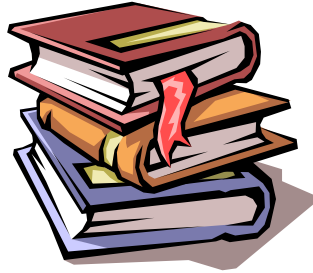


Tailieumontoan.com



[Điện thoại \(Zalo\) 039.373.2038](tel:039.373.2038)



**TÁCH ĐỀ TUYỂN SINH
VÀO LỚP 10 TOÁN 2023-2024**

[\(Liên hệ tài liệu word môn toán SĐT \(zalo\) : 039.373.2038\)](tel:039.373.2038)



Tài liệu sưu tầm, ngày 23 tháng 6 năm 2023



MỤC LỤC

1. Các bài toán về căn thức
2. Các bài toán về hàm số
3. Phương trình, hệ phương trình
4. Bất đẳng thức, cực trị
5. Giải bài toán bằng cách lập phương trình
6. Hệ thức lượng trong tam giác vuông
7. Các bài toán về đường tròn
8. Các bài toán hình học không gian (hình nón, trụ, cầu)





CHỦ ĐỀ 1. CÁC BÀI TOÁN CHỨA CĂN THỨC

Câu 1. (An Giang 2023 - 2024)

Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

$$\frac{2}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}x = 4.$$

Lời giải

$$\frac{2}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}x = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}x = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x + \sqrt{2}x = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \sqrt{2}$

Câu 2. (Vũng Tàu 2023 - 2024)

Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{20} - 3\sqrt{45} + \frac{\sqrt{55}}{\sqrt{11}}$

Lời giải

$$\text{Ta có } x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - x = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1$ và $x=4$.

Câu 3. (Bắc Giang 2023 - 2024)

Rút gọn biểu thức $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{1-x} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

Lời giải



Rút gọn biểu thức $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{1-x} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

$$Q = \left[\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right] : \left[\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right]$$

$$Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}-1+2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot (\sqrt{x}-1)$$

$$Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

Vậy với $x > 0$ và $x \neq 1$ thì $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

Câu 4. (Bắc Ninh 2023 - 2024)

Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{x}{4-x} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0$; $x \neq 4$.

Với $x \geq 0$; $x \neq 4$. Ta có:

Lời giải

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{x}{4-x} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right) \cdot (\sqrt{x}-2)$$

$$A = \frac{\sqrt{x}+2+\sqrt{x}-2+x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot (\sqrt{x}-2)$$



$$A = \frac{x + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+2})}{\sqrt{x+2}} = \sqrt{x}$$

Vậy với $x \geq 0$; $x \neq 4$ thì $A = \sqrt{x}$.

Câu 5. (Bến Tre 2023 - 2024)

Rút gọn biểu thức: $A = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} : \frac{1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

Lời giải

$$A = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} : \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}} \cdot \sqrt{x} = x$$

Vậy $A = x$ với $x > 0$ và $x \neq 1$

Câu 6. (Bình Định 2023 - 2024)

Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x-4}} - \frac{4x+32}{x-16}$; $x \geq 0, x \neq 16$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị lớn nhất của P.

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x-4}} - \frac{4x+32}{x-16} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-4})}{(\sqrt{x+4})(\sqrt{x-4})} + \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x+4})}{(\sqrt{x+4})(\sqrt{x-4})} - \frac{4x+32}{(\sqrt{x+4})(\sqrt{x-4})} \\ &= \frac{x-4\sqrt{x}+3x+12\sqrt{x}-4x-32}{(\sqrt{x+4})(\sqrt{x-4})} = \frac{8\sqrt{x}-32}{(\sqrt{x+4})(\sqrt{x-4})} = \frac{8(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x+4})(\sqrt{x-4})} = \frac{8}{\sqrt{x+4}} \end{aligned}$$

b) Với $x \geq 0; x \neq 16$ ta có: $\sqrt{x+4} \geq 4$. Suy ra: $P = \frac{8}{\sqrt{x+4}} \leq \frac{8}{4} = 2$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$. Vậy GTLN của P là 2 khi $x = 0$

Câu 7. (Bình Phước 2023 - 2024)

1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$A = \sqrt{16} + \sqrt{9} \quad B = \sqrt{7} + \sqrt{(4 - \sqrt{7})^2}$$

Lời giải



$$A = 4 + 3 = 7$$

$$B = \sqrt{7} + 4 - \sqrt{7} = 4$$

2. Cho biểu thức $P = \frac{x-9}{\sqrt{x+3}} + \sqrt{x} + 2$ với $x \geq 0$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 4$

Lời giải

$$\text{a) } P = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}+3} + \sqrt{x} + 2 = \sqrt{x} - 3 + \sqrt{x} + 2 = 2\sqrt{x} - 1$$

$$\text{b) } x = 4 \Rightarrow P = 2\sqrt{4} - 1 = 3$$

Câu 8. (Bình Thuận 2023 - 2024)

Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = (\sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{48})\sqrt{3}$$

$$\text{b) } B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}} \quad \text{với } 0 < x \text{ và } x \neq 1.$$

Lời giải

$$\text{a) } A = (\sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{48})\sqrt{3}$$

$$A = (\sqrt{9 \cdot 3} - \sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{16 \cdot 3})\sqrt{3}$$

$$A = (3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3})\sqrt{3}$$

$$A = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$A = 15$$

$$\text{b) } B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}} \quad \text{với } 0 < x \text{ và } x \neq 1.$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}}$$



$$B = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$B = 3$$

Câu 9. (Cần Thơ 2023 - 2024)

a) Rút gọn biểu thức $Q = \frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{8}}{\sqrt{6}} - (\sqrt{3} - 1)^2$.

Lời giải

$$Q = \frac{\sqrt{6}(1 - 2\sqrt{3})}{\sqrt{6}} - (\sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} + 1)$$

$$Q = 1 - 2\sqrt{3} - (4 - 2\sqrt{3})$$

Câu 10. (Cao Bằng 2023 - 2024)

Thực hiện phép tính: $11 - 2\sqrt{16}$

Lời giải

$$11 - 2\sqrt{16} = 11 - 2\sqrt{4^2} = 11 - 2 \cdot 4 = 3$$

Câu 11. (Đà Nẵng 2023 - 2024)

a) Tính $A = \sqrt{4} + \sqrt{20} - \sqrt{5} - 2$.

b) Cho biểu thức $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$. Rút gọn biểu thức B và so sánh giá trị của B với 1

Lời giải

a) Tính $A = \sqrt{4} + \sqrt{20} - \sqrt{5} - 2$

Ta có:



$$\begin{aligned} A &= \sqrt{4} + \sqrt{20} - \sqrt{5} - 2 = \sqrt{2^2} + \sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{5} - 2 \\ &= 2 + 2\sqrt{5} - \sqrt{5} - 2 = (2-2) + (2\sqrt{5} - \sqrt{5}) = \sqrt{5} \end{aligned}$$

Vậy $A = \sqrt{5}$.

b) Cho biểu thức $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2}$ với $x > 0, x \neq 1$. Rút gọn biểu thức B và so sánh giá trị của B với 1.

Điều kiện xác định: $x > 0, x \neq 1$.

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2} \\ B &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2} \\ B &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Ta có: $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1; \forall x > 0, x \neq 1$.

Vậy với $x > 0, x \neq 1$ thì $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} > 1$.

Câu 12. (Đăk Lăk 2023 - 2024).

a) Rút gọn biểu thức: $E = 3\sqrt{5} - \sqrt{20} + \sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có: $E = 3\sqrt{5} - \sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5}$
 $= 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = (3-2+1)\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

Câu 13. (Đăk Lăk 2023 - 2024).

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq 0$.

Lời giải

Ta có: $A = \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right)$



$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)^2 \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2 - (\sqrt{x}+1)^2}{x-1} \\
 &= \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)^2 \cdot \frac{-4\sqrt{x}}{x-1} \\
 &= \frac{1-x}{\sqrt{x}}.
 \end{aligned}$$

b) Ta có $A = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$

Vì $x > 0$ nên $A \geq 0 \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

Kết hợp điều kiện ta có $0 < x < 1$

Câu 14. (Đồng Nai 2023 - 2024)

Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} - \frac{1}{3}\sqrt{18}$.

Lời giải

Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} - \frac{1}{3}\sqrt{18}$.

$$A = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} - \frac{1}{3}\sqrt{18} = |\sqrt{2}-1| - \frac{1}{3}\sqrt{9 \cdot 2}$$

$$= \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}$$

$$= -1.$$

Câu 15. (Đồng Tháp 2023 - 2024)

a) Tính giá trị của biểu thức $A = 2\sqrt{81} - \sqrt{25}$.

b) Rút gọn biểu thức $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

Lời giải

a) Tính giá trị của biểu thức $A = 2\sqrt{81} - \sqrt{25}$.

$$A = 2\sqrt{9^2} - \sqrt{5^2}$$

$$A = 2 \cdot 9 - 5$$



$$A = 18 - 5$$

$$A = 13$$

b) Rút gọn biểu thức: $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

$$B = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{2}{x-1}$$

Câu 16. (Hà Nam 2023 - 2024)

1. Rút gọn biểu thức $A = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{27} + 7\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

2. Cho biểu thức $P = \frac{1}{2\sqrt{x}-4} - \frac{1}{2\sqrt{x}+4} + \frac{\sqrt{x}}{x-4}$ (với $x \geq 0, x \neq 4$).

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các số nguyên x để P đạt giá trị nguyên.

Lời giải

1. Rút gọn biểu thức $A = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{27} + 7\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

$$A = 2\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 7\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$$

$$A = 2\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 7(2+\sqrt{3})$$

$$A = 14$$

2. Cho biểu thức $P = \frac{1}{2\sqrt{x}-4} - \frac{1}{2\sqrt{x}+4} + \frac{\sqrt{x}}{x-4}$ (với $x \geq 0, x \neq 4$).

a) Rút gọn biểu thức P .



$$P = \frac{8}{4x-16} + \frac{\sqrt{x}}{x-4}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+2}{x-4} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

b) Tìm tất cả các số nguyên x để P đạt giá trị nguyên.

$$P \text{ đạt giá trị nguyên} \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 = \pm 1$$

$$\sqrt{x}-2=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=9 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x \geq 0, x \neq 4 \text{)}.$$

$$\sqrt{x}-2=-1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x \geq 0, x \neq 4 \text{)}.$$

Câu 17. (Hà Nội 2023 - 2024)

Cho hai biểu thức : $A = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} + \frac{3-\sqrt{x}}{x-1}$ với $x > 0; x \neq 1$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$

2) Chứng minh $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $A.B = 4$

Câu 18. (Hà Nội 2023 - 2024). Cho hai biểu thức $A = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} + \frac{3-\sqrt{x}}{x-1}$ với

$x > 0, x \neq 1$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$

b) Chứng minh $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

c) Tìm các giá trị của x để $A.B = 4$

Lời giải

a) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{9+2}{\sqrt{9}} \Rightarrow A = \frac{9+2}{3} = \frac{11}{3}$$

Vậy khi $x = 9$ thì $A = \frac{11}{3}$

b) Với $x > 0, x \neq 1$. ta có: $B = \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} + \frac{3-\sqrt{x}}{x-1}$



$$\begin{aligned}
&= \frac{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{3-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{2x+2\sqrt{x}-3\sqrt{x}-3+3-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{2x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}
\end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ (đpcm)

c) với $x > 0, x \neq 1$. ta có: $A.B = \frac{x+2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{2x+4}{\sqrt{x}+1}$

đề $A.B = 4 \Leftrightarrow \frac{2x+4}{\sqrt{x}+1} = 4 \Leftrightarrow \frac{2x+4}{\sqrt{x}+1} = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}$

$\Rightarrow 2x+4 = 4\sqrt{x}+4 \Leftrightarrow 2x-4\sqrt{x} = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x}-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

Đối chiếu với điều kiện ta được $x = 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 19. (Hà Tĩnh 2023 2024) Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{50} - 3\sqrt{2}$.

b) $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ (với $x > 0; x \neq 1$).

Lời giải

a) $A = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$
 $= 2\sqrt{2}$

b)

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{2\sqrt{x}}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}} = 2
\end{aligned}$$

Câu 20. (Hải Dương 2023 - 2024)



Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

Lời giải

Với $x > 0, x \neq 1$ ta có $A = \sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x-2\sqrt{x}+1}$

$$A = \sqrt{x} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right] : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$A = \sqrt{x} \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$A = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}+1}$$

$$A = \sqrt{x}-1$$

Vậy $A = \sqrt{x}-1$ với $x > 0, x \neq 1$.

Câu 21. (Hải Phòng 2023 - 2024)

Cho các biểu thức:

$$A = 3\sqrt{8} - \sqrt{50} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2};$$

$$B = \left(\frac{3\sqrt{x}+6}{x-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9.$$

a) Rút gọn biểu thức A và B .

b) Tìm x sao cho $A - 2B = 3$.

Lời giải

$$A = 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - |\sqrt{2}-1|$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 \text{ (vì } \sqrt{2}-1 > 0) = 1$$

$$\text{a) } B = \left[\frac{3(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right] : \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-3}$$



$$= \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}.$$

b) Để $A-2B=3 \Leftrightarrow 1-\frac{2}{\sqrt{x}-2}=3 \Rightarrow \sqrt{x}-2-2=3\sqrt{x}-6 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1$

$\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn).

Vậy $x=1$ thì $A-2B=3$.

Câu 22. (Hòa Bình 2023 - 2024)

1. Tìm điều kiện của x để biểu thức $\sqrt{x-2}$ có nghĩa.

2. Tính giá trị biểu thức: $A = \sqrt{36} + \sqrt{9}$

Lời giải

1. $\sqrt{x-2}$ có nghĩa khi $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

2. $\sqrt{36} + \sqrt{9} = 6 + 3 = 9$

Câu 23. (Khánh Hòa 2023 - 2024) Không sử dụng máy tính cầm tay

Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{25} + \sqrt{16} - \sqrt{4}$.

Lời giải

a) $A = \sqrt{25} + \sqrt{16} - \sqrt{4} = 5 + 4 - 2 = 7$.

Câu 24. (Lạng Sơn 2023 - 2024)

a) Tính giá trị các biểu thức:

$$A = \sqrt{36} - \sqrt{4}; \quad B = \sqrt{(4 - \sqrt{15})^2} + \sqrt{15}; \quad C = \frac{\sqrt{12} + \sqrt{27}}{\sqrt{3}}$$

b) Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{x-9} \right) : \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

1) Rút gọn biểu thức P.

2) Tính giá trị của x để $P = \frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Tính giá trị các biểu thức:

$A = \sqrt{36} - \sqrt{4} = 6 - 2 = 4;$



$$B = \sqrt{(4 - \sqrt{15})^2} + \sqrt{15} = |4 - \sqrt{15}| + \sqrt{15} = 4 - \sqrt{15} + \sqrt{15} = 4;$$

$$C = \frac{\sqrt{12} + \sqrt{27}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{4.3} + \sqrt{9.3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5.$$

b) Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{1}{x - 9} \right) : \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

1) Rút gọn biểu thức P.

Với $x \geq 0, x \neq 9$. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{1}{x - 9} \right) : \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 3} = \left(\frac{(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} + \frac{1}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 4} \\ &= \frac{\sqrt{x} + 3 + 1}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 4} = \frac{\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 4} = \frac{1}{\sqrt{x} - 3}. \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 9$ thì $P = \frac{1}{\sqrt{x} - 3}$.

2) Tính giá trị của x để $P = \frac{1}{2}$.

Với $x \geq 0, x \neq 9$ để $P = \frac{1}{2}$ thì $\frac{1}{\sqrt{x} - 3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 = \sqrt{x} - 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 25$ (thỏa mãn 2023 - 2024)

Vậy $x = 25$ thì $P = \frac{1}{2}$.

Câu 1 (Lào Cai 2023 - 2024). Tính giá trị biểu thức sau:

a) $\frac{\sqrt{81}}{3}$; b) $\sqrt{16} - \sqrt{9}$

Lời giải

a) $\frac{\sqrt{81}}{3} = \frac{9}{3} = 3;$

b) $\sqrt{16} - \sqrt{9} = 4 - 3 = 1$



Câu 25. (Long An 2023 - 2024)

a. Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{50} + \sqrt{32} - 3\sqrt{18}$.

b. Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 2 \right) : \sqrt{x}$ với $x > 0$.

c. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3$.

Lời giải

a. Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{50} + \sqrt{32} - 3\sqrt{18}$.

$$= 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$$

$$= 0$$

b. Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 2 \right) : \sqrt{x}$ với $x > 0$.

$$= \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 2 \right) : \sqrt{x}$$

$$= (\sqrt{x} + 2 + \sqrt{x} - 2) : \sqrt{x}$$

$$= 2$$

c. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow |x-1| = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ x-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{-2; 4\}$.

Câu 26. (Nam Định 2023 - 2024)

a) Chứng minh đẳng thức $\sqrt{27} - 2\sqrt{12} + \sqrt{4-2\sqrt{3}} = -1$.



b) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{9 - \sqrt{x}}{x - 9} + \frac{2}{\sqrt{x} + 3} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

Lời giải

a)

$$\sqrt{27} - 2\sqrt{12} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$$

$$= -\sqrt{3} + |\sqrt{3} - 1| = -\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = -1.$$

Vậy $\sqrt{27} - 2\sqrt{12} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = -1$.

b)

ta có $A = \left(\frac{9 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} + \frac{2}{\sqrt{x} + 3} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$

$$= \frac{9 - \sqrt{x} + 2(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} = \frac{\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$$

$$= \frac{\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + 1}.$$

Vậy $A = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

Câu 27. (Nghệ An 2023 - 2024)

a) Tính $A = \sqrt{4} + \sqrt{49} + \sqrt{64}$

b) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{4x}{x - 1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$

c) Tìm giá trị của b để đường thẳng $y = 2x + b - 1$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1

Lời giải

a)



$$A = \sqrt{4} + \sqrt{49} + \sqrt{64}$$

$$A = 2 + 7 + 8$$

$$A = 17$$

$$b) \quad P = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{4x}{x-1} \quad (x > 0 \text{ và } x \neq 1 \text{ 2023 - 2024})$$

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{4x}{x-1}$$

$$P = \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{4x}{x-1}$$

$$P = 2\sqrt{x}$$

c) Vì đường thẳng $y = 2x + b - 1$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1

Nên thay $x = 1; y = 0$ vào $y = 2x + b - 1$ ta được $b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -1$

Vậy $b = -1$

Câu 28. (Ninh Thuận 2023 - 2024). Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-2} + \frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} + \frac{4-4\sqrt{a}}{a-4}$

a) Với giá trị nào của a thì biểu thức P có nghĩa.

b) Rút gọn biểu thức P .

Lời giải

$$a) \text{ ĐK: } \begin{cases} a \geq 0 \\ a-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 4 \end{cases}$$

$$b) \quad P = \frac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-2} + \frac{1-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} + \frac{4-4\sqrt{a}}{a-4}$$

$$= \frac{(\sqrt{a}+3) \cdot (\sqrt{a}+2) + (1-\sqrt{a}) \cdot (\sqrt{a}-2) + (4-4\sqrt{a})}{(\sqrt{a}-2) \cdot (\sqrt{a}+2)}$$

$$= \frac{a+2\sqrt{a}+3\sqrt{a}+6+\sqrt{a}-2-a+2\sqrt{a}+4-4\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-2) \cdot (\sqrt{a}+2)}$$



$$= \frac{4\sqrt{a} + 8}{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 2)}$$

$$= \frac{4(\sqrt{a} + 2)}{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 2)}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{a} - 2}$$

Vậy $P = \frac{4}{\sqrt{a} - 2}$.

Câu 29. (Phú Thọ 2023 - 2024)

Cho hai biểu thức $A = \frac{5\sqrt{a} + 4}{\sqrt{a} - 1}$ và $B = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{1 - \sqrt{a}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} - a}{\sqrt{a} - 2}$, với $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 4$.

a, tính giá trị của biểu thức A khi $a = 16$

b, rút gọn biểu thức B.

c, tìm các giá trị nguyên của a để $A \cdot B < 0$.

Lời giải

Khi $a = 16$ thì giá trị biểu thức

$$A = \frac{5\sqrt{16} + 4}{\sqrt{16} - 1} = \frac{5 \cdot 4 + 4}{4 - 1} = \frac{24}{3} = 8$$

Vậy với $a = 16$ thì $A = 8$.

b, với $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 4$

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{1 - \sqrt{a}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} - a}{\sqrt{a} - 2} = \frac{1 - \sqrt{a} + \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot (1 - \sqrt{a})} \cdot \frac{\sqrt{a} \cdot (1 - \sqrt{a})}{\sqrt{a} - 2} = \frac{1}{\sqrt{a} - 2}$$

c, với $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 4$ ta có:

$$A \cdot B < 0 \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{a} + 4}{\sqrt{a} - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a} - 2} < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - 1) \cdot (\sqrt{a} - 2) < 0 \text{ (vì } 5\sqrt{a} + 4 > 0)$$



$$\Leftrightarrow 1 < \sqrt{a} < 2 \Leftrightarrow 1 < a < 4$$

Vì $a \in \mathbb{Z}$ nên $a \in \{2; 3\}$

Vậy $a \in \{2; 3\}$

Câu 30. (Quảng Bình 2023 - 2024)

Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{a} + 2} + \frac{4}{a - 4}$ với $a \geq 0$ và $a \neq 4$.

1. Rút gọn biểu thức A.

2. Tìm tất cả các giá trị của a để $A = \frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} 1. A &= \frac{1}{\sqrt{a} + 2} + \frac{4}{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 2)} \\ &= \frac{\sqrt{a} - 2 + 4}{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 2)} \\ &= \frac{\sqrt{a} + 2}{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a} - 2} \end{aligned}$$

$$2. A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a} - 2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} - 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} = 4$$

$$\Leftrightarrow a = 16 \text{ (TM)}. \text{ Vậy } a = 16.$$

Câu 31. (Quảng Nam 2023 - 2024)



a) Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{8} - \frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{18}$.

b) Rút gọn biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{3\sqrt{x}-1}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

Lời giải

$$a) A = \sqrt{8} - \frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{18}$$

$$A = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2}$$

$$A = 4\sqrt{2}$$

$$b) B = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 + 3\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \quad (x \geq 0, x \neq 1)$$

$$B = \frac{x + \sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

Câu 32. (Quảng Ngãi 2023 2024)

Thực hiện phép tính $3\sqrt{49} - \sqrt{121}$

Lời giải

Ta có: $3\sqrt{49} - \sqrt{121} = 3\sqrt{7^2} - \sqrt{11^2} = 3 \cdot 7 - 11 = 21 - 11 = 10$

Câu 33. (Quảng Ninh 2023 - 2024)

a) Thực hiện phép tính $2\sqrt{9} - \sqrt{16}$.

d) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$.

**Lời giải**

$$a) 2\sqrt{9} - \sqrt{16} = 2 \cdot \sqrt{3^2} - \sqrt{4^2} = 2 \cdot 3 - 4 = 6 - 4 = 2$$

d) Với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$ ta có:

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+3+2(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+3+2\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$$

$$P = \frac{3\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{3(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$P = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$ thì $P = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$.

Câu 34. (Sóc Trăng 2023 - 2024) Rút gọn biểu thức : $A = \sqrt{25} + 2\sqrt{27} - 3\sqrt{12}$.

Lời giải

$$A = 5 + 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 5.$$

Câu 35. (Sơn La)

a) Tính giá trị của biểu thức: $B = \sqrt{36} + \sqrt{4} - \sqrt{25}$.

Lời giải

a) Ta có $B = \sqrt{36} + \sqrt{4} - \sqrt{25} = 6 + 2 - 5 = 3$.

Câu 36. (Tây Ninh 2023 - 2024) Tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt{4} + (\sqrt{2})^2$

**Lời giải**

$$P = \sqrt{4} + (\sqrt{2})^2 = 2 + 2 = 4$$

Câu 37. (Thái Bình 2023 - 2024)

Cho hai biểu thức $P = \left(\frac{x-6\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{x+4}{1-x}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}}{x+4}$ (với $x \geq 0; x \neq 1$).

- a) Tính giá trị biểu thức Q với $x=4$.
 b) Chứng minh rằng $P=4Q$.
 c) Tìm tất cả các giá trị của x để P nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải

a) Ta có $Q = \frac{\sqrt{x}}{x+4}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

Thay $x=4$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta có: $Q = \frac{\sqrt{4}}{4+4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

b) Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có:

$$P = \left(\frac{x-6\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{x+4}{1-x}$$

$$P = \left[\frac{x-6\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right] : \frac{x+4}{1-x}$$

$$P = \frac{x-6\sqrt{x}+1 - (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{1-x}{x+4}$$

$$P = \frac{x-6\sqrt{x}+1-x+2\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{1-x}{x+4}$$

$$P = \frac{-4\sqrt{x}}{x-1} \cdot \frac{-(x-1)}{x+4}$$

$$P = \frac{4\sqrt{x}}{x+4}$$

$$P = 4 \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+4} = 4Q$$

Vậy $P=4Q$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

c) Ta có $P = \frac{4\sqrt{x}}{x+4}$ với $x \geq 0; x \neq 1$



Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có $4\sqrt{x} \geq 0; x+4 > 0 \Rightarrow P = \frac{4\sqrt{x}}{x+4} \geq 0$ (1)

Ta cũng có: $P = \frac{x+4 - (x-4\sqrt{x}+4)}{x+4} = 1 - \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x+4} \leq 1$ với $x \geq 0; x \neq 1$

Do đó $P = \frac{4\sqrt{x}}{x+4} \leq 1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 0 \leq P \leq 1$. Mà P nhận giá trị là số nguyên nên $P \in \{0; 1\}$.

+ Với $P=0 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}}{x+4} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn)

+ Với $P=1 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}}{x+4} = 1 \Leftrightarrow x+4 = 4\sqrt{x} \Leftrightarrow x+4-4\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn).

Vậy $x \in \{0; 4\}$ thì P nhận giá trị là số nguyên

Câu 38. (Thái Nguyên 2023 - 2024) Không sử dụng máy tính cầm tay, rút gọn biểu thức

$$A = \sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{18}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{18} \\ &= \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Câu 39. (Thái Nguyên 2023 - 2024) Cho biểu thức $B = \frac{x}{\sqrt{x}+2} - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{8}{x+2\sqrt{x}}$, với $x > 0$.

a. Rút gọn biểu thức B .

b. Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 7 + 4\sqrt{3}$.

Lời giải

a. Với $x > 0$ thì $B = \frac{x\sqrt{x} - 4(\sqrt{x}+2) + 8}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$

$$= \frac{\sqrt{x}(x-4)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+2} = \sqrt{x}-2$$



b. Ta có: $x = 7 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 2)^2$.

Khi đó $B = \sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2} - 2 = \sqrt{3} + 2 - 2 = \sqrt{3}$.

Câu 40. (Thanh Hóa) Cho biểu thức : $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2 + 5\sqrt{x}}{x - 4}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

1. Rút gọn biểu thức

2. Tìm tất cả các giá trị của x để $P > 1$

Lời giải

1.

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2 + 5\sqrt{x}}{x - 4} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) + (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2) - 2 - 5\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{x - 2\sqrt{x} + x + 3\sqrt{x} + 2 - 2 - 5\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{2x - 4\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

2. Tìm tất cả các giá trị của x để $P > 1$

Theo ý (1) ta có $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$

$$P > 1 \text{ hay } \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} > 1 \Rightarrow 2\sqrt{x} > \sqrt{x} + 2 \quad (\text{vì } \sqrt{x} + 2 > 0 \text{ với } x \geq 0)$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} - \sqrt{x} > 2 \Rightarrow \sqrt{x} > 2 \Rightarrow x > 4$$

Vậy $x > 4$ thì $P > 1$



Câu 41. (Huế 2023 - 2024)

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức $A = \sqrt{x-1}$ có nghĩa:

Lời giải:

Biểu thức $A = \sqrt{x-1}$ có nghĩa khi $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

b) Không sử dụng máy tính cầm tay tính giá trị biểu thức:

Lời giải:

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{9} - \sqrt{4} + \sqrt{16} \\ \Leftrightarrow B &= \sqrt{3^2} - \sqrt{2^2} + \sqrt{4^2} \\ \Leftrightarrow B &= 3 - 2 + 4 \\ \Leftrightarrow B &= 5 \end{aligned}$$

Vậy $B = 5$

c) Rút gọn biểu thức $C = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

Lời giải:

$$\begin{aligned} C &= \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \\ \Leftrightarrow C &= \frac{x}{x-4} + \frac{\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} - \frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} \\ \Leftrightarrow C &= \frac{x + \sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}}{x-4} \\ \Leftrightarrow C &= \frac{x-4}{x-4} = 1 \end{aligned}$$

Vậy $C = 1$

Câu 42. (Tiền Giang 2023 - 2024)

Tính giá trị của biểu thức: $A = \sqrt{27} - \frac{3}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}$.

Lời giải

$$A = \sqrt{27} - \frac{3}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}$$



$$A = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Câu 43. (Trà Vinh 2023 - 2024)

a. Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{20} - 2\sqrt{80} + 3\sqrt{45}$.

Lời giải

a. Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{20} - 2\sqrt{80} + 3\sqrt{45}$.

Ta có: $A = \sqrt{20} - 2\sqrt{80} + 3\sqrt{45}$

$$A = \sqrt{2^2 \cdot 5} - 2\sqrt{4^2 \cdot 5} + 3\sqrt{3^2 \cdot 5}$$

$$A = 2 \cdot \sqrt{5} - 2 \cdot 4\sqrt{5} + 3 \cdot 3\sqrt{5}$$

$$A = 2\sqrt{5} - 8\sqrt{5} + 9\sqrt{5}$$

$$A = (2 - 8 + 9) \cdot \sqrt{5}$$

$$A = 3\sqrt{5}$$

Vậy $A = 3\sqrt{5}$.

Câu 44. (Vĩnh Phúc 2023 - 2024). Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x+1}}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$ (với $x \geq 0; x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a)

$$\begin{aligned} A &= \frac{x\sqrt{x+1}}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} = \frac{(\sqrt{x+1})(x-\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})} - \frac{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} = \frac{x-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} - (\sqrt{x-1}) \\ &= \frac{x-\sqrt{x+1}-(\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{x-\sqrt{x+1}-x+2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$



Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{1}{\sqrt{x}-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 \in U(1) = \{1; -1\}$

+ Nếu $\sqrt{x}-1=1 \Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn ĐK).

+ Nếu $\sqrt{x}-1=-1 \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy $x \in \{0; 4\}$ thì A có giá trị nguyên.

CHỦ ĐỀ 2. CÁC BÀI TOÁN VỀ HÀM SỐ**Câu 1.** (An Giang năm 2023-2024)Cho hai hàm số $y = f(x) = x^2$ và $y = g(x) = 3ax - a^2$ với $a \neq 0$ là tham số.

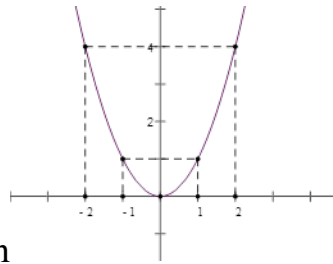
- Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên hệ trục tọa độ Oxy.
- Chứng minh rằng đồ thị hàm số đã cho luôn có hai giao điểm.
- Gọi $y_1; y_2$ là tung độ giao điểm của hai đồ thị. Tìm a để $y_1 + y_2 = 28$.

