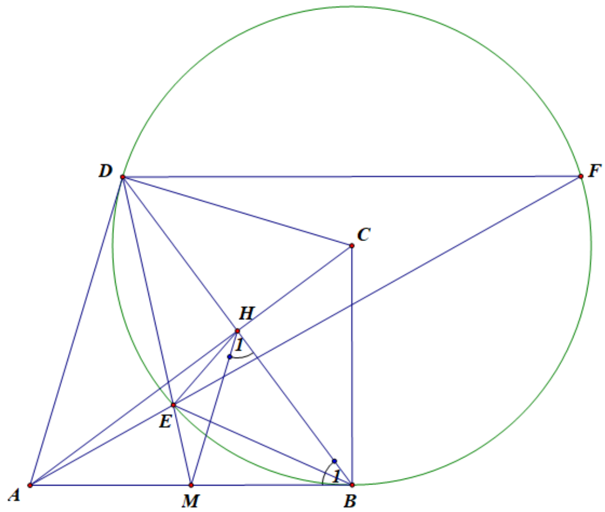
Ta có $\Delta ABC = \Delta ADC \Rightarrow AB = AD$, $MH = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}AB = MB$ nên $\widehat{MBH} = \widehat{MHB}$.

AB, AD là tiếp tuyến của đường tròn tâm C bán kính BC nên $\widehat{MBE} = \widehat{BDM}$.

ΔMEB đồng dạng với tam giác ΔMBD suy ra $\widehat{MEB} = \widehat{MBD} = \widehat{MHB}$

$\widehat{MEB} = \widehat{MHB}$ cùng nhìn cạnh MB nên tứ giác $BHEM$ là tứ giác nội tiếp.

Gọi F là giao điểm của AE và đường tròn $(C)(F \neq E)$. Chứng minh $BC \perp DF$



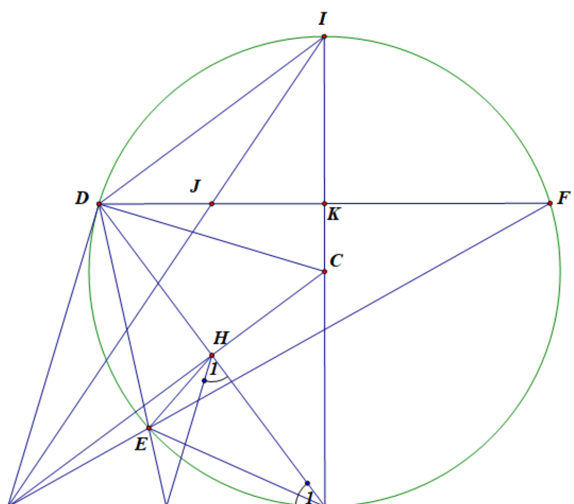
Do ΔMEB đồng dạng với tam giác ΔMBD suy ra $\dfrac{MB}{ME} = \dfrac{MD}{MB} \Leftrightarrow \dfrac{MA}{ME} = \dfrac{MD}{MA}$

Từ đó có tam giác MAE đồng dạng với tam giác MDA, suy ra $\widehat{MDA} = \widehat{MAE}$.

Mặt khác $\widehat{MDA} = \widehat{DFA}$ do cùng chắn cung DE nên $\widehat{MAE} = \widehat{DFA}$

$\Rightarrow DF \parallel AB \perp BC \Rightarrow BC \perp DF$

Gọi I là giao điểm của đường thẳng BC và đường tròn $(C)(I \neq B)$, J là giao điểm của AI và DF. Tính tỉ số $\dfrac{DJ}{DF}$



$$\text{Từ } (1),(2) \Rightarrow \frac{IK}{IB} = \frac{DK}{2AB} = \frac{JK}{AB} \Rightarrow JK = \frac{1}{2}DK \Rightarrow \frac{DJ}{DF} = \frac{1}{4}$$

Câu 18. *(Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2023-2024)*

Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Gọi H là trung điểm của OA. Vẽ dây CD vuông góc với AB tại H. Gọi M là một điểm di động trên cung nhỏ BC (M không trùng với B và C), AM cắt CD tại I.

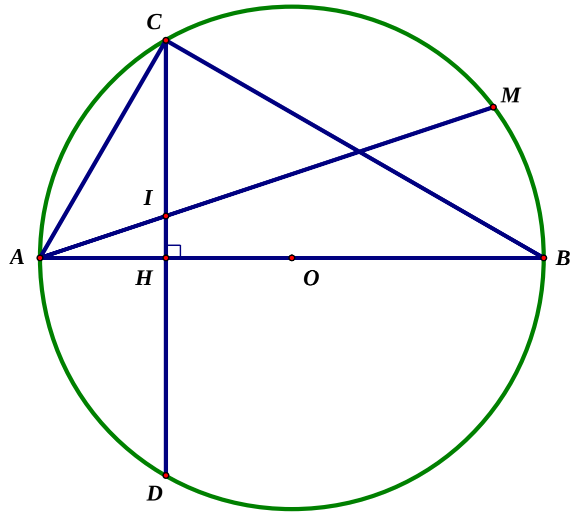
1) Tính độ dài các đoạn thẳng $AC,\ BC,\ CH$ theo R.

2) Chứng minh AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IDM.

3) Tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC sao cho $MB + MC + MD$ đạt giá trị lớn nhất

Lời giải

Tính độ dài các đoạn thẳng $AC,\ BC,\ CH$ theo R.



Vì H là trung điểm của OA nên $AH = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{R}{2}$.

Ta có $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

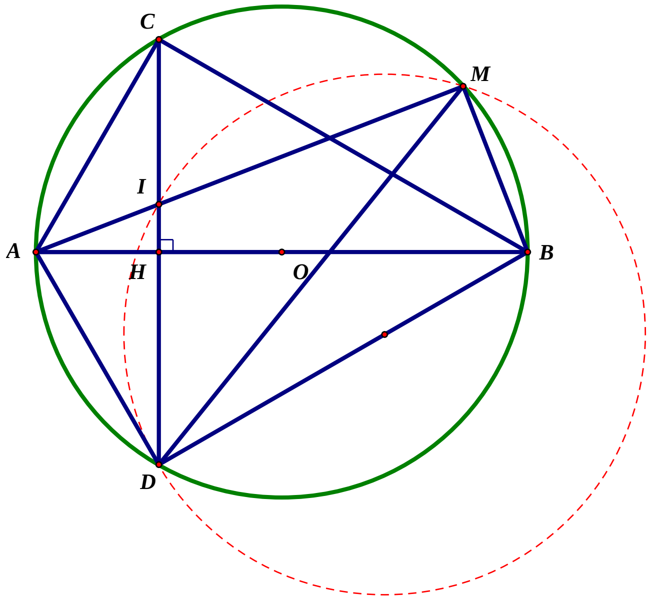
Xét tam giác ABC vuông tại C có đường cao CH:

$$AC^2 = AB.AH = 2R.\frac{R}{2} = R^2 \Rightarrow AC = R.$$

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow BC = R\sqrt{3}.$$

$$CH.AB = AC.BC \Rightarrow CH = \frac{AC.BC}{AB} = \frac{R.R\sqrt{3}}{2R} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Chứng minh AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IDM.



Cách 1:

Tam giác ABD vuông tại D đường cao DH ta có $AD^2 = AH.AB.$

ΔAIH và ΔABM có góc A chung và $\widehat{AHI} = \widehat{AMB}\left(=90^0\right)$.

Suy ra $\Delta AIH \backsim \Delta ABM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AI}{AB} = \dfrac{AH}{AM} \Rightarrow AH.AB = AI.AM$.

Do đó $AD^2 = AI.AM \Rightarrow \dfrac{AD}{AM} = \dfrac{AI}{AD}\cdot$

ΔADI và ΔAMD có góc A chung và $\dfrac{AD}{AM} = \dfrac{AI}{AD}$.

Suy ra $\Delta ADI \backsim \Delta AMD$ (c.g.c).

Vậy $\widehat{ADI} = \widehat{AMD}$. Do đó AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔIDM .

Cách 2:

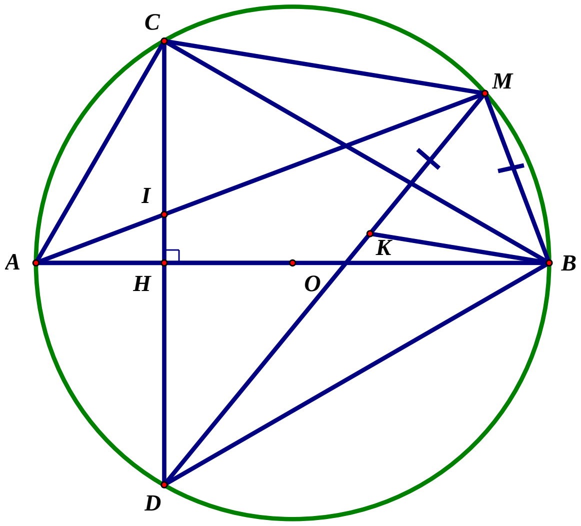
OA là đường trung trực của CD nên $AC = AD$.

Tam giác ACD cân tại A nên $\widehat{ACD} = \widehat{ADI}$.

Mặt khác $\widehat{ACD} = \widehat{AMD}$ (cùng chắn cung AD).

Vậy $\widehat{ADI} = \widehat{AMD}$. Do đó AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔIDM .

Tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC sao cho $MB + MC + MD$ đạt giá trị lớn nhất.



Ta có $CD = 2.CH = 2.\frac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

Mặt khác ΔBCD cân tại B nên $BD = BC = R\sqrt{3}$.

Vậy ΔBCD là tam giác đều.

Trên đoạn MD lấy điểm K sao cho $MK = MB$.

ΔMBK cân tại M có $\widehat{BMK} = \widehat{BCD} = 60^0$ nên là tam giác đều.

Ta có $\widehat{CBM} + \widehat{CBK} = 60^0$, $\widehat{DBK} + \widehat{CBK} = 60^0$.

Dẫn đến $\widehat{CBM} = \widehat{DBK}$.

Xét ΔCBM và ΔDBK có: $CB = DB$, $\widehat{CBM} = \widehat{DBK}$, $BM = BK$.

Do đó $\Delta CBM = \Delta DBK \Rightarrow MC = KD$.

Vậy $MD = MK + KD = MB + MC$.

Ta có $MB + MC + MD = 2MD \le 4R$.

Vậy $MB + MC + MD$ đạt giá trị lớn nhất khi MD là đường kính của đường tròn (O). Do đó M là điểm chính giữa của cung nhỏ BC.

Câu 19. *(Trường chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2023-2024)*

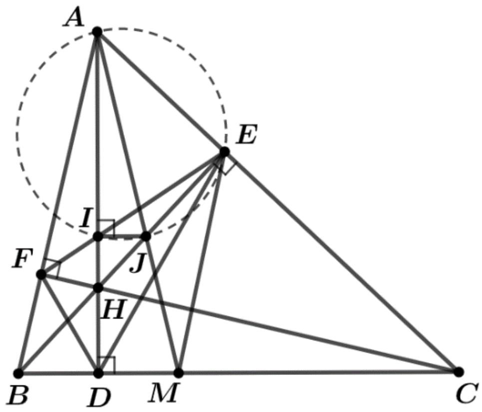
Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I là giao điểm của EF và AH, kẻ IJ song song với BC ($J \in HE$). Đường thẳng AJ cắt BC tại M.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AIJE$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng D là trung điểm BM.

c) Gọi L là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC. Chứng minh rằng $\widehat{FLB} = \widehat{CAM}$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng tứ giác $AIJE$ nội tiếp đường tròn.

Vì $IJ//BC$ nên $IJ \perp AI$.

Ta có $\widehat{AIJ} = 90^{\circ}$

$\widehat{AEJ} = 90^{\circ}$

Suy ra $\widehat{AIJ} + \widehat{AEJ} = 180^{\circ}$. Vậy tứ giác $AIJE$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng D là trung điểm BM.

Tứ giác $AEHF$ có $\widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^{\circ}$, suy ra $AEHF$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{FAH} = \widehat{FEH}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{FH}$)
(1)

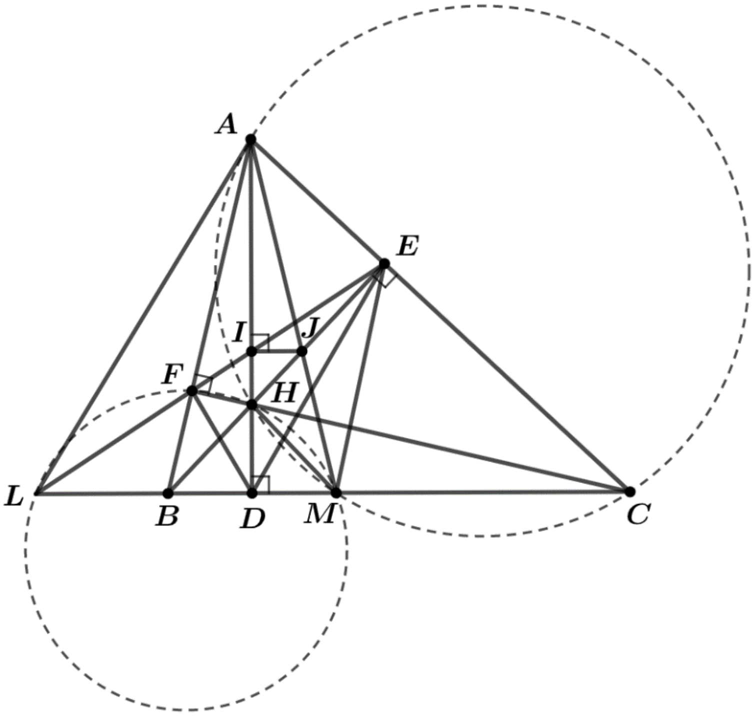
Tứ giác $AIJE$ nội tiếp đường tròn, suy ra $\widehat{IAJ} = \widehat{IEJ}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{IJ}$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{FAH} = \widehat{IAJ} \Rightarrow AD$ là đường phân giác góc $\widehat{BAM}$.

Mà AD là đường cao tam giác BAM

$\Rightarrow \Delta BAM$ cân tại $A \Rightarrow D$ là trung điểm BM

c) Gọi L là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC. Chứng minh rằng $\widehat{FLB} = \widehat{CAM}$.



Tứ giác $AFDC$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{FAD} = \widehat{FCD}$

Mà $\widehat{FAD} = \widehat{DAM} \Rightarrow \widehat{HAM} = \widehat{HCM}$

$\Rightarrow AHMC$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{MHC}$ (3)

ΔHBM cân tại H nên $\widehat{HMB} = \widehat{HBM}$

Tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{EFC} = \widehat{EBC}$

$\Rightarrow LFHM$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{FLM} = \widehat{MHC}$ (góc ngoài của tứ giác nội tiếp) (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow \widehat{FLB} = \widehat{CAM}$

Câu 20. *(Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2023-2024)*

Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và không đi qua tâm O. Gọi A là điểm di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm tam giác ABC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại K, đường thẳng AH cắt cạnh BC tại D và AE là đường kính của đường tròn (O).

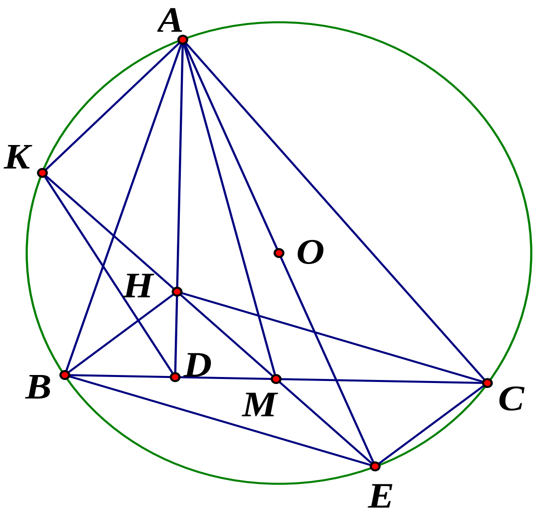
1. Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$.

2. Chứng minh rằng tứ giác $BHCE$ là hình bình hành và $HA.HD = HK.HM$.

3. Tia KD cắt đường tròn (O) tại I (I khác K), đường thẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng BC cắt AM tại J. Chứng minh rằng các đường thẳng AK, BC và HJ cùng đi qua một điểm.

4. Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với AK tại A và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q phân biệt. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng PQ. Chứng minh rằng đường thẳng AN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



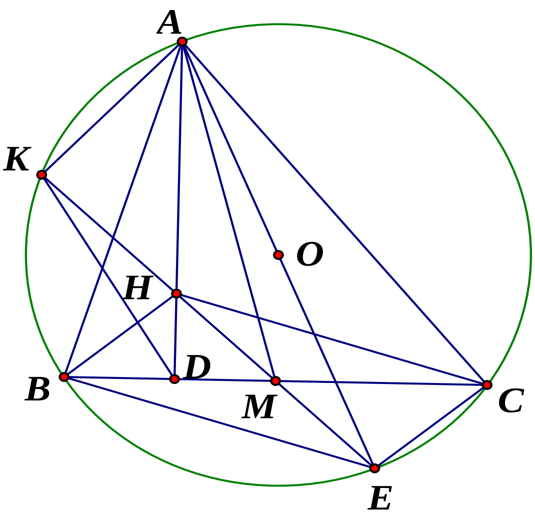
$AH \perp BC \Rightarrow \widehat{ADB} = 90^0$

$\widehat{ABE} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CBE}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

Mà $\widehat{CBE} = \widehat{CAE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$)

Suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$.



Ta có $\widehat{ACE} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow EC \perp AC$.

Mà H là trực tâm tam giác ABC $\Rightarrow BH \perp AC$. Từ đó suy ra $EC // BH$.

Tương tự $HC // BE$

Xét tứ giác $BHCE$ có $EC // BH$ và $HC // BE$ nên tứ giác $BHCE$ là hình bình hành.

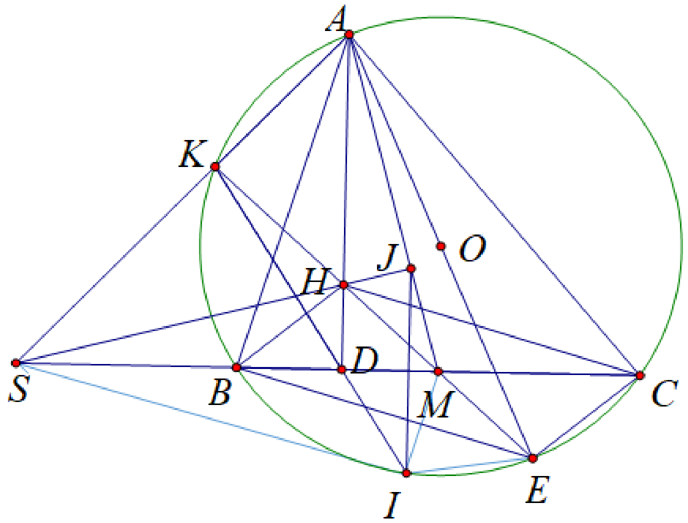
Mà M là trung điểm của BC nên ba điểm H, M, E thẳng hàng.

Lại có ba điểm M, K, H thẳng hàng. Từ đó suy ra ba điểm K, H, E thẳng hàng.

Ta có $\widehat{AKE}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AKM}=90°$.

Xét ΔAKH và ΔMDH có: $\widehat{AKM}=\widehat{MDH}\left(=90°\right)$; $\widehat{KHA}=\widehat{DHM}$ (hai góc đối đỉnh).

$\Rightarrow \Delta AKH \backsim \Delta MDH\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{HA}{HM}=\dfrac{HK}{HD} \Rightarrow HA.HD=HK.HM$.



Kéo dài AK cắt đường thẳng BC tại S, ΔSAM có hai đường cao AD và MK cắt nhau tại $H \Rightarrow H$ là trực tâm tam giác SAM.

Xét tam giác ΔHDM và ΔSDA có $\widehat{ADS}=\widehat{HDM}=90°$ và $\widehat{DMH}=\widehat{DAS}$ (cùng phụ với $\widehat{ASM}$).

$\Rightarrow \Delta HDM \backsim \Delta SDA\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{HD}{DM}=\dfrac{DS}{AD}$. (1)

Tương tự H là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow \Delta BDH \backsim \Delta ADC \Rightarrow \dfrac{BD}{HD}=\dfrac{AD}{CD}$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{HD}{DM}.\dfrac{BD}{HD}=\dfrac{DS}{AD}.\dfrac{AD}{CD} \Rightarrow \dfrac{BD}{DM}=\dfrac{DS}{CD} \Rightarrow BD.CD=DM.DS$ (3)

Mà $\Delta BDK \backsim \Delta IDC\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{BD}{ID}=\dfrac{DK}{DC} \Rightarrow BD.CD=DI.DK$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow DI.DK=DM.DS$ nên $SKMI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{SMI}=\widehat{SKI}$.

Mà $AKDM$ là tứ giác nội tiếp (do $\widehat{AKM}=\widehat{ADM}=90°$) $\Rightarrow \widehat{SKI}=\widehat{DMA}$.

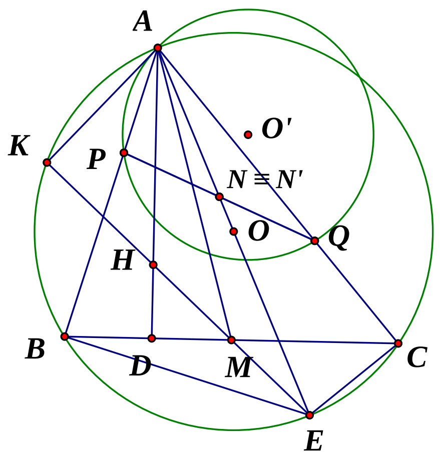
Từ đó suy ra $\widehat{SMI}=\widehat{DMA}$.

Xét ΔMIJ có $\widehat{SMI}=\widehat{DMA}$ và $IJ \perp BC \Rightarrow BC$ là đường trung trực của IJ.

$\Rightarrow \widehat{SJM}=\widehat{SIM}=90°$ (vì $SKMI$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{SIM}=180°-\widehat{SKM}=180°-90°=90°$)

$\Rightarrow SJ \perp AM$.

Mà H là trực tâm $\Delta SAM \Rightarrow SH \perp AM$. Từ đó suy ra ba điểm S, H, J thẳng hàng. Vậy các đường thẳng AK, BC và HJ cùng đi qua điểm S.



Gọi N' là giao điểm của PQ và AE. Xét $\Delta AQN'$ và ΔBEM có:

$\widehat{QAN'} = \widehat{EBM}$; $\widehat{AQN'} = \widehat{KAP} = \widehat{BEM}$

$\Rightarrow \Delta AQN' \backsim \Delta BEM\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{AN'}{QN'} = \dfrac{BM}{EM}$ (5)

Do $\widehat{QAN'} = \widehat{EBM}$; $\widehat{AQN'} = \widehat{KAP} = \widehat{BEM}$ nên theo tính chất góc ngoài của $\Delta AQN'$ và ΔBEM ta có $\widehat{EMC} = \widehat{PN'A}$.

Mà $\widehat{PAN'} = \widehat{ECM}$ nên $\Delta ECM \backsim \Delta PAN'\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{CM}{EM} = \dfrac{AN'}{PN'}$. (6)

Từ (5) và (6) và kết hợp $BM = CM \Rightarrow \dfrac{AN'}{QN'} = \dfrac{AN'}{PN'} \Rightarrow QN' = PN' \Rightarrow N \equiv N'$.

Vậy AN luôn đi qua một điểm cố định O

Câu 21. *(Trường chuyên Tin Hà Nội năm 2023-2024)*

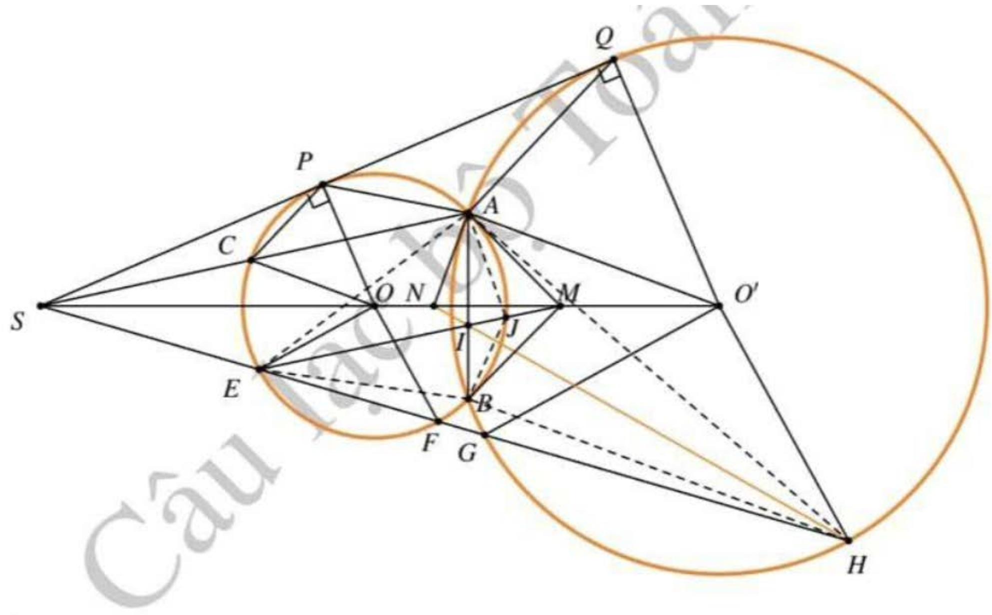
Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A và B $(R < R' < OO')$. Gọi PQ là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn (O) và (O') với $P \in (O), Q \in (O')$. $PQ \cap OO' = S$. Qua S kẻ 1 đường thẳng cắt (O) tại 2 điểm E,F và cắt (O’) tại 2 điểm G,H sao cho $SE < SF < SG < SH$.