Lời giải:

$$y = f(x) = x^2$$

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4



Vẽ đồ thị như hình bên

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị

$$x^2 = 3ax - a^2 \Leftrightarrow x^2 - 3ax + a^2 = 0(*)$$

Ta có $\Delta = (3a)^2 - 4a^2 = 5a^2$

Do $\Delta > 0$ với mọi $a \neq 0$, nên phương trình (*) luôn có hai nghiệm, hay đồ thị hai hàm số luôn có hai giao điểm.**Câu 2.** (Bà Rịa Vũng Tàu năm 2023-2024)Cho Parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = 3x - m$ (với m là tham số).

- Vẽ parabol (P).
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $5(x_1 + x_2) = 1 - (x_1 x_2)^2$

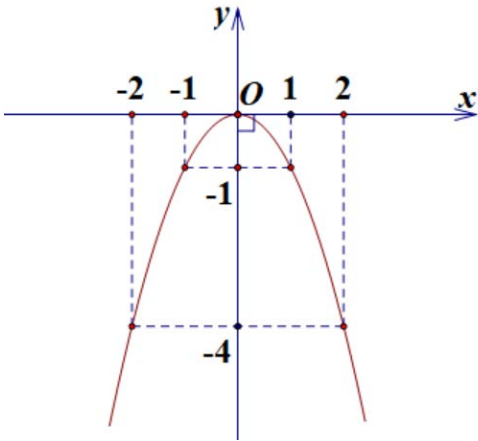
Lời giải:

a) Ta có bảng giá trị sau

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	-1	-4

Do đó (P) đi qua các điểm $O(0;0), A(1;-1), B(2;-4), C(-1;-1)$ và $D(-2;-4)$
 Parabol có bề lõm quay xuống dưới, nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Vẽ



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 + 3x - m = 0$, biệt thức $\Delta = 9 + 4m$.

Parabol và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{9}{4}$.

Lúc này các hoành độ giao điểm là x_1, x_2 theo định lý Vi-et ta có $x_1 + x_2 = -3; x_1 x_2 = -m$

Yêu cầu bài toán $5(x_1 + x_2) = 1 - (x_1 x_2)^2 \Leftrightarrow -15 = 1 - (-m)^2 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4$

Đối chiếu điều kiện chọn $m = 4$.

Câu 3. (Bắc Giang năm 2023-2024) Hàm số nào dưới đây đồng biến trên \mathbb{R} ?

- A. $y = x + 1$. B. $y = x^2$. C. $y = -2x^2$. D. $y = -3x + 2$.

Lời giải:

Chọn A

Câu 4. (Bắc Giang năm 2023-2024) Hàm số $y = -5x^2$ nghịch biến khi

- A. $x \in \mathbb{R}$. B. $x > 0$. C. $x = 0$. D. $x < 0$.

Lời giải:

Chọn B

Câu 5. (Bắc Giang năm 2023-2024) Điều kiện của x để biểu thức $A = \sqrt{x+2}$ có nghĩa là

- A. $x \leq -2$. B. $x \geq -2$. C. $x \leq 2$. D. $x \geq 2$.

Lời giải:

Chọn B

Câu 6. (Bắc Giang năm 2023-2024) Biết đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $M(2;1)$ và song song với đường thẳng $y = x + 2023$. Tìm các hệ số a và b ?

Lời giải:

Đường thẳng $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = x + 2023$ nên ta có $a = 1; b \neq 2023$
 Đường thẳng $y = 1.x + b$ đi qua điểm $M(2;1)$ nên ta có $1 = 1.2 + b \Leftrightarrow b = -1$ (thỏa mãn điều kiện $b \neq 2023$)

KL: Vậy $a = 1; b = -1$.

Câu 7. (Bắc Ninh năm 2023-2024) Biểu thức $\sqrt{3-x}$ có điều kiện xác định là

- A. $x < 3$. B. $x \neq 3$. C. $x \geq 3$. **D. $x \leq 3$.**

Lời giải**Chọn D**

Ta có: $\sqrt{3-x}$ xác định $\Leftrightarrow 3-x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 3$

Vậy biểu thức $\sqrt{3-x}$ có điều kiện xác định là $x \leq 3$.

Câu 8. (Bắc Ninh năm 2023-2024) Hàm số $y = (m+5)x - 2$ (với m là tham số) đồng biến trên \mathbb{R} khi và chỉ khi

- A. $m < -5$. **B. $m > -5$.** C. $m > 7$. D. $m < 7$.

Lời giải**Chọn B**

Hàm số $y = (m+5)x - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow m+5 > 0 \Leftrightarrow m > -5$.

Câu 9. (Bắc Ninh năm 2023-2024) Hệ số góc của đường thẳng $y = \frac{3}{2}x$ là

- A. -2 . B. $\frac{3}{2}$. **C. -1 .** D. 2 .

Lời giải**Chọn C**

Đường thẳng $y = ax + b$ với $a \neq 0$ thì a được gọi là hệ số góc.

Vậy hệ số góc của đường thẳng $y = \frac{3}{2}x$ là -1 .

Câu 10. (Bắc Ninh năm 2023-2024) Biết parabol $y = x^2$ cắt đường thẳng $y = -3x + 4$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Giá trị của biểu thức $T = 2x_1 + 3x_2$ bằng

- A. -5 .** B. -10 . C. 10 . D. 5 .

Lời giải**Chọn A**

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình: $x^2 = -3x + 4$
 $\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$

Vì $1+3+(-4)=0$ nên phương trình có nghiệm $x=1$; $x=-4$

Do $x_1 < x_2$ nên $x_1=-4$; $x_2=1$. Vậy $T=2x_1+3x_2=2\cdot(-4)+3\cdot 1=-8+3=-5$.

Câu 11. (Bắc Ninh năm 2023-2024) Giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=-x+1$ và $y=2x+4$ là

- A. $N(-1;1)$. B. $M(1;0)$. **C. $P(-1;2)$.** D. $Q(-3;-4)$.

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình: $-x+1=2x+4$

$$\Leftrightarrow -x-2x=4-1 \Leftrightarrow -3x=3 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=1+1=2$$

Vậy giao điểm của đồ thị hai hàm số là $P(-1;2)$.

Câu 12. (Bắc Ninh năm 2023-2024) Cho hàm số $y=ax^2$ (với $a \neq 0$ là tham số). Điểm $E(1;2)$ thuộc đồ thị hàm số khi

- A. $a=2$.** B. $a=\frac{1}{4}$. C. $a=-2$. D. $a=-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Điểm $E(1;2)$ thuộc đồ thị hàm số $y=ax^2 \Leftrightarrow 2=a\cdot 1^2 \Leftrightarrow a=2$

Vậy khi $a=2$ thì đồ thị hàm số $y=ax^2$ đi qua điểm $E(1;2)$.

Câu 13. (Bắc Ninh năm 2023-2024) Đường thẳng nào dưới đây song song với đường thẳng $y=-2x+1$?

- A. $y=2x-1$. **B. $y=6-2(x+1)$.** C. $y=2x+1$. D. $y=1-2x$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng $y=6-2(x+1) \Leftrightarrow y=6-2x-2 \Leftrightarrow y=-2x+4$

Đường thẳng $y=ax+b$ ($a \neq 0$) và $y=a'x+b'$ ($a' \neq 0$) song song với nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b \neq b' \end{cases}$

Do đó, đường thẳng song song với đường thẳng $y=-2x+1$ là đường thẳng $y=6-2(x+1)$.

Câu 14. (Bắc Ninh năm 2023-2024) Đường thẳng $y=2x-3$ đi qua điểm nào sau đây?

- A. $N(-1;1)$. B. $Q(-1;-1)$. C. $M(1;1)$. **D. $P(1;-1)$.**

Lời giải

Chọn D

- Khi $x = -1$ thì $y = 2 \cdot (-1) - 3 = -2 - 3 = -5$ nên đồ thị hàm số không đi qua các điểm $(-1; 1)$ và $(-1; -1)$.
- Khi $x = 1$ thì $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$ nên đồ thị hàm số đi qua $(1; -1)$ và không đi qua $(1; 1)$.

Câu 15. (Bắc Ninh năm 2023-2024) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đồ thị hàm số $y = mx + 2$ (với $m \neq 0$ là tham số) cắt các trục Ox , Oy lần lượt tại A , B . Có bao nhiêu giá trị của m để diện tích ΔOAB bằng 3?

A. 3.

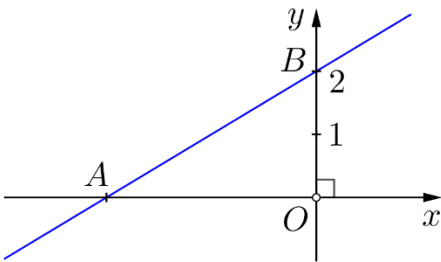
B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải**Chọn C**

- Với $y = 0$ thì $x = \frac{-2}{m}$ (do $m \neq 0$) nên $A\left(\frac{-2}{m}; 0\right) \Rightarrow OA = \left|\frac{-2}{m}\right| = \frac{|-2|}{|m|} = \frac{2}{|m|}$
- Với $x = 0$ thì $y = 2$ nên $B(0; 2) \Rightarrow OB = |2| = 2$



ΔOAB vuông tại O nên diện tích ΔOAB là $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{|m|} \cdot 2 = \frac{2}{|m|}$

Do đó, diện tích ΔOAB bằng 3 $\Leftrightarrow \frac{2}{|m|} = 3 \Leftrightarrow |m| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow m = \pm \frac{2}{3}$ (thỏa mãn)

Vậy có 2 giá trị của m để diện tích ΔOAB bằng 3.

Câu 16. (Bắc Ninh năm 2023-2024) Cho ba đường thẳng đôi một phân biệt $y = x + 2$ (d_1); $y = 2x + 1$ (d_2); $y = (m^2 + 1)x + m$ (d_3) (với m là tham số). Giá trị của m để ba đường thẳng nói trên cùng đi qua một điểm là

A. $m \in \{-2; 1\}$.B. $m = 1$.**C. $m = -2$.**D. $m = 3$.**Lời giải****Chọn C**

Tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ba đường thẳng cùng đi qua một điểm khi và chỉ khi (d_3) đi qua $(1; 3)$



$$\Leftrightarrow 3 = (m^2 + 1) \cdot 1 + m \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0$$

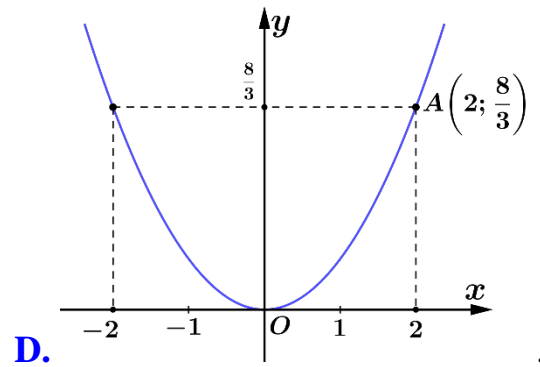
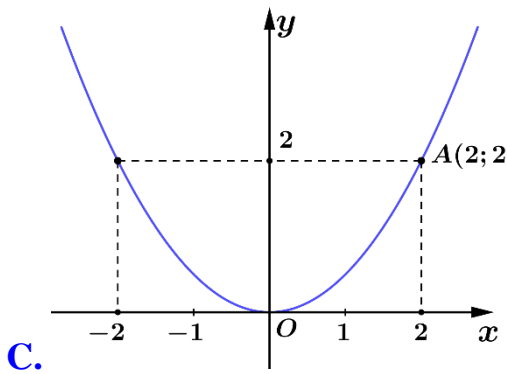
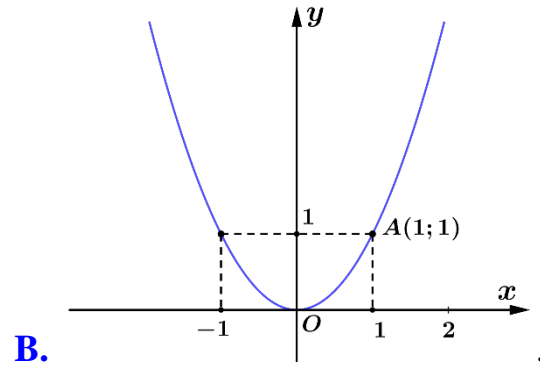
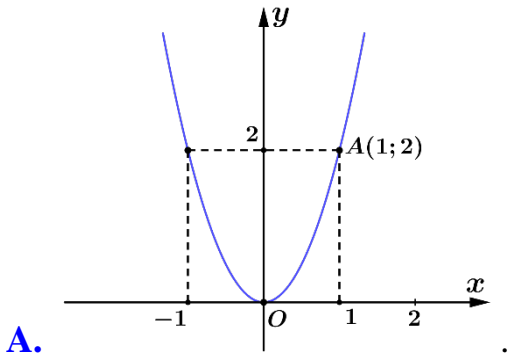
Vì $1 + 1 + (-2) = 0$ nên phương trình có nghiệm $m_1 = 1; m_2 = -2$

Với $m_1 = 1$ thì $(d_3): y = 2x + 1 \Rightarrow (d_3)$ trùng $(d_2) \rightarrow$ loại

Với $m_2 = -2$ thì $(d_3): y = 5x - 2 \Rightarrow (d_3)$ khác (d_1) và (d_3) khác $(d_2) \rightarrow$ thỏa mãn

Vậy $m = -2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17. (Bến Tre năm 2023-2024) Hàm số $y = x^2$ có đồ thị là hình vẽ nào dưới đây?



Lời giải

Chọn B

Câu 18. (Bến Tre năm 2023-2024) Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng $y = 7x - 6$?

- A.** $M(0; 1)$. **B.** $N(2; 4)$. **C.** $P(1; 1)$. **D.** $Q(2; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 19. (Bến Tre năm 2023-2024) Tọa độ các giao điểm của đường thẳng $y = 7x$ và parabol $y = -x^2$ là

- A.** $M(0; 1), N(7; 14)$. **B.** $M(1; 0), N(7; 49)$.
C. $M(0; 0), N(-7; -49)$. **D.** $M(1; 1), N(-7; 49)$.

Lời giải

Chọn C

- Câu 20.** (Bến Tre năm 2023-2024) Hàm số $y = 3x^2$ nghịch biến khi
- A. $x > 0$. B. $x < 0$. C. $x > 1$. D. $x \neq 0$.

Lời giải

Chọn B

- Câu 21.** (Bến Tre năm 2023-2024) Tìm tham số m để đường thẳng $y = 3x + 2m - 7$ đi qua điểm $M(-2; 4)$?

- A. $m = -\frac{7}{2}$. B. $m = 9$. C. $m = -\frac{17}{2}$. D. $m = \frac{17}{2}$.

Lời giải

Chọn D

- Câu 22.** (Bến Tre năm 2023-2024) Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất?

- A. $y = 3x - 2$. B. $y = 2x^2$. C. $y = \frac{1}{x}$. D. $y = 7\sqrt{x}$.

Lời giải

Chọn A

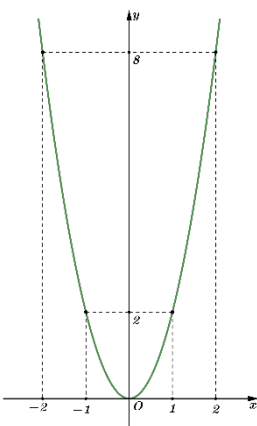
- Câu 23.** (Bến Tre năm 2023-2024) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x^2$.

Lời giải

Chọn C

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	-8	-2	0	2	8



- Câu 24.** (Bình Định năm 2023-2024) Trong hệ tọa độ Oxy, cho các đường thẳng $(d): y = ax - 4$ và $(d_1): y = -3x + 2$.

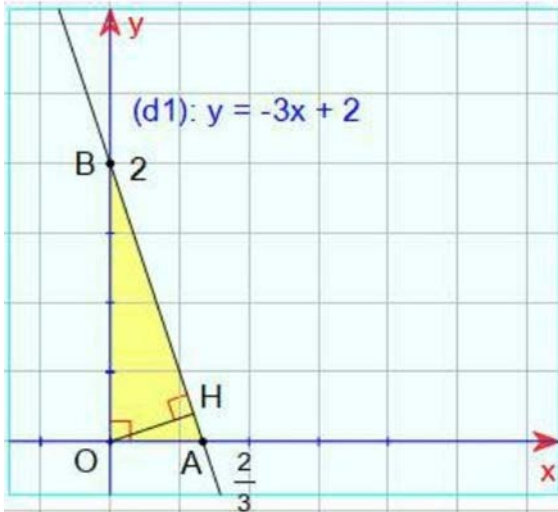
a) Biết đường thẳng (d) đi qua điểm $(-1; 5)$. Tìm a .

b) Tìm tọa độ giao điểm của (d_1) với trục hoành, trục tung. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d_1) .

Lời giải

Vì $A(-1;5) \in (d)$: $y = ax - 4$ nên: $5 = a \cdot (-1) - 4 \Leftrightarrow 5 = -a - 4 \Leftrightarrow a = -9$

Vậy $a = -9$.



Tọa độ giao điểm của (d_1) với trục hoành là $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$

Tọa độ giao điểm của (d_1) với trục tung là $B(0; 2)$

Ta có: $OA = \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$ (đvdd) $OB = |2| = 2$ (đvdd)

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2^2} = \frac{2\sqrt{10}}{3} \text{ (đvdd)}$$

Diện tích tam giác OAB là:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} \text{ (đvdt)}$$

Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d_1) là:

$$\frac{2 \cdot S_{OAB}}{AB} = \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{10}}{3}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \text{ (đvdd)}$$

Câu 25. (Bình Dương năm 2023-2024) Cho Parabol (P) : $y = -0,5x^2$ và đường thẳng (d) : $y = -0,5x + 2$.

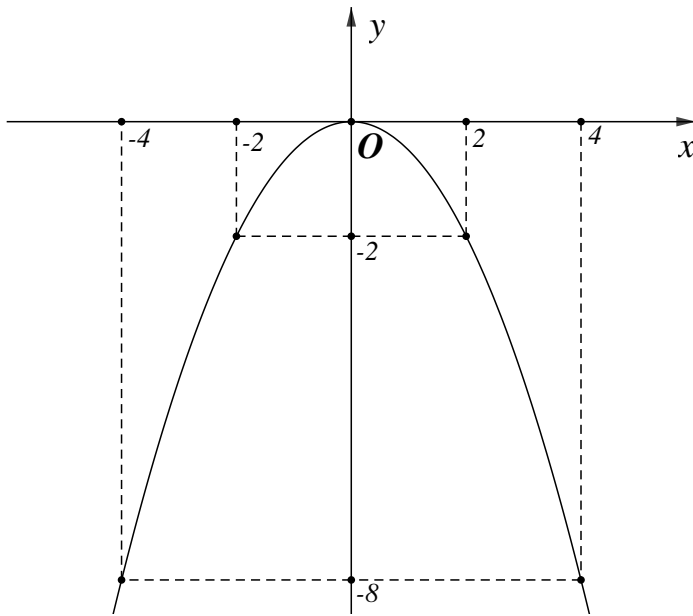
1) Vẽ đồ thị của hàm số $y = -0,5x^2$.

2) Viết phương trình đường thẳng (d_1) biết (d_1) vuông góc với (d) và (d_1) tiếp xúc (P) .

Lời giải

1) Vẽ đồ thị của hàm số $y = -0,5x^2$.

x	-4	-2	0	2	4
$y = -0,5x^2$	-8	-2	0	-2	-8



2) $(d_1): y = ax + b$ vuông góc với $(d): y = -0,5x + 2$ nên có $a \cdot (-0,5) = -1 \Leftrightarrow a = 2$.

$(d_1): y = 2x + b$ tiếp xúc $(P): y = -0,5x^2$ nên phương trình $-0,5x^2 = 2x + b \Leftrightarrow -0,5x^2 - 2x - b = 0$ có nghiệm kép nên $\Delta = 4 - 2b = 0 \Leftrightarrow b = 2$.

Vậy phương trình đường thẳng $(d_1): y = 2x + 2$.

Câu 26. (Bình Phước năm 2023-2024) Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - 2$

a) Vẽ Parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .

b) Tìm tọa độ giao điểm của Parabol (P) và đường thẳng (d) bằng phép tính

Lời giải

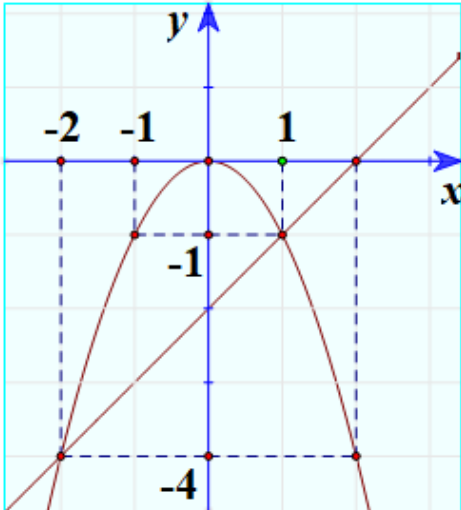
Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

x	0	2
$y = x - 2$	-2	0



Đồ thị



Phương trình hoành độ giao điểm của Parabol (P) và đường thẳng (d) là

$$-x^2 = x - 2 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -4 \\ x = 1 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

Vậy (P) cắt (d) tại hai điểm có tọa độ lần lượt là $(-2; -4)$ và $(1; -1)$.

Câu 27. (Bình Thuận năm 2023-2024) Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (P).

- Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .
- Tìm giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng (d): $y = 2mx - m^2 + 1$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2024 < x_2$.

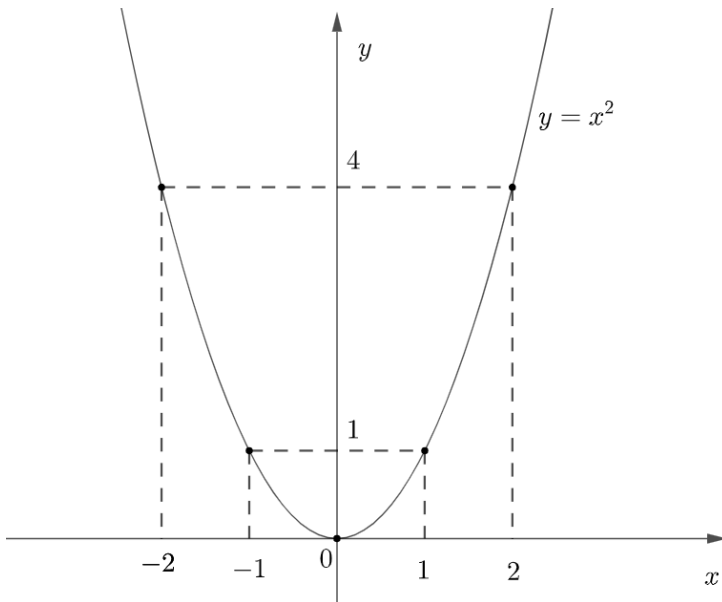
Lời giải

- Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị hàm số $y = x^2$ là một Parabol (P) đi qua các điểm $(-2; 4)$, $(-1; 1)$; $(0; 0)$; $(1; 1)$, $(2; 4)$



b) Tìm giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2mx - m^2 + 1$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2024 < x_2$.

Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm phương trình:

$$x^2 = 2mx - m^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

Đường thẳng (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0$$

$$\Leftrightarrow (-m)^2 - 1 \cdot (m^2 - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m^2 + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 > 0 \text{ (Hiển nhiên)}$$

Phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 hay đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 với mọi giá trị m .

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{1}}{1} = m - 1$$

$$x_2 = \frac{m + \sqrt{1}}{1} = m + 1$$

Ta có: $x_1 < 2024 < x_2$

$$\Leftrightarrow m - 1 < 2024 < m + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 2024 \\ m + 1 > 2024 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 2025 \\ m > 2023 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m = 2024$ (Vì cần tìm m có giá trị nguyên)

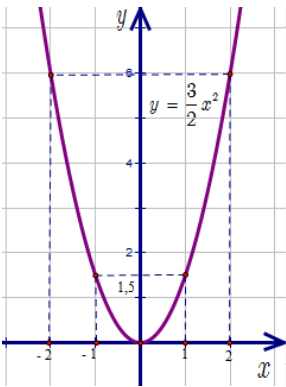
Vậy $m = 2024$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2024 < x_2$.

Câu 28. (Cần Thơ năm 2023-2024) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$.

Lời giải

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{3}{2}x^2$	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6



Câu 29. (Cao Bằng năm 2023-2024) Tìm b để đồ thị hàm số $y = 2x + b$ đi qua điểm $M(1;4)$.

Lời giải

Câu 30. (Cao Bằng năm 2023-2024) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = 2mx - m^2 + 1$ và parabol $(P): y = x^2$ (m là tham số).

a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm

phân biệt có hoành độ x_1 và x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-2}{x_1 x_2} + 1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) là

$$x^2 = 2mx - m^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad (*)$$

a) Ta có $\Delta = m^2 - 1 \cdot (m^2 - 1) = 1 > 0, \forall m$. Phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt nên đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Theo định lí Viet ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 1 \end{cases} \quad (1).$$

Điều kiện $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$. Suy ra $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Theo giả thiết $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-2}{x_1 x_2} + 1 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-2 + x_1 x_2}{x_1 x_2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -2 + x_1 x_2 \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta được: $2m = -2 + m^2 - 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện ta thấy $m = 3$ thỏa mãn.

Câu 31. (Đà Nẵng năm 2023-2024) Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P).

a) Vẽ đồ thị (P).

b) Đường thẳng $y = -x + b$ (với $b > 0$) lần lượt cắt các tia Ox, Oy tại E, F. Chứng minh rằng tam giác OEF vuông cân và tìm b để tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF là một điểm thuộc (P), với O là gốc tọa độ.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P).

Ta có bảng giá trị sau:

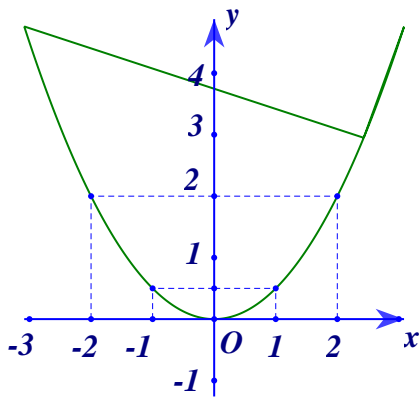
x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

\Rightarrow Đồ thị hàm số là đường cong parabol đi qua các điểm

$O(0; 0); A(-2; 2); B\left(-1; \frac{1}{2}\right); C\left(1; \frac{1}{2}\right); D(2; 2)$

Hệ số $a = \frac{1}{2} > 0$ nên parabol có bề cong hướng xuống. Đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng.

Ta vẽ được đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ như sau:



a) Đường thẳng $y = -x + b$ (với $b > 0$) lần lượt cắt Ox, Oy tại E, F . Chứng minh rằng tam giác OEF vuông cân và tìm b để tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF là gốc tọa độ.

Cho $y = 0 \Rightarrow -x + b = 0 \Leftrightarrow x = b$

\Rightarrow Đường thẳng $y = -x + b$ cắt Ox tại $E(b; 0)$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 0 + b = b$

\Rightarrow Đường thẳng $y = -x + b$ cắt Oy tại $F(0; b)$.

Xét $\triangle OEF$ có: $\begin{cases} OE \perp OF \text{ (do } Ox \perp Oy) \\ OE = OF = b \text{ (do } b > 0) \end{cases} \Rightarrow \triangle OEF$ vuông cân tại O .

\Rightarrow Tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle OEF$ là trung điểm cạnh huyền EF .

Gọi tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle OEF$ là H .

Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H lên Ox, Oy .

Ta có $\begin{cases} HM \perp Ox \\ OF \perp Ox \end{cases} \Rightarrow HM \parallel OF$ (từ vuông góc đến song song).

Mà H là trung điểm của $EF \Rightarrow M$ là trung điểm của OE (Tính chất đường trung bình của tam giác).

$\Rightarrow HM$ là đường trung bình của tam giác $OEF \Rightarrow HM = \frac{1}{2}OF = \frac{b}{2}$.

Chứng minh tương tự ta tính được $HN = \frac{b}{2} \Rightarrow H\left(\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right)$

Để tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF là một điểm thuộc $(P) \Leftrightarrow H\left(\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right) \in (P)$.

$\Leftrightarrow \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{b}{2} = \frac{b^2}{8} \Leftrightarrow b^2 - 4b = 0$

$\Leftrightarrow b(b - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ (L)} \\ b = 4 \text{ (TM)} \end{cases}$

Vậy $b = 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 32. (DakLak năm 2023-2024) Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là đường parabol (P) và hàm số $y = 4mx + 5$ có đồ thị là đường thẳng (d), với m là tham số.

a) Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) và đường thẳng (Δ) song song với nhau, với (Δ) là đồ thị của hàm số $y = (5 - m)x - 3$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_2^2 + 4mx_1 = 105$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (d) // (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} 4m = 5 - m \\ 5 \neq -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy $m = 1$ thì hai đường thẳng (d) và (Δ) song song với nhau.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 = 4mx + 5 \Leftrightarrow x^2 - 4mx - 5 = 0 \quad (*)$$

Ta có: $a = 1, c = -5; ac = -5 < 0$ nên phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của tham số m .

Theo hệ thức Vi-et ta có $x_1 + x_2 = 4m$, vì x_2 là nghiệm của phương trình (*) nên $x_2^2 = 4mx_2 + 5$.

$$\text{Ta có: } x_2^2 + 4mx_1 = 105 \Leftrightarrow 4mx_2 + 5 + 4mx_1 = 105$$

$$\Leftrightarrow 4m(x_1 + x_2) = 100 \Leftrightarrow (4m)^2 = 100 \Leftrightarrow m = \pm \frac{5}{2}.$$

Câu 33. (Đồng Nai năm 2023-2024)

1) Vẽ đồ thị hàm số $y = -2x^2$.

2) Tìm tham số thực m để đồ thị hàm số $y = -2x^2$ và đường thẳng $y = x - m$ có điểm chung.

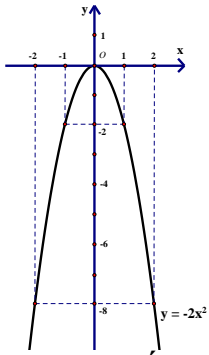
Lời giải

+ Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+ Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-2	0	-2	-8

+ Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = -2x^2$ là một đường cong parabol đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$, nhận trục Oy làm trục đối xứng, nằm phía dưới trục hoành, điểm O là điểm cao nhất của đồ thị.



Tìm tham số thực m để đồ thị hàm số $y = -2x^2$ và đường thẳng $y = x - m$ có điểm chung. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -2x^2$ và đường thẳng $y = x - m$ là $-2x^2 = x - m \Leftrightarrow 2x^2 + x - m = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-m) = 1 + 8m.$$

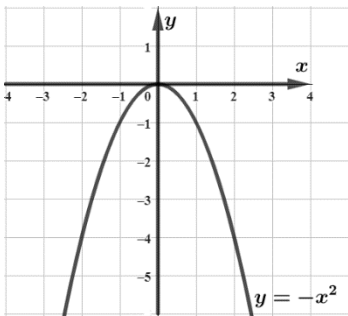
Để đồ thị hàm số $y = -2x^2$ và đường thẳng $y = x - m$ có điểm chung thì $\Delta \geq 0 \Rightarrow 1 + 8m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{8}$.

Câu 34. (Đồng Tháp năm 2023-2024) Cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị (P) . Hãy vẽ đồ thị (P) và tìm tọa độ giao điểm của (P) với đường thẳng $(d): y = 2x$.

Lời giải

Bảng giá trị

x	0	1	2
y	0	-1	-4



Phương trình hoành độ giao điểm $-x^2 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = -2 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$

Vậy tọa độ giao điểm là $(0;0)$ và $(-2;-4)$.

(Tìm tọa độ giao điểm bằng đồ thị vẫn cho điểm tối đa)

Câu 35. (Hà Nam năm 2023-2024) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$, đường thẳng (d) có phương trình $y = 2x + m^2 - 4m + 9$ (với m là tham số) và đường thẳng (Δ) có phương trình $y = (a - 3)x + 4$ (với a là tham số).

1. Tìm a để đường thẳng (d) và đường thẳng (Δ) vuông góc với nhau.

2. Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi m . Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ (với $x_1 < x_2$), tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho $|x_1 - 2023| - |x_2 + 2023| = y_1 + y_2 - 48$.

Lời giải

$$(d) \perp (\Delta) \Leftrightarrow 2.(a-3) = -1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{5}{2}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và (P)

$$x^2 = 2x + m^2 - 4m + 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 + 4m - 9 = 0(1)$$

$$\Delta' = m^2 - 4m + 10 = (m-2)^2 + 6 > 0 \forall m$$

Vậy đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi m

$a.c = -m^2 + 4m - 9 = -(m-2)^2 - 5 < 0 \forall m \Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2$

$$\begin{cases} x_1 - 2023 < 0 \\ x_2 + 2023 > 0 \end{cases} \Rightarrow |x_1 - 2023| - |x_2 + 2023| = -(x_1 + x_2)$$

$$|x_1 - 2023| - |x_2 + 2023| = y_1 + y_2 - 48 \Leftrightarrow -(x_1 + x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 48$$

$$\Leftrightarrow -(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 - 48 \Leftrightarrow -2 = 2^2 - 2(-m^2 + 4m - 9) - 48$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Câu 36. (Hà Nội năm 2023-2024) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m+2)x - m$

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

b) Gọi x_1 và x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và (P) . Tìm tất cả các giá trị của m để:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 + x_2 - 2}$$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm (d) và (P) .

$$x^2 = (m+2)x - m$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m+2)x + m = 0 (*)$$

Ta có $\Delta = (m+2)^2 - 4.1.m \Rightarrow \Delta = m^2 + 4$.

Do $m^2 \geq 0$ với mọi $m \Rightarrow m^2 + 4 > 0$ với mọi m

$\Rightarrow \Delta > 0$ với mọi m , Phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

b) Gọi x_1 và x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P) . Tìm tất cả giá trị của m để

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 + x_2 - 2}$$

Theo hệ thức Vi - et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$$

Điều kiện để biểu thức $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 + x_2 - 2}$ có nghĩa:
$$\begin{cases} x_1 \neq 0 \\ x_2 \neq 0 \\ x_1 + x_2 \neq 2 \end{cases}$$

Khi đó:
$$\begin{cases} m + 2 \neq 2 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0$$

Xét:
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 + x_2 - 2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{x_1 + x_2 - 2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m + 2}{m} = \frac{1}{m + 2 - 2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m + 2}{m} = \frac{1}{m}$$

$$\Leftrightarrow m + 2 = 1$$

$$\Leftrightarrow m = -1 \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy với $m = -1$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 37. (Hà Tĩnh năm 2023-2024) Cho hai đường thẳng $(d_1): y = (m-1)x + 5$ (m là tham số) và $(d_2): y = 3x - 2$. Tìm giá trị của m để hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau.

Lời giải

Để hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau thì
$$\begin{cases} m - 1 = 3 \\ 5 \neq -2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m = 4$. Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 38. (Hải Dương năm 2023-2024) Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$. Tìm a và b để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(d'): y = 5x + 3$ và đi qua điểm $A(1;3)$.

Lời giải

Ta có (d) song song với $(d') \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b \neq 3 \end{cases}$

Lại có (d) đi qua $A(1;3) \Rightarrow 3 = 1.a + b$

$$\Rightarrow 3 = 1.5 + b \Leftrightarrow b = -2$$

Vậy $a = 5, b = -2$.

Câu 39. (Hải Dương năm 2023-2024) Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3x + m$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = m + 3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = 3x + m \Leftrightarrow x^2 - 3x - m = 0 \quad (*)$$

$$\Delta = 9 + 4m$$

Để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 9 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{9}{4}$$

Theo hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 & (1) \\ x_1 x_2 = -m & (2) \end{cases}$

Theo đề $x_1 + 2x_2 = m + 3$ (3)

Từ (1), (3) suy ra $3 + x_2 = m + 3 \Leftrightarrow x_2 = m \Rightarrow x_1 = 3 - m$

Thay vào (2) ta có $m(3 - m) = -m \Leftrightarrow m(4 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 4 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$

Vậy $m = 0$ hoặc $m = 4$.

Câu 40. (Hải Phòng năm 2023-2024) Một quyển vở giá 14 000 đồng, một hộp bút giá 30 000 đồng. Minh muốn mua 01 hộp bút và một số quyển vở.

a) Gọi x ($x \in \mathbb{N}^*$) là số quyển vở Minh mua, y là số tiền cần trả khi mua x quyển vở và 01 hộp bút. Hãy biểu diễn y theo x .

b) Nếu Minh có 300 000 đồng để mua vở và 01 hộp bút thì Minh mua được tối đa bao nhiêu quyển vở?

Lời giải

a) Công thức tính y theo x là $y = 14000x + 30000$.

b) Theo đề bài ta có: $14000x + 30000 \leq 300000$

$$\text{Giải được } x \leq \frac{135}{7} \approx 19,29$$

Vậy bạn Minh mua tối đa được 19 quyển vở.

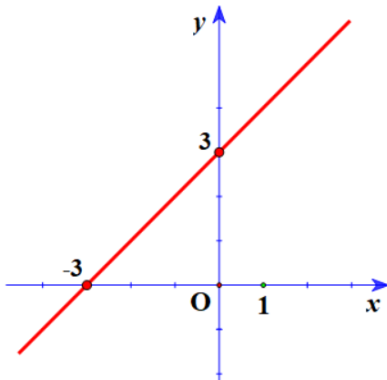
Câu 41. (Hòa Bình năm 2023-2024) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = x + 3$.

a) Vẽ đường thẳng (d) .

b) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d') : $y = 2x + m - 1$ cắt đường thẳng (d) tại một điểm trên trục tung.

Lời giải

Vẽ đúng đồ thị:



(d') : $y = 2x + m - 1$ cắt đường thẳng (d) tại một điểm trên trục tung

$$\Leftrightarrow m - 1 = 3 \Leftrightarrow m = 4.$$

Câu 42. (Hung Yên năm 2023-2024) Hàm số nào dưới đây đồng biến khi $x > 0$?

- A. $y = 2x^2$. B. $y = -x^2$. C. $y = -3x^2$. D. $y = -x + 3$.

Lời giải

Chọn

Câu 43. (Hung Yên năm 2023-2024) Hàm số $y = ax + b (a \neq 0)$ nghịch biến trên \mathbb{R} khi:

- A. $a < 0$. B. $b > 0$. C. $b < 0$. D. $a > 0$.

Lời giải

Chọn

Câu 44. (Hung Yên năm 2023-2024) Trong các hàm số sau hàm số nào là hàm số bậc nhất?

- A. $y = 2x^2$. B. $y = 1 - 2x$. C. $y = \frac{2}{x}$. D. $y = \sqrt{x}$.

Lời giải

Chọn

Câu 45. (Hung Yên năm 2023-2024) Cho hàm số $y = -2x + m + 3$. Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2;5)$ là

- A. $m = 9$. B. $m = 4$. C. $m = -2$. D. $m = 6$.

Lời giải

Chọn

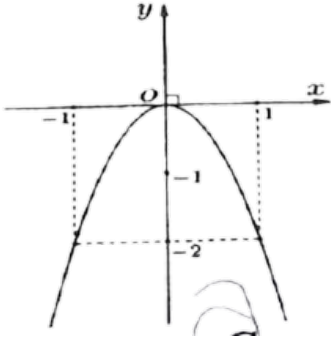
Câu 46. (Hung Yên năm 2023-2024) Góc tạo bởi đường thẳng (d) : $y = \sqrt{3}x + 2023$ và trục Ox là

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 120° .

Lời giải

Chọn

Câu 47. (Hung Yên năm 2023-2024) Parabol dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



- A. $y = x^2$. B. $y = 2x^2$. C. $y = -x^2$. D. $y = -2x^2$.

Lời giải

Chọn

Câu 48. (Hung Yên năm 2023-2024) Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ và $y = x + 2$ là

- A. $(-1; 2)$. B. $(-3; -1)$. C. $(3; 5)$. D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn

Câu 49. (Hung Yên năm 2023-2024) Cho hai đường thẳng $(d_1): y = x + 2$ và $(d_2): y = (2m^2 - m)x + m^2 + m$. Số giá trị của tham số m để (d_1) và (d_2) song song với nhau là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Lời giải

Chọn

Câu 50. (Hung Yên năm 2023-2024) Để ba đường thẳng $(d_1): y = 6 - 5x; (d_2): y = (m - 3)x + m; (d_3): y = 3x - 2$ đồng quy thì giá trị của tham số m bằng

- A. $m = 2$. B. $m = -3$. C. $m = -2$. D. $m = 3$.

Lời giải

Chọn

Câu 51. (Hung Yên năm 2023-2024) Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + m$. Điều kiện của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về hai phía của trục tung là

- A. $m < 0$. B. $m < -1$. C. $m > 0$. D. $m > -1$.

Lời giải

Chọn

Câu 52. (Khánh Hòa năm 2023-2024) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = 6x + 2023$ và parabol $(P): y = x^2$.

a) Vẽ parabol (P) .

b) Chứng minh (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

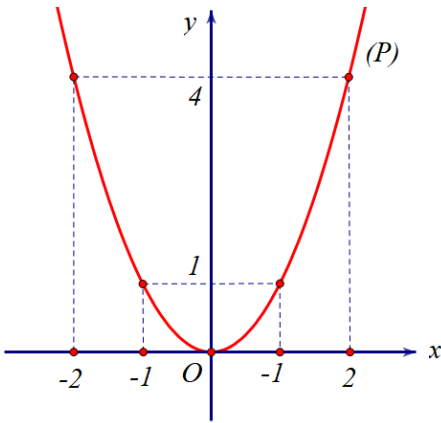
c) Gọi x_1 và x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và (P) . Tính $x_1 + x_2$ và $x_1 \cdot x_2$. Từ đó lập phương trình bậc hai ẩn t có hai nghiệm $t_1 = x_1 + 2x_2$ và $t_2 = x_2 + 2x_1$.

Lời giải

a) Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$x^2 = 6x + 2023 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 2023 = 0 \quad (*)$$

Vì $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2023) = 8128 > 0$ nên phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt.

Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Cách 2:

Ta có: $a.c = 1 \cdot (-2023) = -2023 < 0$

Nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

c) Theo Vi-et ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-6}{1} = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = -2023. \end{cases}$$

Suy ra:
$$\begin{cases} t_1 + t_2 = (x_1 + 2x_2) + (x_2 + 2x_1) \\ t_1 \cdot t_2 = (x_1 + 2x_2) \cdot (x_2 + 2x_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = x_1 + 2x_2 + x_2 + 2x_1 \\ t_1 \cdot t_2 = x_1x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1+t_2=3x_1+3x_2 \\ t_1.t_2=5x_1x_2+2(x_1^2+x_2^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1+t_2=3.(x_1+x_2) \\ t_1.t_2=5x_1x_2+2[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1+t_2=3.6 \\ t_1.t_2=5.(-2023)+2[6^2-2.(-2023)] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1+t_2=18 \\ t_1.t_2=-1951 \end{cases}$$

Đặt $S=t_1+t_2=18$; $P=t_1.t_2=-1951$

Do $S^2-4.P=18^2-4.(-1951)=8128 > 0$

nên theo định lí Vi-et đảo ta có t_1 ; t_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai

$$t^2-St+P=0$$

$$\Leftrightarrow t^2-18t-1951=0$$

Vậy phương trình bậc hai ẩn t cần tìm là: $t^2-18t-1951=0$

Câu 53. (Kon Tum năm 2023-2024) Cho hàm số $y=f(x)=3x^2$. Tính giá trị hàm số tại $x=2$.

Lời giải

$$y=f(2)=3.2^2=3.4=12$$

Vậy $f(2)=12$

Câu 54. (Kon Tum năm 2023-2024) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=3x+m$. Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn hệ thức $x_1+y_1=x_2+y_2+4$

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$x^2=3x+m$$

Hay $x^2-3x-m=0(1)$

Ta có: $\Delta=(-3)^2-4m=9-4m$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 9-4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{9}{4}$

Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$

$$\text{Nên } \begin{cases} y_1=3x_1+m \\ y_2=3x_2+m \end{cases}$$

Với $m \leq \frac{9}{4}$ áp dụng định lí Vi-et cho phương trình (1) ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1.x_2=-m \end{cases}$$

Ta có:

$$x_1+y_1=x_2+y_2+4$$

$$\Leftrightarrow x_1+3x_1=x_2+3x_2+4$$

$$\Leftrightarrow x_1-x_2=1$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1-x_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=1 \end{cases}$$

Do đó: $x_1x_2 = -m \Rightarrow m = -2$

So với điều kiện ta được $m = -2$

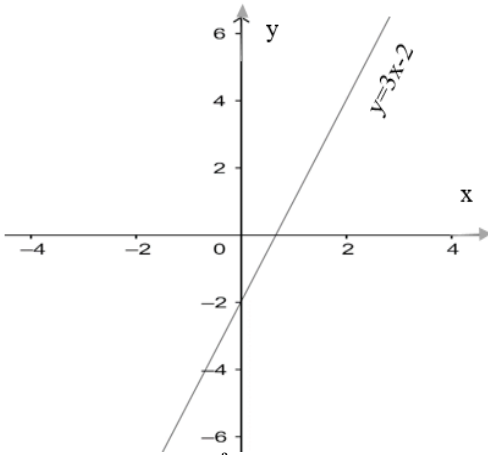
Vậy $m = -2$ thì đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn hệ thức $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 + 4$

Câu 55. (Lạng Sơn năm 2023-2024)

a) Vẽ đường thẳng (d): $y = 3x - 2$.

b) Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số (p): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 3x - 2$.

Lời giải:



a) Vẽ đường thẳng (d): $y = 3x - 2$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = -2$

Với $y = 0 \Rightarrow 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

Vậy (d) là đường thẳng qua $(0; -2)$ và $(\frac{2}{3}; 0)$

b) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 3x - 2$ là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

Vì $a+b+c = 1+(-3)+2 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 1; x_2 = 2$

Với $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1^2 = 1; x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 2^2 = 4$.

Vậy (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm là $A(1; 1)$ và $B(2; 4)$.

Câu 56. (Lào Cai năm 2023-2024) Cho hàm số $y = mx + 2m - 1$ (m là tham số).

Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 5.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = mx + 2m - 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 5.

⇔ Đồ thị hàm số đi qua điểm (0;5)

Thay $x=0$ và thay $y=5$ vào hàm số ta có: $0.m+2m-1=5 \Leftrightarrow 2m=6 \Leftrightarrow m=3$

Vậy $m=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 57. (Long An năm 2023-2024) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y=2x^2$ và đường thẳng $(d): y=-2x+4$.

a. Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng mặt phẳng tọa độ.

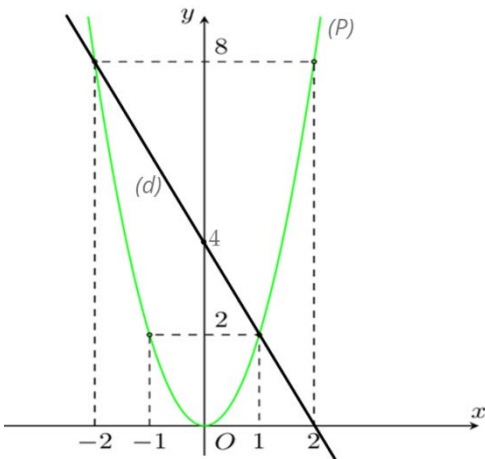
b. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Lời giải

Trên cùng hệ trục tọa độ, vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) .

x	-1	0	1
$y=2x^2$	2	0	2

x	0	2
$y=-2x+4$	4	0



Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) : $2x^2 = -2x + 4$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = 8 \\ x = 1 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(-2; 8)$ và $(1; 2)$.

Câu 58. (Nam Định năm 2023-2024) Hàm số nào sau đây đồng biến với mọi $x \in \mathbb{R}$?

- A.** $y = (1 - \sqrt{5})x^2$. **B.** $y = x + 3$. **C.** $y = (2 - \sqrt{7})x + 2$. **D.** $y = x^2$.

Lời giải

Chọn B

Câu 59. Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y = (m-1)x + 2$ đi qua điểm $A(-1; 1)$?

A. $m = 0$.B. $m = -1$.C. $m = -2$.D. $m = 2$.**Lời giải**

Chọn D

Câu 60. (Nam Định năm 2023-2024) Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^2$ và $y = -2x + 3$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^2$ và $y = -2x + 3$ là nghiệm của phương trình $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $(1;1)$ và $(-3;9)$.

Câu 61. (Nghệ An năm 2023-2024) Tìm giá trị của b để đường thẳng $y = 2x + b - 1$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1

Lời giải

Vì đường thẳng $y = 2x + b - 1$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1

Nên thay $x = 1; y = 0$ vào $y = 2x + b - 1$ ta được $b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -1$

Vậy $b = -1$

Câu 62. (Ninh Thuận năm 2023-2024) Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - 2$.

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép toán.

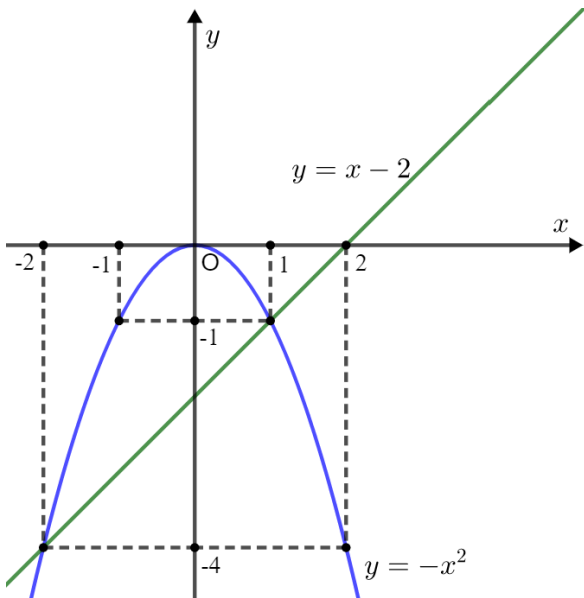
Lời giải

a) Ta có bảng giá trị sau

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4
$y = x - 2$	-4	-3	-2	-1	0

Đồ thị hàm số của (P) qua các điểm: $(-2;-4), (-1;-1), (0;0), (1;-1), (2;-4)$.

Đồ thị hàm số của (d) qua các điểm: $(-2;-4), (-1;-3), (0;-2), (1;-1), (2;0)$.



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$-x^2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

Vậy (P) và (d) hai giao điểm là $(1; -1)$ và $(-2; -4)$.

Câu 63. (Phú Thọ năm 2023-2024) Hàm số nào dưới đây là hàm số bậc nhất đồng biến trên \mathbb{R} ?

A. $y = -2x + 1$

B. $y = 5x + 2$

C. $y = -\frac{1}{3}x + 2$

D. $Y = x^2$

Lời giải

Chọn B

Câu 64. (Phú Thọ năm 2023-2024) Điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = 3x^2$ và có hoành độ bằng 2. tung độ của điểm M bằng

A. 12

B. 6

C. $\frac{4}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn A

Câu 65. (Phú Thọ năm 2023-2024) Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x + 6$ và $y = 3x + m + 1$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung bằng

A. 10

B. -5

C. 5

D. 1

Lời giải

Chọn C

Câu 66. (Phú Thọ năm 2023-2024) Cho parabol (P): $y=ax^2$. Tìm giá trị của a để (P) đi qua M(1;2). Với a tìm được, tìm tọa độ giao điểm của (p) và đường thẳng (d): $y=3x-1$.

Lời giải

vì $M(1;2) \in P : y=ax^2$ nên $a.1^2=2 \Leftrightarrow a=2$

Với $a=2 \Rightarrow (p):y=2x^2$. Pt hoành độ giao điểm của (d) và (p) là $2x^2=3x-1 \Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0$

$$\Leftrightarrow (x-1).(2x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $x=1 \Rightarrow y=2; x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}$. Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (p) là M(1;2) và B($\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$).

Câu 67. (Phú Yên năm 2023-2024) Hàm số nào sau đây không phải là hàm số bậc nhất?

- A.** $y=1-x$ **B.** $y=\frac{x}{2}$ **C.** $y=\frac{2}{x}$ **D.**
 $y=\sqrt{2}(x-\sqrt{2})$

Lời giải

Chọn C

Câu 68. (Phú Yên năm 2023-2024) Đường thẳng $y=-x+3$ đi qua điểm M(m;1).

Khi đó:

- A.** $m=1$ **B.** $m=2$ **C.** $m=3$ **D.** $m=4$

Lời giải

Chọn B

Câu 69. (Phú Yên năm 2023-2024) Cho hai hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$ và $y=ax+b$.

- a) Tìm các hệ số a, b biết đường thẳng $y=ax+b$ đi qua hai điểm M(-2; 2) và N(4; -1).
 b) Với các giá trị a, b vừa tìm được hãy:

- Tìm giao điểm của đường thẳng $y=ax+b$ với đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$ bằng phương pháp đại số.

- Vẽ đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y=ax+b$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

Lời giải

- a) Tìm các hệ số a, b biết đường thẳng $y=ax+b$ đi qua hai điểm M(-2; 2) và N(4; -1).
 + Vì d đi qua điểm M(-2; 2) nên ta có: $-2a+b=2$ (1)

+ Vì d đi qua điểm $N(4; -1)$ nên ta có: $4a + b = -1$ (2)

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \begin{cases} -2a + b = 2 \\ 4a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a = 3 \\ 4a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

Từ đó ta có đường thẳng (d): $y = -\frac{1}{2}x + 1$

- Xét PT hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ với đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$:

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

PT (1) có: $a + b + c = 0$ nên có hai nghiệm: $x_1 = 1; x_2 = -2$

Suy ra giá trị y tương ứng là: $y_1 = \frac{1}{2}; y_2 = 2$

Vậy giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ với đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ là $P(1; \frac{1}{2}); M(-2; 2)$

- HS vẽ đúng đồ thị

Câu 70. (Quảng Nam năm 2023-2024)

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$.

b) Xác định hàm số $y = ax + b$ biết đồ thị của nó đi qua điểm $A(0; -3)$ và cắt đường thẳng (d): $y = 2x - 1$ tại điểm B có hoành độ bằng 4.

Lời giải

+ Xác định đúng tọa độ đỉnh.

+ Xác định đúng tọa độ ít nhất 2 điểm (khác đỉnh) thuộc đồ thị

+ Vẽ đúng đồ thị

+ (d'): $y = ax + b$ đi qua điểm $A(0; -3) \Rightarrow b = -3$

+ Tìm được điểm $B(4; 7)$

+ (d') đi qua điểm $B(4; 7) \Rightarrow 4a - 3 = 7$. Tìm được $a = \frac{5}{2}$.

+ Kết luận: Hàm số $y = \frac{5}{2}x - 3$

Câu 71. (Quảng Ngãi năm 2023-2024) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.

Lời giải

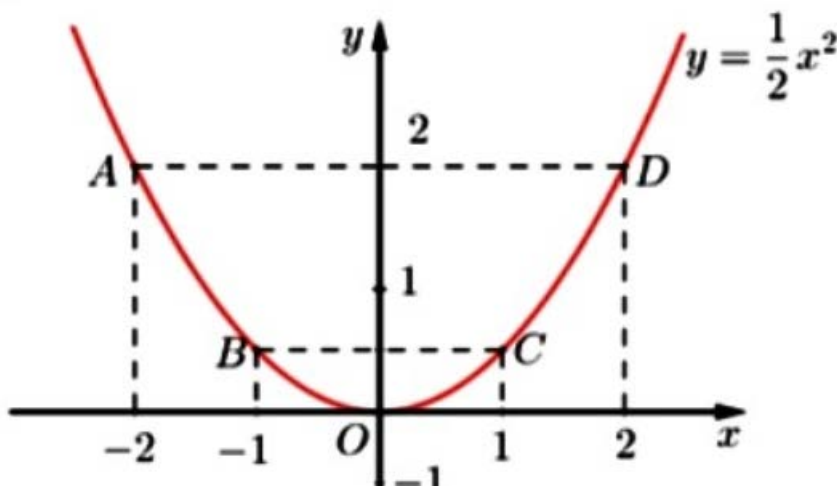
Ta có bảng giá trị sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

\Rightarrow Đồ thị hàm số là đường cong parabol đi qua các điểm $O(0;0); A(-2;2); B(-1;\frac{1}{2}); C(1;\frac{1}{2}); D(2;2)$

Hệ số $a = \frac{1}{2} > 0$ nên parabol có bề cong hướng lên. Đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng.

Ta vẽ được đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ như sau:



Câu 72. (Quảng Ngãi năm 2023-2024) Cho hai đường thẳng $(d): y = 2x + 1$ và $(d'): y = ax + b (a \neq 0)$. Tìm a, b biết (d') song song với (d) và đi qua điểm $A(2;3)$.

Lời giải

Vì (d') song song với (d) nên $\begin{cases} a = 2 \\ b \neq 1 \end{cases}$ hay phương trình (d') có dạng: $y = 2x + b$ với $b \neq 1$

Vì (d) đi qua điểm $A(2;3)$ nên thay tọa độ điểm A vào phương trình đường thẳng (d') ta được:

$$3 = 2 \cdot 2 + b \Leftrightarrow 3 = 4 + b \Leftrightarrow b = -1 \text{ (thỏa mãn } b \neq 1)$$

Vậy $a = 2$ và $b = -1$.

Câu 73. (Quảng Ninh năm 2023-2024) Xác định hệ số a của đồ thị hàm số $y = ax^2$ đi qua điểm $A(1;2)$.

Lời giải

Thay $x = 1, y = 2$ vào hàm số $y = ax^2$ ta có:

$$2 = a \cdot 1^2 \Leftrightarrow a = 2.$$

Vậy $a = 2$.

Câu 74. (Sóc Trăng năm 2023-2024) Cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị là parabol (P) và hàm số $y = x - m$ có đồ thị là đường thẳng (d) (với m là tham số).

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

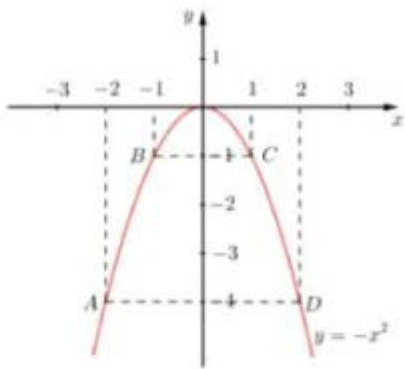
b) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức $T = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1) - 2x_1^2x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4



Phương trình hoành độ giao điểm $-x^2 = x - m \Leftrightarrow x^2 + x - m = 0$ (*)

Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}$

Theo hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$$

Theo đề bài ta có: $T = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1) - 2x_1^2x_2^2$

$$= x_1 + x_2 - 2x_1x_2 - 2x_1^2x_2^2$$

$$= -1 + 2m - 2m^2$$

$$= -2 \left(m - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} \forall m$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ (TMĐK)

Vậy $T_{\min} = \frac{-1}{2}$ khi $m = \frac{1}{2}$.

Câu 75. (Sơn La năm 2023-2024) Hàm số $y = mx - 2$ đồng biến trên \mathbb{R} khi
A. $m > 0$. **B.** $m < 0$. **C.** $m = 0$. **D.** $m \neq 0$.

Lời giải

Hàm số $y = mx - 2$ đồng biến trên \mathbb{R} khi $m > 0$

Câu 76. (Sơn La năm 2023-2024) Đồ thị hàm số $y = 3x^2$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(0;0)$. **B.** $N(1;6)$. **C.** $P(1;1)$. **D.** $Q(0;3)$.

Lời giải

Ta có $0 = 3 \cdot 0^2$, $6 \neq 3 \cdot 1^2$, $1 \neq 3 \cdot 1^2$, $3 \neq 3 \cdot 0^2$ nên đồ thị hàm số $y = 3x^2$ đi qua điểm $M(0;0)$

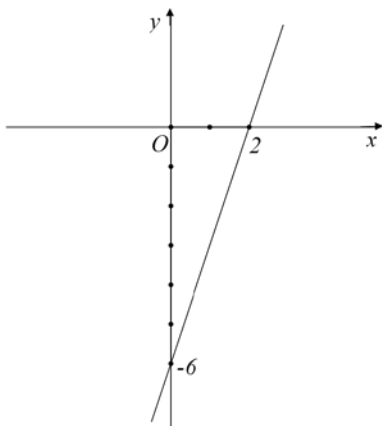
Câu 77. (Sơn La năm 2023-2024) Vẽ đồ thị hàm số: $y = 3x - 6$.

Lời giải

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 3 \cdot 0 - 6 = -6 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = 3x - 6$ đi qua điểm $A(0; -6)$

Cho $y = 0 \Rightarrow 0 = 3 \cdot x - 6 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = 3x - 6$ đi qua điểm $B(2; 0)$

Vẽ đường thẳng d đi qua hai điểm A và B ta được đồ thị hàm số $y = 3x - 6$.



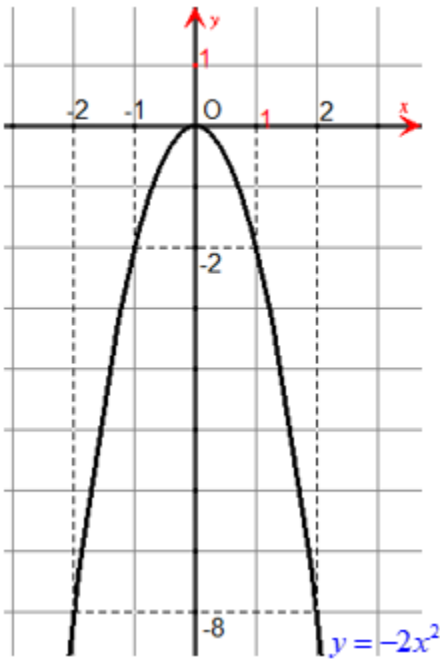
Câu 78. (Tây Ninh năm 2023-2024) Vẽ đồ thị của hàm số $y = -2x^2$

Lời giải

Ta có BGT

x	-2	-1	0	1	2
$y = -2x^2$	-8	-2	0	-2	-8

Đồ thị



Câu 79. (Tây Ninh năm 2023-2024) Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = 5x - 3$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (d) biết điểm M có hoành độ bằng 4.