1) Chứng minh rằng $OE // O'G$.

2) Chứng minh $SA^2 = SP.SQ$.

3) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt OO’ tại M. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O’) cắt OO’ tại N. $ME \cap AB = I$. Chứng minh $\dfrac{EA^2}{EB^2} = \dfrac{IA}{IB}$ và N, I, H thẳng hàng.

Lời giải



1) Ta thấy OP∥O’Q (do cùng vuông góc với PQ) $\Rightarrow \dfrac{SP}{SQ}=\dfrac{R}{R'}$

Kẻ O'G'∥OE (G' thuộc SE) $\Rightarrow \dfrac{OE}{O'G'}=\dfrac{SO}{SO'}=\dfrac{R}{R'} \Rightarrow O'G'=R' \Rightarrow$ G’ thuộc (O’). Lại có: $\widehat{OEF}+\widehat{O'HG}<180^{\circ}$ nên O’H không song song với OE. Do đó, G’ trùng G $\Rightarrow$ OE//O’G (ĐPCM)

2) Gọi SA∩(O’)=C,A.Tương tự phần a ta cũng chứng minh được OC∥AO’.Theo định lí Thales: $\dfrac{SC}{SA}=\dfrac{SO}{SO'}=\dfrac{SP}{SQ} \Rightarrow$ PC∥AQ $\Rightarrow \widehat{SAP}=\widehat{SPC}=\widehat{SQA} \Rightarrow \Delta SAP \sim \Delta SQA$

$\Rightarrow \dfrac{SA}{SQ}=\dfrac{SP}{SA}$

$\Rightarrow SA^2=SP.SQ$ (ĐPCM)

3, gọi $ME\cap(O)=\{J,E\}$. Vì tính đối xứng nên ta có MB cũng là tiếp tuyến của (O), ta có $\Delta MJA \sim \Delta MAE(g,g)$ và $\Delta MJB \sim \Delta MBE(g.g)$ nên ta được

$$\frac{JA}{EA}=\frac{MJ}{MA}=\frac{MJ}{MB}=\frac{JB}{EB}$$

Từ đó ta thu được $\dfrac{EB}{EA}=\dfrac{JB}{JA}$ từ đó để ý rằng $\Delta IAE \sim \Delta IJB$ và $\Delta IBE \sim \Delta IJA$ nên ta được

$$\frac{IA}{IB}=\frac{IA}{IE}.\frac{IE}{IB}=\frac{JA}{EB}.\frac{EA}{JB}=\frac{EA}{EB}.\frac{JA}{JB}=\frac{EA^2}{EB^2}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh $\dfrac{EA}{EB}=\dfrac{HA}{HB}$. Thật vậy, ta có SP^2 = SE . SF và SQ^2 = SG . SH.

Do đó $SB^2 = SA^4 = SP^2.SQ^2 = SE.SF.SG.SH$. Mặt khác, từ câu a ta sẽ có $\frac{SE}{SF} = \frac{SG}{SH}$ hay SE . SH = SG . SF. Như vậy, ta được $SA^2 = SB^2 = (SE.SH)^2$ hay $SA^2 = SB^2 = SE.SH$. Từ đó ta thu được $\triangle SEA \backsim \triangle SAH$ (c.g.c) và $\triangle SEB$ và $\triangle SBH$ (c.g.c). Do vậy,

$$\frac{EA}{HA} = \frac{SE}{SA} = \frac{SE}{SB} = \frac{EB}{HB}.$$

Nói cách khác, ta thu được $\frac{EA}{EB} = \frac{HA}{HB}$. Đến đây, đặt HN . AB = I'. Chứng minh tương tự như ý trên ta cũng được $\frac{I'A}{I'B} = \frac{HA^2}{HB^2}$. Từ đó suy ra $\frac{IA}{IB} = \frac{I'A}{I'B}$ và dẫn đến I ≡ I' . Như vậy, N, I, H thẳng hàng.

Câu 22. *(Trường chuyên Toán Hà Nội năm 2023-2024)*

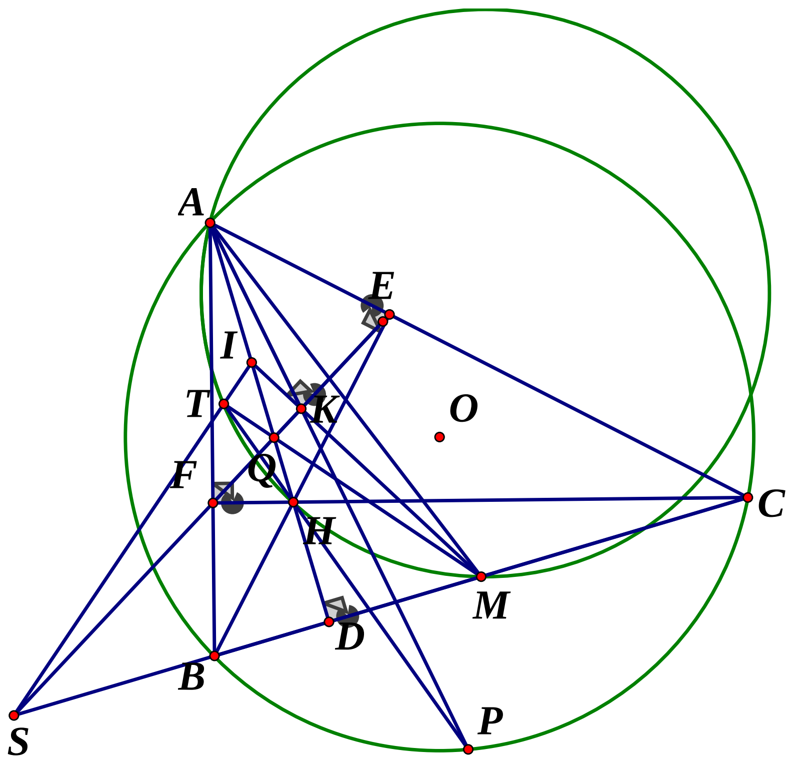
Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn $(AB < AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. $EF \cap AD = Q$. M, I lần lượt là trung điểm của BC, AH. $IM \cap EF = K$.

1) Chứng minh ΔAEK đồng dạng với ΔABM.

2) $EF \cap BC = S. SI \cap MQ = T$. Chứng minh A,T,H,M đồng viên.

3) Tia TH cắt (O) tại P. Chứng minh A, K, P thẳng hàng.

Lời giải



1) Xét các tam giác *BFC* và *BEC* lần lượt vuông tại *F* và *E* với các trung tuyến tương ứng là *FM* và *EM*, khi đó ta được $FM = EM = \frac{1}{2}BC$. Tương tự, xét các tam giác *AFH* và *AEH* lần lượt vuông tại *F* và *E* với các trung tuyến tương ứng là *FI* và *EI*, khi đó ta cũng được $FI = EI = \frac{1}{2}AH$. Như vậy, *MI* là đường trung trực của *EF*, vì thế *K* là trung điểm của *EF*. Mặt khác, lại chú ý rằng $\Delta AEB \sim \Delta AFC\,(g.g)$ nên ta được $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$, kéo theo $\Delta AEF \sim \Delta ABC\,(c.g.c)$. Từ đó ta thu được $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ và $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{2EK}{2BM} = \frac{EK}{BM}$. Do đó, $\Delta AEK \sim \Delta ABM\,(c.g.c)$

2) Xét ΔISM với $ID \perp SM$ và $SK \perp IM$ (vì *MI* là trung trực của *EF*), vì thế *Q* là trực tâm của ΔISM. Như vậy, $MQ \equiv MT \perp SI$ và từ đó ta được $\widehat{ITM} = 90° = \widehat{IEM} = \widehat{IFM}$. Do đó, năm điểm *I,T,E,F,M* cùng thuộc một đường tròn và dẫn đến *QT.QM* = *QE.QF*. Mặt khác, lại chú ý rằng tứ giác *AEFH* là tứ giác nội tiếp, ta cũng có *QE.QF* = *QA.QH*. Như vậy, *QT.QM* = *QA.QH*, vì vậy bốn điểm *A,T,H,M* cùng thuộc một đường tròn

3) Trên tia *TH* lấy một điểm *P'* sao cho *HT.HP'* = *HA.HD*. Khi đó, ta cũng được *HT.HP'* = *HB.HE* = *HC.HF* và do đó các tứ giác *TBP'E* và *TCP'F* là các tứ giác nội tiếp. Khi đó, ta có $\widehat{BP'T} = \widehat{BET} = \widehat{HET}$ và $\widehat{CP'T} = \widehat{CFT} = \widehat{HFT}$. Từ đó, chú ý rằng tứ giác *TIEF* nội tiếp nên $\widehat{EFT} = \widehat{EIF} = 2\widehat{BAC}$, ta thu được

$$\widehat{BP'C} = \widehat{BP'T} + \widehat{CP'T} = \widehat{HET} + \widehat{HFT} = 360° - \widehat{EHF} - \widehat{EFT}$$

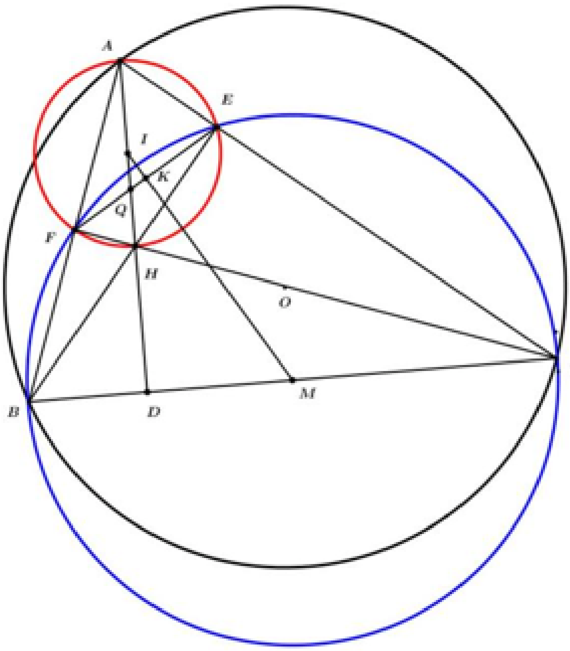
$$= 360° - \left(180° - \widehat{BAC}\right) - 2\widehat{BAC} = 180° - \widehat{BAC}$$

Do đó $P' \in$ (O) và kéo theo $P' \equiv P$. Như vậy, *HA.HD* = *HT.HP* nên tứ giác *ATDP* nội tiếp và $\widehat{DAP} = \widehat{DTH}$. Mặt khác, ta có các kết quả quen thuộc $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$ và $AO \perp EF$, kết hợp với $\Delta AEK \sim \Delta ABM$, ta thu được $\widehat{OAM} = \widehat{BAO} - \widehat{BAM} = \widehat{CAH} + \widehat{EAK} = \widehat{DAK}$ và *IM* // *AO* ($\perp EF$). Lại chú ý rằng các tứ giác *ATHM* và *ITDM* là các tứ giác nội tiếp, ta được

$$\widehat{DTH} = \widehat{AHT} - \widehat{IDT} = \widehat{AMT} - \widehat{IMT} = \widehat{AMI} = \widehat{OAM} = \widehat{DAK}$$

Do đó, $\widehat{DAP} = \widehat{DAK}$, từ đó suy ra *A,P,K* thẳng hàng

Lời giải 2



I là tâm đường tròn ngoại tiếp $AFHE$ (nội tiếp)
M là tâm đường tròn ngoại tiếp $BFEC$ (nội tiếp)

$\Rightarrow \begin{cases} IM \perp EF \\ EK = KF \end{cases}$ (đường nối tâm)

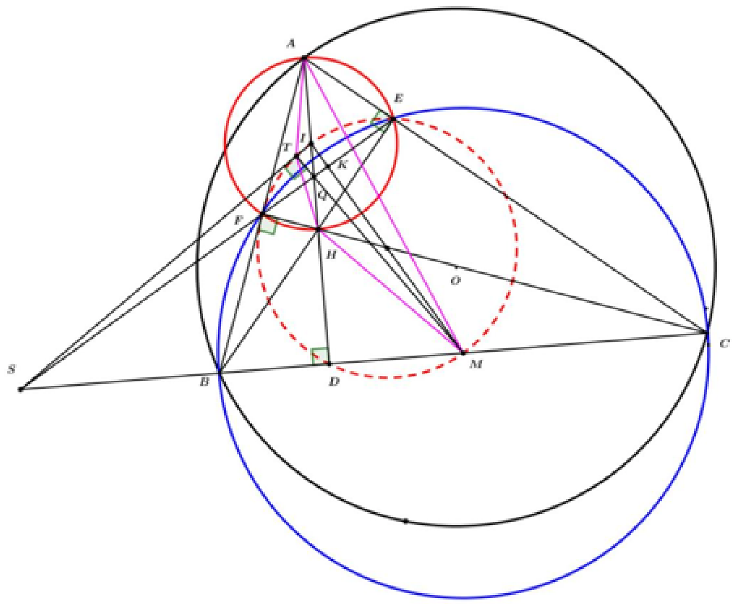
$\Rightarrow \Delta AEF \# \ \Delta ABC \ \left(BFEC\ (\text{nt})\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{2KE}{2BM} = \dfrac{KE}{BM} \\ \widehat{AEF} = \widehat{ABC} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta AEK \# \ \Delta ABM$

2) Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm S, đường thẳng SI cắt đường thẳng MQ tại điểm T. Chứng minh bốn điểm A, T, H và M cùng thuộc một đường tròn.

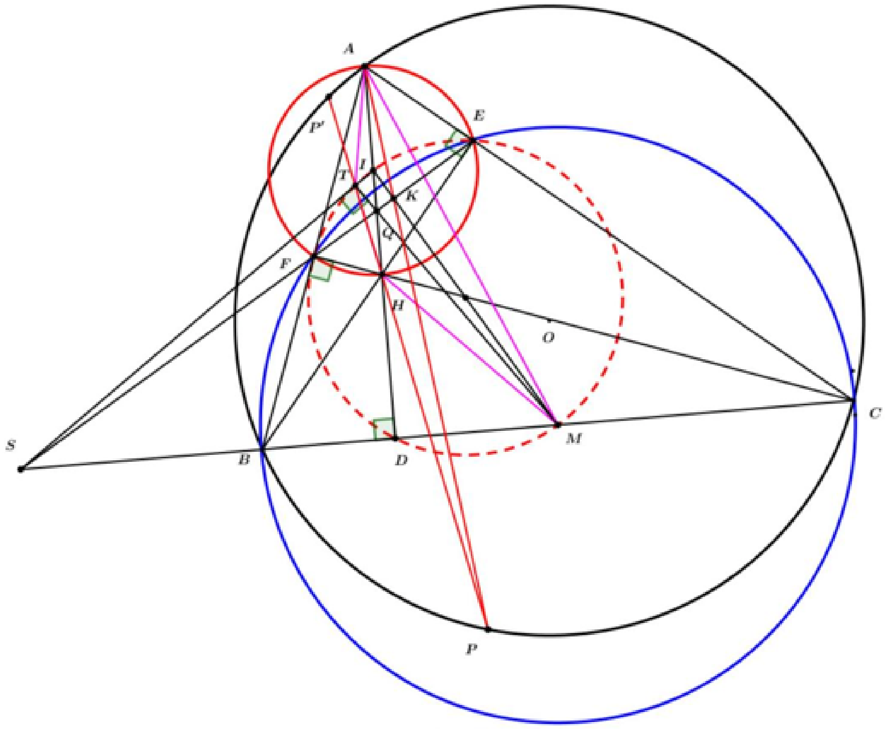
Lời giải



Có $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^0$ suy ra tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AH.

Có $\widehat{BEC}=\widehat{BFC}=90^0$ suy ra tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn tâm M đường kính $BC.$

Suy ra $IM\perp EF$ tại K hay $SK\perp IM.$
Suy ra Q là trực tâm của $\Delta ISM\Rightarrow MT\perp ST$ tại $T.$
Ta có $\widehat{MTI}=\widehat{MDI}=90^0\Rightarrow$ Tứ giác $ITDM$ nội tiếp đường tròn đường kính IM (1)
Ta có $IA=IE\Rightarrow\Delta IEA$ cân tại $I\Rightarrow\widehat{MEC}=\widehat{MCE}.$
Mà $\widehat{IAE}+\widehat{MCE}=90^0$ suy ra $\widehat{IEA}+\widehat{MEC}=90^0$ suy ra $\widehat{MEI}=90^0.$
Tương tự ta cũng có $\widehat{MFI}=90^0$ do đó E,F cùng thuộc đường tròn đường kính $IM.$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra các điểm I,T,F,M,E cùng thuộc đường tròn đường kính $IM.$
Suy ra $QT.QM=QE.QF.$
Lại có tứ giác $AFHE$ nội tiếp suy ra $QF.QE=QH.QA.$
Từ đó suy ra $QT.QM=QH.QA$ suy ra tứ giác $ATHM$ nội tiếp.
3) Tia TH cắt đường tròn (O) tại điểm $P.$ Chứng minh ba điểm A,K và P là ba điểm thẳng hàng.



Ta có $AO\perp EF$
$\Delta AEF\ \#\ \Delta ABC$
$\Rightarrow\widehat{KAO}=\widehat{DAM}\Rightarrow\widehat{DAK}=\widehat{MAO}=\widehat{AMI}\,(IM\parallel AO)$
Có $\widehat{AMI}=\widehat{AMT}-\widehat{TMI}=\widehat{AHT}-\widehat{IDT}=\widehat{DTH}$ (do $ATHM$ nội tiếp; $TIMD$ nội tiếp)
Trên tia đối HT lấy điểm P' sao cho $ATDP'$ nội tiếp $\Rightarrow\widehat{DAP'}=\widehat{DTH}=\widehat{AMI}=\widehat{DAK}$
$\Rightarrow A,K,P'$ thẳng hàng (1)
Do $ATDP'$ nội tiếp $\Rightarrow HT.HP'=HD.HA=HB.HE=HC.HF$
$\Rightarrow BP'ET$ nội tiếp $\Rightarrow\widehat{TP'B}=\widehat{TEH}$
Tương tự: $\widehat{TP'C}=\widehat{TFH}$
Ta có: $\widehat{FTE}=\widehat{FIE}=2\widehat{BAC}$ (do $FTIE$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{TEH} + \widehat{TFH} = 360^0 - \widehat{FTE} - \widehat{FHE} = 360^0 - 2.\widehat{BAC} - \left(180^0 - \widehat{BAC}\right) = 180^0 - \widehat{BAC}$

$\Rightarrow \widehat{BP'C} = \widehat{TP'C} + \widehat{TP'B} = 180^0 - \widehat{BAC}$

$\Rightarrow \widehat{BP'C} + \widehat{BAC} = 180^0$

$\Rightarrow ABP'C$ nội tiếp $\Rightarrow P' \in (O) \Rightarrow P' \equiv P$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra A, K, P thẳng hàng.

Câu 23. *(Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh năm 2023-2024)*

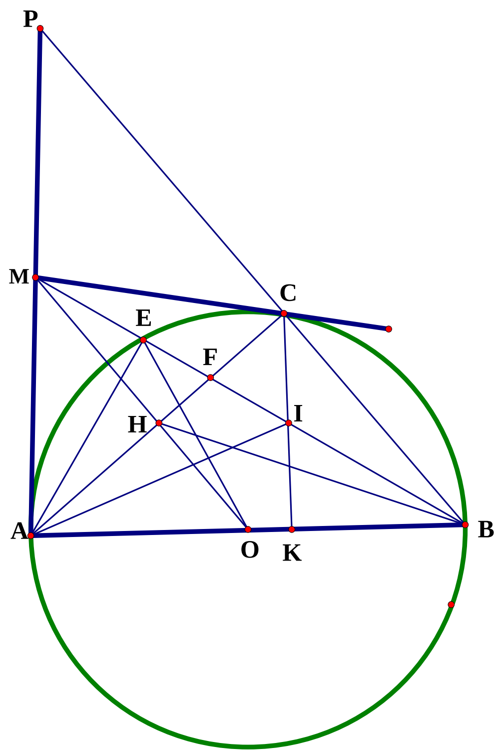
Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định, C là một điểm chạy trên đường tròn (O) không trùng với A và B. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và C cắt nhau tại điểm M. Đường thẳng MB cắt AC tại F và cắt đường tròn (O) tại E (E khác B).

a) Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AC. Chứng minh tam giác OEM đồng dạng với tam giác BHM.

b) Gọi K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB. Hai đường thẳng MB và CK cắt nhau tại I. Tính tỷ số $\dfrac{FI}{AB}$ khi tổng diện tích hai tam giác IAC và IBC lớn nhất.

c) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{BM} + \dfrac{1}{BF} = \dfrac{2}{BE}$.

Lời giải



a) Ta có $ME.MB = MA^2$ do ΔMAB vuông tại A có đường cao AE.

Lại có $MH.MO = MA^2$ do ΔMAO vuông tại A có đường cao AH.

$\Rightarrow ME.MB = MH.MO$

$\Rightarrow \dfrac{ME}{MH} = \dfrac{MO}{MB} \Rightarrow \Delta OME \sim \Delta BMH$

b) Ta có $MA = MC,\ OA = OC$ suy ra đường thẳng MO là trung trực đoạn thẳng AC nên $MO \perp AC$. Kéo dài BC cắt AM tại P nên $MO//PB \Rightarrow M$ trung điểm AP.

Ta có $\dfrac{IC}{MP} = \dfrac{BI}{BM}$ và $\dfrac{IK}{MA} = \dfrac{BI}{BM} \Rightarrow \dfrac{IC}{MP} = \dfrac{IK}{MA} \Rightarrow IC = IK$

Suy ra I trung điểm của đoạn thẳng CK.

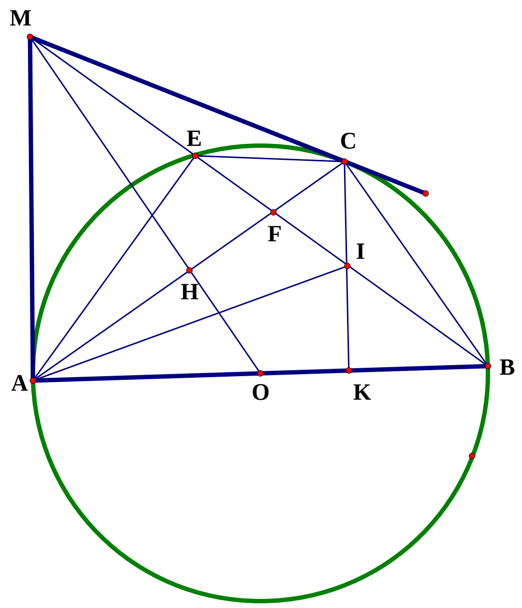
$\Rightarrow S_{\Delta ACI} = \dfrac{1}{2}S_{\Delta ACK}; S_{\Delta BCI} = \dfrac{1}{2}S_{\Delta BCK} \Rightarrow S_{\Delta AIC} + S_{\Delta BCI} = \dfrac{1}{2}S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{4}CK.AB$

Do đoạn thẳng AB không đổi nên tổng diện tích hai tam giác IAC và IBC lớn nhất. lớn nhất khi C điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$ hay K trùng tâm O.

Khi đó tứ giác $AOCM$ là hình vuông.

$\Rightarrow \dfrac{FI}{FM} = \dfrac{IC}{AM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow FI = \dfrac{1}{3}IM = \dfrac{1}{6}BM$. Lại có $BM^2 = AB^2 + MA^2 = \dfrac{5AB^2}{4}$

$\Rightarrow BM = \dfrac{AB\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \dfrac{FI}{AB} = \dfrac{1}{6}.\dfrac{\dfrac{AB\sqrt{5}}{2}}{AB} = \dfrac{\sqrt{5}}{12}.$



c) Ta có

$\Delta MEC \sim \Delta MCB \Rightarrow \dfrac{ME}{MC} = \dfrac{CE}{CB}$

$\Delta MEA \sim \Delta MAB \Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{EA}{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{ME}{MC}.\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{CE}{CB}.\dfrac{EA}{AB} \Rightarrow \dfrac{ME}{MB} = \dfrac{CE}{CB}.\dfrac{AE}{AB}$ (1).

Mặt khác

$\Delta FEC \sim \Delta FAB \Rightarrow \dfrac{FE}{FA}=\dfrac{CE}{AB}$

$\Delta FAE \sim \Delta FBC \Rightarrow \dfrac{FA}{FB}=\dfrac{AE}{BC}$

$\Rightarrow \dfrac{FE}{FA}.\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{CE}{AB}.\dfrac{EA}{CB}\Rightarrow \dfrac{FE}{FB}=\dfrac{CE}{CB}.\dfrac{AE}{AB}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{ME}{MB}=\dfrac{FE}{FB}$

$\Rightarrow \dfrac{MB-EB}{MB}=\dfrac{EB-FB}{FB}\Rightarrow 1-\dfrac{EB}{MB}=\dfrac{EB}{FB}-1\Rightarrow 2=\dfrac{EB}{MB}+\dfrac{EB}{FB}$

$\Rightarrow 2=EB\left(\dfrac{1}{MB}+\dfrac{1}{FB}\right)\Rightarrow \dfrac{1}{BM}+\dfrac{1}{BF}=\dfrac{2}{BE}$ (ĐPCM).

Câu 24 . *(Trường chuyên tỉnh Hải Dương năm 2023-2024)*

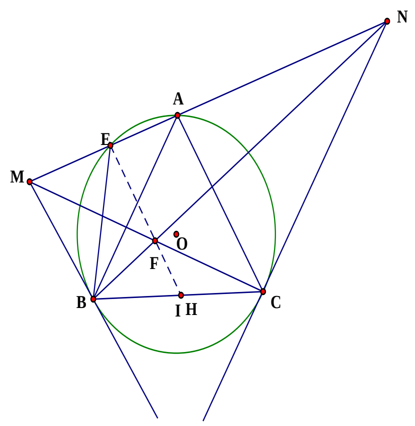
1. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm E thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O) $(E\neq A, E\neq B)$. Đường thẳng AE cắt các tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng $MB.NC=AB^2$.

b) Gọi F là giao điểm của MC và BN, H là trung điểm BC. Chứng minh rằng ba điểm E, F, H thẳng hàng.

2. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định nằm trên đường tròn (O) sao cho $\widehat{AOB}=120^0$. Điểm M thay đổi trên cung lớn $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp tam giác MAB tiếp xúc với MA, MB lần lượt tại E, F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải

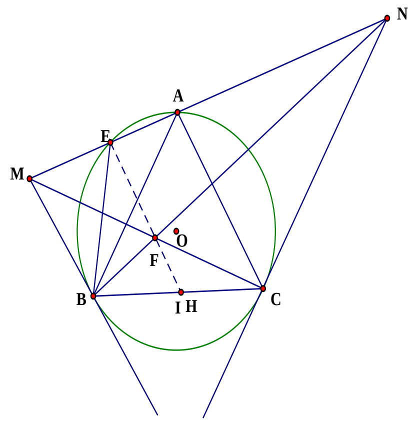


Ta có $\widehat{ABM}=\widehat{ACB}=\widehat{BAC}=60^0 \Rightarrow BM//AC \Rightarrow \widehat{BMA}=\widehat{CAN}$ (1)

Tương tự ta có $CN//AB \Rightarrow \widehat{BAM}=\widehat{CNA}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có ΔAMB đồng dạng ΔNAC (g-g)

$$\Rightarrow \frac{MB}{AC} = \frac{AB}{NC} \Rightarrow MB.NC = AB.AC \Rightarrow MB.NC = AB^2$$



Gọi I là giao điểm của EF và BC. Từ a) suy ra $MB.NC = BC^2 \Rightarrow \frac{MB}{BC} = \frac{BC}{NC}$ (3)

Mặt khác $\widehat{MBC} = \widehat{MBA} + \widehat{ABC} = 60^0 + 60^0 = 120^0$. Tương tự $\widehat{BCN} = 120^0$

Suy ra $\widehat{MBC} = \widehat{BCN}\,(4)$

Từ (3) và (4) ta có ΔMBC đồng dạng ΔBCN (c-g-c). Suy ra $\widehat{BMC} = \widehat{NBC}$

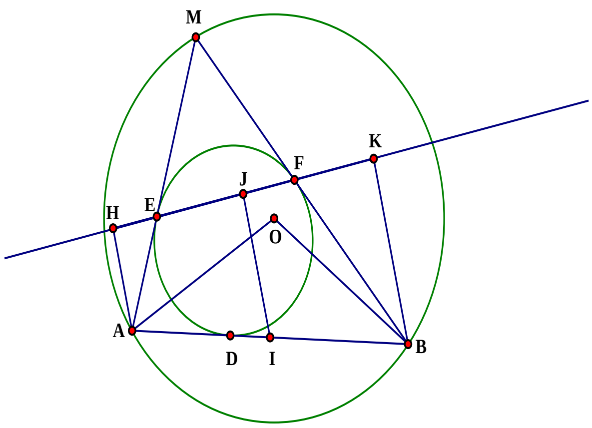
Ta có $\widehat{BFM} = \widehat{BCF} + \widehat{FBC} = \widehat{BCF} + \widehat{BMC} = 180^0 - \widehat{MBC} = 60^0\,(5)$

Do $BEAC$ nội tiếp nên $\widehat{BEM} = \widehat{BCA} = 60^0$ (6)

Từ (5) và (6) ta có $\widehat{BFM} = \widehat{BEM}$. Suy ra $BMEF$ nội tiếp $\widehat{BEF} = \widehat{BMF} = \widehat{NBC} = \widehat{FBI}$. Do đó ΔIBF đồng dạng ΔIEB (g-g). Suy ra $\frac{IB}{IE} = \frac{IF}{IB} \Rightarrow IB^2 = IE.IF$ (7)

Chứng minh tương tự ta có $IC^2 = IE.IF$ (8).

Từ (7) và (8) suy ra $IB = IC \Rightarrow I \equiv H$. Vậy E, F, H thẳng hàng



Gọi I là trung điểm của AB. Vẽ AH, IJ, BK cùng vuông góc EF.

Ta có $\widehat{AOB}=120^0 \Rightarrow \widehat{AMB}=60^0$, hơn nữa $ME=MF$ nên tam giác MEF đều.

Tam giác vuông AHE có $AH=AE.\sin 60^0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.AD\ (1)$

Tam giác vuông BKF có $BK=BF.\sin 60^0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}BF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}BD\ (2)$

Cộng vế (1) và (2) ta có

$AH+BK=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB \Rightarrow 2IJ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB \Rightarrow IJ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB$ không đổi.

Vì điểm I cố định nên EF tiếp xúc với đường tròn cố định tâm I, bán kính $\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB$.

Câu 25. *(Trường chuyên tỉnh Hải Phòng năm 2023-2024)*

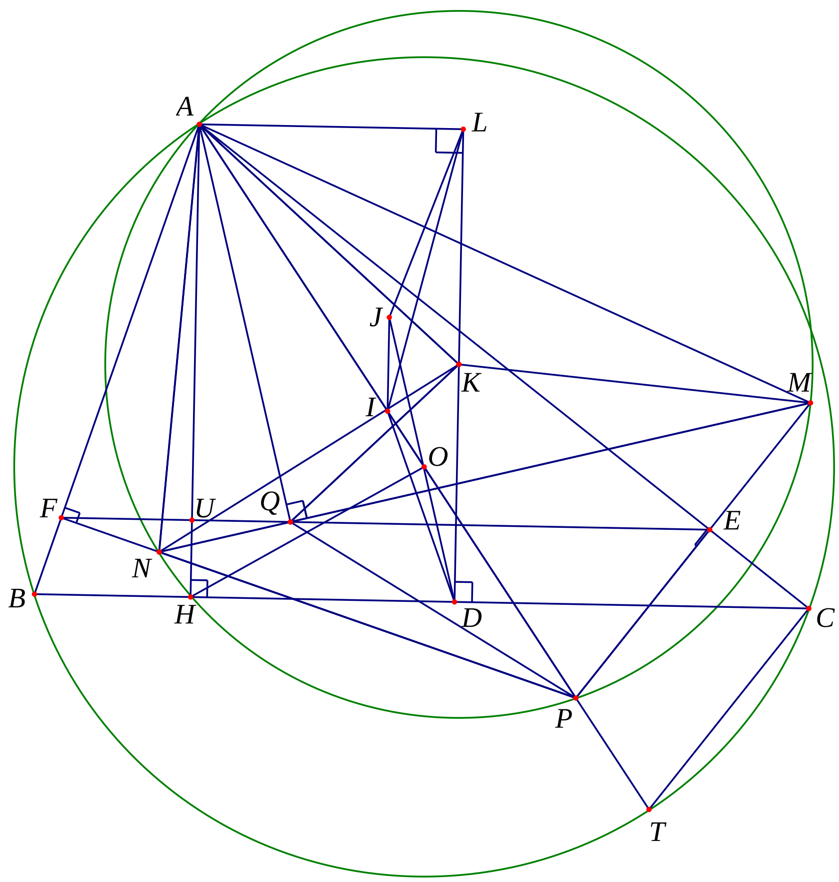
Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn tâm O. Vẽ đường kính AT của đường tròn (O) và lấy điểm P trên đoạn thẳng OT $(P\neq T)$. Gọi E và F tương ứng là hình chiếu vuông góc của P trên các đường thẳng AC và AB. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC.

a) Chứng minh $\widehat{OAB}=\widehat{HAC}$ và hai đường thẳng BC, EF song song với nhau.

b) Cho AH và EF cắt nhau tại U; điểm Q di động trên đoạn thẳng UE $(Q\neq U,\ Q\neq E)$. Đường thẳng vuông góc với AQ tại điểm Q cắt các đường thẳng PE, PF tương ứng tại M, N. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh bốn điểm A, M, N, P cùng thuộc một đường tròn và $\widehat{OAH}=\widehat{KAQ}$.

c) Kẻ KD vuông góc với BC $(D\in BC)$. Chứng minh đường thẳng đi qua điểm D và song song với AQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



Ta có $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$ do cùng phụ với $\widehat{ABC}$, suy ra $\widehat{PAF} = \widehat{HAC}$.

Có *AEPF* là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{APF}$

Có $\widehat{APF} = 90^0 - \widehat{PAF}$ và $\widehat{ACB} = 90^0 - \widehat{HAC} \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ACB} \Rightarrow EF//BC$

AQEM là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{AEF} = \widehat{APN} \Rightarrow A, M, N, P$ cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có $\widehat{AMN} = \widehat{ACB}$, tương tự $\widehat{ANM} = \widehat{ABC}$

$\widehat{OAH} = \widehat{OAB} - \widehat{HAB} = 90^0 - \widehat{ACB} - \left(90^0 - \widehat{ABC}\right)$

$= 90^0 - \widehat{AMN} - \left(90^0 - \widehat{ANM}\right) = \widehat{KAN} - \widehat{QAN} = \widehat{KAQ}$

Gọi L là chân đường vuông góc hạ từ điểm A xuống đường thẳng KD.

Từ $\widehat{OAH} = \widehat{KAQ} \Rightarrow \widehat{KAO} = \widehat{KAQ} - \widehat{OAQ} = \widehat{OAH} - \widehat{OAQ} = \widehat{QAH}$.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AP và J là giao điểm của đường thẳng qua *D* song song với *AQ* và đường thẳng qua *I* vuông góc với *BC*. $\Rightarrow \widehat{QAH} = \widehat{JDL}$

$\Rightarrow \widehat{ILK} = \widehat{JDL}$, mặt khác ta có *IJ//LD* nên suy ra tứ giác *ILDJ (hoặc IJLD)* là hình thang cân.

Suy ra, I và J đối xứng với nhau qua trung trực của DL, hay qua trung trực của AH.Do $ALDH$ là hình chữ nhật (dễ thấy). Từ đây, vì I là điểm cố định và trung trực của AH là đường thẳng cố định nên J là điểm cố định

Câu 26. *(Trường chuyên tỉnh Hòa Bình năm 2023-2024)*

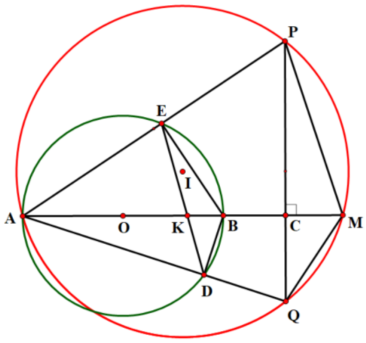
Cho đường tròn tâm O, đường kính AB cố định. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C cố định, qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với AC. Gọi K là điểm cố định nằm giữa O và B (K khác O và B), qua K vẽ dây cung ED bất kì của đường tròn (O). Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của AE và AD với đường thẳng d. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ cắt tia AC tại điểm M (M khác A). Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $PEDQ$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) $\Delta AKD \sim \Delta\Delta AQM$.

c) $AK.AM = AB.AC$.

d) Khi dây ED thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ luôn nằm trên một đường cố định



Lời giải

$\widehat{BEP}+\widehat{BCP}=90^0+90^0=180^0$ | tứ giác $BEPC$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{EPC}=\widehat{EBA}$ (vì cùng bù với $\widehat{EBC}$)

$\Rightarrow \widehat{EDA}=\widehat{EBA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AE)

$\Rightarrow \widehat{EDA}=\widehat{APQ} \Rightarrow$ Tứ giác $PEDQ$ nội tiếp.

Mà $\widehat{AMQ}=\widehat{APQ} \Rightarrow \widehat{APQ}=\widehat{ADE} \Rightarrow \widehat{AMQ}=\widehat{ADK}$

$\Rightarrow \Delta AKD \sim \Delta AQM \quad (\widehat{QAM}\ chung;\ \widehat{ADK}=\widehat{AMQ})$

$\Rightarrow \Delta AKD \sim \Delta AQM \Rightarrow \dfrac{AK}{AQ}=\dfrac{AD}{AM} \Rightarrow AK.AM = AD.AQ$

Ta có: $\Delta ADB \sim \Delta ACQ\ (\widehat{A}\ chung;\ \widehat{ADB}=\widehat{ACQ}=90^0)$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AB}{AQ} \Rightarrow AB.AC = AD.AQ \Rightarrow AK.AM = AB.AC$

Ta có $AK.AM = AB.AC \Rightarrow AM = \dfrac{AB.AC}{AK}$(không đổi) | M cố định.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ thì ta có $IA = IM$ nên I nằm trên đường trung trực của AM cố định.

Câu 27. *(Trường chuyên tỉnh năm 2023-2024)*

Lời giải

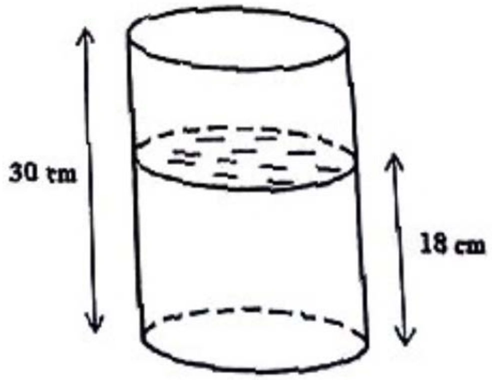
Câu 28. *(Trường chuyên tỉnh Hưng Yên năm 2023-2024)*

1. Cho tam giác ABC đều, nội tiếp đường tròn (O;R), H là trung điểm của cạnh BC. M là điểm bất kì thuộc đoạn BH (M khác B). Lấy điểm N thuộc đoạn CA sao cho CN = BM . Gọi I là trung điểm của đoạn MN.

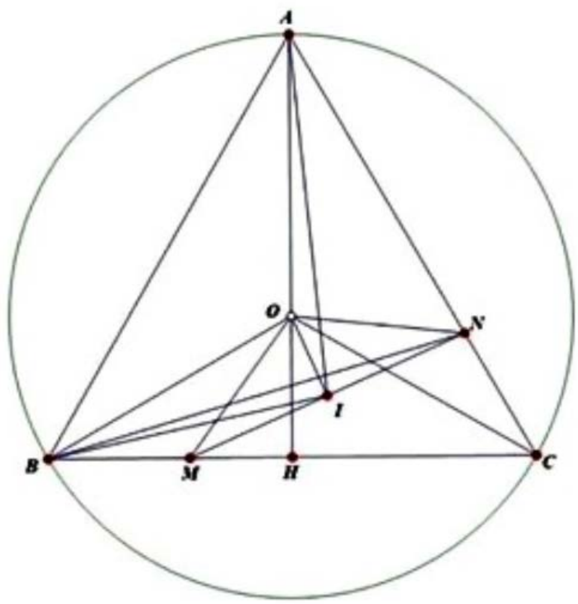
a) Chứng minh bốn điểm O, M, H, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh diện tích tam giác 14B không đổi. Xác định vị trí của điểm M để đoạn thẳng MN có độ dài nhỏ nhất.

2. Có một bình thủy tinh hình trụ cao 30cm chứa nước, diện tích đáy bình bằng $\frac{1}{6}$ diện tích xung quanh, mặt nước cách đáy bình là 18cm (hình vẽ bên). Cần đổ thêm bao nhiêu lít nước nữa để nước vừa đầy bình (Bỏ qua bề dày của bình, cho t = 3,14 và kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) ?



Lời giải



a) Xét ΔOBM và ΔOCM có:

$$\left.\begin{array}{l} BM = CN \\ \angle CBM = \angle OCN \\ OB = OC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\text{OBM} \sim \Delta\text{OCM (c.g.c)}$$

$\Rightarrow$ OM = ON hay O nằm trên đường trung trực MN

$\Rightarrow$ OI $\perp$ MN

Xét tứ giác OIHM có: $\angle OIM = \angle OHM = 90°$
=> OIHM nội tiếp hay 4 điểm O, M, H, I cùng thuộc 1 đường tròn.
b) Chứng minh được IH // AB. Từ đó suy ra đường cao hạ từ I và từ H cùng vuông góc với AB có độ dài bằng nhau. Do đó, diện tích tam giác IAB luôn bằng diện tích tam giác AHB không đổi
Theo chứng minh câu a) có OI $\perp$ MN và $\angle MON = 90°$ nên

$$MN = 2MI = 2.OM.\sin 60° = OM\sqrt{3}$$

Khi M chuyển động trên BH thì OM ≥ OH với dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M trùng H. Từ đó suy ra:

$$\min MN = OH\sqrt{3}$$

đạt được khi và chỉ khi M trùng H.

2.

Diện tích đáy bình bằng $\frac{1}{6}$ diện tích xung quanh $\Rightarrow \pi r^2 = \frac{1}{6}.2\pi rh \Rightarrow h = 3r$

Ta có: $h = 30 \Rightarrow r = 10$
Thể tích nước cần đổ thêm để vừa đầy bình là: $V = \pi r^2.(h - 18) = 3,14.10^2.12 = 3768(cm^3)$

Câu 29. *(Trường chuyên tỉnh Khánh Hòa năm 2023-2024)*

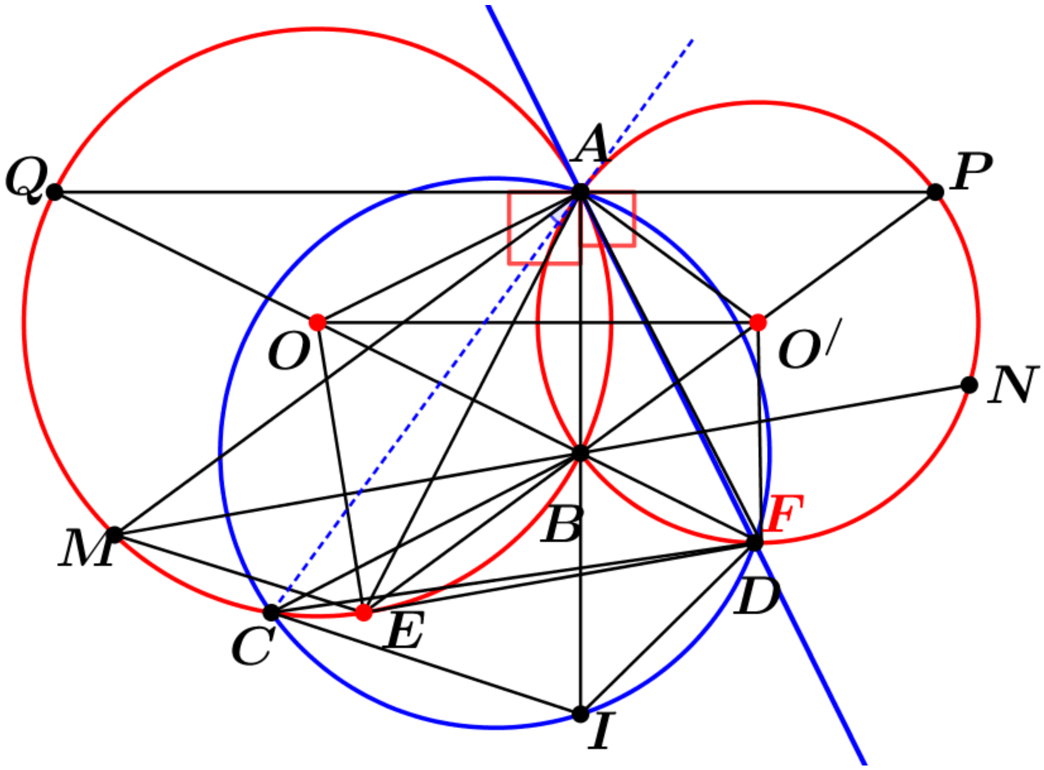
Cho hai đường tròn $(O;\ R)$ và $(O';\ R')$ cắt nhau tại A và B $\left(R > R',\ \widehat{OAO'} > 90°\right)$. Đường thẳng $O'B$ cắt $(O;\ R)$ và $(O';\ R')$ lần lượt tại E và P (khác B), đường thẳng OB cắt $(O';\ R')$ và $(O;\ R)$ lần lượt tại F và Q (khác B).

a) Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng và $PQ = 2\cdot OO'$.

b) Qua B dựng đường thẳng song song với EF, cắt $(O;\ R)$ và $(O';\ R')$ lần lượt tại M và N. Chứng minh năm điểm O, A, O', E, F cùng thuộc một đường tròn và $MABE$ là hình thang cân.

c) Tiếp tuyến với $(O';\ R')$ tại A cắt $(O;\ R)$ tại C và tiếp tuyến với $(O;\ R)$ tại A cắt $(O';\ R')$ tại D. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt đường thẳng AB tại I (khác A). Chứng minh B là trung điểm của AI.

Lời giải



a) Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng và $PQ = 2OO'$.

Ta có: $\widehat{QAB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa (O) đường kính BQ).

$\widehat{PAB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa (O') đường kính BP).

Mặt khác: $\widehat{QAP} = \widehat{QAB} + \widehat{PAB} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow A; P; Q$ thẳng hàng

$\triangle BPQ$ có: O là trung điểm QB (QB là đường kính của (O))

O' là trung điểm PB (PB là đường kính của (O'))

Do đó OO' là đường trung bình của $\triangle BPQ$. Suy ra: $\begin{cases} OO' \parallel PQ \\ PQ = 2OO' \end{cases}$

b) Qua B dựng đường thẳng song song với EF, cắt $(O;R)$ và $(O';R')$ lần lượt tại M và N. Chứng minh năm điểm O, A, O', E, F cùng thuộc một đường tròn và $MABE$ là hình thang cân.

b.1 Chứng minh năm điểm O, A, O', E, F cùng thuộc một đường tròn.

b.1.1 Chứng minh bốn điểm O, O', E, F cùng thuộc một đường tròn.

$\triangle OEB$ cân tại O (do $OE = OB = R$) $\Rightarrow \widehat{EOB} = 180^0 - 2\widehat{OBE}$ hay $\widehat{EOF} = 180^0 - 2\widehat{OBE}$ ...**(1)**

$\triangle O'FB$ cân tại O' (do $O'F = O'B = R'$) $\Rightarrow \widehat{BO'F} = 180^0 - 2\widehat{O'BF}$

hay $\widehat{EO'F} = 180^0 - 2\widehat{O'BF}$ ...**(2)**

Mà: $\widehat{OBE} = \widehat{O'BF}$ (đối đỉnh) ...**(3)**

Từ **(1), (2), (3)** suy ra $\widehat{EOF} = \widehat{EO'F} \Rightarrow$ Tứ giác $EOO'F$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow O; O'; E; F$ cùng thuộc một đường tròn ...**(4)**.

b.1.2 Chứng minh bốn điểm A, O', E, F cùng thuộc một đường tròn.

Ta có: $\widehat{AO'B}=2\widehat{APB}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O')). Hay $\widehat{AO'E}=2\widehat{APB}$.

Mặt khác:

$\widehat{BFE}=\widehat{OFE}$ mà $\widehat{OFE}=\widehat{OO'E}$ (Tứ giác $EOO'F$ nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{BFE}=\widehat{OO'E}$ ...**(5)**

$\widehat{AFB}=\widehat{APB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O'))

$OO' \parallel QP$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{OO'E}=\widehat{APB}$ ...**(6)**

Từ (5), (6) suy ra: $\widehat{BFE}=\widehat{APB}$

Do đó: $\widehat{AFE}=\widehat{AFB}+\widehat{BFE}=2\widehat{APB}$ mà $\widehat{AO'E}=2\widehat{APB} \Rightarrow \widehat{AFE}=\widehat{AO'E}$

$\Rightarrow$ Tứ giác AO' FE là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow A;O';E;F$ cùng thuộc một đường tròn ...**(7)**

Từ **(4), (7)** suy ra năm điểm $O;A;O';E;F$ cùng thuộc một đường tròn.

b.2 Chứng minh tứ giác MABE là hình thang cân.

b.2.1 Chứng minh: MA // EB.