Lời giải

Thay hoành độ $x = 4$ vào $y = 5x - 3$ ta có:

$$y = 5 \cdot 4 - 3 = 17$$

Vậy tọa độ điểm cần tìm là $M(4; 17)$

Câu 80. (Thái Bình năm 2023-2024) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + m$ (với m là tham số).

a) Tìm m để (d) đi qua điểm $A(2; 8)$.

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = 5$

Lời giải

a) Đường thẳng $(d): y = x + m$ đi qua điểm $A(2; 8) \Leftrightarrow 2 + m = 8 \Leftrightarrow m = 6$.

Vậy $m = 6$ thì (d) đi qua điểm $A(2; 8)$.

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + m$ là: $2x^2 = x + m \Leftrightarrow 2x^2 - x - m = 0$ (*).

Phương trình (*) có: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-m) = 1 + 8m$.

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 8m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{8}$.

Theo định lí Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-m}{2} \end{cases}$$

Theo bài ra: $x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{-m}{2} = 5 \Leftrightarrow 1 + 3m = 10 \Leftrightarrow 3m = 9 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa mãn).

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 81. (Thái Nguyên năm 2023-2024) Cho hàm số bậc nhất $y = 2x + m$, với m là tham số.

a. Hàm số đã cho đồng biến hay nghịch biến trên \mathbb{R} ? Vì sao?

b. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A(1;3)$.

Lời giải

a. Hàm số $y = 2x + m$ đồng biến trên \mathbb{R} .

Vì $x = 2 > 0$

b. Đồ thị hàm số $y = 2x + m$ đi qua điểm $A(1;3)$ khi và chỉ khi

$$3 = 2 \cdot 1 + m \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 82. (Thanh Hóa năm 2023-2024) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b để đường thẳng (d) có hệ số góc bằng 3 và đi qua điểm $M(-1;2)$.

Lời giải

Đường thẳng $(d): y = ax + b$ có hệ số góc là 3 nên $a = 3$

Khi đó: $(d): y = 3x + b$ đi qua $M(-1;2)$ nên thay $x = -1; y = 2$ ta được:

$$2 = 3 \cdot (-1) + b \Leftrightarrow b = 5$$

Vậy $a = 3; b = 5$

Câu 83. (Thừa Thiên Huế năm 2023-2024) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = x - m$. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

Lời giải

Đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2, suy ra:

$$x = 0; y = 2$$

Thay $x = 0; y = 2$ vào (d) , ta được $2 = 0 - m \Leftrightarrow m = -2$

Vậy $m = -2$ thì đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2

Câu 84. (Tiền Giang năm 2023-2024) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 3$.

1. Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

2. Bằng phép tính, tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (d) .

Lời giải

1. $y = 2x + 3 \dots (d)$

x	0	1
$y = 2x + 3$	3	5

$y = x^2 \dots (P)$

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

(HS tự vẽ đồ thị)

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \dots (*)$$

Vì $a - b + c = 1 - (-2) + (-3) = 0$ nên phương trình (*) có nghiệm:

$$x_1 = -1 \Rightarrow y = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$$

$$x_2 = \frac{-c}{a} = 3 \Rightarrow y_2 = 2 \cdot (3) + 3 = 9$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là: $A(-1;1), B(3;9)$

Câu 85. (Thành phố Hồ Chí Minh năm 2023-2024) Cho parabol (P): $y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng (d): $y = x + 4$.

- a) Vẽ đồ thị (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.
- b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Lời giải

a) Xét hàm số: (d): $y = x + 4$

Ta có bảng giá trị:

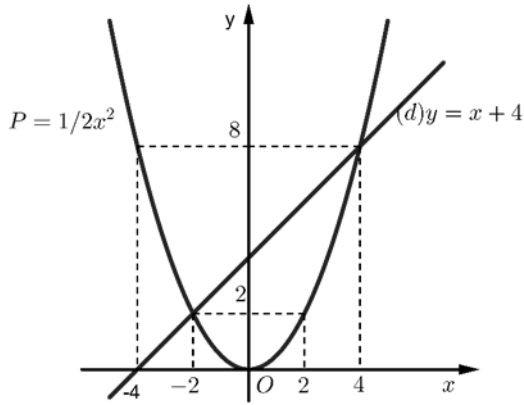
x	0	-4
(d): $y = x + 4$	4	0

Xét hàm số: (P): $y = \frac{x^2}{2}$

Ta có bảng giá trị:



x	-4	-2	0	2	4
$(P): y = \frac{x^2}{2}$	8	2	0	2	8



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) ta có:

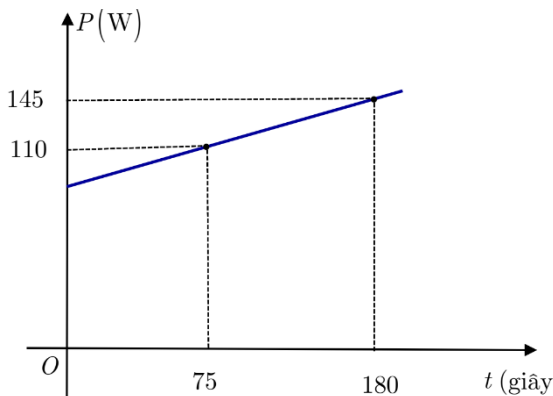
$$\frac{x^2}{2} = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$$

Với $x = -2 \Rightarrow y = 2$.

Với $x = 4 \Rightarrow y = 8$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(-2; 2)$ và $(4; 8)$.

Câu 86. (Thành phố Hồ Chí Minh năm 2023-2024) Chị Lan đun sôi nước bằng ấm điện. Biết rằng mối liên hệ giữa công suất hao phí $P(W)$ của ấm điện và thời gian đun t (giây) được mô hình hóa bởi một hàm số bậc nhất có dạng $P = at + b$ và đồ thị như hình bên.



a) Hãy xác định các hệ số a và b .

b) Nếu đun nước sôi với công suất hao phí là $105(W)$ thì thời gian đun là bao lâu?

Lời giải

a) Quan sát đồ thị ta có:

Đường thẳng $P = at + b$ đi qua điểm $(75;110)$ nên ta có: $75a + b = 110$ (1)

Đường thẳng $P = at + b$ đi qua điểm $(180;145)$ nên ta có: $180a + b = 145$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 75a + b = 110 \\ 180a + b = 145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 85 \end{cases}.$$

Vậy $a = \frac{1}{3}$ và $b = 85$ hay $P = \frac{1}{3}t + 85$ (*).

b) Ta có công suất hao phí là $105(W)$ hay $P = 105$.

Thay $P = 105$ vào phương trình (*) ta được: $105 = \frac{1}{3}t + 85 \Rightarrow t = 60$.

Vậy thời gian đun là 60 giây.

Câu 87. (Trà Vinh năm 2023-2024) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 2$

a. Vẽ đồ thị hai hàm số (P) và (d) .

b. Bằng phép toán, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

Lời giải

a. Vẽ đồ thị hai hàm số (P) và (d) .

*Vẽ đồ thị hàm số $(d): y = -x + 2$

Lấy $x = 0 \Rightarrow y = 2$

$y = 0 \Rightarrow x = 2$

\Rightarrow Đồ thị hàm số $(d): y = -x + 2$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(2;0)$ và $(0;2)$.

*Vẽ đồ thị hàm số $(P): y = x^2$

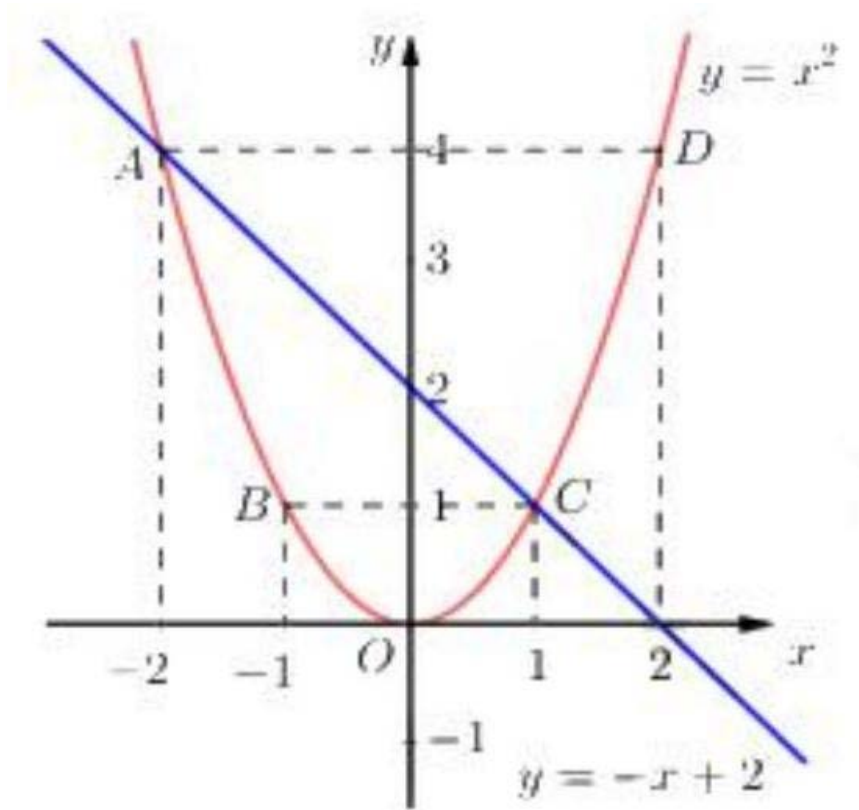
Ta có bảng giá trị sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4



\Rightarrow Đồ thị hàm số là đường cong parabol đi qua các điểm $O(0;0); A(-2;4); B(-1;1); C(1;1); D(2;4)$ Hệ số $a=1 > 0$ nên parabol có bề cong hướng lên. Đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng.

Ta vẽ được đồ thị hàm số $y = x^2$ như sau:



b. Bằng phép toán, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) ta có:

$$x^2 = -x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) - (x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Với $x=1$ ta có: $y=1^2=1$

Với $x=-2$ ta có: $y=(-2)^2=4$

Vậy (P) cắt (d) tại $(-2;4)$ và $(1;1)$

Câu 88. (Vĩnh Phúc năm 2023-2024) Hàm số $y = (m - 2023)x + 2024$ (với m là tham số) đồng biến trên \mathbb{R}

A. $m > 2023$.

B. $m \geq 2024$.

C. $m \leq 2023$.

D. $m < 2024$.

Lời giải

Chọn A

CHỦ ĐỀ 3: PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH**Bài 1.** (Đề vào lớp 10 An Giang 2023-2024)

Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a. $\frac{2}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}x = 4.$

b. $x^4 - 18x^2 + 81 = 0.$

c. $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 2x - 4y = 16 \end{cases}.$

Lời giải

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}x = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}x + 2x = 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2x = 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x = 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \sqrt{2}$

b) Giải phương trình $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

Đặt $t = x^2$ phương trình trở thành

$$t^2 - 18t + 81 = 0$$

$$\Delta' = 9^2 - 81 = 0$$

Phương trình có nghiệm kép $t = -\frac{b'}{a} = 9$

Với $t = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 3; x = -3$

$$\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 2x - 4y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6y = -4 \\ 2x - 4y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = -2 \\ 10y = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = -2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3(-2) = -2 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $x = 4; y = -2$

Bài 2. (Đề vào lớp 10 An Giang 2023-2024)

Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ (m là tham số).

- Giải phương trình khi $m = 0,5$.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải

a) $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$

Với $m = 0,5$ phương trình trở thành $x^2 - x - 2 = 0$

do $a - b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a} = 2$.

b) Để phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu thì $a.c < 0$

$$\Leftrightarrow 1.(2m - 3) < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$$

Bài 3. (Đề vào lớp 10 Bà Rịa Vũng Tàu 2023-2024)

- Giải phương trình $x^2 - 5x + 4 = 0$
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

Lời giải:

a) Ta có $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - x = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 4$.

Cách 2: Ta có $a + b + c = 0$ nên phương trình có một nghiệm $x_1 = 1$ và nghiệm

$$x_2 = \frac{c}{a} = 4.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 4$.

b) Ta có $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 4 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3 - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Bài 4. (Đề vào lớp 10 Bà Rịa Vũng Tàu 2023-2024)

Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 2x + 4} + (x - 1)(x + 3) + 1 = 0$

Lời giải

Ta biến đổi $\sqrt{x^2+2x+4}+(x-1)(x+3)+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+4}+x^2+2x+4-6=0$

Đặt $t = \sqrt{x^2+2x+4}$, ($t > 0$) ta suy ra phương trình $t^2+t-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-3 \end{cases}$ chọn

$$t=2$$

Với $t=2$ ta có $\sqrt{x^2+2x+4}=2 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0$ và $x=2$.

Bài 5. (Đề vào lớp 10 Bắc Giang 2023-2024)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x-2y=9 \\ x-3y=10 \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} 3x-2y=9 \\ x-3y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=9 \\ x=3y+10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(3y+10)-2y=9 \\ x=3y+10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7y=-21 \\ x=3y+10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (1; -3)$.

Bài 6. (Đề vào lớp 10 Bắc Giang 2023-2024)

Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+4m=0$ (1), với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m=2$.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1|-|x_2|=-4$

Lời giải

a) Giải phương trình (1) khi $m=2$.

Với $m=2$ ta có phương trình $x^2-6x+8=0$

Giải phương trình được nghiệm $x = 2; x = 4$

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -4$.

Ta có $x^2 - 2(m+1)x + 4m = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-2m) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2m \end{cases}$$

Do đó phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 1$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = -4$ nên ta có

$$\begin{cases} |2| - |2m| = -4 \\ |2m| - |2| = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| = 3 \\ |m| = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3(TM) \\ m = -3(TM) \end{cases}, (|m| = -1 \text{ vô nghiệm})$$

KL:

Bài 7. (Đề vào lớp 10 Bắc Ninh 2023-2024)

Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ (1) (m là tham số).

1) Giải phương trình (1) khi $m = 0$.

2) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm đối nhau.

Lời giải

2a) Thay $m = 0$ vào phương trình (1) ta được phương trình: $x^2 + 2x - 3 = 0$

Vì $1 + 2 + (-3) = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 1; x_2 = -3$

Vậy khi $m = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1; x_2 = -3$.

2b) Ta có: $\Delta' = [-(m-1)]^2 - 1 \cdot (m-3) = m^2 - 2m + 1 - m + 3 = m^2 - 3m + 4$

Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 4 \geq 0 \rightarrow$ nghiệm đúng với mọi m

\Rightarrow Phương trình luôn có hai nghiệm $x_1; x_2$ với mọi m

Theo định lí Vi-et, ta có: $x_1 + x_2 = 2(m-1)$

Hai nghiệm x_1, x_2 đối nhau $\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow 2(m-1) = 0 \Leftrightarrow m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Vậy khi $m = 1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm đối nhau.

Bài 8. (Đề vào lớp 10 Bến Tre 2023-2024)

a) Giải phương trình: $3x^2 + 4x - 9 = 0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$.

c) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $x^2 - (m+1)x - 2023 = 0$ có hai nghiệm

$$x_1, x_2 \text{ thỏa: } \frac{1}{x_1 - 2023} + \frac{1}{x_2 - 2023} = 1.$$

Lời giải

a) $3x^2 + 4x - 9 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta' &= b'^2 - ac \\ &= 4 - 3 \cdot (-9) = 31 \end{aligned}$$

Do $\Delta' = 31 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-2 + \sqrt{31}}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-2 - \sqrt{31}}{3}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-2 + \sqrt{31}}{3},$

$$x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-2 - \sqrt{31}}{3}$$

b)
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$

c) $x^2 - (m+1)x - 2023 = 0$

$\Delta = [-(m+1)]^2 + 2023 = (m+1)^2 + 2023 > 0$ với $\forall m$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

Theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m+1 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -2023 \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{1}{x_1 - 2023} + \frac{1}{x_2 - 2023} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2 - 2023 + x_1 - 2023}{(x_1 - 2023)(x_2 - 2023)} = 1$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 - 4046 = x_1 x_2 - 2023(x_1 + x_2) + 2023^2$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 - 2024(x_1 + x_2) + 2023^2 + 4046 = 0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$-2023 - 2024(m+1) + 2023^2 + 4046 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2024(m+1) = -4094552$$

$$\Leftrightarrow m+1 = 2023$$

$$\Leftrightarrow m = 2022 \quad (\text{nhận})$$

Vậy $m = 2022$ thì phương trình $x^2 - (m+1)x - 2023 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa:

$$\frac{1}{x_1 - 2023} + \frac{1}{x_2 - 2023} = 1.$$

Bài 9. (Đề vào lớp 10 Bình Định 2023-2024)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

b) Cho phương trình: $x^2 - (m+3)x + \frac{1}{4}m^2 + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn điều kiện

$$2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1 x_2 = 34.$$

Lời giải

a)
$$\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 6 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(1; -\frac{4}{3}\right)$

b) Phương trình có $\Delta = (m+3)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{4}m^2 + 1\right) = m^2 + 6m + 9 - m^2 - 4 = 6m + 5$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow 6m + 5 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{5}{6}$

Theo hệ thức Vi - ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 3 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{4}m^2 + 1 \end{cases}$$

Theo đề ta có: $2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1 x_2 = 34$

$$\Leftrightarrow 2.(m+3)^2 - 8.\left(\frac{1}{4}m^2 + 1\right) = 34 \Leftrightarrow 2m^2 + 12m + 18 - 2m^2 - 8 - 34 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12m - 24 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (TMĐK)}. \text{ Vậy } m = 2 \text{ là giá trị cần tìm.}$$

Bài 10. (Đề vào lớp 10 Bình Dương 2023-2024)

Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

1) $x^2 + x - 6 = 0$

2) $x - 3\sqrt{x} = 4$

3) $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

Lời giải

1) Giải phương trình $x^2 + x - 6 = 0$.

$\Delta = 25 > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2; x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3.$$

Tập nghiệm phương trình là $S = \{2; -3\}$.

2) Giải phương trình $x - 3\sqrt{x} = 4$.

Đặt $t = \sqrt{x} (x \geq 0, t \geq 0)$ phương trình trở thành $t^2 - 3t - 4 = 0$.

Ta có $1 - (-3) - 4 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $t_1 = -1$ (loại), $t_2 = 4$ (nhận).

Với $t = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$.

Tập nghiệm phương trình là $S = \{16\}$.

3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = -3 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2 + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Tập nghiệm hệ phương trình là $S = \{(1; 2)\}$.

Bài 11. (Đề vào lớp 10 Bình Dương 2023-2024)

Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + m = 0$ với m là tham số.

1) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

2) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 mà không phụ thuộc vào tham số m .

Lời giải

1) Phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi

$$\Delta' = m^2 + 2m + 1 - m^2 - m = m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1.$$

Vậy $m > -1$ thì phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

2) $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + m = 0$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{x_1 + x_2}{2} - 1 \\ x_1 x_2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - 1\right)^2 + \frac{x_1 + x_2}{2} - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$(x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2) - 4x_1 x_2 = 0$ là hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 mà không phụ thuộc vào tham số m .

Bài 12. (Đề vào lớp 10 Bình Phước 2023-2024)

Không sử dụng máy tính giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$$

Lời giải

Ta có

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3y = 15 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 - 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Bài 13. (Đề vào lớp 10 Bình Phước 2023-2024)

Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình khi $m = 0$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức

$$P = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 x_2)^2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất}$$

Lời giải

Giải phương trình khi $m = 0$.

Khi $m = 0$ ta có phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 + 12 = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{2+4}{2} = 3, x_2 = \frac{2-4}{2} = -1$$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức

$$P = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 x_2)^2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

$$\text{Ta có } \Delta = (-2)^2 - 4(m-3) = -4m + 16$$

Để phương trình có hai nghiệm thì

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -4m + 16 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4.$$

$$\text{Theo hệ thức Viét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = m - 3 \end{cases}.$$

Tacó

$$P = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + (x_1 x_2)^2 = 2^2 - 2(m-3) + (m-3)^2$$

$$P = m^2 - 8m + 19 = (m-4)^2 + 3 \geq 3.$$

Bài 14. (Đề vào lớp 10 Bình Phước 2023-2024)

Không sử dụng máy tính, giải hệ phương trình : $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 4x - y = 5 \end{cases}.$

Lời giải

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 4x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ 4x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (2; 3)$

Bài 15. (Đề vào lớp 10 Bình Thuận 2023-2024)

Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$

b) $\begin{cases} -x + 3y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$

Lời giải

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$



Ta có: $\Delta = 2^2 - 4.1.(-3) = 16 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-2-4}{2.1} = -3$$

$$x_2 = \frac{-2+4}{2.1} = 1$$

Vậy tập nghiệm phương trình $S = \{-3; 1\}$

Cách khác:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Có $a + b + c = 1 + 2 + (-3) = 0$

Nên $x_1 = 1$

$$x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$$

Vậy tập nghiệm phương trình $S = \{-3; 1\}$

b)
$$\begin{cases} -x + 3y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 8 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x + 2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm hệ phương trình $S = \{(1; 2)\}$

Bài 16. (Đề vào lớp 10 Cần Thơ 2023-2024)

Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $3x^2 + 5x - 12 = 0.$

b)
$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

c) Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 13.$

Lời giải

a) $3x^2 + 5x - 12 = 0$

Ta có $\Delta = 5^2 - 4.3.(-12) = 169 > 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{69}}{2.3} = \frac{4}{3}; x_2 = \frac{-5 - \sqrt{69}}{2.3} = -3$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -3; \frac{4}{3} \right\}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 14 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 20 \\ y = 2x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (4; 1)$

c) Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 13.$$

$$x^2 - (2m+1)x + m^2 + 1 = 0$$

Ta có $\Delta = [-(2m+1)]^2 - 4.1.(m^2 + 1) = 4m - 3$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0$

$$\Leftrightarrow 4m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{4}$$

Theo hệ thức Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + 1 \end{cases}$

Theo đề bài, ta có: $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 13.$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 + 1 + x_2^2 + 2x_2 + 1 = 13.$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1 + x_2) + 2 = 13$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1 + x_2) - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2m+1)^2 - 2(m^2 + 1) + 2(2m+1) - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 8m - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (Nhaän)} \\ m = -5 \text{ (Loai)} \end{cases}$$

Vậy $m = 1$ thỏa mãn đề bài

Bài 17. (Đề vào lớp 10 Cầu Bằng 2023-2024)

a) Giải phương trình: $x^2 - 6x + 5 = 0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có $a + b + c = 1 - 6 + 5 = 0$

Áp dụng định lí Viet, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = 1, x_2 = 5$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 3 & (1) \\ 2x + y = 5 & (2) \end{cases}$

Trừ vế theo vế phương trình (2) cho phương trình (1) ta được $x = 2$.

Thay vào phương trình (1) ta có $y = 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (2; 1)$.

Bài 18. (Đề vào lớp 10 Đà Nẵng 2023-2024)

Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2m + 5 = 0$ (*), với m là tham số.

a) Giải phương trình (*) khi $m = 1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } \sqrt{4x_1^2 + 4mx_1 + m^2} + \sqrt{x_2^2 + 4mx_2 + 4m^2} = 7m + 2.$$

Lời giải

Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2m + 5 = 0$ (*), với m là tham số.

a) Giải phương trình (*) khi $m = 1$.

Thay $m = 1$ vào phương trình (*) ta được:

$$x^2 - 2(1+1)x + 1 - 2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy khi $m = 1$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm phân

$$\text{biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } \sqrt{4x_1^2 + 4mx_1 + m^2} + \sqrt{x_2^2 + 4mx_2 + 4m^2} = 7m + 2.$$

Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 2m + 5) = m^2 + 2m + 1 - m^2 + 2m - 5 = 4m - 4$

Để phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Theo đề cho: $\sqrt{4x_1^2 + 4mx_1 + m^2} + \sqrt{x_2^2 + 4mx_2 + 4m^2} = 7m + 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x_1 + m)^2} + \sqrt{(x_2 + 2m)^2} = 7m + 2$$

$$\Leftrightarrow |2x_1 + m| + |x_2 + 2m| = 7m + 2$$

Áp dụng định lí Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) = 2m + 2 > 0 \text{ (do } m > 1) \\ x_1 x_2 = m^2 - 2m + 5 = (m-1)^2 + 4 > 0 \forall m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \forall m > 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + m > 0 \\ x_2 + 2m > 0 \end{cases} \forall m > 1$$

Khi đó ta có: $|2x_1 + m| + |x_2 + 2m| = 7m + 2 \Leftrightarrow 2x_1 + m + x_2 + 2m = 7m + 2$

$$\Leftrightarrow 2x_1 + x_2 = 4m + 2 \Leftrightarrow 2m + 2 + x_1 = 4m + 2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2m \Rightarrow x_2 = 2m + 2 - x_1 = 2$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 = 4m = m^2 - 2m + 5 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0$$

Ta có $a + b + c = 1 - 6 + 5 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} m_1 = 1 \text{ (ktm)} \\ m_2 = 5 \text{ (tm)} \end{cases}$

Vậy $m = 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bài 19. (Đề vào lớp 10 Đắk Lắk 2023-2024)

a) Giải phương trình: $x^2 + 4x + 3 = 0$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

Lời giải

a) Ta có: $a = 1, b = 4, c = 3; a - b + c = 0$

Phương trình có nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = -3$.

b) Ta có:
$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 3)$.

Bài 20. (Đề vào lớp 10 Đồng Nai 2023-2024)

1) Giải phương trình $x^2 + 8x + 15 = 0$.

2) Giải phương trình $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

3) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$
.

4) Cho phương trình $3x^2 + 5x - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $T = 6x_1 - 7x_1x_2 + 6x_2$.

Lời giải

1) *Cách 1:* Giải phương trình $x^2 + 8x + 15 = 0$.

$$a = 1; b = 8; c = 15$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4.1.15 = 4 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + 2}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - 2}{2} = -5$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-3; -5\}$.

Cách 2: Giải phương trình $x^2 + 8x + 15 = 0$.

$$a = 1; b' = 4; c = 15$$

$$\Delta' = (b')^2 - ac = 4^2 - 1.15 = 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{1} = 1.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-4 + 1}{1} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-4 - 1}{1} = -5$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-3; -5\}$.

Cách 3: Giải phương trình $x^2 + 8x + 15 = 0$.

$$x^2 + 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 5x + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3x) + (5x + 15) = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) + 5(x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ x + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -5 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-3; -5\}$.

2) *Cách 1:* Giải phương trình $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ (1).

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$).

Khi đó phương trình (1) trở thành $t^2 - 3t - 4 = 0$ (2).

Ta có $a - b + c = 1 - (-3) + (-4) = 0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm $t_1 = -1$ (loại); $t_2 = 4$ (nhận).

Với $t = t_2 = 4$ ta có $x^2 = 4$. Suy ra $x_1 = 2$; $x_2 = -2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \{-2; 2\}$.

Cách 2: Giải phương trình $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ (1).

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$).

Khi đó phương trình (1) trở thành $t^2 - 3t - 4 = 0$ (2).

$$a = 1; b = -3; c = -4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.1.(-4) = 25 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + 5}{2} = 4 \text{ (nhận)}$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 5}{2} = -1 \text{ (loại)}$$

Với $t = t_1 = 4$ ta có $x^2 = 4$. Suy ra $x_1 = 2$; $x_2 = -2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \{-2; 2\}$.

Cách 3: Giải phương trình $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$. (1)

$$\text{Ta có } x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 4x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x^4 + x^2) - (4x^2 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 1) - 4(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \text{ (2)} \\ x^2 - 4 = 0 \text{ (3)} \end{cases}$$

Giải phương trình (2): $x^2 + 1 = 0$

(vô nghiệm vì với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $x^2 + 1 > 0$)

Giải phương trình (3): $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \{-2; 2\}$.

3) *Cách 1:* Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 15 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 5 - 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (5; 1)$.

Cách 2: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x = 3y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(3y + 2) + 3y = 13 \\ x = 3y + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y + 4 + 3y = 13 \\ x = 3y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y = 9 \\ x = 3y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (5; 1)$.

4) *Cách 1:* Cho phương trình $3x^2 + 5x - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $T = 6x_1 - 7x_1x_2 + 6x_2$.

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $3x^2 + 5x - 1 = 0$ nên

theo hệ thức Vi-ét thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-5}{3} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

$$T = 6x_1 - 7x_1x_2 + 6x_2 = 6(x_1 + x_2) - 7x_1x_2$$

$$= 6\left(\frac{-5}{3}\right) - 7\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-23}{3}$$

Cách 2: Cho phương trình $3x^2 + 5x - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $T = 6x_1 - 7x_1x_2 + 6x_2$.

Giải được hai nghiệm của phương trình $3x^2 + 5x - 1 = 0$

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{37}}{6}; x_2 = \frac{-5 - \sqrt{37}}{6}$$

$$\begin{aligned} T &= 6x_1 - 7x_1x_2 + 6x_2 = 6 \cdot \frac{-5 + \sqrt{37}}{6} - 7 \cdot \frac{-5 + \sqrt{37}}{6} \cdot \frac{-5 - \sqrt{37}}{6} + 6 \cdot \frac{-5 - \sqrt{37}}{6} \\ &= \frac{-23}{3} \end{aligned}$$

Bài 21. (Đề vào lớp 10 Đồng Tháp 2023-2024)

a) Giải phương trình $x(x-4)+3=0$.

b) Cho phương trình $x^2 - 5x - 14 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x_1 + 1}{x_2} + \frac{x_2 + 1}{x_1}$.

Lời giải

a) Giải phương trình $x(x-4)+3=0$.

$$x(x-4)+3=0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

Do $a+b+c=0$

Nên phương trình có nghiệm $x = 1$

và nghiệm còn lại $x = \frac{c}{a} = 3$.

b) Cho phương trình $x^2 - 5x - 14 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x_1 + 1}{x_2} + \frac{x_2 + 1}{x_1}$.

Theo định lí Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1x_2 = -14 \end{cases}$

$$P = \frac{x_1(x_1 + 1) + x_2(x_2 + 1)}{x_1x_2}$$

$$P = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + (x_1 + x_2)}{x_1x_2}$$

$$P = \frac{5^2 + 28 + 5}{-14} = -\frac{29}{7}$$

Bài 22. (Đề vào lớp 10 Hà Nam 2023-2024)

1. Giải phương trình $x^2 + 2x - 15 = 0$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(4-2y) = 7 + y - 2xy \\ 2x - 14 = 2(y-3) \end{cases}$.

Lời giải

1) $\Delta' = 1 + 15 = 16 > 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = -1 + \sqrt{16} = 3$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{16} = -5$$

$$2) \begin{cases} x(4-2y) = 7 + y - 2xy \\ 2x - 14 = 2(y-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y = 7 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y = 7 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; -3)$

Bài 23. (Đề vào lớp 10 Hà Nội 2023-2024)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{2}{x-3} - 3y = 1 \\ \frac{3}{x-3} + 2y = 8 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} \frac{2}{x-3} - 3y = 1 \\ \frac{3}{x-3} + 2y = 8 \end{cases} \quad \text{điều kiện: } x \neq 3.$$

Đặt $\frac{1}{x-3} = a$ hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} 2a - 3y = 1 \\ 3a + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Với $a = 2 \Rightarrow \frac{1}{x-3} = 2 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{7}{2}; 1\right)$.