Vì (O) và (O') cắt nhau tại A và B nên $OO' \perp AB$ mà $\triangle AOB$ cân tại O (do $OA=OB=R$)

$\Rightarrow OO'$ là phân giác của $\widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{BOO'}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

Mặt khác: $\widehat{MAE}=\widehat{MBE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{ME}$ của (O))

$\widehat{MBE}=\widehat{O'EF}$ $(do: MN \parallel EF)$

$\widehat{O'EF}=\widehat{FOO'}=\widehat{BOO'}$ (do tứ giác EOO'F nội tiếp)

Do đó: $\widehat{MAE}=\widehat{BOO'}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$ mà $\widehat{AEB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O)).

Suy ra: $\widehat{MAE}=\widehat{AEB}$ (cặp góc nằm ở vị trí so le trong) $\Rightarrow$ MA // EB ...**(8)**

b.2.2 Chứng minh: $\widehat{AME}=\widehat{MAB}$.

$\widehat{AMB}=\widehat{AEB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O)) và $\widehat{MAE}=\widehat{AEB}$ (cmt)

$\widehat{BME}=\widehat{BAE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$ của (O))

Ta có: $\widehat{MAB}=\widehat{MAE}+\widehat{BAE}$ mà $\widehat{AME}=\widehat{AMB}+\widehat{BME}=\widehat{AEB}+\widehat{BAE}=\widehat{MAE}+\widehat{BAE}$

Do đó: $\widehat{AME}=\widehat{MAB}$ ...**(9)**

Từ (8), (9) suy ra Tứ giác MABE là hình thang cân.

c) Tiếp tuyến với $(O';R')$ tại A cắt $(O;R)$ tại C và tiếp tuyến với $(O;R)$ tại A cắt $(O';R')$ tại D. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACD$ cắt đường thẳng AB tại I (khác A).
Chứng minh B là trung điểm của AI.

Ta có:

$\widehat{BAD}=\widehat{ACB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung; góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O))

$\widehat{CAB}=\widehat{ADB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung; góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (O'))

Do đó: $\triangle ABC \backsim \triangle DBA$ (g – g)

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{BC}{BA} \Rightarrow AB^2 = BC.BD...(\mathbf{10}) \\ \widehat{ABC} = \widehat{ABD} \end{cases}$$

Mặt khác: $\widehat{CBI} = 180^0 - \widehat{ABC} = 180^0 - \widehat{ABD} = \widehat{DBI} \Rightarrow \boxed{\widehat{CBI} = \widehat{DBI}}$ $...(\mathbf{i})$

Tứ giác ACID là tứ giác nội tiếp nên ta có: $\widehat{IAD} = \widehat{ICD}$.

Suy ra: $\widehat{BAD} = \widehat{IAD} = \widehat{ICD}$ mà $\widehat{BAD} = \widehat{ACB}\ (cmt) \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ICD}$

Ta lại có: $\widehat{BCI} = \widehat{ICD} + \widehat{BCD} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD} = \widehat{ACD}$

Mà: $\widehat{ACD} = \widehat{AID}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset\frown{AD}$).

Do đó: $\widehat{BCI} = \widehat{AID} = \widehat{BID} \Rightarrow \boxed{\widehat{BCI} = \widehat{BID}}$ $...(\mathbf{ii})$

Từ (i), (ii) suy ra: $\triangle BCI \backsim \triangle BID$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{BC}{BI} = \dfrac{BI}{BD} \Rightarrow BI^2 = BC.BD...(\mathbf{11})$

Từ **(10), (11)** suy ra $AB = BI \Rightarrow B$ là trung điểm của AI □

Câu 30. *(Trường chuyên tỉnh Lai Châu năm 2023-2024)*

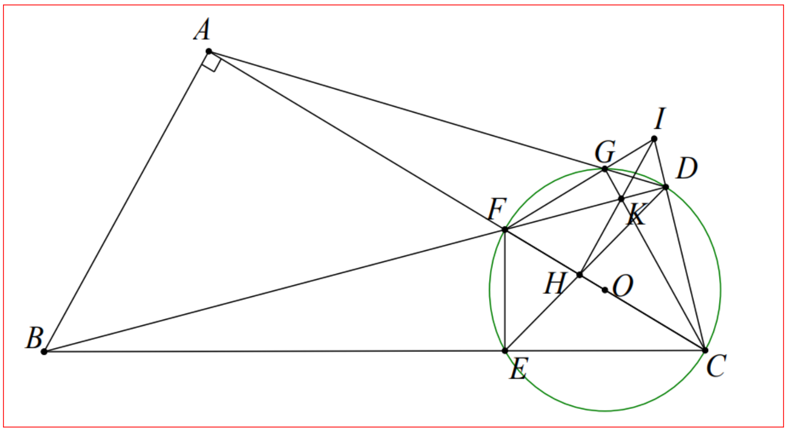
Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AC lấy điểm F, vẽ FE vuông góc với BC tại E. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF. Đường thẳng BF cắt (O) tại điểm thứ hai là D, DE cắt AC tại H.

a) Chứng minh rằng: $ABEF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $FH.CA = CH.FA$

c) Đường thẳng AD cắt (O) tại điểm thứ hai G, FG cắt CD tại I, CG cắt FD tại K. Chứng minh rằng K, I, H thẳng hàng.

Lời giải



a) tam giác ABC vuông tại A nên $\widehat{BAC} = 90°$ hay $\widehat{BAF} = 90°$

ta có: $FE \perp BC$ tại E nên $\widehat{FEB} = \widehat{FEC} = 90°$

xét tứ giác $ABEF$ có $\widehat{BAF} + \widehat{FEB} = 180°$ mà hai góc đối nhau nên $ABEF$ là tứ giác nội tiếp

b) Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{FDC} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Hay $\widehat{BDC} = 90^\circ$

Xét tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ mà hai đỉnh kề nên $ABCD$ là tứ giác nội tiếp

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$)

Hay $\widehat{ABF} = \widehat{FCD}$ (1)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABEF$ có $\widehat{ABF} = \widehat{AEF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AF}$) (2)

Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{FCD} = \widehat{FED}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DF}$) (3)

Từ (1); (2) và (3) ta có $\widehat{FED} = \widehat{AEF}$ nên FE là tia phân giác của $\widehat{AED}$

Xét tam giác AEH có EF;EC là đường phân giác trong và ngoài của tam giác nên

$\dfrac{AF}{FH} = \dfrac{AE}{EH}; \dfrac{AC}{CH} = \dfrac{AE}{EH}$

Suy ra $\dfrac{AF}{FH} = \dfrac{AC}{CH} \Leftrightarrow AF.CH = FH.AC$

c) Xét đường tròn (O) có $\widehat{FGC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra $CG \perp FI$

Xét tam giác IFC có $FD;CG$ là hai đường cao mà FD cắt CG tại K suy ra K là trực tâm

Suy ra $IK \perp FC$

Xét đường tròn (O) có $\widehat{FDA} = \widehat{FCG}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{GF}$)

Mà $\widehat{FDA} = \widehat{BCA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$)

Do đó $\widehat{BCA} = \widehat{FCG}$ hay $\widehat{FCE} = \widehat{FCG}$

Xét ΔFEC và ΔFGC có $\widehat{FCE} = \widehat{FCG}$ và $\widehat{FEC} = \widehat{FGC} = 90^\circ$

Suy ra ΔFEC □ $\Delta FGC\,(g-g)$ do đó $\overset{\frown}{GC} = \overset{\frown}{EC}$

Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{GFC} = \dfrac{1}{2}sd\overset{\frown}{GC}; \widehat{EDC} = \dfrac{1}{2}sd\overset{\frown}{EC}$

Suy ra $\widehat{GFC} = \widehat{EDC}$ hay $\widehat{IFH} = \widehat{HDC}$

Xét tứ giác $FHDI$ có $\widehat{IFH} = \widehat{HDC}$ mà góc ngoài bằng góc trong đỉnh đối diện nên $FHDI$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra $\widehat{FHI} = \widehat{FDI} = 90^\circ \Rightarrow IH \perp FC$

Suy ra $K;I;H$ thẳng hàng

Câu 31. *(Trường chuyên tỉnh Lào Cai năm 2023-2024)*

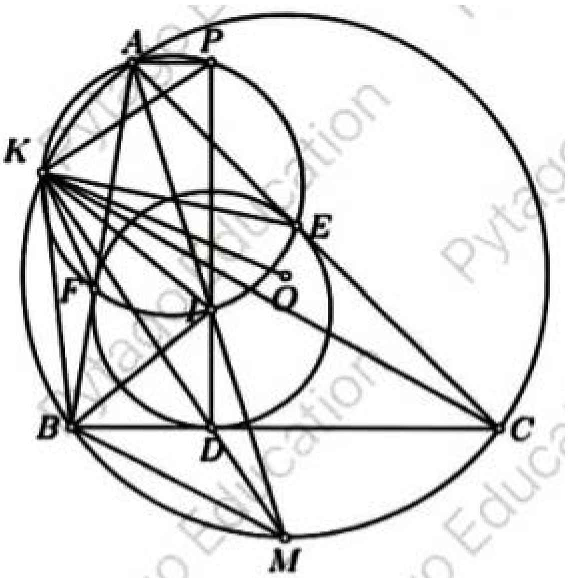
Cho tam giác nhọn ABC (AB<AC) nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có tâm I và tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là điểm M.

a) Chứng minh rằng MB=MC=MI.

b) Đường thẳng DM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh rằng tứ giác AKFE nội tiếp.

c) Đường thẳng đi qua A và song song với BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm thứ hai là P. Chứng minh rằng KP vuông góc với KD.

Lời giải



Lời giải.

a) Do AI là tia phân giác của góc BAC nên M là điểm chính giữa cung BC không chứa A của (O) $\Rightarrow$MB=MC.

Từ đó ta có biến đổi góc sau: $\widehat{MBI}=\widehat{MBC}+\widehat{IBC}=\widehat{MAB}+\widehat{IBA}=\widehat{MIB}.$
Do đó tam giác MBI cân tại M hay MB=MI. Mặt khác ta cũng có MB=MC. Vậy MB=MC=MI$\Rightarrow$ đpcm.
Gọi K là giao điểm thứ hai của (AEF) và (O). Ta sẽ chứng minh K≡K'. Thật vậy:

Do tứ giác AK'FE nội tiếp nên $\widehat{FK'E}=\widehat{FAE}$ (1)

Mặt khác : $\widehat{BK'C}=\widehat{BAC}=\widehat{FAE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BC của (O). (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BK'C}=\widehat{FK'E}$

$\Rightarrow \widehat{BK'C}-\widehat{FK'C}=\widehat{FK'E}-\widehat{FK'C}\Rightarrow \widehat{BK'F}=\widehat{CK'E}$. Gọi K' là giao điểm thứ hai của (AEF) và (O). Ta sẽ chứng minh K≡K'. Thật vậy:

Do tứ giác AK'FE nội tiếp nên $\widehat{FK'E}=\widehat{FAE}$ (1)

Mặt khác : $\widehat{BK'C}=\widehat{BAC}=\widehat{FAE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BC của (O). (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BK'C}=\widehat{FK'E}$

$\Rightarrow \widehat{BK'C}-\widehat{FK'C}=\widehat{FK'E}-\widehat{FK'C}\Rightarrow \widehat{BK'F}=\widehat{CK'E}$

Mặt khác: $\widehat{K'BF}=\widehat{K'BA}=\widehat{K'CA}=\widehat{K'CE}.$
Từ đó suy ra $\triangle K'BF\sim\triangle K'CE(g.g).$

$\Rightarrow \dfrac{K'B}{K'C}=\dfrac{BF}{CE}.Chú\ ý\ răng\ BF=BD\ và\ CE=CD.$

$\Rightarrow \dfrac{K'B}{K'C}=\dfrac{BD}{CD}.$

$\Rightarrow$K'D là phân giác của góc BK'C.

Mà M cũng chính là điểm chính giữa cung BC không chứa K' của (O) $\Rightarrow$K', D, M thẳng hang.

Vậy K≡K'.

b) Xét hai tam giác MBD và MKB, ta có:

$\left.\begin{array}{l}\widehat{MBD}=\widehat{MBC}=\widehat{MKB}\\ \widehat{M}\,(là\ góc\ chung)\end{array}\right\}\Rightarrow \triangle MBD\sim\triangle MKB(g.g).$

$\Rightarrow \dfrac{MB}{MK}=\dfrac{MD}{MB}\Rightarrow MK.MD=MB^2=MI^2\Rightarrow \dfrac{MI}{MD}=\dfrac{MK}{MI}.$

Xét hai tam giác MID và MKI, ta có:

$\left.\begin{array}{l}\dfrac{MI}{MD}=\dfrac{MK}{MI}\\ \widehat{M}\,(là\ góc\ chung)\end{array}\right\}\Rightarrow \triangle MID\sim\triangle MKI(c.g.c).$

$\Rightarrow \widehat{MKI}=\widehat{MID}(3)$

Ta có: $\widehat{API}=\widehat{AEI}=90^\circ\Rightarrow AP\perp PI$. Mà $AP\parallel BC\Rightarrow PI\perp BC$.

Mặt khác : $ID\perp BC$. Từ đó suy ra P,I,D thẳng hàng.

$\Rightarrow \widehat{MID}=\widehat{AIP}=90^\circ-\widehat{PAI}=90^\circ-\widehat{PKI}.$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{MKI}=90^\circ-\widehat{PKI}\Rightarrow \widehat{MKP}=90^\circ$ hay $KP\perp KM$.

Câu 32. *(Trường chuyên tỉnh Long An năm 2023-2024)*

1) Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB=2R$. Từ A và B lần lượt kẻ hai tiếp tuyến Au, Bv với nửa đường tròn. Qua một điểm C thuộc nửa đường tròn (C khác A và B), kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, nó cắt Au và Bv theo thứ tự ở M và N.

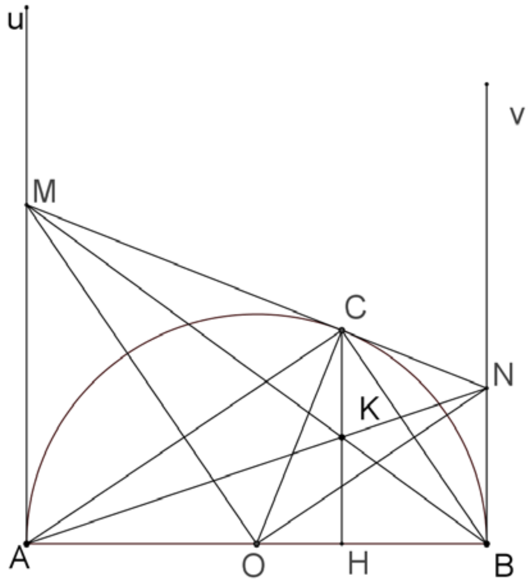
a) Chứng minh tứ giác $AMCO$ nội tiếp đường tròn và $\widehat{CBO}=\widehat{CNO}$.

b) Kẻ CH vuông góc với AB tại H, gọi K là giao điểm của CH với AN. Chứng minh ba điểm M,K,B thẳng hàng.

c) Gọi S là diện tích của tam giác ABC, S_1 là diện tích của tam giác MON. Hãy tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S}$ khi $AM=1,5R$.

2) Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là một điểm trên cạnh BC, I và K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM và tam giác ACM. Xác định vị trí của M để diện tích tam giác AIK nhỏ nhất.

Lời giải



Tứ giác $AMCO$ có :

$\widehat{MAO} = 90^o$; $\widehat{MCO} = 90^o$

$\widehat{MAO} + \widehat{MCO} = 180^o$

Vậy tứ giác $AMCO$ nội tiếp đường tròn.

Tương tự ta có tứ giác $COBN$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CBO} = \widehat{CNO}$

Ta có: $CK//AM$ nên $\dfrac{KN}{KA} = \dfrac{CN}{CM}$

Mà $MC = MA,\ NC = NB$ nên $\dfrac{KN}{KA} = \dfrac{NB}{MA}$ (1)

Ta lại có $\widehat{MAK} = \widehat{ANB}$ (so le trong) (2)

Từ (1) và (2) ta được $\Delta AKM \backsim \Delta NKB$

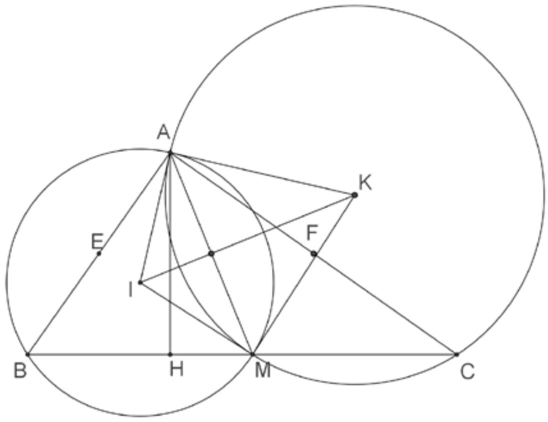
$\Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{NKB}$

Mà A, K, N thẳng hàng nên M, K, B thẳng hàng (đpcm).

Ta có $\Delta MON \backsim \Delta ACB$ nên tam giác MON vuông tại O, cho ta: $OC^2 = CM.CN \Rightarrow CN = \dfrac{2}{3}R$

; $MN = MC + CN = \dfrac{13}{6}R$

$\dfrac{S_1}{S} = \left(\dfrac{MN}{AB}\right)^2 = \dfrac{169}{144}$.



Ta có $\overset{\frown}{ABC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AIM} = \overset{\frown}{AIK}$; $\overset{\frown}{ACB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AKM} = \overset{\frown}{AKI}$.

$\overset{\frown}{AIK} + \overset{\frown}{AKI} = \overset{\frown}{ABC} + \overset{\frown}{ACB} = 90^0$ nên tam giác AIK vuông tại A

$S_{AIK} = \frac{1}{2}AI.AK \geq \frac{1}{2}AE.AF = \frac{1}{8}AB.AC$, với E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, AC

Đẳng thức xảy ra khi $I \equiv E$ và $K \equiv F$, khi đó $M \equiv H$.

Câu 33. *(Trường chuyên tỉnh Nam Định năm 2023-2024)*

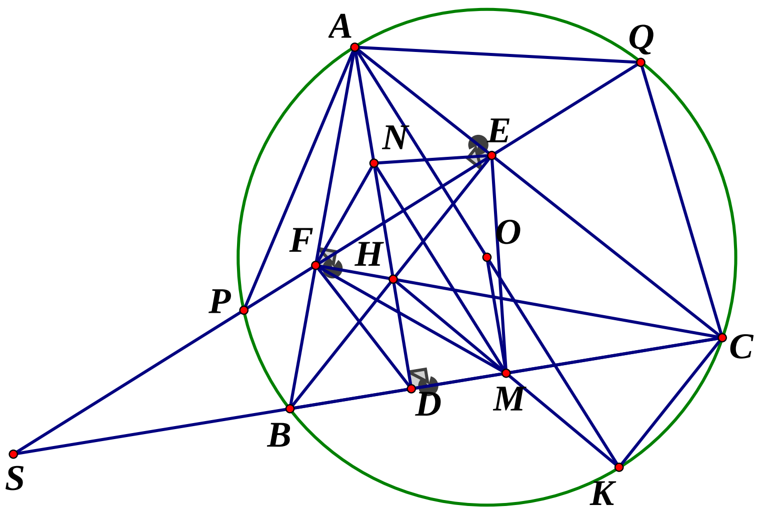
Cho tam giác *ABC* nhọn (*AB* < *AC*) nội tiếp đường tròn (*O*), các đường cao *AD*, *BE*, *CF* đồng quy tại *H*. Gọi *M* là trung điểm cạnh *BC*, *N* là trung điểm đoạn *AH*, đường thẳng *EF* cắt đường tròn (*O*) tại *P*, *Q* và cắt đường thẳng *BC* tại *S* sao cho *P* nằm giữa *S* và *F*. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác *AOMN* là hình bình hành

b) $AP^2 = AQ^2 = AE.AC$.

c) Tứ giác *DMEF* nội tiếp và $\frac{FP}{PS} = \frac{QE}{ES}$

Lời giải



a) Tứ giác *AOMN* là hình bình hành.

Kẻ đường kính *AK* (*K* nằm trên đường tròn (*O*)). Khi đó $AC \perp CK; BK \perp AB$.

Dễ dàng suy ra $BK//CH$ và $CK//BH$ (cùng vuông góc với một đường thẳng).

Từ đó suy ra *BHCK* là hình bình hành. Vì *M* là trung điểm *BC* nên $M \in HK$ và $MH = MK$

.

Tam giác *AHK* có *M* và *N* lần lượt là trung điểm của *HK* và *AH* nên *MN* là đường trung bình của $\triangle AHK$. Suy ra $MN//AO$ và $MN = \frac{1}{2}AK = AO.$

Vậy *AOMN* là hình bình hành.

$b) AP^2 = AQ^2 = AE.AC.$

Tam giác AFH vuông tại F suy ra $FN = NH$. Tương tự, $\triangle AEH$ vuông tại E nên $NE = NH$. Như vậy $NF = NE$ (1).

Lại có $\triangle BFC$ và $\triangle BEC$ lần lượt vuông tại F và E, có các đường trung tuyến lần lượt là *MF* và *ME*. Do đó $MF = ME = \frac{1}{2}BC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra *MN* là trung trực của *EF*. Suy ra $EF \perp MN$ (3).

Lại có $MN//AO$, kết hợp với (3) suy ra $AO \perp EF$ hay $AO \perp PQ$. Suy ra *A* là điểm chính giữa cung *PAQ*, suy ra $AP = AQ$ hay cung *AQ* bằng cung *AP*.

Mặt khác, $\widehat{AQP} = \widehat{APQ} = \widehat{ACQ}$ (các góc nội tiếp chắn các cung bằng nhau). Nên $\triangle AQC \backsim \triangle AEQ$.

Suy ra $\frac{AE}{AQ} = \frac{AQ}{AC} \Rightarrow AE.AC = AQ^2$

Vậy $AP^2 = AQ^2 = AE.AC$

c) Tứ giác *DMEF* nội tiếp và $\frac{FP}{PS} = \frac{QE}{ES}$

Tứ giác *BFEC* nội tiếp suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}.$

Tam giác *EMC* cân tại M nên $\widehat{MEC} = \widehat{ACB}$.

Suy ra $\widehat{FEM} = 180^0 - \widehat{AEF} - \widehat{MEC} = 180^0 - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = \widehat{BAC}.$

Tứ giác *DFAC* nội tiếp nên $\widehat{FDM} + \widehat{BAC} = 180^0$. Suy ra $\widehat{FEM} = \widehat{FDM} = 180^0$

Vậy tứ giác *DMEF* là tứ giác nội tiếp.

Hai tam giác *SDF* và *SEM* có:

$\widehat{SDF} = \widehat{SEM}$; chung $\widehat{DSF}$ nên chúng đồng dạng

Suy ra $\frac{SD}{SF} = \frac{SE}{SM}$ hay $SD.SM = SE.SF$.

Từ tứ giác $BFEC$ nội tiếp, ta cũng suy ra $SE.SF = SB.SC$, tứ giác $BCQP$ nội tiếp ta cũng có $SB.SQ = SP.SQ$.

Suy ra $SP.SQ = SE.SF \Rightarrow \frac{SF}{SP} = \frac{SQ}{SE}$

Vậy $\frac{SF}{SP} - 1 = \frac{SQ}{SE} - 1$ hay $\frac{SF - SP}{SP} = \frac{SQ - SE}{SE} \Rightarrow \frac{PF}{PS} = \frac{EQ}{SE}$

Câu 34. *(Trường chuyên Phan Bội Châu tỉnh Nghệ An năm 2023-2024)*

Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* (*AB* < *AC*) nội tiếp đường tròn tâm *O*. Trên đường tròn *(O)* lấy điểm *D* khác phía *A* so với đường *BC* (*BD* > *AC*). Qua *B* kẻ đường thẳng *d* song song với *CD*. Đường thẳng *d* cắt đường thẳng *AC* tại *E*, cắt đường tròn *(O)* tại *F (F khác B)*.