Bài 24. (Đề vào lớp 10 Hà Tĩnh 2023-2024)

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = -1. \end{cases}$$

b) Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn:

$$\frac{x_1 x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1 x_2)} = \frac{1}{3}.$$

Lời giải

a) Ta có
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3 - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$
 Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$.

b) Ta có $\Delta' = m^2 - (m^2 - m - 1) = m + 1$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

Theo định lí Viet ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - m - 1 \end{cases}$$

Ta có
$$\frac{x_1 x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1 x_2)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x_1 x_2 + 3}{(x_1 + x_2)^2 + 2} = \frac{1}{3}$$

Thay vào ta được phương trình
$$\frac{m^2 - m - 1 + 3}{(2m)^2 + 2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{m^2 - m + 2}{4m^2 + 2} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(m^2 - m + 2) = 4m^2 + 2 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta có $m = 1$ thỏa mãn bài toán.

Bài 25. (Đề vào lớp 10 Hải Dương 2023-2024)

1. Giải phương trình:
$$\frac{2x+1}{5} = \frac{5-x}{3}$$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$$

Lời giải

$$1) \text{ Ta có } \frac{2x+1}{5} = \frac{5-x}{3} \Leftrightarrow 3(2x+1) = 5(5-x)$$

$$\Leftrightarrow 6x+3 = 25-5x \Leftrightarrow 11x = 22$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

$$2) \text{ Ta có } \begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x+5y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x+5y=25 \\ 2x+5y=12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x=13 \\ 2x+5y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$.

Bài 26. (Đề vào lớp 10 Hải Phòng 2023-2024)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} 2(x-3)+3(3x+y)=-11 \\ (x-3)-2(3x+y)=5 \end{cases}.$$

Lời giải

$$\begin{cases} 2(x-3)+3(3x+y)=-11 \\ (x-3)-2(3x+y)=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-3)+6(3x+y)=-22 \\ 3(x-3)-6(3x+y)=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-3)=-7 \\ (x-3)-2(3x+y)=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=-1 \\ (x-3)-2(3x+y)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ (2-3)-2(3 \cdot 2+y)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 6+y=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-9 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (2; -9)$.

Bài 27. (Đề vào lớp 10 Hải Phòng 2023-2024)

1. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 9 = 0$ (1) (x là ẩn, m là tham số).

a) Giải phương trình (1) khi $m = -3$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 - x_2 = 2m - 10$.

Lời giải

a) Với $m = -3$ phương trình (1) có dạng $x^2 + 8x = 0$.

$$\Leftrightarrow x(x+8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-8 \end{cases}$$

Vậy khi $m = -3$, phương trình có nghiệm là $x = 0; x = -8$.

b) Có $\Delta' = [-(m-1)]^2 - m^2 + 9 = m^2 - 2m + 1 - m^2 + 9 = -2m + 10$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m + 10 > 0 \Leftrightarrow m < 5$

Theo hệ thức Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) & (2) \\ x_1 x_2 = m^2 - 9 & (3) \end{cases}$

Theo đề bài ta có: $x_1 - x_2 = 2m - 10$, kết hợp với (2) ta được $x_1 = 2m - 6; x_2 = 4$

Thay $x_1 = 2m - 6; x_2 = 4$ vào (3) ta được: $(2m - 6)4 = m^2 - 9 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 15 = 0$.

Giải được $m = 3$ (thỏa mãn), $m = 5$ (loại)

Vậy với $m = 3$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1 - x_2 = 2m - 10.$$

Bài 28. (Đề vào lớp 10 Hòa Bình 2023-2024)

Giải các phương trình:

a) $2x + 1 = 5$

b) $x^2 + 2x - 3 = 0$

c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

d) Cho phương trình: $x^2 - 8x + m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) + 2087$ đạt giá trị nhỏ nhất.

e) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 3xy + y^2 + 5x + 3y = 11$.

Lời giải

a) Tìm được $x = 2$

b) Tìm đúng 2 nghiệm $x_1 = 1; x_2 = -3$

c) Tìm được nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

d) $\Delta' = 16 - (m - 1) = 17 - m$

Phương trình đã cho có hai nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 17$

Áp dụng hệ thức Viet, ta có: $x_1 + x_2 = 8; x_1 x_2 = m - 1$



$$P = (x_1x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 + 2088 = (x_1x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 + 2088$$

$$= (m-1)^2 - 8^2 + 2(m-1) + 2088 = m^2 + 2023 \geq 2023.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = 0$ (TM)

e)

$$2x^2 + 3xy + y^2 + 5x + 3y = 11$$

$$\Leftrightarrow (x+y+2)(2x+y+1) = 13$$

Vì x, y nguyên nên $(x; y) = (13; -14); (-12; 23); (-11; 8); (13; -28)$

Bài 29. (Đề vào lớp 10 Khánh Hòa 2023-2024)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 9 \\ y = 8 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

Bài 30. (Đề vào lớp 10 Kon Tum 2023-2024)

Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) Giải phương trình $2x - 6 = 0$.

b) $x^2 + 3x - 4 = 0$;

c) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$.

Lời giải

a)

$$2x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3\}$

b) $x^2 + 3x - 4 = 0$ (1)

Ta có: $a + b + c = 1 + 3 - 4 = 0$

Nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = -4$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; -4\}$

$$c) \begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=12 \\ x+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 3+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 1)$

Bài 31. (Đề vào lớp 10 Lạng Sơn 2023-2024)

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$.

b) Giải phương trình: $x^2 - 9x + 14 = 0$.

c) Cho phương trình: $x^2 - (m+2)x + m - 3 = 0$ (*), với m là tham số.

1) Chứng minh rằng phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

2) Tìm m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + 2x_1x_2 > 5.$$

Lời giải

a) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 3x-2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=10 \\ 3x-2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=15 \\ y=5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là: $S = \{(3; 2)\}$.

b) Giải phương trình: $x^2 - 9x + 14 = 0$.

Ta có $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 14 = 81 - 56 = 25 > 0$

\Rightarrow phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-(-9) - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = 2; x_2 = \frac{-(-9) + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = 7.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là: $S = \{2; 7\}$.

c) Cho phương trình: $x^2 - (m+2)x + m - 3 = 0$ (*), với m là tham số.

1) Chứng minh rằng phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

2) Tìm m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + 2x_1x_2 > 5.$$

Xét phương trình $x^2 - (m+2)x + m - 3 = 0$ (*), với m là tham số.

1) Phương trình (*) có: $\Delta = [-(m+2)]^2 - 4.1.(m-3) = m^2 + 4m + 4 - 4m + 12 = m^2 + 16 > 0$ với mọi m . Vậy (*) có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

2) Với mọi m thì phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa hệ thức Vi-et, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 3. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Theo bài ra: } x_1 + x_2 + 2x_1x_2 > 5 &\Leftrightarrow m + 2 + 2(m - 3) > 5 \Leftrightarrow m + 2 + 2m - 6 > 5 \\ &\Leftrightarrow 3m > 9 \Leftrightarrow m > 3. \end{aligned}$$

Vậy $m > 3$ là các giá trị cần tìm.

Bài 32. (Đề vào lớp 10 Lào Cai 2023-2024)

a) Giải phương trình sau: $3x^2 + x - 4 = 0$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 4y = 8 \end{cases}$

c) Cho phương trình $x^2 + 2mx + m^2 + m - 2 = 0$ (1) (m là tham số). Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức P đạt giá trị lớn nhất với

$$P = -x_1^2 + (2m+3)x_2 + 3x_1 + x_1x_2.$$

Lời giải

a) Lời giải 1.

$$\text{Ta có } \Delta = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 49 > 0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{49}}{6} = 1, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{6} = -\frac{4}{3}$$

Lời giải 2.

$$\text{Ta có } a = 3, b = 1, c = -4 \Rightarrow a + b + c = 3 + 1 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \text{phương trình có nghiệm } x_1 = 1 \text{ và } x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{4}{3}$$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 4y = 8 \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-4y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y=-5 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (4; -1)$

c) Ta có: $\Delta' = m^2 - m^2 - m + 2 = -m + 2$

Để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Áp dụng định lý Vi - ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m & (2) \\ x_1 x_2 = m^2 + m - 2 & (3) \end{cases}$

Do x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên ta có:

$$x_1^2 + 2mx_1 + m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow -x_1^2 = 2mx_1 + m^2 + m - 2 \text{ thay vào biểu thức } P \text{ ta có:}$$

$$\begin{aligned} P &= 2mx_1 + m^2 + m - 2 + (2m + 3)x_2 + 3x_1 + x_1 x_2 \\ &= 2mx_1 + m^2 + m - 2 + 2mx_2 + 3x_2 + 3x_1 + x_1 x_2 \\ &= (2m + 3)(x_1 + x_2) + x_1 x_2 + m^2 + m - 2. \end{aligned}$$

Thay (2), (3) vào P ta có:

$$\begin{aligned} P &= (2m + 3)(-2m) + m^2 + m - 2 + m^2 + m - 2 \\ &= -4m^2 - 6m + 2m^2 + 2m - 4 \\ &= -2m^2 - 4m - 4 \\ &= -2(m + 1)^2 - 2. \end{aligned}$$

$$\forall (m + 1)^2 \geq 0 \Rightarrow -2(m + 1)^2 - 2 \leq -2.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $m = -1$.

Bài 33. (Đề vào lớp 10 Long An 2023-2024)

a) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3$.

b) Giải phương trình $3x^2 - 7x + 4 = 0$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$.

d) Cho phương trình $x^2 - 2x + m + 3 = 0$ (x là ẩn số, m là tham số). Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = -4$.

Lời giải

a) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2} = 3$

$$\Leftrightarrow |x-1|=3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ x-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \end{cases}$$

b) Ta có $a+b+c=3+(-7)+4=0$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=1$ và $x_2=\frac{4}{3}$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x+y=9 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x=10 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2 \cdot 2 - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(2;3)$.

d) Ta có: $\Delta = -8 - 4m$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0$

$$\Leftrightarrow m < -2.$$

Theo hệ thức Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m + 3 \end{cases}$

Theo đề bài $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = -4$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2) = -4 \Leftrightarrow (m+3) \cdot 2 = -4$$

$$\Leftrightarrow m = -5 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m = -5$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = -4$.

Bài 34. (Đề vào lớp 10 Nam Định 2023-2024)

a) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 6m - 4 = 0$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 - x_2^2 = 3x_1x_2(x_2 - x_1)$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+3y=4 \\ \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y} = 1. \end{cases}$

c) Giải phương trình $x^2 + 4x = 2\sqrt{1+3x} + \sqrt{2x-1}$.

Lời giải

a) Ta có $\Delta' = (m-2)^2 + 1 > 0 \forall m$.

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $\forall m$.

Theo hệ thức Vi-et ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = 6m - 4. \end{cases}$$

Ta có $x_1^2 - x_2^2 = 3x_1 x_2 (x_2 - x_1) \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 3x_1 x_2) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + 3x_1 x_2 = 0$ (do x_1, x_2 phân biệt)

$\Leftrightarrow 2(m+1) + 3(6m-4) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$. Vậy $m = \frac{1}{2}$.

b) ĐKXD: $x \neq 4; y \neq 0$

PT(1) $\Leftrightarrow x - 4 = -3y$

Thay $x - 4 = -3y$ vào PT(2) ta có $\frac{1}{-3y} + \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 2$.

Đối chiếu với ĐKXD ta có $(x; y) = \left(2; \frac{2}{3}\right)$ là nghiệm của hệ.

c) ĐKXD:
$$\begin{cases} 1+3x \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

Ta có: $x^2 + 4x = 2\sqrt{1+3x} + \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 2(\sqrt{1+3x} - 2) + (\sqrt{2x-1} - 1)$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+5) = \frac{2(1+3x-4)}{\sqrt{1+3x}+2} + \frac{2x-1-1}{\sqrt{2x-1}+1}$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+5) = \frac{6(x-1)}{\sqrt{1+3x}+2} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}$

$\Leftrightarrow (x-1) \left(x+5 - \frac{6}{\sqrt{1+3x}+2} - \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} \right) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (tm)} \\ x+5 = \frac{6}{\sqrt{1+3x}+2} + \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} \end{cases}$

Xét phương trình $x+5 = \frac{6}{\sqrt{1+3x}+2} + \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}$ (*)

Do $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{1+3x}+2} + \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} < \frac{6}{2} + \frac{2}{1} = 5$ và $x+5 \geq \frac{11}{2} > 5$

nên phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 35. (Đề vào lớp 10 Nghệ An 2023-2024)

a) Giải phương trình $x^2 + 3x - 10 = 0$

b) Cho biết phương trình $x^2 - 5x + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 .

Không giải phương trình, tính giá trị biểu thức $T = \frac{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}{x_1^2 + 5x_2}$

c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 4 \\ x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1} = x^2y^2 - 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải

a) Giải phương trình $x^2 + 3x - 10 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49 > 0$$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2} = -5;$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2} = 2$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-5; 2\}$

b) Phương trình $x^2 - 5x + 3 = 0$ có $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 = 13 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo định lý Viets ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 3 \end{cases}$$

Vì $x_1 + x_2 = 5 > 0$; $x_1 \cdot x_2 = 3 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm dương và do x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên $x_1^2 - 5x_1 + 3 = 0 \Rightarrow x_1^2 = 5x_1 - 3$

Do đó

$$T = \frac{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}{x_1^2 + 5x_2}$$

$$T = \frac{x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 + 1}{5(x_1 + x_2) - 3} = \frac{3 + 5 + 1}{5 \cdot 5 - 3} = \frac{9}{22}$$

Bài 36. (Đề vào lớp 10 Ninh Thuận 2023-2024)

Giải phương trình: $4x - 3 = 2 - x$

Lời giải

ĐK: $x \in \mathbb{R}$.

$$4x - 3 = 2 - x \Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $S = \{1\}$.

Bài 37. (Đề vào lớp 10 Phú Thọ 2023-2024)

a) Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 5m + 15 \\ x = y = 3m + 9 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$. Tìm giá trị của tham số m để biểu thức $Q = xy - 2x + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Giải phương trình: $8x^2 - 13x + 11 = \frac{2}{x} + \left(1 + \frac{3}{x}\right)\sqrt[3]{3x^2 - 2}$.

Lời giải

a) Xét hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 5m + 15 \\ x = y = 3m + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2m + 6 \\ x + y = 3m + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 3 \\ y = 2m + 6 \end{cases}$

xét $Q = xy - 2x + 1 = (m + 3) \cdot (2m + 6) - 2(m + 3) - 1 = 2m^2 + 10m + 11$

$$\Rightarrow Q = 2\left(1 + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2} \quad . \quad \text{Từ đó suy ra } \min Q = -\frac{3}{2} \text{ khi } m = -\frac{5}{2}$$

b) $8x^2 - 13x + 11 = \frac{2}{x} + \left(1 + \frac{3}{x}\right)\sqrt[3]{3x^2 - 2}$. (ĐKXD: $x \neq 0$)

$$\text{PT đã cho} \Leftrightarrow x(8x^2 - 13x + 11) = 2 + (x + 3)\sqrt[3]{3x^2 - 2}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 13x^2 + 11x = 2 + (x + 3)\sqrt[3]{3x^2 - 2}$$

$$\Leftrightarrow (8x^3 - 15x^2 + 6x + 1) + (x + 3)(2x - 1 - \sqrt[3]{3x^2 - 2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2(8x + 1) + \frac{(x + 3)[(2x - 1)^3 - (3x^2 - 2)]}{(2x - 1)^2 + (2x - 1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} + \sqrt[3]{(3x^2 - 2)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2(8x + 1) \left[1 + \frac{(x + 3)}{(2x - 1)^2 + (2x - 1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} + \sqrt[3]{(3x^2 - 2)^2}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(8x+1) \left[\frac{(x+3) + (2x-1)^2 + (2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2} + \sqrt[3]{(3x^2-2)^2}}{(2x-1)^2 + (2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2} + \sqrt[3]{(3x^2-2)^2}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(8x+1) \frac{\left[\sqrt[3]{3x^2-2} + \frac{1}{2}(2x-1) \right]^2 + \frac{1}{4} \left[12 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{41}{3} \right]}{(2x-1)^2 + (2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2} + \sqrt[3]{(3x^2-2)^2}} = 0$$

Để thấy $\frac{\left[\sqrt[3]{3x^2-2} + \frac{1}{2}(2x-1) \right]^2 + \frac{1}{4} \left[12 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{41}{3} \right]}{(2x-1)^2 + (2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2} + \sqrt[3]{(3x^2-2)^2}} \geq 0, \forall x \neq 0$

Từ đó suy ra $(x-1)^2(8x+1) = 0 \Rightarrow x \in \left\{ 1; -\frac{1}{8} \right\}$. vậy tập nghiệm $S = \left\{ 1; -\frac{1}{8} \right\}$

Bài 38. (Đề vào lớp 10 Phú Yên 2023-2024)

Giải các phương trình, hệ phương trình sau:

a) $2x^2 + 5x + 2 = 0$ b) $\begin{cases} xy = -3 \\ 2x + 3y + 2xy = 0 \end{cases}$

Lời giải

Giải PT: $2x^2 + 5x + 2 = 0$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$$

Suy ra: Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = -2$

$$\begin{cases} xy = -3 \\ 2x + 3y + 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -3 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -3(1) \\ x = \frac{-3}{2}y + 3(2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được: $y\left(\frac{-3}{2}y + 3\right) = -3$

$$\Leftrightarrow y(-3y + 6) = -6$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 - 6y - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y - 2 = 0$$

$\Delta = 4 + 2 = 6$ nên PT có hai nghiệm

$$y_1 = \frac{1 + \sqrt{6}}{2}; y_2 = \frac{1 - \sqrt{6}}{2}$$

Suy ra giá trị x tương ứng là:

$$x_1 = \frac{9-3\sqrt{6}}{4}; x_2 = \frac{9+3\sqrt{6}}{4}$$

Vậy hệ PT đã cho có hai nghiệm: $(x; y) = \left(\frac{9-3\sqrt{6}}{4}; \frac{1+\sqrt{6}}{2}\right); (x; y) = \left(\frac{9+3\sqrt{6}}{4}; \frac{1-\sqrt{6}}{2}\right)$

Bài 39. (Đề vào lớp 10 Quảng Bình 2023-2024)

1. Giải phương trình $x^2 + 3x - 4 = 0$.

2. Cho phương trình $x^2 + 3x + m - 3 = 0$, (m là tham số).

a. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm.

b. Trong trường hợp phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 , tìm tất cả các giá trị của m để x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $2x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 2$.

Lời giải

1) Ta thấy $a + b + c = 1 + 3 - 4 = 0$

nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = -4$.

2a) Phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow 9 - 4(m - 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 21 - 4m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{21}{4}. \text{ Vậy } m \leq \frac{21}{4}.$$

2b) Khi $m \leq \frac{21}{4}$ thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2

$$\text{Theo Vi-ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1x_2 = m - 3 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } 2x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 2 \Leftrightarrow 2(m - 3) + 3 = 2$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{5}{2} \text{ (TM)}. \text{ Vậy } m = \frac{5}{2}.$$

Bài 40. (Đề vào lớp 10 Quảng Nam 2023-2024)

a) Giải phương trình $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

b) Cho phương trình $x^2 - 4x + 2m + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 = 4m^2 + 3$.

Lời giải

a) + Đặt $t = x^2; t \geq 0$.

+ Phương trình trở thành: $t^2 - 7t + 12 = 0$

$$t^2 - 7t + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

+ Với $t = 3$ giải được $x = \pm\sqrt{3}$

+ Với $t = 4$ giải được $x = \pm 2$

Vậy phương trình có 4 nghiệm $x = \pm\sqrt{3}, x = \pm 2$.

b) + Tính $\Delta' = (-2)^2 - 1(2m+1) = 3 - 2m$.

+ Lập luận $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$

+ Áp dụng hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = 4; x_1 \cdot x_2 = 2m + 1$

+ Biến đổi: $x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 = 4m^2 + 3$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = 4m^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = 4m^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 2m - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \text{ (KTM)} \\ m = -2 \text{ (TM)} \end{cases}$$

Vậy $m = -2$

Bài 41. (Đề vào lớp 10 Quảng Ngãi 2023-2024)

1) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

$$\text{a) } x^4 - 3x^2 - 4 = 0. \qquad \text{b) } \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

2) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 4 = 0$, với m là tham số.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Khi phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 , tìm tất cả các giá trị của m để biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + m^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3) Giải phương trình $\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{x^2 - 12x + 2024} = \frac{1}{x^2 - 3x + 506}$

Lời giải

1. Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0(1)$

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$

Do $a - b + c = 1 - (-3) - 4 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} t_1 = -1(ktm) \\ t_2 = 4(tm) \end{cases}$

Với $t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2; 2\}$.

b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2x - 3 = 2 - 3 = -1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; -1)$.

2. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 4 = 0$, với m là tham số.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Xét $\Delta' = (m-1)^2 - 1(m^2 - 4) = m^2 - 2m + 1 - m^2 + 4 = 5 - 2m$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 5 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}$

Vậy $m < \frac{5}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Khi phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 , tìm tất cả các giá trị của m để biểu thức

$P = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + m^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 , thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 5 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}$

Khi đó áp dụng hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 4 \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}
 P &= x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + m^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_2 + m^2 \\
 &= (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 + m^2 \\
 &= \left[2(m-1)^2 \right] - (m^2 - 4) + m^2 \\
 &= 4(m-1)^2 - m^2 + 4 + m^2 \\
 &= 4(m-1)^2 + 4
 \end{aligned}$$

Do $(m-1)^2 \geq 0 \forall m \Rightarrow 4(m-1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow P \geq 4$

Dấu bằng xảy ra khi $m=1$ (thỏa mãn $m \leq \frac{5}{2}$)

Vậy $P_{\min} = 4$ khi $m=1$.

3) ĐKXD: $x \neq 0$

Ta chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số a, b không âm ta được:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}}$$

$$\Rightarrow (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $a=b$

Vì $3x^2 \geq 0$ với mọi x và $x^2 - 12x + 2024 = (x-6) + 1988 > 0$ với mọi x nên ta có:

$$\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{x^2 - 12x + 2024} \geq \frac{4}{3x^2 + x^2 - 12x + 2024} = \frac{4}{4x^2 - 12x + 2024} = \frac{1}{x^2 - 3x + 506}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:

$$3x^2 = x^2 - 12x + 2024$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 12x - 2024 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x - 1012 = 0$$

Ta có: $\Delta' = 3^2 - 1 \cdot (-1012) = 1021 > 0$

Suy ra phương trình có hai nghiệm là: $x_1 = -3 + \sqrt{2021}$ và $x_2 = -3 - \sqrt{2021}$

Vậy tập nghiệm phương trình đã cho là: $S = \{-3 + \sqrt{2021}; -3 - \sqrt{2021}\}$.

Bài 42. (Đề vào lớp 10 Quảng Ninh 2023-2024)

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$

2) Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x - 9 = 0$, với m là tham số.

a) Giải phương trình khi $m = 3$;

b) Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm $x = 2$;

c) Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$ và $|x_1| - |x_2| = -6$.

Lời giải

$$1) \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x = 2y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2y - 4) + y = 7 \\ x = 2y - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y - 8 + y = 7 \\ x = 2y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 15 \\ x = 2y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

2) a) Khi $m = 3$ phương trình trở thành: $x^2 - 8x - 9 = 0$,

ta có: $\Delta' = (-4)^2 - 1 \cdot (-9) = 25 > 0$

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{25}}{1} = 9; x_2 = \frac{4 - \sqrt{25}}{1} = -1$$

Vậy với $m = 3$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 9; x_2 = -1$

b) $ac = 1 \cdot (-9) < 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình có nghiệm $x = 2$ nên thay $x = 2$ vào phương trình ta có:

$$2^2 - 2(m+1)2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 4 - 4m - 4 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4m - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{9}{4}$$

Vậy để phương trình có nghiệm $x = 2$ thì $m = -\frac{9}{4}$.

c) Xét phương trình $x^2 - 2(m+1)x - 9 = 0$ có $a \cdot c = -9 < 0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm trái dấu x_1, x_2

Áp dụng hệ thức vi-et ta có $x_1 + x_2 = 2(m+1)$

Mà $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 < 0 < x_2$

$$|x_1| - |x_2| = -6$$

$$-x_1 - x_2 = -6$$

$$\Leftrightarrow -(x_1 + x_2) = -6$$

$$\Leftrightarrow m + 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 6$$

Bài 43. (Đề vào lớp 10 Sóc Trăng 2023-2024)

Giải hệ phương trình và phương trình :

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 9 \end{cases}; \quad \text{b) } x^2 + 5x + 4 = 0.$$

Lời giải

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 12 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } x^2 + 5x + 4 = 0$$

Ta có : $a - b + c = 1 - 5 + 4 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

Bài 44. (Đề vào lớp 10 Sơn La 2023-2024)

1) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

$$\text{a) } 2x - 8 = 0$$

$$\text{b) } x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$$

2) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = x_1 x_2 - 2$.

$$\text{3) Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2 \left(1 + \frac{4}{y^2}\right) = 12 \\ 2\sqrt{x+3y+2} = 3\sqrt{y} + \sqrt{x+2} \end{cases}.$$

Lời giải

$$\text{1a) } 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{4\}$.

$$\text{b) } x^2 + 4x + 3 = 0$$

Ta có $a - b + c = 1 - 4 + 3 = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1$ và $x_2 = -\frac{c}{a} = -3$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1; -3\}$.

$$c) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 12 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$.

2. Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2
 $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - 1 \cdot (m^2 - 3) > 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 - m^2 + 3 > 0 \Leftrightarrow -2m + 4 > 0 \Leftrightarrow -2m > -4 \Leftrightarrow m < 2.$$

Theo hệ thức Viét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1 x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$

$$\text{Ta có } x_1 + x_2 = x_1 x_2 - 2 \Leftrightarrow 2m - 2 = m^2 - 3 - 2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \quad (1)$$

Vì $a - b + c = 1 + 2 - 3 = 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $m_1 = -1$ (thỏa mãn) và $m_2 = 3$ (loại)

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

$$3. \begin{cases} x^2 \left(1 + \frac{4}{y^2}\right) = 12 & (1) \\ 2\sqrt{x+3y+2} = 3\sqrt{y} + \sqrt{x+2} & (2) \end{cases}$$

Cách 1: Điều kiện $x \geq -2; y > 0$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow 4(x+3y+2) = 9y+x+2+6\sqrt{y(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 3x+3y+6 = 6\sqrt{y(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow x+y+2 = 2\sqrt{y(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow [(x+2)+y]^2 = 4y(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + 2y(x+2) + y^2 = 4y(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 2y(x+2) + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [(x+2)-y]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x+2$$

Thay $y = x + 2$ vào (1) ta được $x^2 \left(1 + \frac{4}{(x+2)^2} \right) = 12 \Leftrightarrow x^2(x+2)^2 + 4x^2 = 12(x+2)^2$

$$\Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 8x^2 = 12x^2 + 48x + 48 \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 48x - 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 4)(x^2 + 6x + 12) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 4)[(x+3)^2 + 3] = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{5} \text{ hoặc } x = 1 - \sqrt{5} \text{ (thoả mãn)}$$

Với $x = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow y = 3 + \sqrt{5}$ (thoả mãn)

Với $x = 1 - \sqrt{5} \Rightarrow y = 3 - \sqrt{5}$ (thoả mãn)

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{5} \\ y = 3 + \sqrt{5} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 1 - \sqrt{5} \\ y = 3 - \sqrt{5} \end{cases}$.

Cách 2: Điều kiện $\begin{cases} x \geq -2 \\ y > 0 \end{cases}$ (*)

Phương trình (2) $\Leftrightarrow 4(x+3y+2) = 9y+x+2+6\sqrt{y(x+2)}$

$$\Leftrightarrow 4(x+3y+2) = 9y+x+2+6\sqrt{y(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 3(x+2)+3y = 6\sqrt{y(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+2} - \sqrt{y})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow y = x + 2$$

Thay $y = x + 2$ vào (1) ta được

$$x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 12 \quad (x \neq -2)$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2x}{x+2} \right)^2 = 12 - \frac{4x^2}{x+2} \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+2} \right)^2 + 4 \left(\frac{x^2}{x+2} \right) - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x+2} = 2 \\ \frac{x^2}{x+2} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 4 = 0 \quad (3) \\ x^2 + 6x + 12 = 0 \quad (4) \end{cases}$$

Giải phương trình (3) có hai nghiệm $x = 1 + \sqrt{5}$; $x = 1 - \sqrt{5}$.

Với $x = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow y = 3 + \sqrt{5}$ (thoả mãn)

Với $x = 1 - \sqrt{5} \Rightarrow y = 3 - \sqrt{5}$ (thoả mãn)

Phương trình (4) vô nghiệm

Đôi chiếu với điều kiện (*) hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(1-\sqrt{5}; 3-\sqrt{5}), (1+\sqrt{5}; 3+\sqrt{5})$.

Bài 46. (Đề vào lớp 10 Tây Ninh 2023-2024)

1) Giải phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

3) Cho phương trình $x^2 + (m-8)x + 3m + 9 = 0$. Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 25$.

Lời giải

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0, \sqrt{\Delta} = 1$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3; \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

Vậy $S = \{3; 2\}$

$$2) \begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 9 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 6 + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; -2)$

3) $x^2 + (m-8)x + 3m + 9 = 0$

$$\Delta = (m-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3m+9) = m^2 - 16m + 64 - 12m - 36 = m^2 - 28m + 28$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 28m + 28 > 0$ (*)

Khi đó theo Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = 8 - m$; $x_1 x_2 = 3m + 9$

Theo đề $x_1^2 + x_2^2 = 25$

$$x_1^2 + x_2^2 = 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (8 - m)^2 - 2(3m + 9) = 25$$

$$\Leftrightarrow 64 - 16m + m^2 - 6m - 18 = 25$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 22m + 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 & (\text{thỏa} (*)) \\ m = 21 & (\text{không thỏa} (*)) \end{cases}$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Chú ý: $\Delta > 0$. Có thể trình bày $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 28m + 28 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 14 - 2\sqrt{42} \\ m > 14 + 2\sqrt{42} \end{cases} (*)$

Bài 47. (Đề vào lớp 10 Thái Bình 2023-2024)

Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 3 \\ -x + y = 2 \end{cases}$ (với m là tham số).

a) Giải hệ phương trình với $m = 2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 10$

Lời giải

a) Với $m = 2$ hệ phương trình đã cho có dạng:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Vậy với $m = 2$ hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

b) Xét hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 3 & (1) \\ -x + y = 2 & (2) \end{cases}$

Từ (2) ta có $y = x + 2$ (3).

Thay (3) vào (1) ta được: $mx + x + 2 = 3 \Leftrightarrow (m + 1)x = 1$ (4)

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi phương trình (4) có nghiệm duy nhất
 $\Leftrightarrow m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Với $m \neq -1$ phương trình (4) có 1 nghiệm $x = \frac{1}{m + 1}$.

Từ (2) ta có $y = \frac{1}{m + 1} + 2 = \frac{2m + 3}{m + 1}$.

Với $m \neq -1$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{1}{m + 1} \\ y = \frac{2m + 3}{m + 1} \end{cases}$



$$\text{Theo bài ra } x^2 + y^2 = 10 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{m+1}\right)^2 + \left(\frac{2m+3}{m+1}\right)^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow 1 + (2m+3)^2 = 10(m+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4m^2 + 12m + 9 = 10m^2 + 20m + 10$$

$$\Leftrightarrow 6m^2 + 8m = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m(3m+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{-4}{3} \text{ (thỏa mãn).} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m \in \left\{ \frac{-4}{3}; 0 \right\} \text{ thỏa mãn đề bài}$$

Bài 48. (Đề vào lớp 10 Thái Nguyên 2023-2024)

1) Không sử dụng máy tính cầm tay, giải phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$.

2) Không sử dụng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$.

Lời giải

1) Ta có: $a + b + c = 1 + (-3) + 2 = 0$

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$;

$$x_2 = 2.$$

$$2) \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4y = -4 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 2x + 1 = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (3; 1)$

Bài 49. (Đề vào lớp 10 Thanh Hóa 2023-2024)

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x - y = -2 \end{cases}$

2) Giải phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$

3) Cho phương trình $x^2 - 2mx - m^2 - 2 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2$ (với $x_1 < x_2$) thỏa mãn hệ thức $x_2 - 2|x_1| - 3x_1x_2 = 3m^2 + 3m + 4$

Lời giải

1)

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 4 \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (1; 3)$

2) Theo bài ra ta có: $a = 1; b = -3; c = 2$

$$\text{Ta lại có: } a + b + c = 1 + (-3) + 2 = 0$$

nên phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 2\}$

3) $x^2 - 2mx - m^2 - 2 = 0$

Vì $a = 1 \neq 0$ và $ac = m^2 - 2 < 0$

Nên phương trình có 2 nghiệm trái dấu với mọi m

Mà $x_1 < x_2$ nên $x_1 < 0 < x_2$ suy ra $|x_1| = -x_1; |x_2| = x_2$

Khi đó theo định lí Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = -m^2 - 2 \end{cases} (3)$$

Thay vào đề ra ta có: $x_2 - 2|x_1| - 3x_1x_2 = 3m^2 + 3m + 4$

$$x_2 + 2x_1 - 3x_1x_2 = 3m^2 + 3m + 4$$

$$\Rightarrow x_2 + 2x_1 = 3m - 2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m & (1) \\ x_1 + 2x_2 = 3m - 2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) - (2) Suy ra $x_1 = m - 2; x_2 = m + 2$

Thay vào (3) Ta được: $m^2 - 4 = -m^2 - 2 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Vậy $m = \pm 1$

Bài 50. (Đề vào lớp 10 Thừa Thiên Huế 2023-2024)

1) Không sử dụng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

2) Cho phương trình $x^2 - 2(m+3)x + 2m+1 = 0$ (1) (với x là ẩn số)

a) Giải phương trình (1) khi $m = -2$

b) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

c) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 = 10$

Lời giải

1) Ta có
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 1)$

2) Cho phương trình $x^2 - 2(m+3)x + 2m+1 = 0$ (1) với x là ẩn, m là tham số

a) Giải phương trình (1) với $m = -2$

Lời giải

Khi $m = -2$, phương trình trở thành $x^2 - 2x - 3 = 0$

Ta có: $a = 1, b = -2, c = -3$

Vì $a - b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1, x_2 = 3$

Vậy khi, phương trình (1) có hai nghiệm là: $x_1 = -1, x_2 = 3$

b) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \Delta' &= b'^2 - ac = [-(m+3)]^2 - 1 \cdot (2m+1) \\ &= m^2 + 6m + 9 - 2m - 1 \\ &= m^2 + 4m + 8 \\ &= m^2 + 2 \cdot 2m + 2^2 + 4 \\ &= (m+2)^2 + 4 > 0, \forall m \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Vậy phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m

c) Tìm để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 = 10$$

Lời giải

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2(m+3)}{1} = 2(m+3) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2m+1}{1} = 2m+1 \end{cases} \quad (3)$$

Theo đề bài, ta có: $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 = 10$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) = 10$$

Thay (3) vào phương trình, ta có:

$$\begin{aligned} [2(m+3)]^2 - 2(2m+1) - 2 \cdot 2(m+3) &= 10 \\ \Leftrightarrow 4(m^2 + 6m + 9) - 2(2m+1) - 4(m+3) - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4m^2 + 24m + 36 - 4m - 2 - 4m - 12 - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4m^2 + 16m + 12 &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Ta có: $4 - 16 + 12 = 0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm là $m_1 = -1; m_2 = -3$

Vậy, với $m = -1$ hoặc $m = -3$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 = 10$

Bài 51. (Đề vào lớp 10 Tiền Giang 2023-2024)

1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

$$\text{a) } x^2 + 3x - 10 = 0 \qquad \text{b) } x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \qquad \text{c) } \begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

2. Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + x - 10 = 0$. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + (m+1)x + \frac{1}{4}m^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

1. a) $x^2 + 3x - 10 = 0$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49 > 0$$

Vì $\Delta > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = 2; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = -5$$

Vậy tập nghiệm của phương trình: $S = \{2; -5\}$.

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \dots (*)$

Đặt $y = x^2$ (Điều kiện: $y \geq 0$)

Khi đó phương trình (*) trở thành: $y^2 - 8y - 9 = 0 \dots (1)$

Vì $a - b + c = 1 - (-8) + (-9) = 0$ nên phương trình (1) có nghiệm:

$$y = -1 \text{ (loại vì } y \geq 0)$$

$$y = \frac{-c}{a} = 9 \text{ (thỏa } y \geq 0): x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (*): $S = \{\pm 3\}$.

c)
$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 8 \\ x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình: $S = \{(2; -4)\}$.

2) $x^2 + x - 10 = 0$

Vì $a.c = 1 \cdot (-10) = -10 < 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo định lý Vi - ét, ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -1 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -10 \end{cases}$$

Ta có: $A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 x_2 = S^2 - 2P - 3P = S^2 - 5P = (-1)^2 - 5 \cdot (-10) = 51$

3). $x^2 + (m+1)x + \frac{1}{4}m^2 + 1 = 0$

$$\Delta = (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{4}m^2 + 1\right) = 2m - 3$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

Vậy $m > \frac{3}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 52. (Đề vào lớp 10 TP Hồ Chí Minh 2023-2024)

Cho phương trình $2x^2 - 13x - 6 = 0$ có 2 nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 + x_2)(x_1 + 2x_2) - x_2^2$.

Lời giải



Áp dụng định lí Vi – et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{13}{2} \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= (x_1 + x_2)(x_1 + 2x_2) - x_2^2 = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2) + x_2] - x_2^2 = \frac{13}{2} \left(\frac{13}{2} + x_2 \right) - x_2^2 \\ &= \frac{169}{4} + \frac{13}{2} x_2 - x_2^2 \\ \Rightarrow -2A &= -2x_2^2 + 13x_2 + \frac{169}{2} \Leftrightarrow -2A = (-2x_2^2 + 13x_2 - 6) - \frac{157}{2} \Leftrightarrow -2A = -\frac{157}{2} \\ \Leftrightarrow A &= \frac{157}{4} \end{aligned}$$

Bài 53. (Đề vào lớp 10 Trà Vinh 2023-2024)

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - 2y = -4 \end{cases}.$$

2. Giải phương trình $x^4 - x^2 - 12 = 0$.

3. Cho phương trình $x^2 + 3x + m + 1 = 0$ (m là tham số).

a. Tìm m để phương trình có hai nghiệm.

b. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (x_1 - x_2)^2 + 7m + 5x_1 x_2$$

Lời giải

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

Ta có:
$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 8 \\ 2y = x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 3)$.

2. Giải phương trình $x^4 - x^2 - 12 = 0$.

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), phương trình trở thành $t^2 - t - 6 = 0$.

Ta có $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = 3 \text{ (tm)} \\ t_2 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = -2 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Với $t = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{\pm\sqrt{3}\}$.

3. a. Tìm m để phương trình có hai nghiệm.

Do $a = 1 \neq 0$ nên phương trình (1) là phương trình bậc 2

Ta có $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+1) = 9 - 4m - 4 = 5 - 4m$

Để phương trình có 2 nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 5 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{4}$

Vậy $m \leq \frac{5}{4}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm.

b. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (x_1 - x_2)^2 + 7m + 5x_1x_2$$

Theo a, với $m \leq \frac{5}{4}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2

Áp dụng hệ thức Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1x_2 = m+1 \end{cases}$

Ta có $P = (x_1 - x_2)^2 + 7m + 5x_1x_2$

$$= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 7m + 5x_1x_2$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 7m + x_1x_2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 + 7m$$

$$= (-3)^2 + m + 1 + 7m$$

$$= 8m + 10$$

$$\Rightarrow P = 8m + 10$$

Với $m \leq \frac{5}{4} \Rightarrow 8m \leq 10 \Rightarrow 8m + 10 \leq 20 \Leftrightarrow P \leq 20$

Vậy GTLN của $P = 20$ khi $m = \frac{5}{4}$.

Bài 54. (Đề vào lớp 10 Vĩnh Phúc 2023-2024)

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 3y = 9 \end{cases}$$

2. Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 - 1 = 0$ (1) với m là tham số.a) Giải phương trình (1) khi $m = 5$.b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $(x_1^2 - 2mx_1 + m^2)(x_2 + 1) = 4$.**Lời giải**

1.
$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 3y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 + 3y \\ 3(9 + 3y) + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 + 3y \\ 11y = -22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 + 3y \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x, y) = (3; -2)$

2.

a) Giải phương trình (1) khi $m = 5$.Khi $m = 5$, ta có phương trình: $x^2 - 11x + 24 = 0$ Ta có $\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 24 = 25 > 0$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 3; x_2 = 8$ Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{3; 8\}$ b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 Ta có $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 - 1) = 4m + 5$ Để phương trình có hai nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{4}{5}$

Theo hệ thức Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên ta có:

$$x_1^2 - (2m+1)x_1 + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 + m^2 = x_1 + 1$$

Thay $x_1^2 - 2mx_1 + m^2 = x_1 + 1$ vào $(x_1^2 - 2mx_1 + m^2)(x_2 + 1) = 4$. Ta có

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 4 \Leftrightarrow x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 3 \text{ suy ra}$$

$$m^2 - 1 + 2m + 1 = 3 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(t/m) \\ m = 3(ktm) \end{cases}$$



Vậy với $m = 1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $(x_1^2 - 2mx + m^2)(x_2 + 1) = 4$.

CHỦ ĐỀ 4: BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ**Bài 1.** (Đề vào lớp 10 Bà Rịa – Vũng Tàu 2023-2024)Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a + b^3 = 29$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^4 - 19$.**Lời giải****Cách 1 :** Ta có $a + b^3 = 29 \Leftrightarrow a = 29 - b^3$ do đó

$$P = a^2 + b^4 - 19 = (29 - b^3)^2 + b^4 - 19 = b^6 + b^4 - 58b^3 + 822$$

$$\text{Ta có } P = b^6 + b^4 - 58b^3 + 822 = b^6 + b^4 - 58b^3 + 756 + 66 = (b-3)^2 \cdot (b^4 + 6b^3 + 28b^2 + 56b + 84) + 66$$

$$\text{Do } b^4 + 6b^3 + 28b^2 + 56b + 84 > 0, \forall b > 0 \text{ nên } P = (b-3)^2 \cdot (b^4 + 6b^3 + 28b^2 + 56b + 84) + 66 \geq 66$$

Dấu bằng xảy ra khi $b = 3$.

$$\text{Vậy } \min P = 66 \text{ khi } \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho n số dương tổng quát ta có $a^2 + 4 \geq 4a$ và

$$b^4 + b^4 + b^4 + 3^4 \geq 4 \cdot \sqrt[4]{(b^4)^3 \cdot 3^4} = 12b^3 \text{ suy ra } 3b^4 + 81 \geq 12b^3 \text{ hay } b^4 + 27 \geq 4b^3$$

$$\text{Do đó } a^2 + b^4 + 31 \geq 4a + 4b^3 = 116 \text{ hay } P = a^2 + b^4 - 19 \geq 66$$

Dấu bằng xảy ra ở các BĐT trên là $a = 2$ và $b = 3$.

$$\text{Vậy } \min P = 66 \text{ khi } \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Bài 2. (Đề vào lớp 10 Bắc Giang 2023-2024)Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \sqrt{3a+bc} + \sqrt{3b+ac} + \sqrt{3c+ab}.$$

Lời giảiVới điều kiện $a + b + c = 3$ ta có $3a + bc = a(a + b + c) + bc = (a + b)(a + c)$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có :

$$\sqrt{3a+bc} = \sqrt{(a+b)(a+c)} \leq \frac{a+b+a+c}{2} = \frac{2a+b+c}{2}$$

$$\text{Tương tự ta có } \sqrt{3b+ca} \leq \frac{a+2b+c}{2} \text{ và } \sqrt{3c+ab} \leq \frac{a+b+2c}{2}$$

$$\text{Suy ra } A \leq \frac{4(a+b+c)}{2} = 2(a+b+c) = 6$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a+b+c=3 \\ a+b=b+c=c+a \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1.$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A bằng 6 khi $a=b=c=1.$

Bài 3. (Đề vào lớp 10 Bắc Ninh 2023-2024)

Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 64z \leq 0.$

Chứng minh rằng $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt{xyz}.$

Lời giải

Từ $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 64z \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 72z - (8x + 8y + 8z) \leq 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 72z \leq 8(x + y + z)$ hay $x + y + z \geq \frac{x^2 + y^2 + 72z}{8}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

- $x^2 + y^2 \geq 2xy$
- $2xy + 72z \geq 2\sqrt{2xy \cdot 72z} = 24\sqrt{xyz}$

Do đó: $x^2 + y^2 + 72z \geq 2xy + 72z \geq 24\sqrt{xyz} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2 + 72z}{8} \geq 3\sqrt{xyz}$

$\Rightarrow x + y + z \geq 3\sqrt{xyz}$ hay $\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt{xyz}$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 0$ hoặc $\begin{cases} x = y = \frac{72}{17} \\ z = \frac{144}{289} \end{cases}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 4. (Đề vào lớp 10 Bến Tre 2023-2024)

Cho các số thực a, b thỏa: $a^2 + b^2 - 14a + 12b + 85 = 0.$ Tính giá trị của biểu thức $B = 3a + 2b.$

Lời giải

$$a^2 + b^2 - 14a + 12b + 85 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 14a + 49 + b^2 + 12b + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-7)^2 + (b+6)^2 = 0$$

Vì $(a-7)^2 \geq 0$ với $\forall a \in \mathbb{R}; (b+6)^2 \geq 0$ với $\forall b \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-7=0 \\ b+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=-6 \end{cases}$$

Do đó $B = 3a + 2b = 3 \cdot 7 + 2 \cdot (-6) = 9$

Vậy $B = 9$

Bài 5. (Đề vào lớp 10 Bình Định 2023-2024)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c = 2024$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{a + \sqrt{2024a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{2024b + ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{2024c + ab}}$$

Lời giải

Cách 1: Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a + \sqrt{2024a + bc}} &= \frac{a}{a + \sqrt{(a+b+c)a + bc}} = \frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} = \frac{a(\sqrt{(a+b)(a+c)} - a)}{(a + \sqrt{(a+b)(a+c)}) \cdot (\sqrt{(a+b)(a+c)} - a)} \\ &= \frac{a(\sqrt{(a+b)(a+c)} - a)}{(a+b)(a+c) - a^2} = \frac{a(\sqrt{(a+b)(a+c)} - a)}{ab + bc + ac} \end{aligned}$$

Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $a + b$ và $a + c$, ta có :

$$\sqrt{(a+b)(a+c)} \leq \frac{a+b+a+c}{2} = \frac{2a+b+c}{2}$$

$$\text{Do đó: } \frac{a}{a + \sqrt{2024a + bc}} = \frac{a(\sqrt{(a+b)(a+c)} - a)}{ab + bc + ac} \leq \frac{a\left(\frac{2a+b+c}{2} - a\right)}{ab + bc + ac} = \frac{ab + ac}{2(ab + bc + ac)}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b}{b + \sqrt{2024b + ca}} \leq \frac{bc + ab}{2(ab + bc + ac)}$$

$$\frac{c}{c + \sqrt{2024c + ab}} \leq \frac{ac + bc}{2(ab + bc + ac)}$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra: } P \leq \frac{2(ab + bc + ca)}{2(ab + bc + ca)} = 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = 2024 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{2024}{3}$$

$$\text{Vậy GTLN của P là 1 khi } a = b = c = \frac{2024}{3}$$

Cách 2: Ta có $2024a + bc = (a + b + c) \cdot a + bc = a^2 + ab + ac + bc = (a + b)(a + c)$

$$\text{Tương tự: } 2024b + ca = (b + c)(b + a)$$

$$2024c + ab = (c + a)(c + b)$$

$$\text{Do đó } P = \frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(a+c)(b+c)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$\sqrt{(a+b)(c+a)} = \sqrt{((\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2) \cdot ((\sqrt{c})^2 + (\sqrt{a})^2)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{ab}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{a}{a + \sqrt{ac} + \sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

$$\text{Tương tự } \frac{b}{b + \sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}; \frac{c}{c + \sqrt{(a+c)(b+c)}} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

$$\text{Do đó } P \leq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 2024 \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c = \frac{2024}{3}.$$

Bài 6. (Đề vào lớp 10 Đà Nẵng 2023-2024)

Cho các số thực dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn điều kiện $a + 9b + 6c = 2023$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \sqrt{3a^2 + 63ab + 243b^2} + \sqrt{243b^2 + 378bc + 108c^2} + \sqrt{108c^2 + 42ca + 3a^2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 3a^2 + 63ab + 243b^2 = \frac{13}{4}(a+9b)^2 - \frac{1}{4}(a-9b)^2 \leq \frac{13}{4}(a+9b)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3a^2 + 63ab + 243b^2} \leq \sqrt{\frac{13}{4}(a+9b)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}(a+9b), \text{ dấu "=" xảy ra khi } a=9b$$

$$\text{Tương tự ta có: } \sqrt{243b^2 + 378bc + 108c^2} \leq \frac{\sqrt{13}}{2}(9b+6c), \text{ dấu "=" xảy ra khi } 9b=6c;$$

$$\sqrt{108c^2 + 42ca + 3a^2} \leq \frac{\sqrt{13}}{2}(6c+a), \text{ dấu "=" xảy ra khi } 6c=a$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{\sqrt{13}}{2}(a+9b+9b+6c+6c+a) = \sqrt{13}(a+9b+6c) = 2023\sqrt{13}$$

$$\text{Vậy } \max P = 2023\sqrt{13} \text{ khi } a = \frac{2023}{3}, b = \frac{2023}{27}, c = \frac{2023}{18}$$

Bài 7. (Đề vào lớp 10 Hà Nam 2023-2024)

Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a + b + c = 1011$. Chứng minh:

$$\sqrt{2022a + \frac{(b-c)^2}{2}} + \sqrt{2022b + \frac{(c-a)^2}{2}} + \sqrt{2022c + \frac{(a-b)^2}{2}} \leq 2022\sqrt{2}.$$

Lời giải

Ta có:

$$\sqrt{2022a + \frac{(b-c)^2}{2}} = \sqrt{2022a + \frac{(b+c)^2}{2} - 2bc} \leq \sqrt{2022a + \frac{(b+c)^2}{2}} \quad (\text{vì } bc \geq 0)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2022a + \frac{(b-c)^2}{2}} \leq \sqrt{2022a + \frac{(1011-a)^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2022a + \frac{(b-c)^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{(1011+a)^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2022a + \frac{(b-c)^2}{2}} \leq \frac{1011+a}{\sqrt{2}} \quad \text{đấu = xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} bc = 0 \\ a+b+c = 1011 \end{cases}$$

$$\text{Trong tự: } \sqrt{2022b + \frac{(c-a)^2}{2}} \leq \frac{1011+b}{\sqrt{2}} \quad \text{và} \quad \sqrt{2022c + \frac{(c-b)^2}{2}} \leq \frac{1011+c}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2022a + \frac{(b-c)^2}{2}} + \sqrt{2022b + \frac{(c-a)^2}{2}} + \sqrt{2022c + \frac{(a-b)^2}{2}} \leq \frac{3 \cdot 1011 + a + b + c}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2022a + \frac{(b-c)^2}{2}} + \sqrt{2022b + \frac{(c-a)^2}{2}} + \sqrt{2022c + \frac{(a-b)^2}{2}} \leq \frac{4 \cdot 1011}{\sqrt{2}} = 2022\sqrt{2}$$

$$\text{Đấu = xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 1011 \\ ab = bc = ca = 0 \end{cases}$$

(Khi trong ba số a, b, c có một số bằng 1011 và hai số bằng 0).**Bài 8.** (Đề vào lớp 10 Hà Nội 2023-2024)Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $a + b \leq 2$. Chứng minh $\frac{a^2}{a^2 + b} + \frac{b^2}{b^2 + a} \leq 1$ **Lời giải**

$$\text{Cách 1: Ta có } \frac{a^2}{a^2 + b} + \frac{b^2}{b^2 + a} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow a^2(b^2 + a) + b^2(a^2 + b) \leq (a^2 + b)(b^2 + a) \quad \text{hay } a^2b^2 \leq ab$$

Sử dụng bất đẳng thức Cô si, ta có $2 \geq a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Suy ra $ab \leq 1$.Từ đó $a^2b^2 \leq ab$. Ta có điều phải chứng minh.Đấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Cách 2: Có $P = \frac{a^2}{a^2+b} + \frac{b^2}{b^2+a} = \frac{a^2+b-b}{a^2+b} + \frac{b^2+a-a}{b^2+a} = 2 - \left(\frac{b}{a^2+b} + \frac{a}{b^2+a} \right)$

Ta có: $\frac{b}{a^2+b} + \frac{a}{b^2+a} = \frac{b^2}{a^2b+b^2} + \frac{a^2}{b^2a+a^2} \geq \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+ab(a+b)}$

Mà $a+b \leq 2 \Rightarrow a^2+b^2+ab(a+b) \leq (a+b)^2$

$\Rightarrow \frac{b}{a^2+b} + \frac{a}{b^2+a} \geq 1 \Rightarrow P \leq 1$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Bài 9. (Đề vào lớp 10 Hà Tĩnh 2023-2024)

Cho a, b, c là các số thực khác không. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{a^2}{a^2+3(b+c)^2} + \frac{b^2}{b^2+3(c+a)^2} + \frac{c^2}{c^2+3(a+b)^2}.$$

Lời giải

Áp dụng BĐT $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ ta có: $Q \geq \frac{a^2}{a^2+6(b^2+c^2)} + \frac{b^2}{b^2+6(c^2+a^2)} + \frac{c^2}{c^2+6(a^2+b^2)}$

$\Rightarrow 5Q+3 \geq 6(a^2+b^2+c^2) \left[\frac{1}{a^2+6(b^2+c^2)} + \frac{1}{b^2+6(c^2+a^2)} + \frac{1}{c^2+6(a^2+b^2)} \right]$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$, với $x, y, z > 0$

ta có $\frac{1}{a^2+6(b^2+c^2)} + \frac{1}{b^2+6(c^2+a^2)} + \frac{1}{c^2+6(a^2+b^2)} \geq \frac{9}{13(a^2+b^2+c^2)}$

$5Q+3 \geq 6(a^2+b^2+c^2) \frac{9}{13(a^2+b^2+c^2)} \Leftrightarrow 5Q+3 \geq \frac{54}{13} \Leftrightarrow Q \geq \frac{3}{13}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q bằng $\frac{3}{13}$ khi $a = b = c \neq 0$.

Bài 10. (Đề vào lớp 10 Hải Dương 2023-2024)

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + 2abc + c^2 + 1 \geq 2(ab + ac + bc)$

Lời giải

Xét ba $a-1; b-1; c-1$ số luôn có hai số cùng dấu.

Giả sử $a-1; b-1$ là hai số cùng dấu, suy ra $(a-1)(b-1) \geq 0$

$\Rightarrow c(a-1)(b-1) \geq 0$

$\Rightarrow abc - ac - bc + c \geq 0$

$\Rightarrow 2abc + 2c \geq 2ac + 2bc \quad (1)$

Lại có $(c-1)^2 \geq 0 \Rightarrow c^2 - 2c + 1 \geq 0$ (2)

Từ (1), (2) ta có $2abc + c^2 + 1 \geq 2ac + 2bc$

Suy ra $a^2 + b^2 + 2abc + c^2 + 1 \geq 2ab + 2ac + 2bc$ (đpcm)

Bài 11. (Đề vào lớp 10 Hải Phòng 2023-2024)

Cho các số thực a, b thỏa mãn: $a > 0, b > 0$ và $(a+b)^3 = 2(1-a^2-b^2)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2}$.

Lời giải

Ta có: $(a+b)^3 = 2(1-a^2-b^2) \Leftrightarrow (a+b)^3 + 2(a^2+b^2) = 2$

Vì $a > 0, b > 0$ ta có $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$ (theo AM - GM)

$\Rightarrow (a+b)^3 + (a+b)^2 \leq 2$

$\Leftrightarrow (a+b)^3 + (a+b)^2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (a+b-1) \left[(a+b)^2 + 2(a+b) + 2 \right] \leq 0$

$\Leftrightarrow a+b-1 \leq 0$ (vì $(a+b)^2 + 2(a+b) + 2 > 0$ với $a > 0, b > 0$)

$\Leftrightarrow a+b \leq 1$.

Chúng minh bất đẳng thức phụ sau: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ ($x > 0, y > 0$) (*)

Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Áp dụng bất đẳng thức (*), ta được:

$\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2} \geq \frac{4}{a^2+b^2+2ab} \Leftrightarrow \frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2} \geq \frac{4}{(a+b)^2} \geq 4$ (vì $a+b \leq 1$)

Với $a > 0, b > 0$ ta có $1 \geq a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow 1 \geq 4ab \Rightarrow \frac{1}{2ab} \geq 2$

$\Rightarrow M = \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} = \left(\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2} \right) + \frac{1}{2ab} \geq 4 + 2 \Leftrightarrow M \geq 6$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 6 khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Bài 12. (Đề vào lớp 10 Hòa Bình 2023-2024)

Cho a, b là các số thực thỏa mãn $4a^2 - 2ab + b^2 = 4a + 2b$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 253(2a+b)$

Lời giải

$$4a^2 - 2ab + b^2 = 4a + 2b \Leftrightarrow a^2 - a \cdot \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a + \frac{b}{2}$$

Đặt $m = \frac{b}{2}$, ta có $a^2 - am + m^2 = a + m$ (1) và

$$P = 253(2a + b) = 506\left(a + \frac{b}{2}\right) = 506(a + m)$$

$$(1) \Leftrightarrow (a + m)^2 - 3am = a + m \Leftrightarrow (a + m)^2 = (a + m) + 3am.$$

$$\text{Chứng minh được } (a + m)^2 \geq 4am \Leftrightarrow am \leq \frac{(a + m)^2}{4}.$$

$$\text{Suy ra } (a + m)^2 = (a + m) + 3am \leq (a + m) + \frac{3}{4}(a + m)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(a + m)^2 \leq a + m$$

$$\Leftrightarrow (a + m)[(a + m) - 4] \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a + m \leq 4.$$

$$\text{Do đó } 0 \leq P \leq 4.506 \Leftrightarrow 0 \leq P \leq 2024.$$

$$\text{Vậy } \max P = 2024 \Leftrightarrow a = m = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}.$$

Bài 13. (Đề vào lớp 10 Lạng Sơn 2023-2024)

Cho các số thực a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3}{a^2 + b} + \frac{b^3}{b^2 + c} + \frac{c^3}{c^2 + a} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải

Với các số thực a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{a^3}{a^2 + b} = a - \frac{ab}{a^2 + b} \geq a - \frac{ab}{2a\sqrt{b}} = a - \frac{\sqrt{b}}{2};$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b^3}{b^2 + c} = b - \frac{bc}{b^2 + c} \geq b - \frac{bc}{2b\sqrt{c}} = b - \frac{\sqrt{c}}{2};$$

$$\frac{c^3}{c^2 + a} = c - \frac{ca}{c^2 + a} \geq c - \frac{ca}{2c\sqrt{a}} = c - \frac{\sqrt{a}}{2}.$$

$$\text{Vậy: } P = \frac{a^3}{a^2 + b} + \frac{b^3}{b^2 + c} + \frac{c^3}{c^2 + a} \geq a - \frac{\sqrt{b}}{2} + b - \frac{\sqrt{c}}{2} + c - \frac{\sqrt{a}}{2} = (a + b + c) - \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

Mặt khác, ta có:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$

$$\Leftrightarrow 3(a+b+c) \geq (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

$$\Leftrightarrow -(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \geq -\sqrt{3}\sqrt{a+b+c} = -3$$

$$\Rightarrow P \geq 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}.$$

Vậy $P \geq \frac{3}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi:
$$\begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=3 \\ a^2=b \\ b^2=c \\ c^2=a \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1.$$

Bài 14. (Đề vào lớp 10 Long An 2023-2024)

Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y+2=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$A = 3(x^2 + y^2) + 10xy.$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $y = -2 - x$. Khi đó $A = 3x^2 + 3(-x-2)^2 + 10x(-x-2)$.

$$\Rightarrow A = -4(x+1)^2 + 16 \leq 16$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là 16.

Dấu "=" xảy ra khi $x = -1, y = -1$.

Bài 15. (Đề vào lớp 10 Nam Định 2023-2024)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+yz}{y+z} + \frac{y+zx}{z+x} + \frac{z+xy}{x+y}.$$

Lời giải

Từ giả thiết $x+y+z=1 \Rightarrow x+yz = x(x+y+z) + yz = (x+y)(x+z)$.

Tương tự $y+zx = (y+z)(y+x); z+xy = (z+x)(z+y)$.

Do đó
$$P = \frac{(x+y)(x+z)}{y+z} + \frac{(y+z)(y+x)}{z+x} + \frac{(z+x)(z+y)}{x+y}.$$

Đặt $x+y=a, y+z=b, z+x=c \Rightarrow a, b, c > 0$ và $a+b+c=2$.

$$P = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} \right) + \left(\frac{bc}{a} + \frac{ba}{c} \right) + \left(\frac{ca}{b} + \frac{cb}{a} \right) \right]$$

$$\geq \frac{1}{2} \left(2\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{ac}{b}} + 2\sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ba}{c}} + 2\sqrt{\frac{ca}{b} \cdot \frac{cb}{a}} \right) = a + b + c = 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng 2 khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 16. (Đề vào lớp 10 Ninh Thuận 2023-2024)

Cho hai số dương a, b có $a + b = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$M = \left(1 - \frac{4}{a^2} \right) \left(1 - \frac{4}{b^2} \right).$$

Lời giải

Ta luôn có: $(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow ab \leq 1$

$$a + b = 2 \Rightarrow a - 2 = -b$$

$$a + b = 2 \Rightarrow b - 2 = -a$$

$$M = \left(1 - \frac{4}{a^2} \right) \left(1 - \frac{4}{b^2} \right) = 1 + \frac{8}{ab}$$

Từ đó, M đạt GTNN khi và chỉ khi $ab = 1$

$$\text{Vậy GTNN của } M = 9 \text{ khi } \begin{cases} ab = 1 \\ a = b \Leftrightarrow a = b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

Bài 17. (Đề vào lớp 10 Quảng Bình 2023-2024)

Với $x \in \mathbb{R}$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 9x^2 - 2|3x - 2| - 12x + 2028$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= (3x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3x + 2^2 - 2|3x - 2| + 2024 \\ &= (3x - 2)^2 - 2|3x - 2| + 1 + 2023 \\ &= (|3x - 2| - 1)^2 + 2023 \geq 2023, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: } |3x - 2| - 1 = 0 \Leftrightarrow |3x - 2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 = 1 \\ 3x - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2023 đạt được khi $x = 1$ hoặc $x = \frac{1}{3}$.