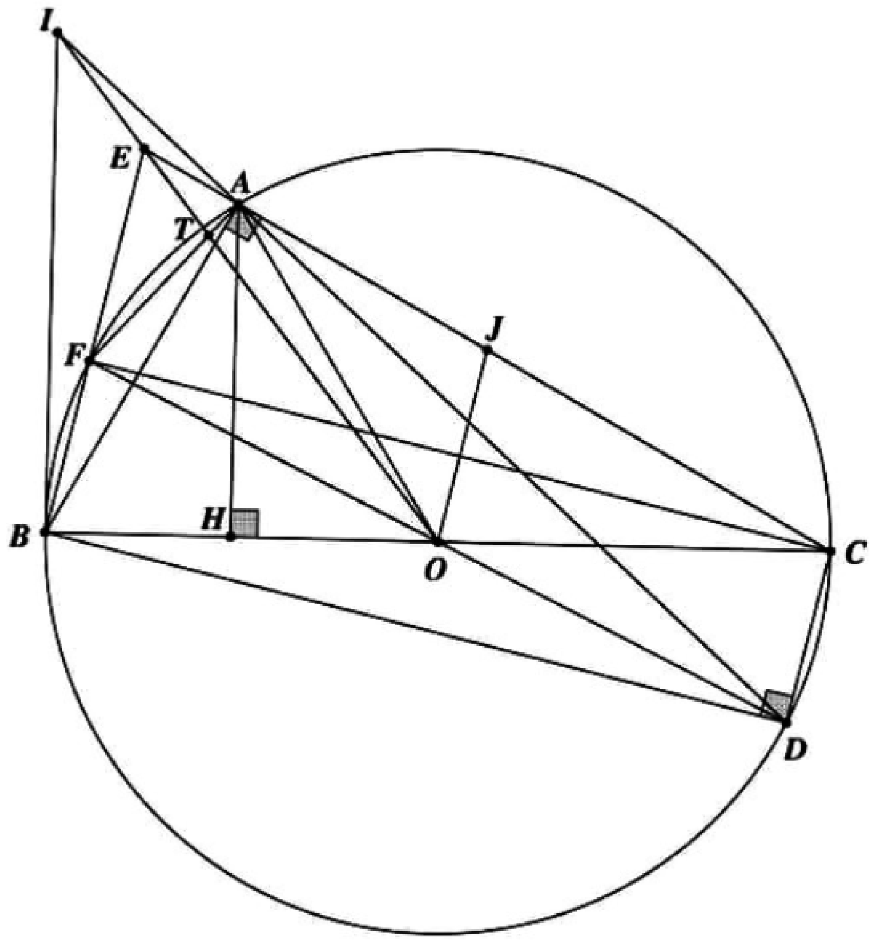
a)Gọi *J* là trung điểm của *EC*. Chứng minh rằng 4 điểm *A,F,O,J* cùng nằm trên một đường tròn

b)Đường thẳng *OE* cắt đường thẳng *AD* tại *I*. Chứng minh rằng $\widehat{IBA} = \widehat{BDA}$

c)Trên tia *BD* lấy điểm *M* sao cho *BM* = *BA*. Đường thẳng *AM* cắt đường thẳng *DC* tại *N*, đường thẳng *BN* cắt *(O)* tại *K (K khác B)*. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *A* trên *BC*. Đường thẳng *BD* cắt các đường thẳng *NH,CK* lần lượt tại *P,Q*.

Chứng minh rằng $\frac{1}{PM} = \frac{1}{MQ} + \frac{1}{BM}$

Lời giải



a) Vì tứ giác *AFBC* nội tiếp, ta có đẳng thức sau

$$180^\circ - \widehat{FAJ} = \widehat{EAF} = \widehat{FBC} = \frac{1}{2}\widehat{FOC}$$

Vì *JO* là đường trung bình tam giác *CBE* nên *JO // BF* mà $CF \perp BF$ suy ra $JO \perp BF$

Vì *O* thuộc trung trực *CF* nên *OJ* là trung trực *CF* nên

$$\widehat{FOJ} = \frac{1}{2}\widehat{FOC} = 180^\circ - \widehat{FAJ}$$

Từ đây ta có ngay tứ giác *AJOF* là tứ giác nội tiếp

b) Gọi *T* là giao điểm của *OE* và *AF*. Trước hết, ta chỉ ra $\frac{ID}{IA} = \frac{BD^2}{BA^2}$

Thật vậy, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác *AFD*, cát tuyến *ITO* ta có

$$\frac{ID}{IA} \cdot \frac{TA}{TF} \cdot \frac{OF}{OD} = 1$$

Từ đây kết hợp *OF* = *OD*, $\Delta AEB \sim \Delta FEC\left(g.g\right)$ và *BD* = *CF*, ta có

$$\frac{ID}{IA}=\frac{TF}{TA}=\frac{EF.\sin FET}{EA.\sin AET}=\frac{EF}{EA}.\frac{\sin BEO}{\sin CEO}=\frac{EF}{EA}.\frac{CE}{BE}=\left(\frac{CF}{BA}\right)^2=\left(\frac{BD}{BA}\right)^2$$

Bằng các phép biến đổi góc, ta được

$$\widehat{OFA}=\widehat{OAF}=90^\circ-\widehat{ADF}=90^\circ-\widehat{ACF}=\widehat{AEF}$$

Do đó *OF* và *OA* là hai tiếp tuyến của đường tròn *(AEF)*

Gọi *I'* là giao điểm của tiếp tuyến tại *B* của *(O)* với *AD*, ta có

$$\Delta I'BA\sim\Delta I'DB(g.g)\Rightarrow\frac{I'A}{I'B}=\frac{I'B}{I'D}=\frac{BA}{BD}$$

$$\Leftrightarrow\frac{I'D}{I'A}=\frac{I'D}{I'B}.\frac{I'B}{I'A}=\frac{BD^2}{BA^2}=\frac{ID}{IA}$$

$$\Rightarrow I\equiv I'$$

Từ đây ta được *IB* là tiếp tuyến của *(O)* suy ra $\widehat{IBA}=\widehat{BDA}$

Bài toán được chứng minh

c) Ta có

$$\widehat{DNM}+\widehat{DMN}=\widehat{BAM}+\widehat{CAN}=90^\circ,\widehat{BAM}=\widehat{BMA}$$

Do đó $\widehat{CAN}=\widehat{CNA}$ hay tam giác *CAN* cân tại *C* suy ra *CA* = *CN*

Theo hệ thức lượng ta có $CA^2=CH.CB$ nên $CN^2=CH.CB$ suy ra $\frac{CN}{CH}=\frac{CB}{CN}$

Từ đây ta được $\Delta CNH\sim\Delta CBN(c.g.c)$ dẫn đến $\widehat{CHN}=\widehat{CNB}=\widehat{CQD}$

Do đó tứ giác *CQPH* nội tiếp, ta có các biến đổi sau

$$BP.BQ=BH.BC=BA^2\Leftrightarrow BM^2=BP.BQ$$

$$\Leftrightarrow\frac{BM}{BP}=\frac{BQ}{BM}$$

$$\Leftrightarrow\frac{PM}{BP}=\frac{MQ}{BQ}$$

$$\Leftrightarrow PM.BQ=MQ.BM$$

$$\Leftrightarrow(MB+MQ)MP=MQ.MB$$

$$\Leftrightarrow \frac{MB+MQ}{MB.MQ}=\frac{1}{MP}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{MP}=\frac{1}{MQ}+\frac{1}{MB}$$

Vậy bài toán được chứng minh

Câu 35. *(Trường chuyên Vinh tỉnh Nghệ An năm 2023-2024)*

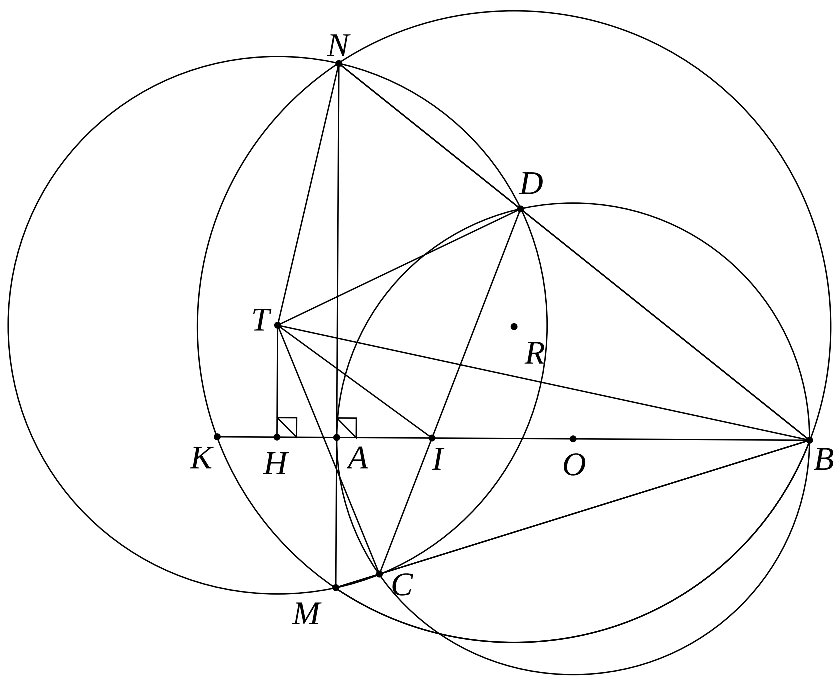
Cho đường tròn (O) đường kính AB. Đường thẳng Δ tiếp xúc với (O) tại A, I là điểm cố định trên đoạn AB và CD là dây cung thay đổi của (O) luôn đi qua I. Các đường thẳng BC, BD cắt Δ lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng $CDMN$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN với đường thẳng AB. Chứng minh rằng $KMCI$ là tứ giác nội tiếp và tích $AM.AN$ không đổi.

c) Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDNM$. Tìm vị trí của CD sao cho độ dài đoạn thẳng BT nhỏ nhất

Lời giải



a) Áp dụng hệ thức lượng cho hai tam giác BAM và BAN với hai đường cao tương ứng là AC, AD ta có $BA^2 = BC.BM = BD.BN$. Vì vậy tứ giác $CDNM$ nội tiếp.

b) Ta có biến đổi góc $\widehat{MKB}=\widehat{MNB}=\widehat{DCB}$, vì vậy tứ giác $CIKM$ nội tiếp.

Do đó $BC.BM = BI.BK = BA^2$, từ đây suy ra K là điểm cố định.

Từ đây ta suy ra $AM.AN = AK.AB$ cố định.

c) Gọi r là bán kính của (T) thì $r^2 - TA^2 = AN.AM = a$ không đổi. Ta cũng có $ID.IC$ không đổi, đặt $b = ID.IC = r^2 - TI^2$ suy ra $TI^2 - TA^2 = a - b$.

Gọi H là hình chiếu của K lên AB theo định lý Pythagore ta có.

$(AI + 2AH).AI = HI^2 - HA^2 = (TI^2 - TH^2) - (TA^2 - TH^2) = TI^2 - TA^2 = a - b$

Từ đây kết hợp với AI không đổi (A và I cố định) suy ra H cố định do đó BH không đổi.

Khi đó, theo định lý Pytagore ta có.

$$BT^2 = TH^2 + BH^2 \geq BH^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi T trùng với H tức là BA là trung trực của CD suy ra CD vuông góc AB tại I. Vậy khi CD vuông góc với AB tại I thì độ dài đoạn thẳng BT nhỏ nhất.

Câu 36. *(Trường chuyên tỉnh Ninh Bình năm 2023-2024)*

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là điểm đối xứng của B qua AC và F điểm đối xứng của C qua AB. Đường thẳng BE cắt đường thẳng CF tại H.

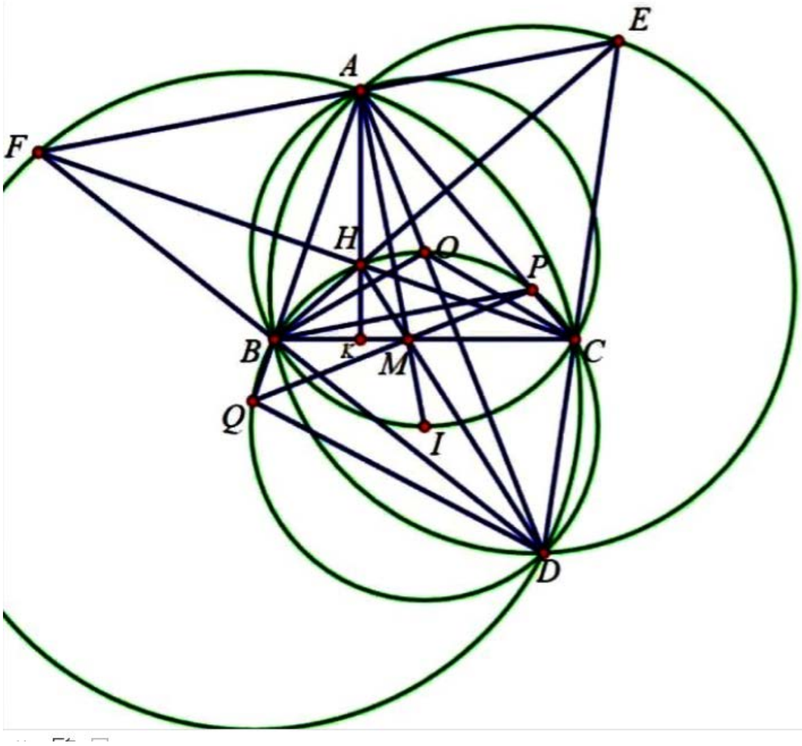
a) Chứng minh các tứ giác AHBF và AHCE là tứ giác nội tiếp.

b) Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại điểm thứ hai là D. Chứng minh F,B,D thẳng hàng và DA là tia phân giác của góc EDF.

c) Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE, ACF. Chứng minh sáu điểm B, C, D, O, P, Q cùng thuộc một đường tròn tâm I và giao điểm (khác D) của đường thẳng AD với đường tròn (I) là trực tâm tam giác APQ.

d) Giả sử H thuộc đường tròn (I). Chứng minh các đường thẳng AI, DH, BC, PQ đồng quy.

Lời giải



a) AFB=ACB (đối xứng); AHB=KHE (đối đỉnh)
Mà ACB + KHE =180° nên AHBF nội tiếp.
Tương tự với AHCE.
b) *AED = AHF (cùng bù với AHC) mà AHF = ABF (tứ giác AHBF nội tiếp). Do đó AED = ABF.
Mặt khác AED + ABD = 180° (ABDE nội tiếp) nên ABF + ABD=180°. Do đó F,B,D thẳng hàng.
Tương tự E,C,D thẳng hàng.
*ADF = ACF, ADE = ABE mà ACF = ABE (cùng phụ với BAC) nên ADF =ADE hay DA là tia phân giác góc EDF.
c) * Dễ thấy P thuộc AC, Q thuộc AB.
* ADC = AFC mà AFC = ACF = 90°-BAC nên ADC=90o-BAC.
Tương tự ADB = 90^0-BAC. Vậy BDC = 180^0-2BAC.
Lại có BOC = 2BAC (góc nội tiếp và góc ở tâm) nên BDC + BOC = 180o. Suy ra tứ giác BOCD nội tiếp.
* Tam giác PAB cân tại P nên APB = 180^0-2BAC. Suy ra PAB = BDC nên tứ giác BPCD nội tiếp.
Tương tự ta có tứ giác BQDC nội tiếp.
* Vậy 6 điểm B, C, D, O, P, Q cùng thuộc một đường tròn (I).
* Dễ CM O thuộc AD. Do đó giao điểm khác D của AD và (I) là O.
* Vì OP là đường trung trực của AB nên OP vuông góc với AB; OQ là đường trung trực của AC nên OQ vuông góc với AC. Vậy O là trực tâm của tam giác APQ.
d) Dễ CM được I là giao điểm của tia phân giác của góc BAC với (O). Gọi M là giao điểm của AI và BC thì HD, PQ đi qua M. Do đó 4 đường AI, BC, HD, PQ đồng quy tại M.

Câu 37. *(Trường chuyên Tin tỉnh Phú Thọ năm 2023-2024)*

Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$, các đường cao $AD; BE; CF$ cắt nhau tại H. Gọi P là giao điểm thứ hai của AD và (O).

M là điểm đối xứng với P qua AB.

a) Chứng minh tứ giác $AHBM$ nội tiếp.

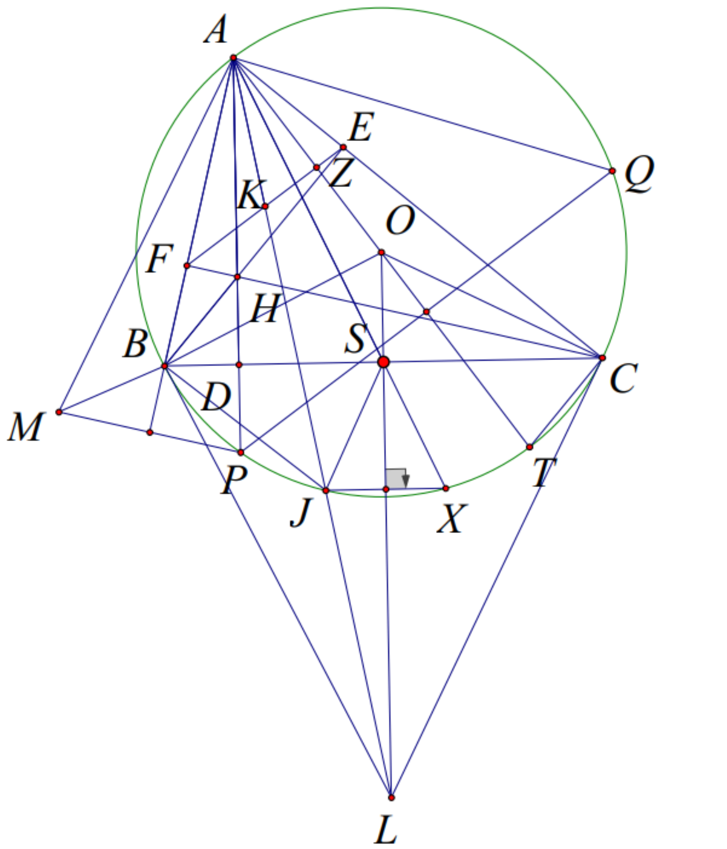
b) Qua P kẻ đường thẳng song song với EF cắt (O) tại Q.

Chứng minh Q đối xứng với P qua OA.

c) Gọi K là trung điểm của EF.

Chứng minh rằng đường thẳng AK và các tiếp tuyến của (O) tại $B; C$ đồng quy.

Lời giải



a) Ta có tứ giác $CDHE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DCE}+\widehat{DHE}=180^0$

$\widehat{APB}=\widehat{ACB}$ (cùng chắn cung AB)

$\widehat{APB}=\widehat{AMB}$ (tính chất đối xứng)

$\widehat{AHB}=\widehat{EHD}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{AMB}+\widehat{AHB}=180^0$. Vậy tứ giác $AHBM$ nội tiếp

b) Ta có tứ giác $BFEC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FBC}=\widehat{AEF}=\widehat{ATC}\Rightarrow \widehat{ACT}=\widehat{AZE}=90^0$

Mà $PQ//FE$ suy ra Q đối xứng với P qua OA

c) Tiếp tuyến B và C cắt nhau tại L, AL cắt đường tròn tại J. Dễ có $LB^2=LS.LA=LS.LO$

Suy ra tứ giác $AJSO \Rightarrow \widehat{JSL}=\widehat{XSL}\Rightarrow \widehat{ASC}=\widehat{ABJ};\widehat{AJB}=\widehat{ACS}\Rightarrow \Delta ABJ\sim\Delta ASC$ (g.g)

Mà $\Delta ABC\sim\Delta AEF$ (g.g). Giả sử AJ cắt FE tại K' $\Rightarrow \Delta FAK'\sim\Delta ABS$ (g.g)

Vì S là trung điểm BC $\Rightarrow K'$ là trung điểm $FE \Rightarrow K\equiv K'$. Vậy tiếp tuyến tại B,C và AK đồng quy.

Câu 38. *(Trường chuyên Toán tỉnh Phú Thọ năm 2023-2024)*

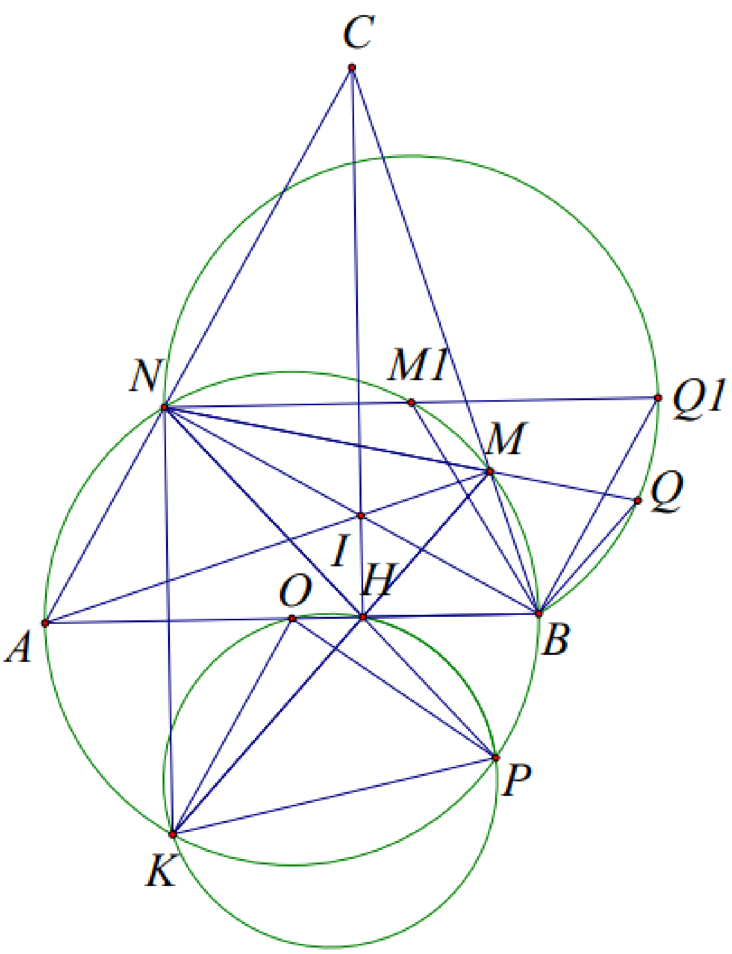
Trên đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ lấy điểm N sao chho $AN = R$ và M là một điểm thay đổi trên cung nhỏ BN (M khác B và N). Gọi I là giao điểm của AM và BN, H là hình chiếu của I trên AB, IH cắt AN tại C, K là điểm đối xứng với N qua AB.

a) Chứng minh $CM.CB = CI.CH$ và ba điểm K, H, M thẳng hàng.

b) Gọi P là giao điểm thứ hai của NH và (O). Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HPK thuộc đường thẳng cố định khi M thay đổi.

c) Xác định vị trí của điểm M để tổng $MB + MN$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ANB} = \widehat{AMB} = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

AM cắt BN tại I => I là trực tâm $CI \perp AB$

$\Rightarrow AI \perp CB \Rightarrow B, M, C$ thẳng hàng.

Dễ thấy $\Delta BCH \sim \Delta ICM \Rightarrow CB.CM = CI.CH$

Dễ thấy $\widehat{NHI} = \widehat{MHI} = \widehat{MBI} = \widehat{IAN} \Rightarrow \widehat{NHA} = \widehat{BHM}$

Mà $\widehat{NHA} = \widehat{KHA}$ tính chất đối xứng

$\Rightarrow \widehat{AHK} = \widehat{BHM}$ mà $\widehat{BHM} + \widehat{MHA} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AHK} + \widehat{AHM} = 180^0$ suy *ra K, H, M* thẳng hàng.

b) Ta có $\widehat{PHK} = 2.\widehat{PNK}$ (góc ngoài ΔHNK cân)

$\widehat{KOP} = 2\widehat{KNP}$ góc nội tiếp

$\Rightarrow$ Tứ giác $KOHP$ nội tiếp vì *N* cố định suy ra *OK* cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *KHP* thuộc trung trực *OK*.

c) Ta có $\widehat{NMB} = 120^0$. Trên tia đối *MN* lấy *Q* sao cho $MB = MQ \Rightarrow \widehat{NQB} = 60^0$

NB cố định $\Rightarrow Q$ thuộc cung chứa góc 60^0 dựng trên *NB* $\Rightarrow MN + MB$ lớn nhất khi NQ là đường kính của đường tròn

$MB = MQ = MN \Rightarrow M \equiv M1, Q \equiv Q1$.

Vậy M là trung điểm cung $NB \Rightarrow MN + MB$ lớn nhất $MN + NB = 2R$

Câu 39. *(Trường chuyên tỉnh Phú Yên năm 2023-2024)*

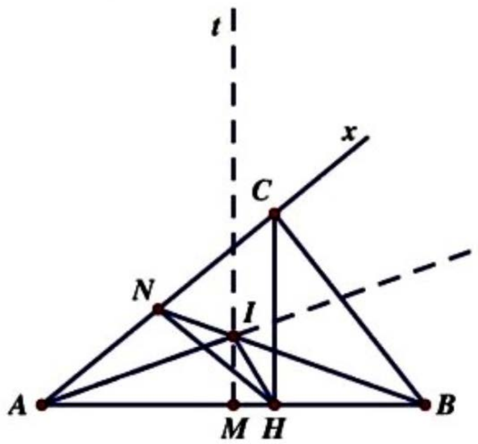
1) Cho đoạn thẳng *AB*, với *M* là trung điểm. Trên đường trung trực *Mt* của đoạn thẳng AB lấy điểm I bất kì. Vẽ tia Ax sao cho *AI* là phân giác góc BAx. Đường thẳng *BI* cắt Ax tại *N*. Gọi C là điểm đối xứng của *A* qua *N*,*H* là hình chiếu vuông góc của *C* lên *AB*.

a) Chứng minh rằng tam giác NHB cân
b) Chứng minh đẳng thức: $BH^2 = HI.BN$
c) Khi điểm *I* di chuyển trên đường trung trực Mt đến vị trí làm cho tam giác ABC vuông tại *C*, hãy tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$

2) Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Gọi *D* là trung điểm của *AB*, *H* là hình chiếu vuông góc của *A* lên đường thẳng *DC*. Đường thẳng qua *C* vuông góc với *BC* cắt đường thẳng AB tại E. Gọi I là hình chiếu vuông góc của E lên đường thẳng DC.

a) Chứng minh BH vuông góc với AI.
b) Đường thẳng qua B vuông góc với BH cắt đường thẳng DC tại K. Chứng minh tứ giác *BCEK* nội tiếp.