Bài 18. (Đề vào lớp 10 Quảng Nam 2023-2024)

Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 2023$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = 6x^2 + 6y^2 + z^2.$$

Lời giải

$$P = 6x^2 + 6y^2 + z^2 = \frac{3}{2}(x^2 + y^2) + \frac{9}{2}\left(x^2 + \frac{z^2}{9}\right) + \frac{9}{2}\left(y^2 + \frac{z^2}{9}\right)$$

$$\geq 3xy + 3xz + 3yz = 3 \cdot 2023 = 6069 \text{ (Sử dụng bất Cô-si)}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x = y = 17 \\ z = 51 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 6069.

Bài 19. (Đề vào lớp 10 Quảng Ninh 2023-2024)

Một người thợ cơ khí cần cắt vừa đủ một cây sắt dài 100 dm thành các đoạn để hàn lại thành khung một hình lập phương và một hình hộp chữ nhật. Biết hình hộp chữ nhật có chiều dài gấp 6 lần chiều rộng và chiều cao bằng chiều rộng (hình vẽ minh họa). Tìm độ dài của các đoạn sắt sao cho tổng thể tích của hai hình thu được nhỏ nhất?

Lời giải

Gọi cạnh hình lập phương bằng x (dm). ĐK: $x > 0$

Gọi chiều cao bằng chiều rộng là y (dm) ĐK: $y > 0$.

Chiều dài hình hộp chữ nhật bằng $6y$ (dm).

Hình lập phương có 12 cạnh có độ dài bằng x (dm).

Hình hộp chữ nhật có 8 cạnh có độ dài bằng y (dm) và 4 cạnh có độ dài $6y$ (dm).

Người thợ cắt vừa đủ một cây sắt dài 100 m nên ta có:

$$12x + 8y + 4 \cdot 6y = 100 \Leftrightarrow 12x + 32y = 100 \Leftrightarrow 3x + 8y = 25 \Leftrightarrow x = \frac{25 - 8y}{3}$$

Thể tích khối lập phương là $V_1 = x^3$.

Thể tích khối hộp chữ nhật là $V_2 = y \cdot y \cdot 6y = 6y^3$.

Tổng thể tích hai hình là: $V = V_1 + V_2 = x^3 + 6y^3 = \left(\frac{25 - 8y}{3}\right)^3 + 6y^3$.

$$12x + 8y + 4 \cdot 6y = 100 \Leftrightarrow 12x + 32y = 100 \Leftrightarrow 3x + 8y = 25 \Leftrightarrow x = \frac{25 - 8y}{3}$$

Ta có: $x^3 + 3^3 + 3^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3} = 27x$

$6(y^3 + 2^3 + 2^3) \geq 6 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{y^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3} = 72y$

Cộng vế theo vế hai bất đẳng thức ta được:

$$x^3 + 6y^3 + 150 \geq 27x + 72y$$

$$\Leftrightarrow V + 150 \geq 9(3x + 8y)$$

$$\Leftrightarrow V + 150 \geq 9 \cdot 25$$

$$\Leftrightarrow V + 150 \geq 225$$

$$\Leftrightarrow V \geq 75$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$.

Vậy tổng thể tích của hai hình thu được nhỏ nhất bằng $75dm^3$ khi độ dài cạnh hình lập phương bằng $3dm$, độ dài chiều rộng và chiều cao hình hộp chữ nhật bằng $2dm$, chiều dài hình hộp chữ nhật bằng $12dm$.

Bài 20. (Đề vào lớp 10 Thái Bình 2023-2024)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{xy^3}{y^3 + 4} + \frac{yz^3}{z^3 + 4} + \frac{zx^3}{x^3 + 4}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số dương ta có:

$$P = \frac{xy^3}{\frac{y^3}{2} + \frac{y^3}{2} + 4} + \frac{yz^3}{\frac{z^3}{2} + \frac{z^3}{2} + 4} + \frac{zx^3}{\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} + 4}$$

$$P \leq \frac{xy^3}{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{y^3}{2} \cdot \frac{y^3}{2} \cdot 4}} + \frac{yz^3}{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{z^3}{2} \cdot \frac{z^3}{2} \cdot 4}} + \frac{zx^3}{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^3}{2} \cdot \frac{x^3}{2} \cdot 4}} = \frac{xy^3}{3y^2} + \frac{yz^3}{3z^2} + \frac{zx^3}{3x^2}$$

$$P \leq \frac{xy + yz + zx}{3}$$

Lại có $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0 \forall x, y, z$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow xy + yz + zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{6^2}{3} = 12$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{12}{3} = 4$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 2$

Vậy $MaxP = 4 \Leftrightarrow x = y = z = 2$

Bài 21. (Đề vào lớp 10 Thanh Hóa 2023-2024)

Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn: $4x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 6y$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{16}{(y+4)^2} + \frac{8}{(x+3)^2} + 2023$

Lời giải

Ta chứng minh bổ đề: $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{8}{(m+n)^2}$

Áp dụng BĐT Cô si: $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{m^2 n^2}} = \frac{2}{mn}$.

Do $mn \leq \frac{(m+n)^2}{4}$ Nên suy ra $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{8}{(m+n)^2}$

Ta có:

$$4x^2 + 4 \geq 2\sqrt{4x^2 \cdot 4} = 8x$$

$$4y^2 + 4 \geq 8y$$

$$4z^2 + 4 \geq 8z$$

Cộng vế với vế ta được: $24 \geq 8x + 8z + 2y \Leftrightarrow 3 \geq x + z + \frac{y}{4}$

Ta lại có:

$$\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{16}{(y+4)^2} + \frac{8}{(x+3)^2} = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{y}{4}+1\right)^2} + \frac{8}{(x+3)^2} \geq \frac{8}{\left(z+\frac{y}{4}+2\right)^2} + \frac{8}{(x+3)^2} \geq$$

$$\geq 8 \cdot \frac{8}{\left(z + \frac{y}{4} + 2 + x + 3\right)^2} \geq 8 \cdot \frac{8}{(3 + 2 + 3)^2} = 1$$

$$\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{16}{(y+4)^2} + \frac{8}{(x+3)^2} + 2023 \geq 1 + 2023 = 2024$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 1; y = 4; z = 1$

Bài 22. (Đề vào lớp 10 Vĩnh Phúc 2023-2024)

Cho các số thực a, b, c sao cho phương trình $ax^2 + bx + c + 2023 = 0$ nhận $x = 1$ là nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2} + \sqrt{5b^2 - 6bc + 5c^2} + \sqrt{6c^2 - 8ca + 6a^2}$.

Lời giải

Cho các số thực a, b, c sao cho phương trình $ax^2 + bx + c + 2023 = 0$ nhận $x = 1$ là nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2} + \sqrt{5b^2 - 6bc + 5c^2} + \sqrt{6c^2 - 8ca + 6a^2}$.

Phương trình $ax^2 + bx + c + 2023 = 0$ nhận $x = 1$ là nghiệm ta có:
 $a + b + c + 2023 = 0 \Leftrightarrow a + b + c = -2023$ với mọi $a, b, c \in \mathbf{R}$ ta có:

$$(a-b)^2 \geq 0; (b-c)^2 \geq 0; (c-a)^2 \geq 0.$$

$$\text{Khi đó: } P = \sqrt{3a^2 - 2ab + 3b^2} + \sqrt{5b^2 - 6bc + 5c^2} + \sqrt{6c^2 - 8ca + 6a^2}$$

$$P = \sqrt{(a+b)^2 + 2(a-b)^2} + \sqrt{(b+c)^2 + 4(b-c)^2} + \sqrt{(c+a)^2 + 5(c-a)^2}$$

$$\geq \sqrt{(a+b)^2} + \sqrt{(b+c)^2} + \sqrt{(c+a)^2}$$

$$= |a+b| + |b+c| + |c+a|$$

$$\geq |2(a+b+c)| = 2 \cdot 2023 = 4046$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = \frac{-2023}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4046 khi $a = b = c = \frac{-2023}{3}$

CHỦ ĐỀ 4: GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH**Bài 1: (Bà Rịa – Vũng Tàu 2023 – 2024)**

Ông A có một mảnh đất hình chữ nhật, chiều dài hơn chiều rộng $15m$. Ông A quyết định bán đi một phần của mảnh đất đó. Mảnh đất còn lại sau khi bán vẫn là hình chữ nhật, nhưng so với lúc đầu thì chiều rộng đã giảm $5m$, chiều dài không đổi và diện tích là $300 m^2$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất lúc đầu.

Lời giải:

a) Gọi $x, y (m)$ là chiều dài và chiều rộng của mảnh đất lúc đầu ($x, y > 0$).

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} x = y + 15 \\ (y - 5)x = 300 \end{cases}$$

$$\text{Ta có phương trình } (y - 5)(y + 15) = 300 \Leftrightarrow y^2 + 10y - 375 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 \\ y = -25 \end{cases}, \text{ chọn}$$

$$y = 15 \text{ suy ra } x = 30.$$

Vậy chiều dài và chiều rộng lúc đầu của mảnh đất là $20m$ và $15m$.

Bài 2: (Bắc Giang – 2023 – 2024)

Trong dịp Tết trồng cây đầu năm, ban tổ chức dự kiến trồng 80 cây xanh. Tuy nhiên, đến ngày tổ chức có 4 người không thể tham gia trồng cây nên mỗi người còn lại phải trồng thêm 1 cây để hoàn thành công việc. Biết số cây mỗi người trồng được chia đều bằng nhau. Hỏi lúc đầu ban tổ chức dự kiến có bao nhiêu người tham gia trồng cây?

Lời giải

Gọi số người dự kiến tham gia trồng cây ban đầu của ban tổ chức là x (người) $x > 4, x \in \mathbb{N}^*$.

Theo dự định, mỗi người phải trồng số cây là $\frac{80}{x}$ (cây).

Sau khi giảm đi 4 người thì mỗi người phải trồng số cây là $\frac{80}{x-4}$ (cây).

Theo bài ra, ta có phương trình: $\frac{80}{x-4} - \frac{80}{x} = 1$

Biến đổi được về phương trình $x^2 - 4x - 320 = 0$

Giải phương trình ta được $\begin{cases} x = 20 \\ x = -16 \end{cases}$

Đối chiếu điều kiện của x , ta được $x = 20$.

Bài 3: (Bến Tre – 2023 -2024)

Để chuẩn bị tham gia kì thi tuyển sinh vào lớp 10 đạt kết quả như mong đợi, bạn A đã lập kế hoạch sẽ làm xong 80 bài tập trong khoảng thời gian nhất định với số lượng bài tập được chia đều trong các ngày. Trên thực tế, khi làm bài tập mỗi ngày bạn A đã làm thêm 2 bài tập so với kế hoạch ban đầu nên đã hoàn thành sớm hơn 2 ngày so với dự định. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày bạn A phải làm xong bao nhiêu bài tập?.

Lời giải

Gọi x là số bài tập mỗi ngày bạn A phải làm theo kế hoạch ban đầu (Điều kiện: $x \in \mathbb{N}, 0 < x < 80$)

Trên thực tế mỗi ngày bạn A phải làm là $x+2$ bài tập

Theo kế hoạch số ngày để bạn A hoàn thành 80 bài tập là $\frac{80}{x}$ (ngày)

Do bạn A hoàn thành sớm hơn 2 ngày so với kế hoạch ban đầu nên ta có phương trình:

$$\frac{80}{x} - \frac{80}{x+2} = 2$$

Giải phương trình ta được $x = 8$ (thỏa điều kiện)

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày bạn A phải làm xong 8 bài tập.

Bài 4: (Bình Định – 2023 -2024)

Trong các kì thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT, cả hai trường A và B có tổng số 380 thí sinh dự thi. Sau khi có kết quả, số thí sinh trúng tuyển của cả hai trường là 191 thí sinh. Theo thống kê thì trường A có tỉ lệ trúng tuyển là 55% tổng số thí sinh dự thi của trường A, trường B có tỉ lệ trúng tuyển là 45% tổng số thí sinh dự thi của trường B. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu thí sinh dự thi?

Lời giải

Gọi x, y (thí sinh) lần lượt là số thí sinh dự thi của hai trường A và B.

ĐK: x, y nguyên dương; $x, y < 380$.

Vì số thí sinh dự thi của cả hai trường là 380 thí sinh nên ta có phương trình:
 $x + y = 380$

Số thí sinh trúng tuyển của trường A là: $55\%x = 0,55x$ (thí sinh)

Số thí sinh trúng tuyển của trường B là: $45\%y = 0,45y$ (thí sinh)

Ta có phương trình: $0,55x + 0,45y = 191$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 380 \\ 0,55x + 0,45y = 180 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được:
$$\begin{cases} x = 200 \\ y = 180 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy số thí sinh dự thi của trường A là 200 thí sinh

Số thí sinh dự thi của trường B là 180 thí sinh.

Bài 5 (Bình Dương – 2023 -2024)

Bác Tư đến siêu thị mua một cái quạt máy và một ấm đun siêu tốc với tổng số tiền theo giá niêm yết là 630000 đồng. Tuy nhiên, trong tuần lễ tri ân khách hàng nên siêu thị đã giảm giá quạt máy 15% và giảm giá ấm đun siêu tốc 12% so với giá niêm yết của từng sản phẩm. Nên Bác Tư chỉ phải trả 543000 đồng khi mua hai sản phẩm trên. Hỏi giá niêm yết (khi chưa giảm giá) của một cái quạt máy và một ấm đun siêu tốc là bao nhiêu ?

Lời giải

Gọi giá tiền niêm yết (khi chưa giảm giá) của một cái quạt máy và một ấm đun siêu tốc là $x, y (x > 0, y > 0)$ (đồng).

Ta có phương trình $x + y = 630000$.

Giá tiền quạt máy sau khi giảm giá là $x - 15\%x = 85\%x = 0,85x$.

Giá tiền ấm đun siêu tốc sau khi giảm giá là $y - 12\%y = 88\%y = 0,88y$.

Ta có phương trình $0,85x + 0,88y = 543000$.

Giải hệ
$$\begin{cases} x + y = 630000 \\ 0,85x + 0,88y = 543000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 630000 \\ 0,85x + 0,88y = 543000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,88x + 0,88y = 554400 \\ 0,85x + 0,88y = 543000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0,03x = 11400 \\ x + y = 630000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 380000 \\ 380000 + y = 630000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 380000 \\ y = 250000 \end{cases}$$

Vậy giá tiền niêm yết (khi chưa giảm giá) của một cái quạt máy và một ấm đun siêu tốc là 380000 (đồng) và 250000 (đồng).

Bài 6: (Bình Phước – 2023 -2024)

Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích $600m^2$. Biết rằng nếu tăng chiều dài $10m$ và giảm chiều rộng $5m$ thì diện tích không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Lời giải

Gọi chiều rộng khu vườn hình chữ nhật là $x (m)$, $x > 5$.

Suy ra chiều dài khu vườn là $\frac{600}{x}$ (m).

Chiều dài khu vườn sau khi tăng là $\frac{600}{x} + 10$ (m).

Chiều rộng khu vườn sau khi giảm là $x - 5$ (m).

Diện tích khu vườn sau khi tăng chiều dài 10m và giảm chiều rộng 5m thì không đổi nên ta có phương trình

$$\left(\frac{600}{x} + 10\right)(x - 5) = 600.$$

$$\Leftrightarrow (600 + 10x)(x - 5) = 600x \Leftrightarrow 10x^2 - 50x - 3000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = -15(L) \end{cases}$$

Vậy chiều dài mảnh vườn là 30 (m), chiều rộng mảnh vườn là 20 (m).

Bài 7 (Bình Thuận – 2023 – 2024)

Một công ty dự định thuê một số xe lớn cùng loại để chở vừa hết 210 người đi du lịch Mũi Né. Nhưng thực tế, công ty lại thuê toàn bộ xe nhỏ hơn cùng loại. Biết rằng số xe nhỏ phải thuê nhiều hơn số xe lớn là 2 chiếc thì mới chở vừa hết số người trên và mỗi xe nhỏ chở ít hơn mỗi xe lớn là 12 người. Tính số xe nhỏ đã thuê.

Lời giải

Gọi số xe nhỏ (chiếc) công ty đã thuê là x , ($x \in \mathbb{N}$, $x > 2$).

Do đó số xe lớn (chiếc) công ty dự định thuê là $x - 2$.

Số xe lớn và nhỏ đều chở vừa hết 210 người nên:

Số người trên xe nhỏ là: $\frac{210}{x}$ (người)

Số người trên xe lớn là: $\frac{210}{x-2}$ (người)

Theo đề mỗi xe nhỏ chở ít hơn mỗi xe lớn là 12 người, nên ta có phương trình:

$$\frac{210}{x-2} - \frac{210}{x} = 12$$

$$\Leftrightarrow 210x - 210(x-2) = 12x(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 210x - 210x + 420 = 12x^2 - 24x$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 - 24x - 420 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12(x-7)(x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-7=0 \\ x+5=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 & (\text{Nhận}) \\ x = -5 & (\text{Loại}) \end{cases}$$

Vậy công ty đã thuê 7 chiếc xe nhỏ.

Bài 8 (Cần Thơ 2023 – 2024)

Một phòng giáo dục và đào tạo phát động phong trào “Học sinh quyền góp sách giáo khoa lớp 9” nhằm giúp học sinh lớp 9 có hoàn cảnh khó khăn. Hướng ứng phong trào trên, tổng số học sinh tham gia của Trường Trung học cơ sở A và Trường Trung học cơ sở B là 322. Mỗi học sinh của Trường Trung học cơ sở A quyền góp 6 quyển sách, mỗi học sinh của Trường Trung học cơ sở B góp 5 quyển sách. Tổng số sách quyền góp của Trường Trung học cơ sở A nhiều hơn tổng số sách quyền góp của Trường Trung học cơ sở B là 172 quyển. Hỏi mỗi trường đã quyền góp được bao nhiêu quyển sách giáo khoa?

Lời Giải

Gọi x, y lần lượt là số học sinh trường THCS A và trường THCS B

(ĐK: $x, y \in \mathbb{N}^*$ và $x, y < 322$)

Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 322 \\ 6x - 5y = 172 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 1610 \\ 6x - 5y = 172 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 1782 \\ 6x - 5y = 172 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 162 \\ y = 160 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình tìm được $\begin{cases} x = 162 \\ y = 160 \end{cases}$ (thỏa mãn ĐK)

Vậy số quyển sách của trường THCS A quyền góp được là $162 \cdot 6 = 972$ quyển.

Số quyển sách của trường THCS B quyền góp được là $160 \cdot 5 = 800$ quyển

Bài 9: (Cao Bằng – 2023 – 2024)

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là 180m. Nếu tăng chiều rộng mảnh vườn lên thêm 20m và giảm chiều dài đi 20m thì diện tích mảnh vườn không thay đổi. Tính chiều dài và chiều rộng mảnh vườn.

Lời giải

Gọi chiều dài của mảnh vườn là x (m). Điều kiện $20 < x < 90$.

Khi đó chiều rộng của mảnh vườn là $\frac{180}{2} - x = 90 - x$ (m).

Diện tích ban đầu của mảnh vườn là $x(90 - x)$.

Diện tích của mảnh vườn sau khi tăng chiều rộng lên thêm 20m và giảm chiều dài đi 20m là $(90 - x + 20)(x - 20) = (110 - x)(x - 20)$.

Theo giả thiết ta có phương trình: $x(90 - x) = (110 - x)(x - 20)$

$\Leftrightarrow 90x = 130x - 2200 \Leftrightarrow x = 55$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy chiều dài và chiều rộng mảnh vườn lần lượt là 55m và 35m.

Bài 10 (Đà Nẵng – 2023 – 2024)

- a) Tổng của hai số bằng 23. Hai lần số này lớn hơn số kia 1 đơn vị. Tìm hai số đó.
 b) Hai đội công nhân cùng dọn vệ sinh khu vực khán đài Lễ hội Pháo hoa quốc tế Đà Nẵng trong 1 giờ 12 phút thì xong. Nếu đội A làm 40 phút và đội B làm 2 giờ thì xong việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội hoàn thành công việc trong bao lâu?

Lời giải

- a) Tổng của hai số bằng 23. Hai lần số này lớn hơn số kia 1 đơn vị. Tìm hai số đó.
 Gọi số thứ nhất là a , số thứ hai là b .

Theo đề bài:

Tổng của hai số bằng 23, ta có phương trình: $a + b = 23$;

Hai lần số này lớn hơn số kia 1 đơn vị, ta có phương trình: $2a - b = 1$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a + b = 23 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 23 \\ 3a = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 23 \\ a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 15 \end{cases}$

Vậy số thứ nhất là 8, số thứ hai là 15.

- b) Đội 1 giờ 12 phút $= \frac{6}{5}$ h; 40 phút $= \frac{2}{3}$ h

Gọi thời gian đội A làm riêng hoàn thành công việc là x (h), $\left(x > \frac{6}{5}\right)$

Thời gian đội B làm riêng hoàn thành công việc là y (h); $\left(y > \frac{6}{5}\right)$

Trong 1 giờ, đội A làm được $\frac{1}{x}$ công việc; đội B làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

\Rightarrow Trong 1 giờ hai đội cùng làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (công việc)

Theo đề bài, hai đội làm cùng nhau thì sau 1 giờ 12 phút $= \frac{6}{5}$ h xong công việc

nên ta có phương trình: $\frac{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$

Theo đề bài, nếu đội A làm 40 phút $= \frac{2}{3}$ h và đội B làm 2 giờ thì xong công việc nên ta có phương trình: $\frac{2}{3x} + \frac{2}{y} = 1$

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3x} + \frac{2}{y} = 1 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}$ Hệ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \begin{cases} u + v = \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3}u + 2v = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{5}{6} - u \\ \frac{2}{3}u + 2v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{5}{6} - u \\ \frac{2}{3}u + 2\left(\frac{5}{6} - u\right) = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{5}{6} - u \\ \frac{2}{3}u + \frac{5}{3} - 2u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{5}{6} - u \\ \frac{4}{3}u = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{5}{6} - u \\ u = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{3} \\ u = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy thời gian đội A làm riêng hoàn thành công việc là 2 giờ; thời gian đội B làm riêng hoàn thành công việc là 3 giờ.

Bài 11 (Đak-lak – 2023 – 2024)

Một khu vườn hình chữ nhật có chiều rộng ngắn hơn chiều dài 45m. Tính diện tích của khu vườn, biết rằng nếu chiều dài giảm 2 lần và chiều rộng tăng 3 lần thì chu vi khu vườn không thay đổi.

Lời giải

Gọi chiều rộng, chiều dài của hình chữ nhật lần lượt là $x, y(m)$, điều kiện $x > 0, y > 45$.

Ta có: $y - x = 45$ (1)

Chiều dài giảm hai lần, chiều rộng tăng 3 lần ta được hình chữ nhật có hai cạnh là $\frac{y}{2}$ và $3x$.

Theo giả thiết chu vi không đổi nên: $2(x + y) = 2\left(3x + \frac{y}{2}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} y - x = 45 \\ 2(x + y) = 2\left(3x + \frac{y}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 60 \end{cases}$$

Vậy diện tích của khu vườn là $S = x.y = 900(m^2)$.

Bài 12 (Đồng Nai – 2023 -2024)

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn (không có nước) sau 40 phút thì đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 15 phút rồi khóa lại, sau đó mở vòi thứ hai chảy tiếp trong 20 phút thì lúc này lượng nước trong bể chiếm $\frac{5}{12}$ thể tích của bể nước. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì thời gian để mỗi vòi chảy đầy bể là bao lâu?

Lời giải

Gọi x (phút) là thời gian chỉ riêng vòi thứ nhất chảy đầy bể nước.

y (phút) là thời gian chỉ riêng vòi thứ hai chảy đầy bể nước.

Điều kiện $x, y > 0$.

Mỗi phút vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bể nước).

Mỗi phút vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ (bể nước).

Vì cả hai vòi cùng chảy sau 40 phút thì đầy bể nên mỗi phút cả hai vòi cùng chảy được $\frac{1}{40}$ (bể nước).

Từ đó ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{40}$ (1)

Khi mở vòi thứ nhất chảy trong 15 phút rồi khóa lại, sau đó mở vòi thứ hai chảy tiếp trong 20 phút thì lúc này lượng nước trong bể chiếm $\frac{5}{12}$ thể tích của bể nước nên ta

có phương trình $15 \cdot \frac{1}{x} + 20 \cdot \frac{1}{y} = \frac{5}{12}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{40} \\ 15 \cdot \frac{1}{x} + 20 \cdot \frac{1}{y} = \frac{5}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{60} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{120} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 120 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy nếu mở riêng từng vòi thì thời gian để vòi thứ nhất chảy đầy bể là 60 (phút), thời gian để vòi thứ hai chảy đầy bể là 120 (phút).

Bài 13 (Đông Tháp – 2023 – 2024)

Hai bạn An và Nam cùng mang số tiền như nhau đến nhà sách để mua tập. An mua loại tập giá 11000 đồng một quyển, Nam mua loại tập giá 12000 đồng một quyển. Khi đến nhà sách, hai bạn mới biết nhân dịp “Ngày sách và văn hóa đọc Việt Nam năm 2023” nhà sách có chương trình giảm giá cho các loại tập, sách, văn phòng phẩm, ... trong đó có giảm giá 20% cho các loại tập. Vì thế, số tập của bạn An mua được nhiều hơn số tập của bạn Nam mua là 2 quyển. Tính số tập của mỗi bạn đã mua và số tiền mỗi bạn phải trả.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số tập của bạn An và bạn Nam mua ($x, y \in \mathbb{N}^*$)

Ta có phương trình: $x - y = 2$

Sau giảm giá 20%, giá mỗi quyển tập bạn An là

$$(1 - 20\%) \cdot 11000 = 8800 \text{ (đồng)}$$

Số tiền mua tập của An là: $8800x$ (đồng)

Sau giảm giá 20%, giá mỗi quyển tập bạn Nam là

$$(1 - 20\%) \cdot 12000 = 9600 \text{ (đồng)}$$

Số tiền mua tập của Nam là: $9600y$ (đồng)

Ta có phương trình: $8800x = 9600y$

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 8800x - 9600y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 22 \end{cases}$$

Vậy số tập của bạn An và bạn Nam mua lần lượt là 24 quyển, 22 quyển.

Số tiền mỗi bạn phải trả là $24 \times 8800 = 211200$ (đồng)

Bài 14 (Hà Nội – 2023 – 2024)

Theo kế hoạch, một phân xưởng phải làm xong 900 sản phẩm trong một số ngày quy định. Thực tế, mỗi ngày phân xưởng đã làm nhiều hơn 15 sản phẩm so với số sản phẩm phải làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế 3 ngày trước khi hết thời hạn, phân xưởng đã làm xong 900 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải làm bao nhiêu sản phẩm? (Giả định số sản phẩm phân xưởng làm được trong mỗi ngày là bằng nhau).

Lời giải

1) Gọi số sản phẩm mỗi ngày phân xưởng phải làm theo kế hoạch là x (sản phẩm), $x \in \mathbb{N}^*$, $x < 900$.

Thời gian phân xưởng phải hoàn thành theo kế hoạch là $\frac{900}{x}$ (ngày)

Thực tế, mỗi ngày phân xưởng làm được $x + 15$ (sản phẩm)

Thời gian phân xưởng hoàn thành trên thực tế là $\frac{900}{x+15}$ (ngày)

Vì phân xưởng hoàn thành trước thời hạn 3 ngày nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned}\frac{900}{x} - \frac{900}{x+15} &= 3 \\ \Rightarrow 900(x+15) - 900x &= 3x(x+15) \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 45x - 13500 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 15x - 4500 &= 0\end{aligned}$$

Tìm được $x = 60$ (thỏa mãn), $x = -75$ (loại)

Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải làm 60 sản phẩm.

Bài 15 (Hà Tĩnh – 2023 – 2024)

Một phòng họp ban đầu có 104 ghế được xếp thành các dãy và số ghế trong mỗi dãy đều bằng nhau. Có một lần phòng họp phải cắt bớt 2 dãy ghế và mỗi dãy còn lại xếp thêm 1 ghế (số ghế trong các dãy vẫn bằng nhau) để vừa đủ chỗ ngồi cho 120 đại biểu. Hỏi ban đầu trong phòng họp có bao nhiêu dãy ghế?

Lời giải

Gọi số dãy ghế ban đầu trong phòng họp là x ($x \in \mathbb{N}, x \geq 3$)

Số ghế ở mỗi dãy ban đầu là $\frac{104}{x}$ (ghế)

Số ghế ở mỗi dãy sau khi thay đổi đủ chỗ cho 120 đại biểu là $\frac{120}{x-2}$ (ghế)

Từ đó ta có phương trình $\frac{104}{x} + 1 = \frac{120}{x-2}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 18x - 208 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 26 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta được $x = 26$ thỏa mãn. Vậy ban đầu Phòng họp có 26 dãy ghế.

Bài 16 (Hải Dương – 2023 -2024)

Một đội công nhân phải trồng 96 cây xanh. Đội dự định chia đều số cây cho mỗi công nhân nhưng khi chuẩn bị trồng thì có 4 công nhân được điều đi làm việc khác nên mỗi công nhân còn lại phải trồng thêm 4 cây. Hỏi lúc đầu đội công nhân có bao nhiêu người?

Lời giải

Gọi số công nhân lúc đầu của đội là x (người). ĐK: $x > 4, x \in \mathbb{N}$

Số công nhân làm việc thực tế là $x - 4$ (người)

Số cây xanh mỗi công nhân trồng theo dự định là $\frac{96}{x}$ (cây)

Số cây xanh mỗi công nhân trồng theo dự định là $\frac{96}{x-4}$ (cây)

Ta có phương trình $\frac{96}{x-4} - \frac{96}{x} = 4$

$$\Rightarrow 96x - 96(x-4) = 4x(x-4)$$

$$\Leftrightarrow 96x - 96x + 384 = 4x^2 - 16x$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 16x - 384 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 96 = 0$$

$$\Delta' = (-2)^2 - (-96) = 100$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 2 + \sqrt{100} = 12$ (thỏa mãn), $x_2 = 2 - \sqrt{100} = -8$ (loại)

Vậy số công nhân lúc đầu của đội là 12 (người).

Bài 17 (Hải Phòng – 2023 – 2024)

Một trường học có mảnh vườn hình chữ nhật chu vi là 100m. Nhà trường tiến hành mở rộng mảnh vườn đó bằng cách tăng chiều dài thêm 5m và chiều rộng thêm 4m, khi đó diện tích tăng thêm 240m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn trước khi mở rộng.

Lời giải

Gọi chiều dài của vườn ban đầu là $x(m)$, chiều rộng của vườn ban đầu là $y(m)$

(ĐK: $0 < y < x < 50$)

Vì chu vi của vườn ban đầu là $100m$ nên ta có phương trình:

$$2(x+y) = 100 \Leftrightarrow x+y = 50 \quad (1)$$

Chiều dài của vườn sau khi mở rộng là: $(x+5) (m)$

Chiều rộng của vườn sau khi mở rộng là: $(y+4) (m)$

Khi đó diện tích vườn trường đã tăng thêm 240m^2 nên ta có phương trình:

$$(x+5)(y+4) - xy = 240 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x+y = 50 \\ (x+5)(y+4) - xy = 240 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $x = 30; y = 20$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy chiều dài của vườn ban đầu là $30m$, chiều rộng của vườn ban đầu là $20m$.