Lời giải



a) Chứng minh ΔNHB cân

ΔAHC vuông tại H có HN là trung tuyến nên $NA = NC = NH$ nên ΔHNA cân tại N, suy ra $\widehat{NHA} = \widehat{NAH}$, do đó $\widehat{NHA} = 2\widehat{IAB} = 2\widehat{IBH} = 2\widehat{NBH}$ (1).

Theo tính chất góc ngoài của tam giác thì $\widehat{NHA} = \widehat{HNB} + \widehat{HBN}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{HNB} = \widehat{HBN}$ hay ΔNHB cân tại H

a) Chứng minh $BH^2 = HI.BN$

Theo a) ΔNHB cân tại H suy ra $HB = HN = \frac{1}{2}AC$ (3)

Xét ΔNHI và ΔBHI có

$$\begin{cases} IAN = IBH \\ IA = IB \\ AN = BH\,(= HN) \end{cases} \Rightarrow \Delta ANI = \Delta BHI \Rightarrow IN = IH$$

Dẫn đến ΔNIH cân tai I $\Rightarrow \widehat{IHN} = \widehat{INH} \Rightarrow \Delta NHB \sim \Delta NIH$ (hai tam giác cân có góc ở đáy bằng nhau)

$$\Rightarrow \frac{BH}{BN} = \frac{HI}{HN} \Rightarrow BH.BN = HI.BN \Rightarrow BH^2 = HI.BN$$

b) Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$ khi $\Rightarrow$ ABC vuông

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông và định lí Pytago ta có

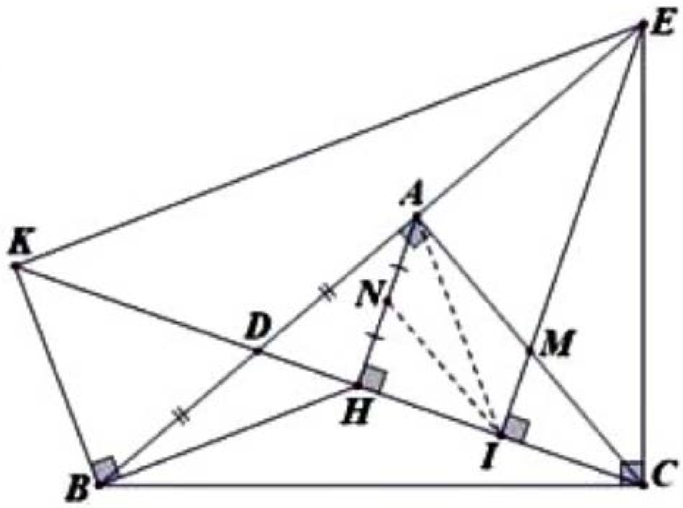
$$BC^2 = BH.BA = AB^2 - AC^2 \Leftrightarrow AB^2 - BH.BA - AC^2 = 0\,(4)$$

Từ (3) và(4) ta có $2\,AB^2 - AB.AC - 2AC^2 = 0$ (5)

Vì AC>0, chia 2 vế cho AC^2 ta được phương trình bậc 2 với $x = \frac{AB}{AC}$ là:

$$2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{1-\sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$$

Do $\frac{1-\sqrt{17}}{4} < 0$ (loai) nên ta chọn $x = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$, hay $\frac{AB}{AC} = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$



Gọi M *là giao điểm của* EI *và* AC, *ta có* M *là trực tâm của tam giác* $ECD \Rightarrow DM // BC$.
Tam giác ABC có
$DA = DB,\ DM \parallel BC \Rightarrow MA = MC$.
Tam giác AHC *có*
$MA = MC,\ MI \parallel AH \Rightarrow IH = IC$.
Gọi N *là trung điểm của* AH *ta có* $IN \parallel AC \Rightarrow IN \perp AD$
Tam giác ADI có
$AH \perp DI,\ IN \perp AD$ *do đó* N *là trực tâm* $\Rightarrow DN \perp AI \Rightarrow BH \perp AI$

a) Chứng minh tứ giác $BCEK$ nội tiếp

Từ $BH \perp AI \Rightarrow IN \parallel AC \Rightarrow \widehat{IAD} = \widehat{KBD}$
Xét ΔKBD và ΔIAD có:

$$\widehat{IAD} = \widehat{KBD},\ DA = DB,\ \widehat{ADI} = \widehat{BDK} \Rightarrow \Delta KBD = \Delta IAD$$

$\Rightarrow DK = DI$ (1).

Vì $\Delta DAC \sim \Delta DIE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{DA}{DI} = \dfrac{DC}{DE} \Rightarrow DA.DE = DI.DC$ (2).

Từ (1) và (2) kết hợp với $DA = DB$ suy ra $DA.DE = DK.DC$

$\Rightarrow \dfrac{DK}{DE} = \dfrac{DB}{DC} \Rightarrow \Delta DEK \sim \Delta DCB \Rightarrow \widehat{DEK} = \widehat{DCB}$ dẫn đến $BCEK$ nội tiếp.

Câu 40. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh năm 2023-2024)*

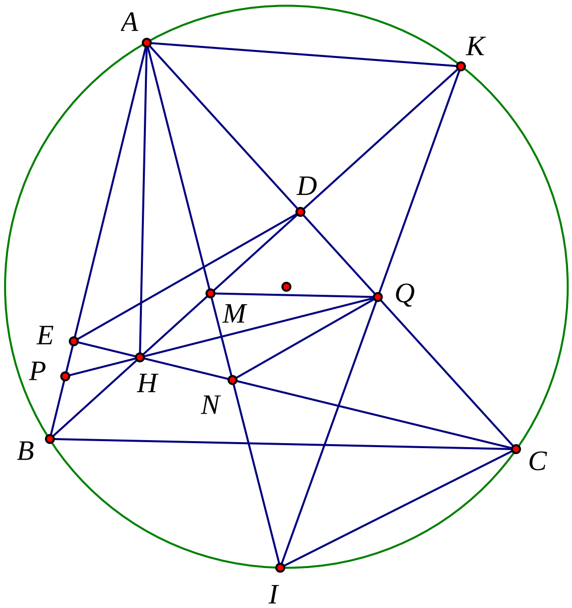
Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Hai đường cao BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H. Tia phân giác của góc BAC cắt đường thẳng BD và đường tròn (O) theo thứ tự tại M và I (I khác A). Đường thẳng BD cắt đường tròn (O) tại K (K khác B), hai đường thẳng AC và IK cắt nhau tại Q, hai đường thẳng QH và AB cắt nhau tại P. Chứng minh:

a) Tứ giác $AMQK$ nội tiếp;

b) Tam giác APQ cân tại A;

c) $\frac{1}{BC}+\frac{1}{DE}=\frac{1}{MQ}$.

Lời giải



a) $\widehat{BKI}=\widehat{BAI}$ (nội tiếp (O) cùng chắn $\overset{\frown}{BI}$)

mà $\widehat{BAI}=\widehat{IAC}$ $\Rightarrow \widehat{MAQ}=\widehat{MKQ}$ $\Rightarrow$ tứ giác *AMQK* nội tiếp

b) Tứ giác *AMQK* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MQA}=\widehat{MKA}$, lại có $\widehat{BKA}=\widehat{BCA}$(nội tiếp (O) cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$)

$\Rightarrow$ $\widehat{MQA}=\widehat{BCA}$ $\Rightarrow$ MQ // BC

H là trực tâm của Δ *ABC* nên $AH \perp BC \Rightarrow$ $MQ \perp AH$

Δ *AHQ* có $HD \perp AQ$, $MQ \perp AH$ nên *M* là trực tâm $\Rightarrow$ $AM \perp HQ$

Δ *APQ* có *AM* là phân giác, *AM* là đường cao nên Δ *APQ* cân tại *A*.

c) Gọi *N* là giao điểm của *AI* và *CE*. $\widehat{AIK}=\widehat{ABK}$ (nội tiếp (*O*) cùng chắn $\overset{\frown}{AK}$), $\widehat{ABD}=\widehat{ACE}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$) $\Rightarrow$ $\widehat{NIQ}=\widehat{NCQ}$ $\Rightarrow$ tứ giác *NICQ* nội tiếp $\Rightarrow$ $\widehat{QNC}=\widehat{QIC}$

Có $\widehat{BEC}=\widehat{BDC}=90^0$ nên tứ giác *BEDC* nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DEC}=\widehat{DBC}$, $\widehat{KBC}=\widehat{KIC}$ (nội tiếp (*O*) cùng chắn $\overset{\frown}{KC}$) $\Rightarrow \widehat{QNC}=\widehat{DEC}$ $\Rightarrow$ NQ // ED

Tứ giác *NICQ* nội tiếp nên $\widehat{MNQ}=\widehat{QCI}$, tứ giác *AMQK* nội tiếp nên $\widehat{QMN}=\widehat{AKQ}$ mà $\widehat{AKI}=\widehat{ACI}$ (nội tiếp (O) cùng chắn $\overset{\frown}{AI}$) $\Rightarrow$ $\widehat{QMN}=\widehat{QNM}$ $\Rightarrow$ Δ *QMN* cân $\Rightarrow$ *QM* = *QN*.

$$MQ\ //\ BC \Rightarrow \frac{MQ}{BC} = \frac{DQ}{DC},\ NQ\ //\ ED \Rightarrow \frac{NQ}{ED} = \frac{CQ}{CD}, \text{ lại có } MQ = NQ \text{ nên}$$

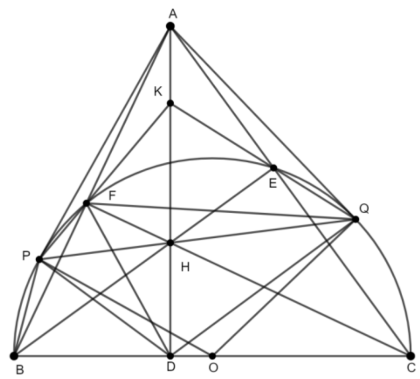
$$\frac{MQ}{BC} + \frac{MQ}{DE} = \frac{DQ}{DC} + \frac{CQ}{CD} = 1 \Rightarrow \frac{1}{BC} + \frac{1}{DE} = \frac{1}{MQ}.$$

Câu 41. *(Trường chuyên tỉnh Quảng Trị năm 2023-2024)*

Cho tam giác ABC nhọn, $AB < AC$. Kẻ các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AP, AQ đến đường tròn tâm O, đường kính BC (P, Q là các tiếp điểm và P, F nằm cùng phía so với đường thẳng AD).

1. Chứng minh $AP^2 = AB.AF$ và 5 điểm A, P, D, O, Q nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh H, P, Q thẳng hàng.
3. Chứng minh PF, QE, AD đồng quy.

Lời giải



Ta có $\angle APF = \angle ABP$ nên ΔAPF đồng dạng ΔABP suy ra $AP^2 = AF.AB$.

Ta có $\angle APO = \angle ADO = \angle AQO = 90^o$ nên 5 điểm A, P, D, O, Q nằm trên đường tròn đường kính AO.

Ta có ΔAFH đồng dạng ΔADB nên $AP^2 = AF.AB = AH.AD$. Suy ra ΔAPH đồng dạng ΔADP. Do đó $\angle APH = \angle ADP$ (1).

Tứ giác $APDO$ nội tiếp nên $\angle ADP = \angle AOP = \angle APQ$ (2)

Từ $(1), (2)$ suy ra $\angle APH = \angle APQ$ nên P, H, Q thẳng hàng.

Gọi K là giao điểm QE và AD.

Ta có $\angle KQF = \angle EBF = \angle HDF = \angle KDF$ nên tứ giác $DFKQ$ nội tiếp.

Ta có $\angle PFD = \angle PFB + \angle BFD = \angle PCB + \angle ACB$

Và $\angle KQD = \angle EQP + \angle PQD = \angle ACP + \angle POD = \angle ACP + 2\angle PCD = \angle ACB + \angle PCB$

Suy ra $\angle PFD = \angle KQD$ .Do đó $\angle PFD + \angle DFK = \angle KQD + \angle DFK = 180^\circ$.

Suy ra PF đi qua K . Vậy PF, QE, AD đồng quy

Câu 42. *(Trường chuyên tỉnh Sơn La năm 2023-2024)*

Cho tam giác *ABC* nhọn (*AB* < *AC*) nội tiếp đường tròn (*O*), các đường cao *BE* và *CF* cắt nhau tại *H*. Gọi *S* là giao điểm của đường thẳng *BC* và *EF*; *I* là giao điểm của *SA* và đường tròn (*O*) (với *I* khác *A*).

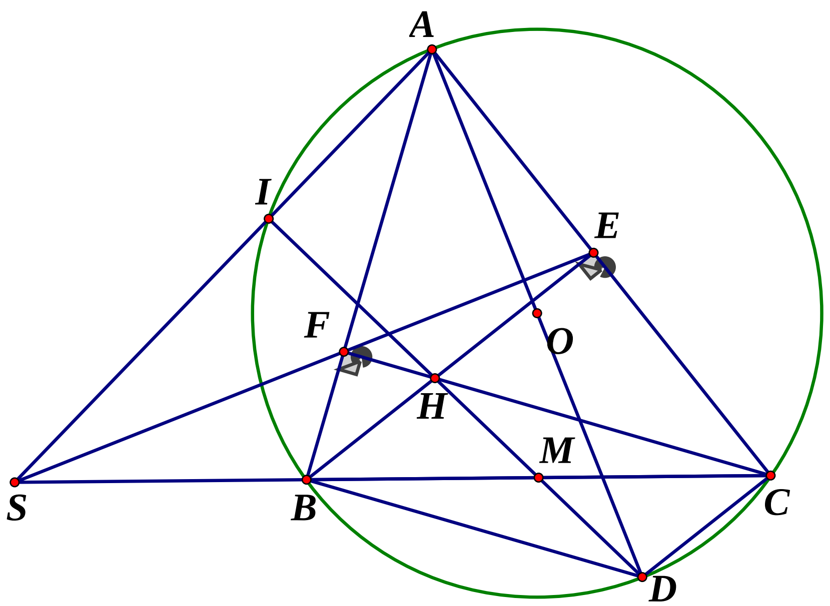
a) Chứng minh rằng tứ giác *AFHE* là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $SF.SE = SI.SA$ và $HI \perp SA$.

c) Gọi *M* là trung điểm của *BC,* kẻ đường kính *AD* của (*O*). Chứng minh ba điểm *H, M, D* thẳng hàng và *H* là trực tâm tam giác *ASM*.

d) Giả sử *T* là điểm nằm trên đoạn thẳng *HC* sao cho *AT* vuông góc với *BT*. Chứng minh hai đường tròn ngoại tiếp của tam giác *IST* và tam giác *ECT* tiếp xúc với nhau.

Lời giải



a) Chứng minh rằng tứ giác AFHE là tứ giác nội tiếp.

Do $BE \perp AC; CF \perp AB \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^0$

Xét tứ giác *AEHF* có: $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác *AEHF* nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $SF.SE = SI.SA$ và $HI \perp SA$.

Xét tứ giác *BFEC* có : $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^0$

Mà 2 góc này cùng nhìn cạnh BC

$\Rightarrow$ Tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{FCB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

Xét tam giác SEB và tam giác SCF có:

$\widehat{ESC}$ là góc chung

$$\widehat{SEB} = \widehat{SCF}$$

$\Rightarrow \Delta SEB \backsim \Delta SCF$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{SE}{SC} = \frac{SB}{SF} \Rightarrow SE.SF = SB.SC \ (1)$$

Xét tam giác SAB và tam giác SCI có:

$\widehat{ASC}$ chung

$\widehat{SAB} = \widehat{SCI} = \frac{1}{2}$ số đo cung IB (góc nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta SAB \backsim \Delta SCI$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SI} \Rightarrow SA.SI = SB.SC \ (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SE.SF = SA.SI \Rightarrow \dfrac{SE}{SI} = \dfrac{SA}{SF}$

$\Rightarrow \Delta SIF \backsim \Delta SEA$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{SIF} = \widehat{SEA}$$

$\Rightarrow$ tứ giác $AIFE$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

Mà 4 điểm $A, E, H,$ F cũng cùng thuộc 1 đường tròn

$\Rightarrow$ 5 điểm A, I, E, H, F cùng thuộc 1 đường tròn

$\Rightarrow AIHE$ nội tiếp đường tròn

$$\Rightarrow \widehat{AIH} = \widehat{AEH} = 90^0 \Rightarrow IH \perp SA$$

(c) Gọi M là trung điểm của BC, kẻ đường kính AD của (O). Chứng minh ba điểm H, M, D thẳng hàng và H là trực tâm tam giác ASM.

Xét (O): $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BD \\ AC \perp AD \end{cases}$ mà $\begin{cases} CH \perp AB \\ BH \perp AC \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} CH \parallel BD \\ BH \parallel CD \end{cases}$

$\Rightarrow$ tứ giác BHCD là hình bình hành

$\Rightarrow BC$ và HD cắt nhau.

d) Giả sử T là điểm nằm trên đoạn thẳng HC sao cho AT vuông gó(a+b)c với BT. Chứng minh hai đường tròn ngoại tiếp của tam giác IST và tam giác ECT tiếp xúc với nhau.

Câu 43. *(Trường chuyên tỉnh Tây Ninh năm 2023-2024)*

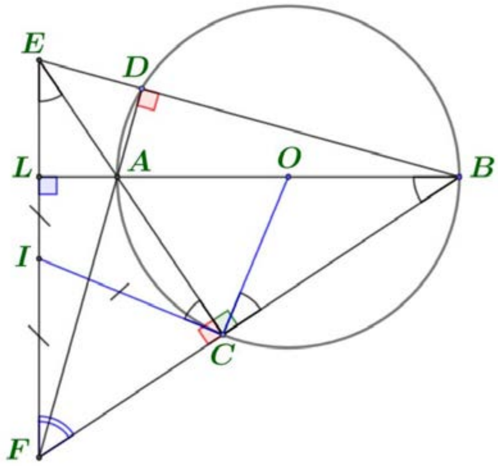
Câu 1: (1 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên (O) lấy hai điểm C, D nằm khác phía đối với AB và CD không đi qua O. Gọi E là giao điểm của AC và BD, F là giao điểm của AD và BC, I là trung điểm đoạn thẳng EF. Chứng minh IC là tiếp tuyến của (O)

Câu 2: (2 điểm) Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài (O), vẽ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC không đi qua $O(MB < MC)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên MO.

(1,0 điểm) Chứng minh: Tứ giác $BHOC$ nội tiếp.

(1,0 điểm) Vẽ đường thẳng qua B song song với AC cắt các đường thẳng MA, AH lần lượt tại K, I. Chứng minh $KB = BI$

Lời giải



Xét $\triangle BEF$ có: $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow BA$ là đường cao thứ ba. Suy ra: $\widehat{BLF} = 90^\circ \left(L \in EF\right)$.

Ta có: $\widehat{CEF} = \widehat{LBF}$ (1) (cùng phụ với $\widehat{CFE}$). (2)

Xét $\triangle EFC\left(\hat{C} = 90^\circ\right)$ có CI là trung tuyến ứng với cạnh huyền

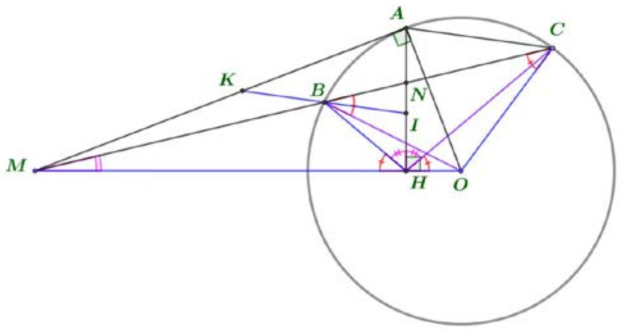
$\Rightarrow CI = IE \Rightarrow \Delta EIC$ cân tại I. Suy ra: $\widehat{CEF} = \widehat{ICE}$

Mặt khác: $\widehat{OCB} = \widehat{LBF}$ (3) (do $\triangle OBC$ cân tại O)

Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{ICE}$ $(*)$.

Ta có: $\widehat{OCI} = \widehat{ICE} + \widehat{OCA} = \widehat{OCB} + \widehat{OCA} = \widehat{ACB} = 90^\circ$.

$\left.\begin{array}{l} IC \perp OC \\ C \in (O) \end{array}\right\} \Rightarrow IC$ là tiếp tuyến của (O)



Ta có: $\Delta MBA \sim \Delta MAC$ (g-g) $\dfrac{MA}{MC}=\dfrac{MB}{MA}\Rightarrow MA^2=MB.MC$.

$\Delta MAO\left(\hat{A}=90^\circ\right), AH\perp MO\Rightarrow MA^2=MH.MO$

Suy ra: $MB\cdot MC=MH\cdot MO\Rightarrow\dfrac{MB}{MO}=\dfrac{MH}{MC}$.

Xét ΔBMH và ΔOMC có $\hat{M}$ chung và $\dfrac{MB}{MO}=\dfrac{MH}{MC}\Rightarrow\Delta BMH\sim\Delta OMC$ (c-g-c).

Suy ra: $\widehat{BHM}=\widehat{BCO}$ mà $\widehat{BHM}+\widehat{BHO}=180^\circ\Rightarrow\widehat{BCO}+\widehat{BHO}=180^\circ$.

Vậy tứ giác $BHOC$ nội tiếp.

b)

$BK\parallel AC\Rightarrow\dfrac{BK}{AC}=\dfrac{MB}{MC}$

$BI\parallel AC\Rightarrow\dfrac{BI}{AC}=\dfrac{BN}{NC}$

Do $OHBC$ nội tiếp đường tròn nên: $\widehat{OHC}=\widehat{OBC}=\widehat{OCB}=\widehat{BHM}$.

Khi đó: $\left.\begin{array}{l}\widehat{AHC}+\widehat{OHC}=90^0\\ \widehat{AHB}+\widehat{BHM}=90^0\end{array}\right\}\Rightarrow\widehat{AHC}=\widehat{AHB}\Rightarrow AH$ là phân giác trong của $\widehat{BHC}$

$\Rightarrow\dfrac{HB}{HC}=\dfrac{BN}{NC}$

Mà $HM\perp AH\Rightarrow HM$ là phân giác ngoài của $\widehat{BHC}\Rightarrow\dfrac{HB}{HC}=\dfrac{MB}{MC}(**)$.

Từ $(1),(2),(*),(**)\Rightarrow\dfrac{BK}{AC}=\dfrac{BI}{AC}\Rightarrow BK=BI$

Câu 44. *(Trường chuyên tỉnh Thái Bình năm 2023-2024)*

Cho tam giác ABC vuông tại A với AB = c, AC = b. Vẽ đường tròn tâm O_1 đường kính AB và đường tròn tâm O_2 đường kính AC. Gọi H là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O_1) và (O_2). Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A cắt các đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại các điểm D, E không trùng với A sao cho A nằm giữa D,E.

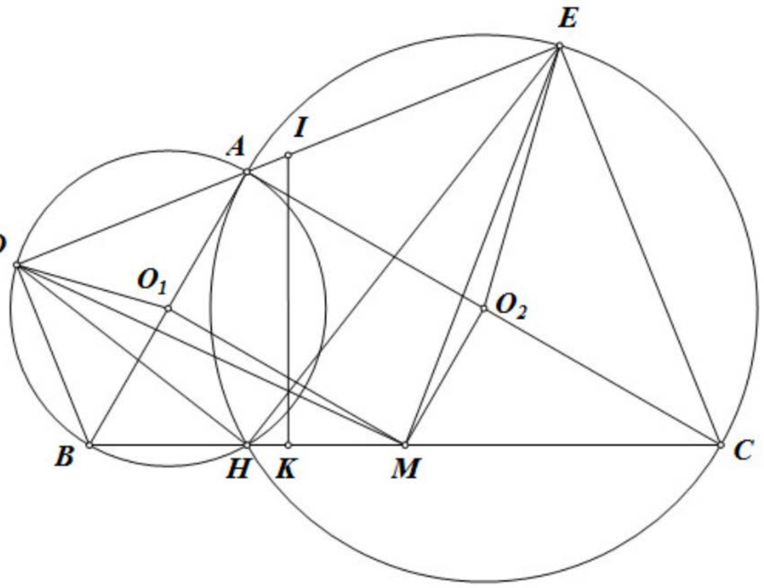
a) Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng (d) thay đổi.

b) Xác định vị trí của đường thẳng (d) để diện tích tứ giác BDEC đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó theo b,c.

c) Kẻ đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn DE và vuông góc với BC tại K. Chứng minh rằng

$KB^2 = BD^2 + KH^2$

Lời giải



a) Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow MO_1 = \frac{1}{2}AC; MO_2 = \frac{1}{2}AB.$

Do D thuộc đường tròn đường kính AB nên tam giác ADB vuông tại D.

$\Rightarrow DO_1 = \frac{1}{2}AB = MO_2$. Tương tự thì $EO_2 = MO_1$

Có tam giác ABC vuông tại A (giả thiết). $\widehat{ADB} + \widehat{EAC} = 90^o$

Mà tam giác DAB vuông tại D nên $\widehat{ADB} + \widehat{DBA} = 90^o$

$\widehat{EAC} = \widehat{ABD} \Rightarrow 2\widehat{EAC} = 2\widehat{ABD} \Rightarrow \widehat{DO_1A} = \widehat{EO_2C} \Rightarrow \widehat{DO_1B} = \widehat{EO_2A}$

Dễ thấy $MO_1 // AC, MO_2 // AB \Rightarrow \widehat{MO_1B} = \widehat{MO_2A} = 90^o \Rightarrow \widehat{MO_1D} = \widehat{MO_2E}$

Xét ΔMO_1D và ΔEO_2M có:

$MO_1 = EO_2$ (cmt)

$\widehat{DO_1M} = \widehat{MO_2E}$ (cmt)

$DO_1 = MO_2$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta MO_1D = \Delta EO_2M$ (c.g.c)

$\Rightarrow MD = ME$ (2 cạnh tương ứng).

$\Rightarrow M$ thuộc trung trực DE. Do đó trung trực DE luôn đi qua M cố định (đpcm).

b) Có $2S_{BDEC} = 2S_{BDA} + 2S_{BAC} + 2S_{AEC} = DB.DA + AB.AC + EA.EC \le \frac{1}{2}\left(BD^2 + DA^2\right) + \frac{1}{2}\left(EA^2 + EC^2\right) + bc$

$= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right) + bc = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2\right) + bc = \frac{1}{2}(b+c)^2$

$\Rightarrow S_{BDEC} \le \frac{1}{4}(b+c)^2 \Rightarrow Max = \frac{1}{4}(b+c)^2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow DA = DB, EA = EC. \Leftrightarrow$ d tạo với AB một góc 45°.

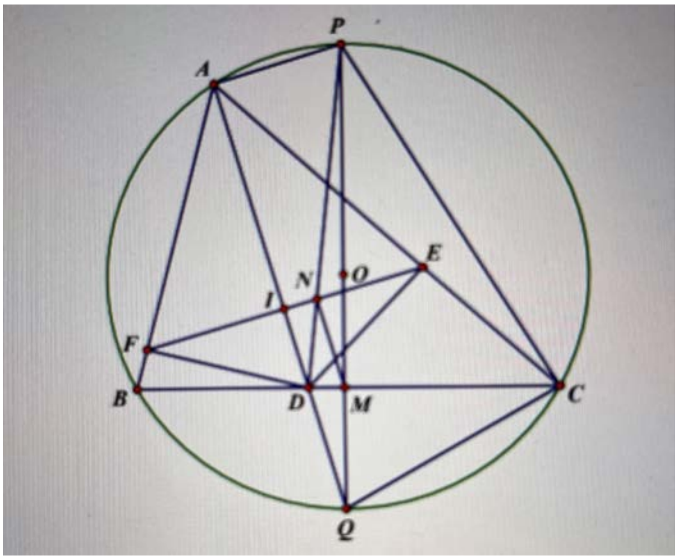
c) Ta có điều phải chứng minh:
$KB^2 = BD^2 + KH^2 \Leftrightarrow IB^2 - KI^2 = IB^2 - ID^2 + IH^2 - IK^2 \Leftrightarrow IH^2 = ID^2 \Rightarrow IH = ID = IE$
Do đó tam giác DHE vuông tại H.
Thật vậy, có $\widehat{DHB} + \widehat{EHC} = \widehat{DAB} + \widehat{EAC} = 90^o \Rightarrow \widehat{DHE} = 90^o$
Do đó tam giác DHE vuông tại H, tức $KB^2 = BD^2 + KH^2$ (đpcm).

Câu 45. *(Trường chuyên tỉnh Thanh Hóa năm 2023-2024)*

Cho tam giác ABC nhọn có AB < AC nội tiếp đường tròn (O), phân giác trong của góc BAC cắt BC tại D và cắt (O) tại Q(Q khác A). Từ D dựng DE, DF lần lượt vuông góc với AC, AB (E thuộc AC, F thuộc AB). Gọi M là trung điểm của BC, tia QM cắt (O) tại giao điểm thứ hai là P.

a) Chứng minh QM. QP = QD. QA
b) Gọi N là giao điểm của PD và EF. Chứng minh MN // AD.
c) Dựng đường kính AK của (O). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BFN và CEN cắt nhau tại R(R khác N). Chứng minh các điểm P, D, R thẳng hàng.

Lời giải

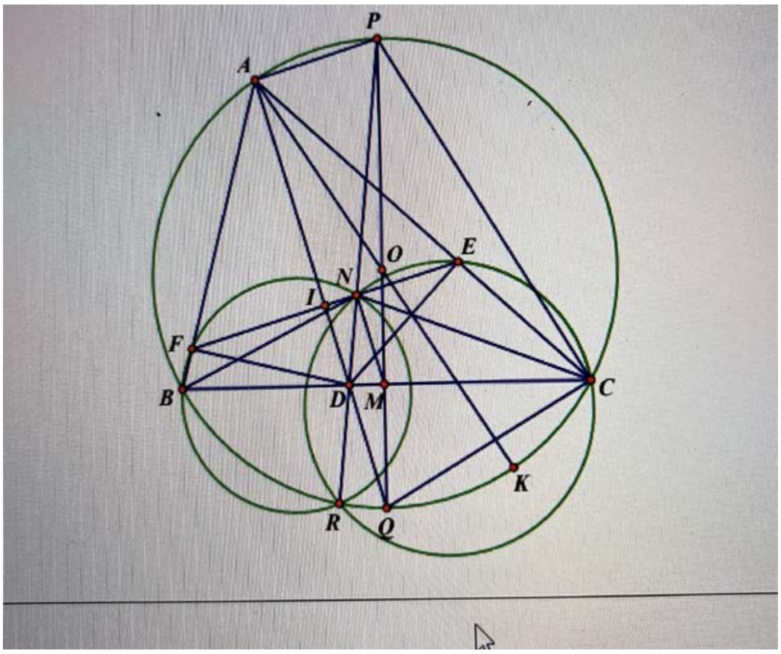


a) Xét ΔQMD và ΔQAP có
$\widehat{QMD} = \widehat{QAP} = 90^0$
$\widehat{Q}$ là góc chung
⇨ ΔQMD đồng dạng ΔQAP(g.g)
⇨ $\frac{QM}{QD} = \frac{QA}{QP} \Rightarrow QM.QP = QD.QA$
b) Gọi I là giao điểm của AD và EF
Ta chứng minh ΔAED đồng dạng với ΔPQD $(g.g)$, có các đường cao tương ứng EI và CM nên $\frac{QM}{QP} = \frac{DI}{DA}$ $\Big\}$

Mà NI // AP => $\frac{DI}{DA} = \frac{DN}{DP}$

⇨ $\frac{QM}{QP} = \frac{DN}{DP}$

MN // DQ Hay MN // AD



c) Gọi R là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BFN và tam giác CEN. Trước hết, ta chứng minh R ∈(O).

Ta có $\widehat{BRC} = \widehat{BRN} + \widehat{CRN} = \widehat{AEF} + \widehat{AFE} = 180^0 - \widehat{BAC}$

⇨ Tứ giác ABRC nội tiếp

⇨ R ∈(O)

⇨ $\widehat{NRC} = \widehat{NEA} = \widehat{EAP} = \widehat{PRC}$

P, D, R thẳng hàng.

Câu 46. *(Trường chuyên tỉnh Huế năm 2023-2024)*

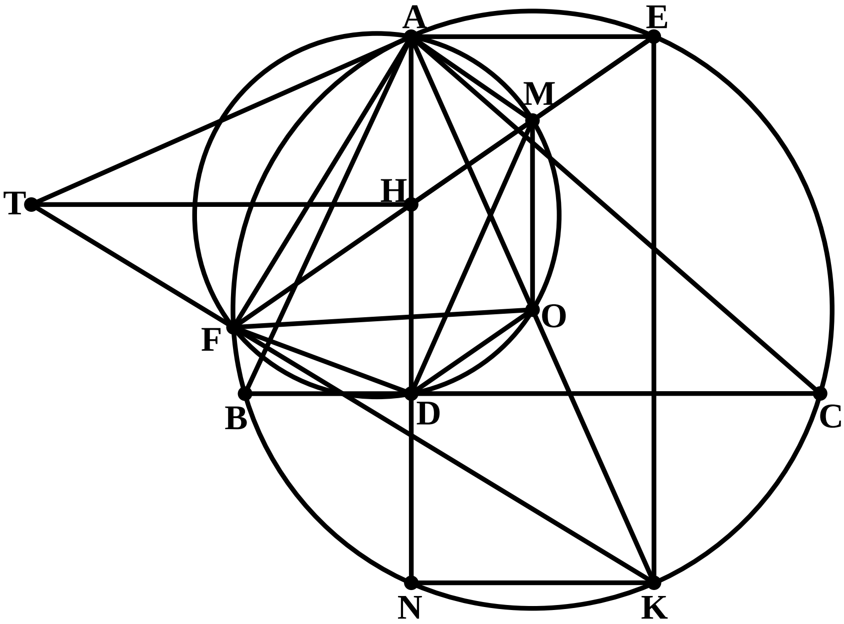
Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AD và trực tâm H. Gọi E là điểm trên (O) sao cho hai dây AE và BC song song với nhau. Đường thẳng EH cắt (O) tại điểm thứ hai là F và cắt đường trung trực của BC tại M.

a) Chứng minh M là trung điểm của EH và AMOF là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{OFA} + \widehat{ODF} = 180°$.

c) Gọi K là điểm đối xứng với A qua O. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng FK tại T. Chứng minh hai đường thẳng TH và BC song song với nhau.

Lời giải



a) Chứng minh M là trung điểm của EH và AMOF là tứ giác nội tiếp.

Vì hai dây AE và BC song song nên AH vuông góc với AE và trung trực của BC cũng là trung trực của AE.

Tam giác AEH vuông tại A nên đường trung trực của AE cũng chính là đường trung bình của tam giác đó. Suy ra M là trung điểm của EH.

Do đó $MA = ME = MH$, suy ra $\widehat{AMH} = \widehat{AEM} + \widehat{EAM} = 2\widehat{AEM}$, hay $\widehat{AMF} = 2\widehat{AEF}$.

Mặt khác, ta có $\widehat{AOF} = 2\widehat{AEF}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn chung AF)

Suy ra $\widehat{AMF} = \widehat{AOF}$, do đó tứ giác AMOF nội tiếp. (1)

b) Chứng minh $\widehat{OFA} + \widehat{ODF} = 180°$.

Gọi N là giao điểm thứ hai của AH với (O).

Ta có $\widehat{CBN} = \widehat{CAN}$ (cùng chắn cung CN).

Ta lại có $\widehat{CBH} = \widehat{CAN}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$). Suy ra $\widehat{CBH} = \widehat{CBN}$.

Tam giác BHN có BD vừa là đường cao vừa là phân giác nên D là trung điểm của HN.

Tứ giác AENF nội tiếp (O) và AN cắt EF tại H nên ta có

$HA.HN = HE.HF \Leftrightarrow HA.2HD = 2HM.HF \Leftrightarrow HA.HD = HM.HF$.

Suy ra tứ giác AMDF nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) ta có AODF nội tiếp. Suy ra $\widehat{OAF} + \widehat{ODF} = 180°$.

Mặt khác, tam giác OAF cân tại O nên $\widehat{OAF} = \widehat{OFA}$.

Suy ra $\widehat{OFA} + \widehat{ODF} = 180°$.

c) Gọi K là điểm đối xứng với A qua O. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng FK tại T. Chứng minh hai đường thẳng TH và BC song song với nhau.

Ta có $\widehat{ATF} = \widehat{FAK}$ (cùng phụ với $\widehat{AKF}$). (3)

Ta lại có $\widehat{EAN} = 90°$ nên EN là đường kính của (O).

Tứ giác AEKN có hai đường chéo AK và NE bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên AEKN là hình chữ nhật. Suy ra $AE = NK$, hay $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{NK}$.

Ta có $\widehat{FAK} = \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{KN} + \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{NF} = \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{AE} + \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{NF} = \widehat{AHE}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{ATF} = \widehat{AHE}$, do đó tứ giác ATFH là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{AHT} = \widehat{AFT} = 90°$.

Ta có $AH \perp TH$ và $AH \perp BC$ nên $TH // BC$

Câu 47. *(Trường chuyên tỉnh Tiền Giang năm 2023-2024)*

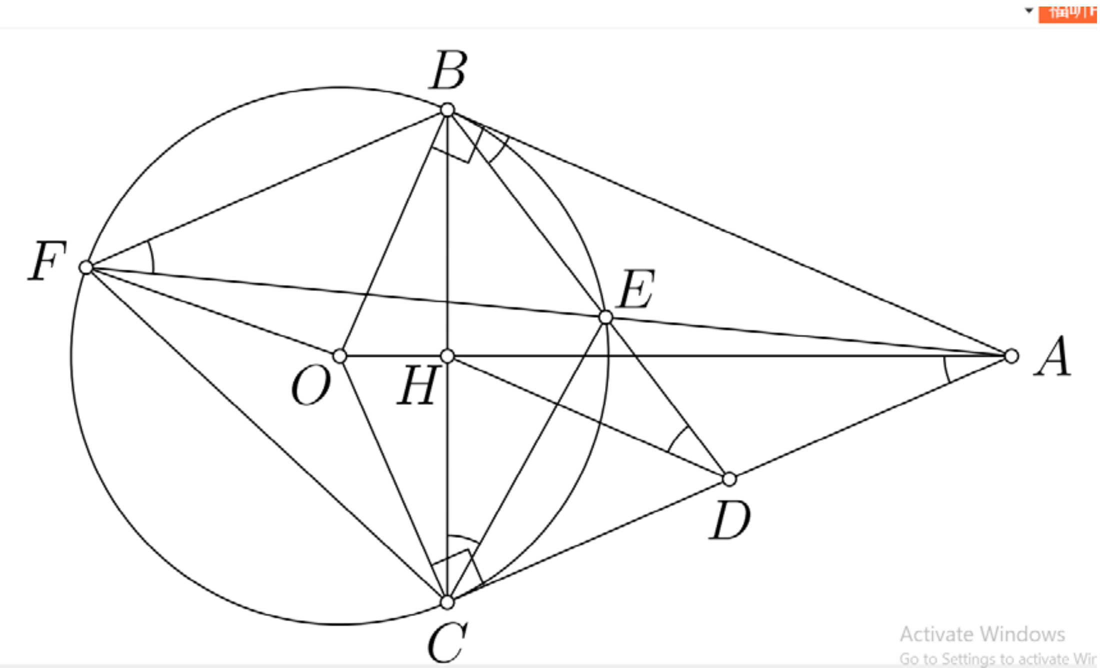
Cho đường tròn tâm O và một điểm A ở ngoài đường tròn đó. Qua điểm A vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC, D là trung điểm của AC, tía BD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E.

1) Chứng minh CDEH là một tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh rằng $DA^2 = DE.DB$

3) Gọi F là giao điểm thứ hai của AE với đường tròn (O). Chứng minh OC là đường trung trực của đoạn thẳng BF.

Lời giải



1) Chứng minh CDEH là một tứ giác nội tiếp.

Ta có

- $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

- $OB = OC$ (bán kính (O)) nên AO là đường trung trực của đoạn thẳng BC.
- ΔABC có D là trung điểm AC, H là trung điểm BC nên HD là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $HD // AB$.

Khi đó $\widehat{HDE} = \widehat{ABE} = \widehat{BCE} = \widehat{HCE} = \frac{1}{2} sd\, \overset{\frown}{BE}$

Do đó, tứ giác CDEH nội tiếp.

2) Chứng minh rằng $DA^2 = DE.DB$

Xét ΔDCE và ΔDBC ta có

$\widehat{EDC}$ chung

$\widehat{DCE} = \widehat{DBC} = \frac{1}{2} sd\, \overset{\frown}{BE}$

Suy ra $\Delta DCE \backsim \Delta DBC$ (g-g)

Do đó $\frac{DC}{DB} = \frac{DE}{DC}$. Suy ra $DC^2 = DE.DB$

Mặt khác, do $DA = DC$ nên $DA^2 = DE.DB$

3) Gọi F là giao điểm thứ hai của AE với đường tròn (O). Chứng minh OC là đường trung trực của đoạn thẳng BF.

- Từ $DA^2 = DE.DB$ nên ta có $\frac{DA}{DE} = \frac{DB}{DA}$
- Xét hai tam giác DAE và tam giác DBA có

  +) $\widehat{EDA}$ chung;

  +) $\frac{DA}{DE} = \frac{DB}{DA}$

  Do đó $\triangle DAE \backsim \triangle DBA$
- Suy ra $\widehat{EAD} = \widehat{DBA} = \widehat{DFA} = \frac{1}{2} sd\, \overset{\frown}{BE}$, do đó $BF // AC$.
- Mà $OC \perp AC$ nên $OC \perp BF$.
- Mặt khác, $OF = OB$ (bán kính của (O)) nên OC là đường trung trực của đoạn thẳng BF.

Câu 48. *(Trường chuyên thành phố Hồ Chí Minh năm 2023-2024)*

1) Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* (*AB* < *AC*), có đường cao *AH*. Đường tròn tâm *I* nội tiếp tam giác *ABC*, tiếp xúc với các cạnh *BC, CA, AB* lần lượt tại *D, E, F*. Gọi J là giao điểm của Ai và *DE*; *K* là trung điểm của *AB*.

a) Chứng minh tứ giác *BIJD* nội tiếp.

b) Gọi *M* là giao điểm của *KI* và *AC*, *N* là giao điểm của *AH* và *ED*. Chứng minh $AM = AN$

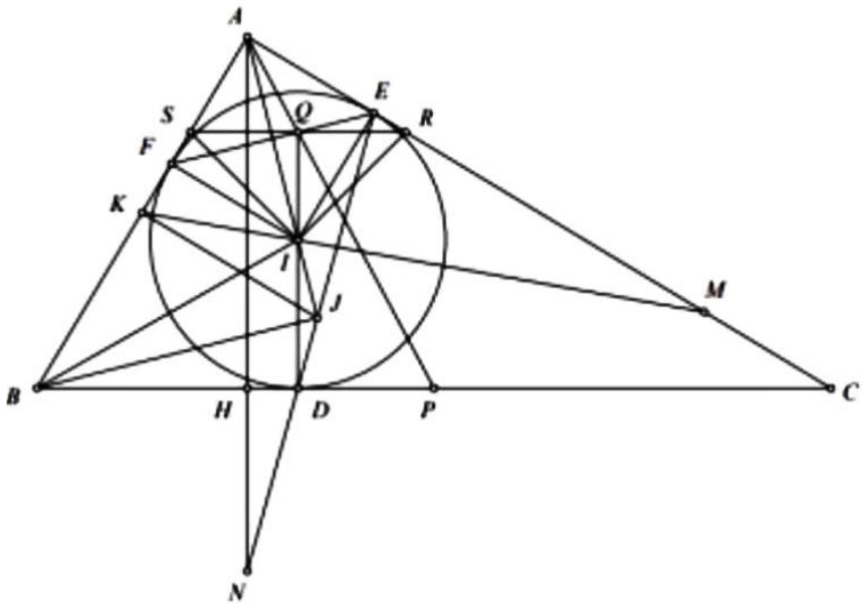
c) Gọi *Q* là giao điểm của *DI* và *EF*, *P* là trung điểm của *BC*. Chứng minh ba điểm *A*, *P*, *Q* thẳng hàng.

2) Cho đường tròn tâm *O* nội tiếp hình thoi *ABCD*. Gọi *E*, *F*, *G*, *H* là các điểm lần lượt thuộc các cạnh *AB*, *BC*, *CD*, *DA* sao cho *EF*, *GH* cùng tiếp xúc với (*O*).

a) Chứng minh $CG.AH = AO^2$.

b) Chứng minh *EH* song song *FG*.

Lời giải



a) Ta có $CD = CE$ nên tam giác CDE cân tại *C*. Suy ra $\widehat{CDE} = \widehat{CED} = \dfrac{180^0 - \widehat{ACB}}{2}$.

Áp dụng tính chất góc ngoài trong tam giác *AJE*, ta thấy

$\widehat{AJE} = \widehat{CEJ} = \widehat{EAJ} = \dfrac{180^0 - \widehat{ACB}}{2} - \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2} = \widehat{IBD}$. Suy ra tứ giác *BIJD* nội tiếp.

b) Do tứ giác *BIJD* nội tiếp nên $\widehat{BJI} = \widehat{BDI} = 90^0$.

Vì $\widehat{AJB} = 90^0$ và $\widehat{JAB} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = 45^0$ nên tam giác *JAB* vuông cân tại *J*. Theo giả thiết *K* là trung điểm của *AB*, ta có $JK \perp AB$

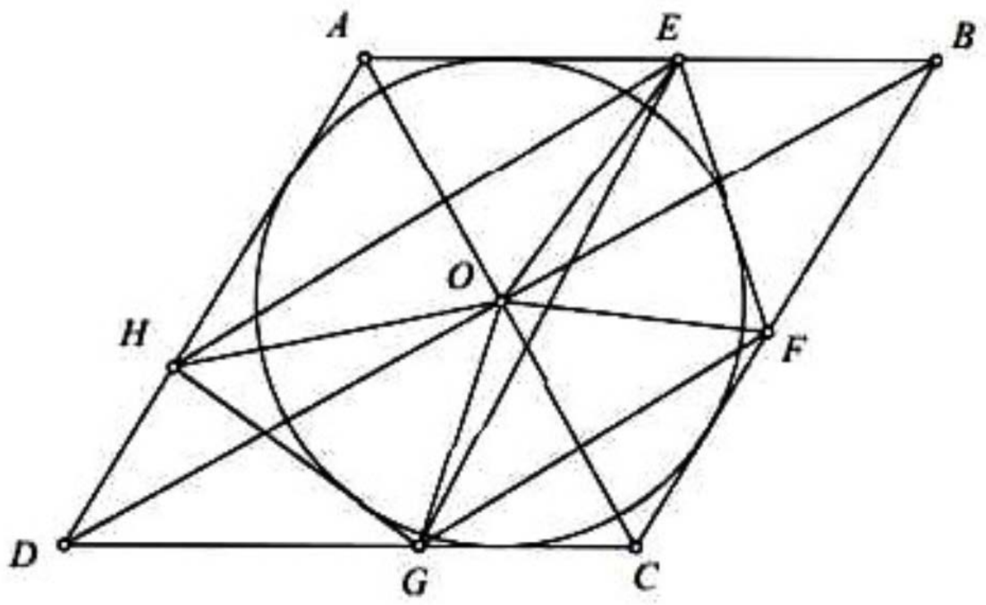
Chú ý rằng $IF \parallel AM \parallel JK$ (cùng vuông góc với *AB*) và $ID \parallel AH$ (cùng vuông góc với BC), ta có

$\dfrac{IF}{AM} = \dfrac{KI}{KM} = \dfrac{JI}{JA} = \dfrac{ID}{AN}$. Vì $IF = ID$ nên $AM = AN$.

c) Đường thẳng qua *Q* vuông góc với *ID* cắt *AC*, *AB* lần lượt lại *R*, *S*.

Vì $\widehat{IQR}=\widehat{IQS}=\widehat{IER}=\widehat{IFS}=90^0$ nên các tứ giác *IQER*, IQ*SR* nội tiếp. Chú ý rằng tam giác *IEF* cân tại *I*, ta có $\widehat{IRQ}=\widehat{IEQ}=\widehat{IFQ}=\widehat{ISQ}$. Suy ra, tam giác *IRS* cân tại *I*. Do $IQ\perp RS$ nên *Q* là trung điểm của *RS*.

Ta có $RS \parallel BC$ (cùng vuông góc với *ID*) và *P*, *Q* lần lượt là trung điểm của *BC*, *RS* nên *A*, *P*, *Q* thẳng hàng (theo bổ đề hình thang).



a) Đường tròn (*O*) tiếp xúc với các cạnh của hình thoi *ABCD* nên *O* là trung điểm của hai đường chéo *AC* và *BD*.

Ta thấy *O* là tâm đường tròn bàng tiếp góc *D* của tam giác *DGH*. Suy ra $\widehat{GOH}=180^0-\widehat{OGH}-\widehat{OHG}$ $=180^0-\dfrac{180^0-\widehat{DGH}}{2}-\dfrac{180^0-\widehat{DHG}}{2}=\dfrac{\widehat{DHG}+\widehat{DGH}}{2}=\dfrac{180^0-\widehat{GDH}}{2}$.

Do tam giác DAC cân tại *D* nên $\widehat{DAC}=\widehat{DCA}=\dfrac{180^0-\widehat{ADC}}{2}$. Kết hợp hai điều trên, ta thấy

$$\widehat{GOH}=\widehat{DAC}=\widehat{DCA}.$$

Từ đó $\widehat{COG}=180^0-\widehat{GOH}-\widehat{AOH}=180^0-\widehat{OAH}-\widehat{AOH}=\widehat{AHO}$.

Suy ra hai tam giác *OAH* và *GCO* đồng dạng góc-góc. Vì thế, $\dfrac{OA}{GC}=\dfrac{AH}{CO}$.

Suy ra $AH.CG=OA.OC=OA^2$.

b) Chứng minh tương tự ý trên, ta có $AE.CF=OA^2=AH.CG$. Suy ra $\dfrac{AE}{CK}=\dfrac{AH}{CF}$. Chú ý rằng $\widehat{EAH}=\widehat{GCF}$, ta thu được hai tam giác *AEH* và *CGF* đồng dạng cạnh-góc-cạnh. Suy ra $\widehat{AEH}=\widehat{CGF}$. Lại có $\widehat{AEG}=\widehat{CGE}$ (do $AB \parallel CD$). Suy ra $\widehat{HEG}=\widehat{FGE}$.

Vậy $EH \parallel FG$ (đpcm).

Câu 49. *(Trường chuyên tỉnh Tuyên Quang năm 2023-2024)*

Cho tam giác tù ABC có $\widehat{ABC} > 90^\circ$ nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại C của (O) cắt đường thẳng AB tại S. Lấy điểm P thuộc miền trong tam giác OAC sao cho $SC = SP$. Đường thẳng SP cắt (O) tại hai điểm $E, F(E$ ở giữa S và $F)$. Các đường thẳng AP, BP cắt lại (O) lần lượt tại K, L. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ACS đồng dạng với tam giác CBS;

b) $\widehat{APS} = \widehat{PBS}$;

c) Tứ giác $EKLF$ là hình thang cân.

Lời giải

Câu 50. *(Trường chuyên tỉnh Vĩnh Long năm 2023-2024)*

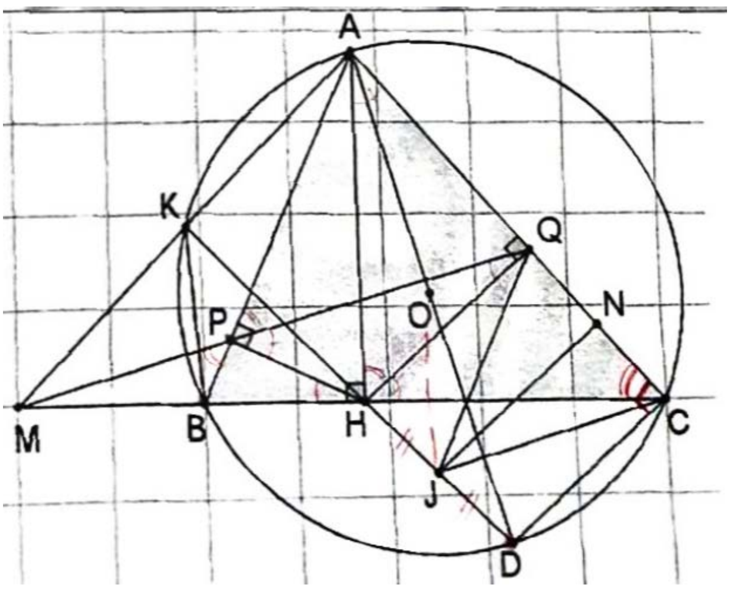
Cho tam giác nhọn *ABC* (*AB* < *AC*) nội tiếp đường tròn (*O*). Kẻ đường cao *AH* của tam giác *ABC* (*H* thuộc BC). Gọi *P, Q* lần lượt là chân của đường vuông góc kẻ từ *H* đến các cạnh *AB, AC.*

a) Chứng minh $\widehat{PQH} = \widehat{BAH}$.

b) Hai đường thẳng *PQ* và *BC* cắt nhau tại *M*. Chứng minh $\Delta MQH \backsim \Delta MHP$ và $MH^2 = MB.MC$

c) Đường thẳng *MA* cắt đường tròn (*O*) tại *K* (*K* khác *A*). *KH* cắt đường tròn (*O*) tại *D* (*D* khác *K*). Gọi *J* là trung điểm của *HD*. Chứng minh $JQ = JC$

Lời giải



a) Tứ giác APHQ có

$\widehat{APH} = 90^0$ (gt)

$\widehat{AQH}=90^0$ (gt)

=> $\widehat{APH}+\widehat{AQH}=180^0$ và hai góc này ở vị trí đối nhau nên APHQ là tứ giác nội tiếp được đường tròn

=> $\widehat{PQH}=\widehat{BAH}$

b) Xét $\triangle MQH$ và $\triangle MHP$ có

$\widehat{PQH}=\widehat{BHA}$ (cmt), mà $\widehat{BAH}=\widehat{BHP}$ (cùng phụ $\widehat{PBH}$) suy ra $\widehat{MQH}=\widehat{MHP}$

$\widehat{PMH}$ là góc chung $\Rightarrow \triangle MQH \backsim \triangle MHP$

Chứng minh được tứ giác BPQC là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MBP}=\widehat{MQC}$ (cùng bù $\widehat{PBC}$)

Ta lại có $\widehat{BMP}$ là góc chung

$\Rightarrow \triangle MBP \backsim \triangle MQC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MB}{MQ}=\dfrac{MP}{MC} \Leftrightarrow MH^2=MP.MQ$ (1)

$\triangle MQH \backsim \triangle MHP$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MQ}{MH}=\dfrac{MH}{MP} \Leftrightarrow MH^2=MP.MQ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MH^2=MB.MC$.

c) Vì AKBC là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{MKB}=\widehat{MCA}$ (cùng bù với $\widehat{AKB}$), mà $\widehat{AMC}$ là góc chung

$$\Rightarrow \triangle MKB \backsim \triangle MCA \Rightarrow \frac{MK}{MC}=\frac{MB}{MA} \Rightarrow MK.MA=MB.MC$$

Mà $MH^2=MB.MC \Rightarrow MH^2=MB.MC \Rightarrow MH^2=MK.MA$.

Do $\triangle AHM$ vuông tại H $\Rightarrow HK$ là đường cao của tam giác AHM (vì $\triangle MHA \backsim \triangle MKH$

$\Rightarrow AK \perp KH \Rightarrow AK \perp KD$ suy ra AD là đường kính của (O).

Suy ra $\widehat{ACD}=90^0$ nên $DC \perp AC$

Mà $HQ \perp AC \Rightarrow DC//HQ$ nên $HQCD$ là hình thang.

Gọi N là trung điểm của QC (3) $\Rightarrow JN$ là đường trung bình của hình thang $HQCD$

$\Rightarrow JN//HQ \Rightarrow JN \perp QC$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow JN$ là đường trung trực của $QC \Rightarrow JQ=JC$

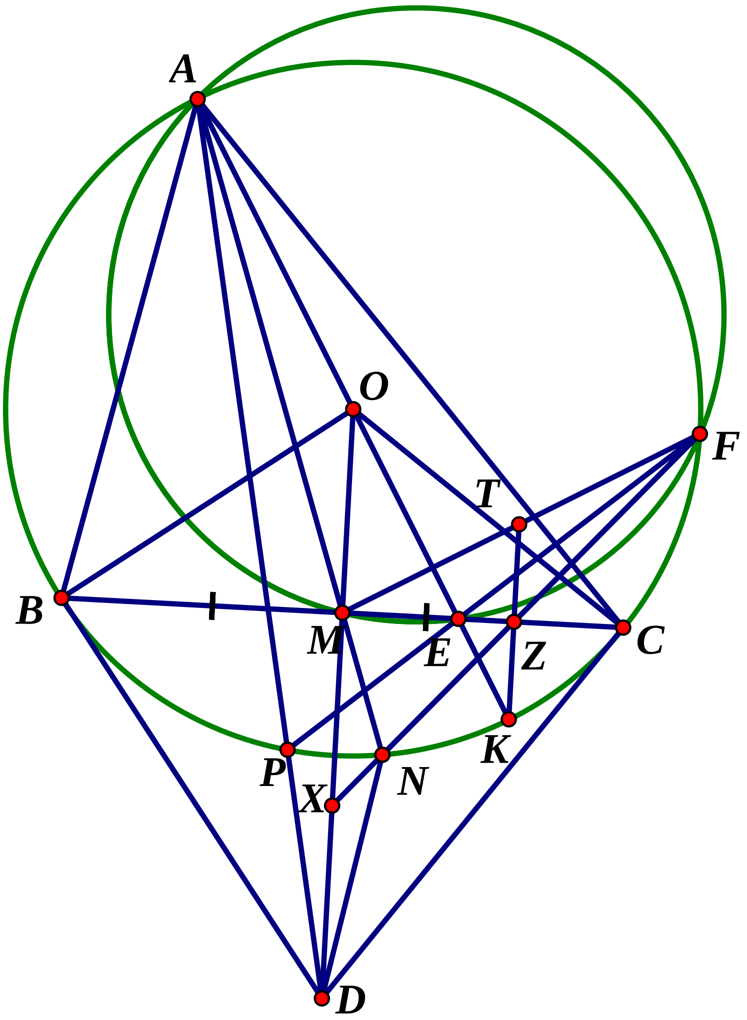
Câu 51. *(Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm 2023-2024)*

Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn, $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn *(O)*. Đường thẳng *AO* cắt đường thẳng *BC* tại điểm *E*. Gọi *M* là trung điểm của đoạn thẳng *BC*. Đường thẳng *AM* cắt đường tròn *(O)* tại điểm *N* $(N \neq A)$. Các tiếp tuyến của đường tròn *(O)* tại điểm *B*, *C* cắt nhau tại điểm *D*.

1. Chứng minh *AOND* là tứ giác nội tiếp và tia *DO* là phân giác của góc $\widehat{ADN}$.

2. Đường thẳng *AD* cắt đường tròn *(O)* tại điểm *P* $(P \neq A)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *AME* cắt đường tròn *(O)* tại điểm *F* $(F \neq A)$. Chứng minh $AB.PC = AC.PB$ và ba điểm *E, F, P* thẳng hàng.
3. Kẻ đường kính *AK* của đường tròn *(O)*. Chứng minh 3 điểm *D, K, F* thẳng hàng và đường thẳng *FN* đi qua trung điểm của đoạn thẳng *DM*.

Lời giải



1. Xét đường tròn (O): $BD \perp BO, CD \perp CO$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{DBO} = \widehat{DCO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DBO} + \widehat{DCO} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác OBDC nội tiếp

Lại có $OB = OC, MB = MC, DB = DC$

$\Rightarrow O, M, D$ cùng thuộc trung trực của đoạn BC

Suy ra $MO.MD = MB.MC$

Mà tứ giác ABNC nội tiếp $\Rightarrow MB.MC = MA.MN$

$\Rightarrow MO.MD = MA.MN$ $\Rightarrow$ Tứ giác AOND nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ADO} = \frac{1}{2} sđ \overset{\frown}{OA} = \frac{1}{2} sđ \overset{\frown}{ON} = \widehat{ODN}$

$\Rightarrow DO$ là phân giác $\widehat{ADN}$

b) Xét ΔDBP và ΔDAB có

$\widehat{BDP}$ chung; $\widehat{DBP} = \widehat{DAB}$

$\Rightarrow \Delta DBP \sim \Delta DAB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{BP} = \frac{AD}{DB}$

Tương tự ta có $\Delta DCP \sim \Delta DAC \Rightarrow \frac{AC}{CP} = \frac{AD}{DC}$

$\Rightarrow \frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CP} \Rightarrow AB.CP = AC.BP$

Áp dụng định lý Ptoleney cho tứ giác ABPC nội tiếp ta có

$$AP.BC = AB:CP + AC.BP$$

$\Rightarrow 2AP.CM = 2AC.BP \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{BP}{CM}$

ΔABP và ΔAMC có $\frac{AP}{AC} = \frac{BP}{CM}$; $\widehat{APB} = \widehat{ACM}$

$\Rightarrow \Delta ABP \sim \Delta AMC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{AMC}$

Lại có tứ giác ABPF nội tiếp nên $\widehat{ABP} = 180^\circ - \widehat{AFP}$

Lại có tứ giác AMEF nội tiếp nên $\widehat{AME} = 180^\circ - \widehat{AFB}$

$\Rightarrow \widehat{AFP} = \widehat{AFE} \Rightarrow E, F, P$ thẳng hàng

c) Áp dụng hệ thức lượng cho ΔOCD vuông tại C ta có

$$OM.OD = OC^2 = OF^2 \Rightarrow \frac{OF}{OM} = \frac{OD}{OF} \Rightarrow \Delta OMF \sim \Delta OFD \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{OFD} = \widehat{OMF} = 90^\circ - \widehat{CMF} = 90^\circ - \widehat{FAE} = 90^\circ - \widehat{AFO}$$

$\Rightarrow AFD = 90^\circ \Rightarrow AF \perp FD$ mà $AF \perp FK$

$\Rightarrow DF = DK \Rightarrow D, F, K$ thẳng hàng

Gọi Z, X là giao FN với BC, DM.

Gọi T là giao KZ với MF.

Ta có $DC^2 = DK.DF = DM.DO \Rightarrow$ Tứ giác OMKF nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{KMF} = \widehat{KOF} = 2\widehat{OAF} = 2\widehat{FMS}$$

$\Rightarrow \widehat{KME} = \widehat{FME} = \widehat{FAO} = \widehat{KNF} \Rightarrow$ Tứ giác MNKZ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{KZM} = 180^\circ - \widehat{MNK} = 90^\circ \Rightarrow KZ \parallel DM$$

Lại có ΔTMK có MZ là đường cao đồng thời là phân giác

$\Rightarrow ZT = ZK$

Do $TK // DM \Rightarrow \frac{ZT}{MX} = \frac{FZ}{FX} = \frac{ZK}{DX}$

$\Rightarrow XD = XM \Rightarrow$ X là trung điểm của đoạn DM.

Vậy FN đi qua trung điểm của đoạn DM

Câu 52. *(Trường chuyên Khoa học Tự nhiên năm 2023-2024)*

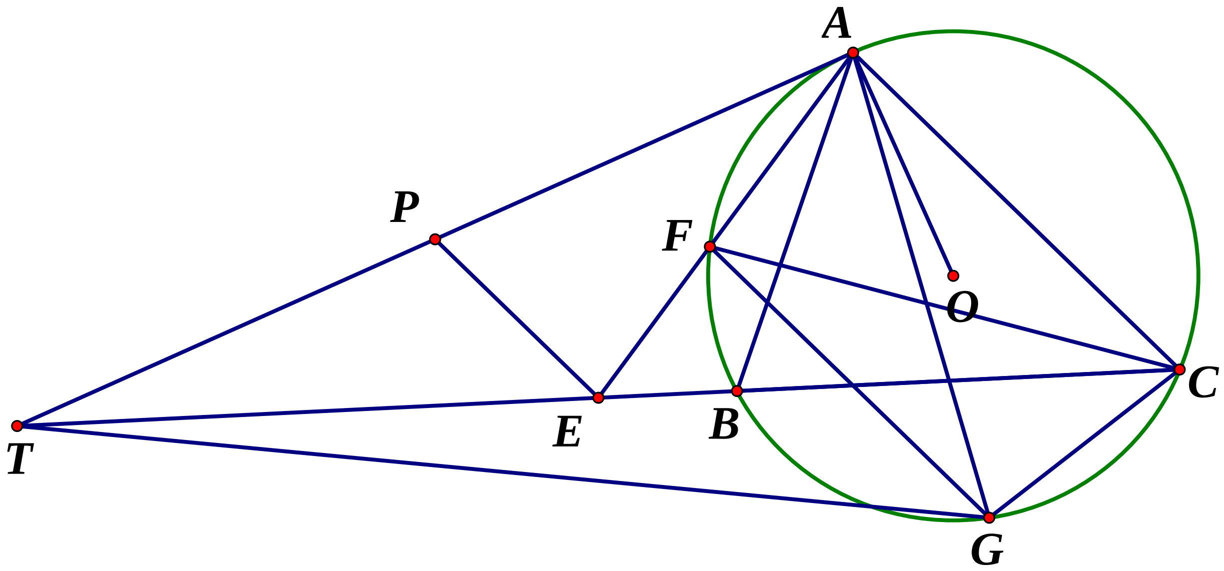
Cho tam giác ABC nhọn với AB < AC nội tiếp trong đường tròn (O) có tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC ở T sao cho TB > BC Gọi P và E lần lượt là trung điểm của TA và TC.

1) Chứng minh rằng tứ giác APEB nội tiếp.

2) Gọi giao điểm thứ hai của AE với (O) là F. Lấy G thuộc (O) sao cho FG song song với AC. Chứng minh rằng $\widehat{ATG} = \widehat{TAF}$.

3) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC,D là giao điểm của AH và BC. M là trung điểm BC. K đối xứng với A qua BC. N thuộc đường thẳng AM sao cho KN song song với HM. Lấy S thuộc BC sao cho NS $\perp$ NK . Dựng R thuộc tia AK sao cho AR.AH = AD^2. Q là điểm sao cho PQ $\perp$ AS và SQ $\perp$ AO . Chứng minh rằng điểm đối xứng của A qua QR thuộc đường tròn đường kinh DN.

Lời giải



1) Vì AT là tiếp tuyến của nên ta được $TA^2 = TB.TC$. Như vậy, ta được

$TP.TA = \frac{1}{2}TA^2 = \frac{1}{2}TB.TC = TB.TE$ và vì tứ giác APEB là tứ giác nội tiếp.

2) Vì EP là đường trung bình của Δ TAC, Δ FGC là hình thang cân và AT là tiếp tuyến của (O) nên ta thu được $\widehat{AEP} = \widehat{EAC} = \widehat{FAC} = \widehat{GCA} = \widehat{TAG}$ và $\widehat{GAC} = \widehat{FCA} = \widehat{TAF} = \widehat{PAE}$. Như vậy, ta được Δ AEP $\sim\Delta$ ACG (g-g) và dẫn đến $\frac{AE}{AC} = \frac{AP}{AG}$. Lại chú ý $AT = 2AP$ và $AC = 2EP$, ta thu được $\frac{AE}{EP} = \frac{2AE}{AC} = \frac{2AP}{AG} = \frac{AT}{AG}$. Kết hợp với $\widehat{AEP} = \widehat{TAG}$ ta thu được $\Delta AEP \sim \Delta TAG$ (C.G.C) và vì thế $\widehat{ATG} = \widehat{TAF}$.

3) ta xét bổ đề sau:

ΔABC, đường thẳng qua B vuông AC cắt AC,(ABC) tại F,D. E thuộc (ABC) thoả DE//AC. Đường thẳng qua E vuông EF cắt BF tại G, đg thẳng qua B vuông AG cắt đường thẳng qua C vuông AD tại H, L trung điểm AH. CMR AEL = 90

Giải: BH giao EG tại J khi đó J thuộc (BFE). Mặt khác gọi K trung điểm BC thì F,K,J thẳng do BFK = ABE = BEJ = BFJ. Mà do FK vuông AD vuông CH nên J là trung điểm BH => JL // AB nên L thuộc EG => đpcm

Quay lại bài toán: Dựng hbh DKNG, DS' là đg kính của (ADG) khi đó KS'D = AS'D = AGD = DNK => S trùng S'. NG giao BC tại F, NE vuông AD tại E. Khi đó A,F,E,G cùng thuộc 1 đg tròn (EF = DN = AG)

• Đường thẳng qua E vuông AF cắt đg thẳng qua T vuông AS tại J. Khi đó theo bổ đề, trung điểm Q' của AJ thuộc SG (để ý T thuộc (AFGE)). Mà Q'P vuông AS => Q' trùng Q. Hơn nữa biến đổi tỉ số cho ta R là trung điểm AE nên QR // JE vuông AF kết hợp thêm nếu cho JE cắt AF tại A' thì A' thuộc (EF) hay A' thuộc (DN) nên ta có đpcm

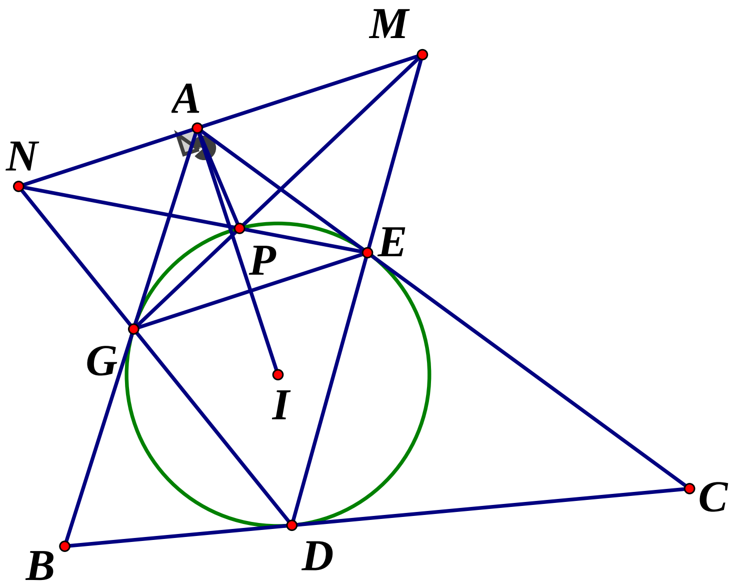
Câu 53. *(Trường chuyên Sư Phạm vòng 2 năm 2023-2024)*

Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC lần lượt tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại các điểm D, E, G.Hai đường thẳng DE, DG lần lượt cắt đường phân giác ngoài góc BAC tại M, N Hai đường thẳng MG, NE cắt nhau tại điểm P. Chứng minh rằng:

a) EG song song với MN.

b) Điểm P thuộc đường tròn (I).

Lời giải.



a) Vì AM là phân giác ngoài $\widehat{BAC}$. AI là phân giác trong góc A nên AI $\perp$ AM mà GE // AI nên EG // AM hay GE // MN . Bài toán được chứng minh.

b) Gọi P_1 là giao của NE và đường tròn (I) thì từ EG // MN, ta có:

$$\widehat{ANP_1} = \widehat{ANE} = \widehat{P_1EG} = \widehat{P_1GA}$$

Do đó tứ giác ANGP, nội tiếp kết hợp với tứ giác DGP_1E nội tiếp, ta có

$$\widehat{P_1EM} = \widehat{P_1GD} = \widehat{NAP_1} = 180° - \widehat{P_1GA}$$

Suy ra tứ giác MAP_1E nội tiếp kết hợp với EG // MN và tứ giác ANGP_1 nội tiếp, ta có:

$$\widehat{GP_1M} = \widehat{AP_1M} + \widehat{AP_1G} = \widehat{AEM} + \widehat{AP_1G} = \widehat{DGE} + \widehat{AP_1G} = \widehat{GNA} + \widehat{AP_1G} = 180°$$

Do đó ta được 3 điểm G, P_1, M thẳng hàng. Vì vậy nên P_1 trùng P. Nói cách khác MG, NE cắt nhau tại 1 điểm P nằm trên (I). Bài toán được chứng minh.

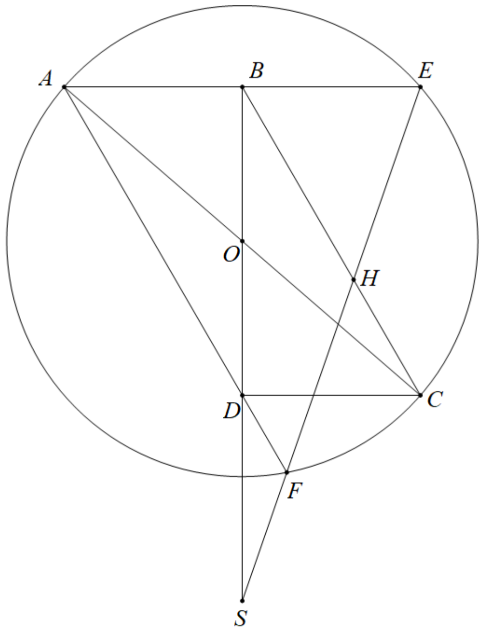
Câu 54. *(Trường chuyên Sư Phạm vòng 1 năm 2023-2024)*

Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{ABC} = 120^0$ và $BC = 2AB$.Dựng đường tròn (O) có đường kính AC. Gọi $\{E\} = AB \cap (O); \{F\} = AD \cap (O)$. Gọi EF cắt BC, BD lần lượt tại H, S .Chứng minh rằng:

a) ΔABD là tam giác vuông.

b) Tứ giác $OBEH$ nội tiếp.

c) SC là tiếp tuyến của (O).



a) Đặt $AB = a, BC = 2a$ .Vì $\widehat{ABC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{BAD} = 60^0$.

Áp dụng định lí cosin vào ΔABD ta có:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2.AB.AD.\cos BAD$

$= a^2 + 4a^2 - 2.2a.a.\cos 60$

$= 5a^2 - 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow BD^2 + AB^2 = AD^2$

Do đó ΔABD là tam giác vuông theo định lí Pytago đảo.

b) Vì ΔABD là tam giác vuông nên $OB \perp AE$ nên B là trung điểm của AE.

Mặt khác $BH // AF$ nên theo tính chất đường trung bình ta có H là trung điểm của EF

$\Rightarrow \widehat{OHF} = 90^0 = \widehat{OBE} \Rightarrow OBEH$ nội tiếp (ĐPCM).

c) Ta có: $\widehat{CHS} = \widehat{BHE}$. Vì OBEH nội tiếp nên $\widehat{BHE} = \widehat{BOE} = \widehat{BOA} = \widehat{COS}$

$\Rightarrow$ OHCS nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{SCO} = \widehat{SHO} = 90^0$ .Từ đây ta có SC là tiếp tuyến của (O) (ĐPCM).