Bài 18 (Hòa Bình – 2023 -2024)

Một đội xe dự định chở 120 tấn xi măng vào công trường. Khi chuẩn bị khởi hành thì đội xe được bổ sung thêm 5 chiếc xe nữa, nên cả đội đã chở thêm được 5 tấn và mỗi xe chở ít hơn so với dự định là 1 tấn xi măng. Hỏi theo dự định đội xe có bao nhiêu chiếc xe? Biết khối lượng xi măng mỗi xe chở là như nhau và mỗi xe chỉ chở đúng một chuyến.

Lời giải

Gọi số chiếc xe ban đầu của đội xe là x ($x \in N^*$)

Số tấn xi măng mỗi xe phải chở theo dự định là: $\frac{120}{x}$ (tấn).

Lập được phương trình: $\frac{120}{x} = \frac{125}{x+5} + 1$

Giải phương trình tìm được $x_1 = 20$ (TM); $x_2 = -30$ (KTM)

Vậy có 20 xe.

Bài 19 (Khánh Hòa – 2023 – 2024)

Hưởng ứng phong trào "Ngày Chủ nhật xanh" do Tỉnh đoàn phát động, Trường THCS X chọn 15 học sinh chia thành hai tổ tham gia trồng cây. Tổ 1 trồng được 30 cây, tổ II trồng được 36 cây. Biết rằng mỗi học sinh ở tổ I trồng được nhiều hơn mỗi học sinh ở tổ II là 1 cây. Hỏi mỗi tổ có bao nhiêu học sinh?

Lời giải

Gọi x ; y (Học sinh) lần lượt là số học sinh của tổ I và tổ II. ($x, y \in \mathbb{N}^*$ và $x, y < 15$)

Theo đề ta có: $x + y = 15$ (1)

Số cây mỗi học sinh tổ I trồng được là: $\frac{30}{x}$ (cây)

Số cây mỗi học sinh tổ II trồng được là: $\frac{36}{y}$ (cây)

Mỗi học sinh ở tổ I trồng được nhiều hơn mỗi học sinh ở tổ II là 1 cây nên ta có $\frac{30}{x} - \frac{36}{y} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 15 \\ \frac{30}{x} - \frac{36}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 - y \\ \frac{30}{15 - y} - \frac{36}{y} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 - y \\ \frac{30y - 36(15 - y)}{y(15 - y)} = \frac{y(15 - y)}{y(15 - y)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15 - y \\ 30y - 540 + 36y = 15y - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 - y \\ y^2 + 51y - 540 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 - y \\ (y - 9)(y + 60) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 - y \\ y = 9(tm) \\ y = -60(ktm) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 - 9 = 6 \\ y = 9 \end{cases}$$

Vậy: Số học sinh của tổ I là 6 (Học sinh)

Số học sinh của tổ II là 9 (Học sinh)

Bài 20 (KonTum – 2023 – 2024)

Một nhóm gồm 15 học sinh (cả nam và nữ) tham gia buổi lao động trồng cây. Các bạn nam trồng được 54 cây, các bạn nữ trồng được 30 cây. Mỗi bạn nam trồng được số cây như nhau và mỗi bạn nữ trồng được số cây như nhau. Tính số học sinh nam và số học sinh nữ của nhóm, biết rằng mỗi bạn nam trồng được nhiều hơn mỗi bạn nữ 1 cây.

Lời giải

Gọi số học sinh nam tham gia trồng cây là x (học sinh) $x \in \mathbb{N}^*$ $x < 15$

Vì nhóm gồm 15 học sinh (cả nam và nữ) tham gia buổi lao động trồng cây

\Rightarrow số học sinh nữ là $15 - x$ (học sinh)

Mỗi bạn nam trồng cây như nhau, số cây mỗi bạn nam trồng là $\frac{54}{x}$ (cây)

Mỗi bạn nữ trồng cây như nhau, số cây mỗi bạn nam trồng là $\frac{30}{15 - x}$ (cây)

Vì mỗi bạn nam trồng được nhiều hơn mỗi bạn nữ 1 cây nên ta có phương trình:

$$\frac{54}{x} - \frac{30}{15 - x} = 1$$

$$\Rightarrow 54(15 - x) - 30x = x(15 - x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 99x + 810 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 90 \\ x = 9 \end{cases}$$

So với điều kiện ta được $x = 9$

Vậy nhóm tham gia trồng cây có 9 học sinh nam và $15 - 9 = 6$ học sinh nữ.

Bài 21 (Lào Cai – 2023 – 2024)

Một cửa hàng nhập 10 sản phẩm gồm hai loại A và B về bán. Biết mỗi sản phẩm loại A nặng 9kg, mỗi sản phẩm loại B nặng 10kg và tổng khối lượng của tất cả các sản phẩm là 95kg. Hỏi cửa hàng đã nhập bao nhiêu sản phẩm mỗi loại?

Lời giải

Gọi số lượng sản phẩm loại A, loại B cửa hàng nhập về bán lần lượt là x, y (sản phẩm).

Điều kiện: $x, y < 10; x, y \in \mathbb{N}^*$.

Vì tổng số sản phẩm loại A, B cửa hàng nhập về là 10 (sản phẩm) nên ta có phương trình: $x + y = 10$ (1)

Tổng khối lượng của các sản phẩm loại A là $9x$ (kg)

Tổng khối lượng của các sản phẩm loại B là $10y$ (kg)

Vì tổng khối lượng của tất cả các sản phẩm là 95kg nên ta có phương trình:

$$9x + 10y = 95 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 9x + 10y = 95 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 10y = 100 \\ 9x + 10y = 95 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 10 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện})$$

Vậy số lượng sản phẩm loại A là 5 (sản phẩm), số lượng sản phẩm loại B là 5 (sản phẩm).

Bài 22 (Nghệ An – 2023 -2024)

Một cửa hàng kinh doanh xe đạp nhập về một lô hàng gồm hai loại: loại I có giá trị 2 triệu đồng/xe và loại II có giá trị 6 triệu đồng/xe. Biết rằng lô hàng trên có 50 xe với tổng số hàng mà cửa hàng phải thanh toán là 160 triệu đồng. Hỏi cửa hàng đã nhập về bao nhiêu xe loại I và bao nhiêu xe loại II?

Lời giải

Gọi x (xe) là số xe loại I của một cửa hàng ($x > 0$)

Số xe loại II của một cửa hàng là $50 - x$ (xe)

Số tiền phải thanh toán xe loại I là $2x$ (triệu đồng)

Số tiền phải thanh toán xe loại II là $6(50 - x)$ (triệu đồng)

Tổng số tiền cửa hàng phải thanh toán là 160 triệu đồng nên ta có phương trình :

$$2x + 6(50 - x) = 160$$

$$\Leftrightarrow -4x = -140$$

$$\Leftrightarrow x = 35(n)$$

Vậy xe loại I là 35 xe

Xe loại II là 15 xe

Bài 23 (Ninh Thuận – 2023 – 2024)

Gia đình An dự định đi du lịch tại Nha Trang và Huế trong 7 ngày. Biết rằng chi phí trung bình mỗi ngày tại Nha Trang là 2 triệu đồng, còn tại Huế là 3 triệu đồng. Tìm số ngày nghỉ dự định của gia đình An tại mỗi địa điểm, biết số tiền mà họ phải chi cho toàn bộ chuyến đi là 18 triệu đồng.

Lời giải

Gọi x (ngày) là số ngày nghỉ dự định của gia đình An tại Nha Trang ($x > 0$).

Vì gia đình An dự định đi du lịch tại Nha Trang và Huế trong 7 ngày nên suy ra số ngày nghỉ dự định tại Huế là $7 - x$.

Theo đề bài, ta có chi phí gia đình An chi ở Nha Trang là $2x$ triệu đồng, ở Huế là $3.(7 - x)$ triệu đồng.

Chi phí toàn bộ chuyến đi là 18 triệu đồng nên ta có phương trình:

$$2x + 3.(7 - x) = 18$$

$$\Leftrightarrow 2x + 21 - 3x = 18$$

$$\Rightarrow x = 3$$

Vậy số ngày nghỉ dự định của gia đình An tại Nha Trang là 3 ngày, tại Huế là 4 ngày.

Bài 24 (Phú Yên – 2023 – 2024)

Một khu đất hình chữ nhật có tỉ số hai kích thước là $\frac{2}{3}$. Người ta làm một sân bóng đá mini 5 người ở giữa, chừa lối đi xung quanh (lối đi thuộc khu đất). Lối đi rộng 2m và có diện tích 224 m^2 . Tính kích thước của khu đất.

Lời giải

Gọi chiều dài, chiều rộng của khu đất lần lượt là x, y (m). Điều kiện $x > y > 4$
Diện tích của khu đất là xy (m^2)

Chiều dài, chiều rộng của sân bóng đá lần lượt là $x - 4, y - 4$ (m) nên diện tích của sân bóng đá là $(x - 4)(y - 4)$ (m^2)

Vì lối đi có diện tích là 224 m^2 nên ta có: $xy - (x - 4)(y - 4) = 224$

$$\Leftrightarrow x + y = 60 \text{ mà } \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}y$$

$$\text{Nên } \frac{2}{3}y + y = 60 \Leftrightarrow y = 36. \text{ Từ đó } x = 24$$

Vậy kích thước của khu đất là dài 36m và rộng 24m.

Bài 25 (Quảng Ngãi – 2023 – 2024)

Hai đội công nhân cùng thi công một đoạn đường nông thôn và dự định hoàn thành công việc đó trong 16 ngày. Khi làm được 12 ngày thì đội I được điều động đi làm việc ở nơi khác. Những ngày sau đó, đội II làm việc với năng suất gấp 1,5 lần năng suất ban đầu nên đã hoàn thành công việc đúng thời gian dự định. Hỏi theo năng suất ban đầu, nếu mỗi đội làm một mình thì phải bao nhiêu ngày mới hoàn thành công việc trên?

Lời giải

Gọi thời gian đội I hoàn thành công việc một mình là x ($x > 16, \text{ ngày}$)

Gọi thời gian đội II hoàn + công việc một mình là y ($y > 16$, ngày)

Một ngày đội I làm một mình được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Một ngày đội II làm một mình được $\frac{1}{y}$ (công việc)

Suy ra 1 ngày 2 đội làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (công việc)

Do 2 đội cùng thi công đoạn đường thì hoàn thành công việc trong 16 ngày nên ta có phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \quad (1)$$

Ta có 2 đội làm cùng nhau trong 13 ngày được $12 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ (công việc)

Đội II tăng lên 1,5 lần nên mỗi ngày đội 2 làm được $\frac{1,5}{y} = \frac{3}{2y}$ (công việc)

Để hoàn thành công việc trong 16 ngày như dự định thì đội II phải hoàn thành nốt công việc trong 4 ngày

Khi đó ta có phương trình $\frac{3}{4} + \frac{3}{2y} \cdot 4 = 1 \Leftrightarrow y = 24$

Thay $y = 24$ vào (1) ta được $\frac{1}{x} + \frac{1}{24} = \frac{1}{16} \Rightarrow x = 48$ (ngày)

Vậy đội I hoàn thành công việc một mình trong 48 ngày, đội II hoàn thành công việc trong 24 ngày.

Bài 26 (Quảng Ninh – 2023 – 2024)

Hai địa điểm A và B cách nhau 280 km . Hai ô tô cùng xuất phát từ A đến B . Biết vận tốc của xe thứ nhất lớn hơn vận tốc của xe thứ hai 10 km/h và xe thứ nhất đến B sớm hơn xe thứ hai 30 phút. Tính vận tốc mỗi xe?

Lời giải

Gọi vận tốc của xe thứ hai là x (km/h , $x > 0$).

Vì vận tốc của xe thứ nhất lớn hơn vận tốc của xe thứ hai là 10 km/h nên vận tốc của xe thứ nhất là $x + 10$ (km/h)

Thời gian xe thứ nhất đi từ A đến B là: $\frac{280}{x+10}$ (giờ)

Thời gian xe thứ hai đi từ A đến B là: $\frac{280}{x}$ (giờ)

Vì xe thứ nhất đến B sớm hơn xe thứ hai 30 phút $= \frac{1}{2}$ giờ nên ta có:

$$\frac{280}{x} - \frac{280}{x+10} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{560(x+10)}{2x(x+10)} - \frac{560x}{2x(x+10)} = \frac{x(x+10)}{2x(x+10)}$$

$$\Leftrightarrow 560(x+10) - 560x = x(x+10)$$

$$\Leftrightarrow 560x + 5600 - 560x = x^2 + 10x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 5600 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 70x + 80x - 5600 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-70) + 80(x-70) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+80)(x-70) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+80=0 \\ x-70=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-80 \text{ (KTM)} \\ x=70 \text{ (TM)} \end{cases}$$

Vậy vận tốc xe thứ nhất là 80 km/h , vận tốc xe thứ hai là 70 km/h .

Bài 27 (Sóc Trăng – 2023 – 2024)

Trong kỳ thi tuyển sinh lớp 10 năm học 2023-2024 của tỉnh Sóc Trăng, bạn An trúng tuyển thủ khoa nên được cha mẹ thưởng cho một chiếc điện thoại mới. Khi đến cửa hàng điện thoại An được tư vấn nếu mua điện thoại kèm phụ kiện thì giá của phụ kiện sẽ được giảm giá 30% so với giá niêm yết ban đầu. Biết rằng tổng giá tiền điện thoại và phụ kiện ban đầu là 11 500 000 đồng và nhờ mua hai thứ nên cha mẹ An chỉ phải trả tổng số tiền là 11 050 000 đồng. Hãy tính giá của chiếc điện thoại mà An được thưởng là bao nhiêu tiền?

Lời giải

Gọi giá tiền của chiếc điện thoại mà An được thưởng và giá tiền phụ kiện lần lượt là x và y (đồng), $x > 0, y > 0$.

Theo đề bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 11500000 \\ x + 0,7y = 11050000 \end{cases}$$

Giải hpt ta được
$$\begin{cases} x = 10000000 \\ y = 1500000 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy giá tiền của chiếc điện thoại mà AN được thưởng là 10 000 000 đồng.

Bài 28 (Sơn La – 2023 – 2024)

Ông Nam sở hữu một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 60 m . Ông Nam định bán mảnh đất với giá thị trường là 8 triệu đồng cho một mét vuông. Hãy xác định giá tiền của mảnh đất đó biết rằng mảnh đất có chiều dài gấp hai lần chiều rộng.

Lời giải

Gọi chiều rộng của mảnh đất là $x(m)$ (điều kiện $x > 0$)

Chiều dài của mảnh đất là: $2x(m)$

Vì chu vi của mảnh đất là 60 m nên ta có phương trình:

$$2(x + 2x) = 60 \Leftrightarrow 3x = 30 \Leftrightarrow x = 10(m) \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Diện tích mảnh đất là: $10 \cdot 20 = 200(m^2)$

Giá tiền bán mảnh đất đó là: $200 \cdot 8 = 1600$ (triệu đồng) = 1,6 (tỉ đồng)

Vậy giá tiền của mảnh đất đó là 1,6 (tỉ đồng).

Bài 29 (Tây Ninh – 2023 – 2024)

Hệ thống cáp treo núi Bà Đen tỉnh Tây Ninh gồm hai tuyến Vân Sơn và Chùa Hang có tổng cộng 191 cabin, mỗi cabin có sức chứa 10 người. Nếu tất cả các cabin của hai tuyến đều chứa đủ số người theo qui định thì số người ở tuyến Vân Sơn nhiều hơn số người ở tuyến Chùa Hang là 350 người. Tính số cabin của mỗi tuyến.

Lời giải:

Gọi số cabin của tuyến Vân Sơn là x (cabin) ($x \in \mathbb{Z}^+, x < 191$)

Gọi số cabin của tuyến Chùa Hang là y (cabin) ($y \in \mathbb{Z}^+, y < 191$)

Hai tuyến Vân Sơn và Chùa Hang có tổng cộng 191 cabin nên:

$$x + y = 191$$

Vì số người ở tuyến Vân Sơn nhiều hơn số người ở tuyến Chùa Hang là 350 người (nếu mỗi cabin chứa đủ 10 người) nên:

$$10x - 10y = 350 \text{ hay } x - y = 35$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 191 \\ x - y = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 191 \\ 2x = 226 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 113 \text{ (nhận)} \\ y = 78 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Vậy tuyến Vân Sơn có 113 cabin

Bài 30 (Thái Nguyên – 2023 – 2024)

Cho hình chữ nhật có chu vi bằng 30 cm . Nếu chiều rộng tăng thêm 3 cm và chiều dài giảm đi 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật đó sẽ tăng thêm 18 cm^2 . Tính chiều rộng và chiều dài của hình chữ nhật đã cho.

Lời giải

Gọi chiều rộng, chiều dài của hình chữ nhật lần lượt là $x, y (x, y > 0)$, đơn vị: cm .

Khi đó ta có: $2(x + y) = 30 \Leftrightarrow x + y = 15$

Khi chiều rộng tăng thêm 3 cm và chiều dài giảm đi 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật đó sẽ tăng thêm 18 cm^2 nên ta có phương trình

$(x + 3)(y - 1) = xy + 18 \Leftrightarrow -x + 3y = 21$.

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ -x + 3y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 9 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy, chiều rộng, chiều dài của hình chữ nhật lần lượt là $6(\text{cm}); 9(\text{cm})$.

Bài 31 (Thừa Thiên Huế - 2023 – 2024)

Một người đi xe đạp với vận tốc không đổi từ A đến B cách nhau 36 km . Trên cùng tuyến đường đó, khi đi từ B đến A, người này đi với vận tốc lớn hơn 3 km/h so với vận tốc khi đi từ A đến B vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B.

Lời giải:

Gọi $x(\text{km/h})$ là vận tốc của người đi xe đạp đi từ A đến B ($x > 0$)

$x + 3$ là vận tốc của người đi xe đạp đi từ B đến A

Thời gian của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là: $\frac{36}{x}$ (giờ)

Thời gian của người đi xe đạp khi đi từ B đến A là: $\frac{36}{x + 3}$ (giờ)

Vì thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút nên ta có phương trình:

$$\frac{36}{x} = \frac{36}{x + 3} + \frac{36}{60}$$

Giải phương trình, ta được:

$x = 12$ (thỏa mãn) hoặc $x = -15$ (loại)

Vậy vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là: 12 km/h

Bài 32 (Tiền Giang – 2023 – 2023)

Một khu vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 150 m^2 . Hỏi khu vườn có chiều dài và chiều rộng bằng bao nhiêu mét, biết rằng chiều dài lớn hơn chiều rộng 5 m ?

Lời giải

Gọi $x (x > 0; m)$ là chiều rộng của khu vườn hình chữ nhật.

Suy ra: chiều dài của khu vườn hình chữ nhật là: $x + 5 (m)$.

Diện tích khu vườn hình chữ nhật: $x(x+5) (m^2)$.

Theo đề bài ta có phương trình: $x(x+5)=150$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 150 = 0$$

Giải phương trình thu được: $x_1 = 10 (n)$; $x_2 = -15 (l)$

Vậy:

Chiều rộng của khu vườn hình chữ nhật là 10 m.

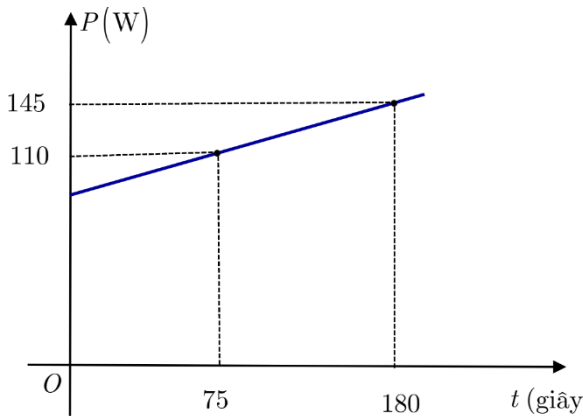
Chiều dài của khu vườn hình chữ nhật là: $x+5=10+5=15(m)$.

Bài 33 (Tp.HCM 2023 – 2024)

Chị Lan đun sôi nước bằng ấm điện. Biết rằng mối liên hệ giữa công suất hao phí $P(W)$ của ấm điện và thời gian đun t (giây) được mô hình hóa bởi một hàm số bậc nhất có dạng $P = at + b$ và đồ thị như hình bên.

a) Hãy xác định các hệ số a và b .

b) Nếu đun nước sôi với công suất hao phí là $105(W)$ thì thời gian đun là bao lâu?



Lời giải

a) Quan sát đồ thị ta có:

Đường thẳng $P = at + b$ đi qua điểm $(75; 110)$ nên ta có: $75a + b = 110$ (1)

Đường thẳng $P = at + b$ đi qua điểm $(180; 145)$ nên ta có: $180a + b = 145$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 75a + b = 110 \\ 180a + b = 145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 85 \end{cases}$$

Vậy $a = \frac{1}{3}$ và $b = 85$ hay $P = \frac{1}{3}t + 85$ (*).

b) Ta có công suất hao phí là $105(W)$ hay $P = 105$.

Thay $P = 105$ vào phương trình (*) ta được: $105 = \frac{1}{3}t + 85 \Rightarrow t = 60$.

Vậy thời gian đun là 60 giây.

Bài 34 (Tp.HCM – 2023 – 2024)

Nhà bạn Khanh có hai thùng đựng sữa, thùng thứ nhất có thể tích 10 lít, thùng thứ hai có thể tích 8 lít. Biết rằng cả hai thùng đều đang chứa một lượng sữa và tổng lượng sữa ở hai thùng lớn hơn 10 lít. Bạn Khanh muốn xác định lượng sữa ở mỗi thùng nhưng không có dụng cụ đo thể tích nên bạn đã nghĩ ra cách làm như sau:

- Đầu tiên, Khanh đổ sữa từ thùng thứ nhất sang thùng thứ hai cho đầy thì lượng sữa còn lại ở thùng thứ nhất bằng $\frac{1}{2}$ lượng sữa so với ban đầu.

- Sau đó, Khanh đổ sữa từ thùng thứ hai sang thùng thứ nhất cho đầy thì lượng sữa còn lại ở thùng thứ hai bằng $\frac{1}{5}$ lượng sữa so với thời điểm ban đầu.

Hỏi thời điểm ban đầu mỗi thùng sữa chứa bao nhiêu lít sữa?

Lời giải

Gọi lượng sữa ở thùng thứ nhất và thùng thứ hai ở thời điểm ban đầu lần lượt là x, y lít sữa ($0 < x \leq 10; 0 < y \leq 8; x + y > 10$).

Vì sau khi đổ sữa từ thùng thứ nhất sang thùng thứ hai cho đầy thì lượng sữa còn lại ở thùng thứ nhất bằng $\frac{1}{2}$ lượng sữa so với ban đầu nên ta có phương trình:

$$\frac{1}{2}x + 8 = x + y \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + y = 8 \quad (1)$$

Vì sau khi đổ sữa từ thùng thứ hai sang thùng thứ nhất cho đầy thì lượng sữa còn lại ở thùng thứ hai bằng $\frac{1}{5}$ lượng sữa so với thời điểm ban đầu nên ta có phương trình:

$$10 + \frac{1}{5}y = x + y \Leftrightarrow x + \frac{4}{5}y = 10 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 8 \\ x + \frac{4}{5}y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 16 \\ x + \frac{4}{5}y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy thời điểm ban đầu thùng thứ nhất chứa 6 lít sữa, thùng thứ hai chứa 5 lít sữa.

Bài 35 (Vĩnh Phúc – 2023 -2024)

Một hãng taxi công nghệ cao có giá cước (giá tiền khách hàng phải trả cho mỗi km) được tính theo các mức sau:



Mức 1: Giá mở cửa cho 1 km đầu tiên là 2000 đồng;

Mức 2: Từ trên 1 km đến 25 km;

Mức 3: Từ trên 25 km;

Biết anh A đi 32 km phải trả tiền taxi là 479500 đồng còn chị B đi 41 km phải trả 592000 đồng. Hỏi giá cước của hãng taxi ở mức 2 và mức 3 là bao nhiêu? Nếu khách hàng đi 24 km thì phải trả taxi bao nhiêu tiền?

Lời giải

Gọi giá cước của hãng taxi ở mức 2 là x đồng (ĐK $x > 0$)

Gọi giá cước của hãng taxi ở mức 3 là y đồng (ĐK $y > 0$)

Anh A: Trả tiền ở mức 2 là $(25 - 1)x = 24x$ (đồng)

Trả tiền ở mức 3 là $(32 - 25)y = 7y$ (đồng)

Theo bài ra ta có phương trình: $2000 + 24x + 7y = 479500 \Leftrightarrow 24x + 7y = 459500$ (1)

Chị B: Trả tiền ở mức 2 là $(25 - 1)x = 24x$ (đồng)

Trả tiền ở mức 3 là $(41 - 25)y = 16y$ (đồng)

Theo bài ra ta có phương trình: $2000 + 24x + 16y = 592000 \Leftrightarrow 24x + 16y = 572000$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 24x + 7y = 459500 \\ 24x + 16y = 572000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x + 7y = 459500 \\ 9y = 112500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15500 \\ y = 12500 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy: Giá tiền của hãng taxi ở mức 2 là 15500 đồng

Giá tiền của hãng taxi ở mức 3 là 125000 đồng

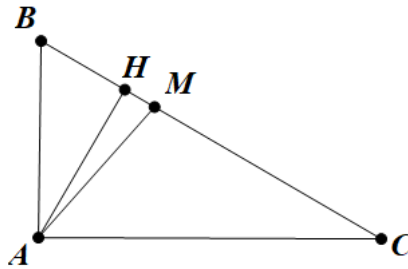
Nên khách hàng đi 24 km thì phải trả số tiền là: $2000 + 23 \cdot 15500 = 376500$ đồng.

CHỦ ĐỀ 6: CÁC BÀI TOÁN VỀ CĂN THỨC BẬC HAI**Bài 1.** (Đề vào lớp 10 Bình Phước 2023-2024)Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết rằng $AB = 3\text{cm}$, $\hat{C} = 30^\circ$

- a) Tính \hat{B} , AC , AH
- b) Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $MC = 2MB$, tính diện tích tam giác AMC

Lời giải

- a) Tính
- \hat{B}
- ,
- AC
- ,
- AH

Ta có $\hat{B} = 60^\circ$

$$\text{Ta có } \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Leftrightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (cm)}.$$

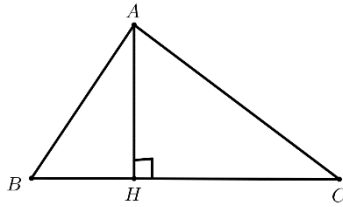
- b) Trên cạnh
- BC
- lấy điểm
- M
- sao cho
- $MC = 2MB$
- , tính diện tích tam giác
- AMC

$$S_{AMC} = \frac{1}{2} AH \cdot MC = \frac{1}{2} AH \cdot \frac{2}{3} BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = 3\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Bài 2. (Đề vào lớp 10 Cao Bằng 2023-2024)Cho tam giác ABC vuông tại A . Biết $AC = 8\text{cm}$; $BC = 10\text{cm}$.

- a) Tính độ dài cạnh AB .
- b) Kẻ đường cao AH . Tính độ dài đoạn thẳng HC .

Lời giải



a) Áp dụng định lí Pita go trong $\triangle ABC$ vuông ta có

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6.$$

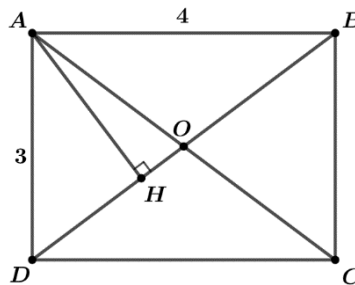
b) Áp dụng hệ thức về cạnh và hình chiếu ta có

$$AC^2 = HB.HC \Rightarrow HC = \frac{AC^2}{BC} = \frac{64}{10} = 6,4(\text{cm}).$$

Bài 3. (Đề vào lớp 10 Đồng Tháp 2023-2024)

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4$ cm, $AD = 3$ cm và O là giao điểm hai đường chéo. Kẻ đường cao AH của tam giác ABD ($H \in BD$). Tính độ dài các đoạn thẳng BD , AH và OH .

Lời giải



Áp dụng định lí Pytagore ta có $AB^2 + AD^2 = BD^2$

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5 \text{ cm}$$

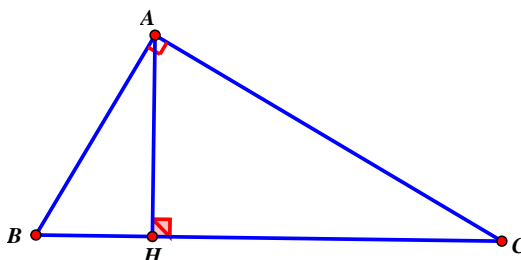
AH là đường cao trong tam giác vuông ADB nên $AH = \frac{AB.AD}{BD} = \frac{12}{5}$ cm

$$OA = \frac{1}{2}DB, \text{ suy ra } HO = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \frac{7}{10} \text{ cm}$$

Bài 4. (Đề vào lớp 10 Hà Tĩnh 2023-2024)

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH ($H \in BC$). Biết độ dài đoạn $AC = 5$ cm và $AH = 3$ cm. Tính độ dài đoạn CH và diện tích tam giác ABC .

Lời giải



Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ACH ,

ta có: $CH^2 = AC^2 - AH^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow CH = 4\text{cm}$

Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông ABC

Ta có $AC^2 = CH.CB \Rightarrow BC = \frac{25}{4} \text{ cm.}$

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}.3.\frac{25}{4} = \frac{75}{8} (\text{cm}^2)$

Bài 5. (Đề vào lớp 10 Hoà Bình 2023-2024)

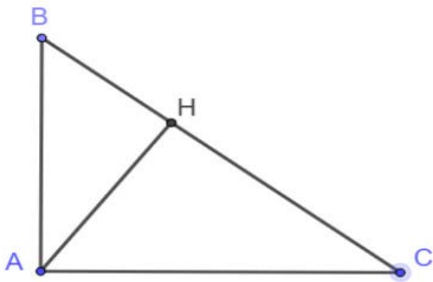
Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH ($H \in BC$), biết $BH = 4\text{cm}$, $HC = 9\text{cm}$.

Tính độ dài đoạn thẳng AH .

Lời giải

Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có

$$AH^2 = HB.HC = 4.9 = 36 \Rightarrow AH = 6 (\text{cm})$$



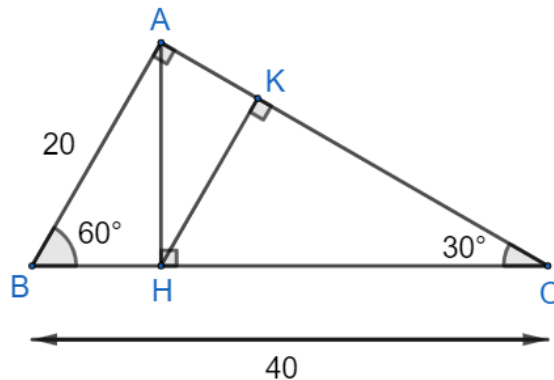
Bài 6. (Đề vào lớp 10 Lào Cai 2023-2024)

Cho $\triangle ABC$ vuông ở A , có đường cao AH . Biết góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$, độ dài $BC = 40\text{cm}$.

a) Tính độ dài cạnh AB ;

b) Gọi điểm J thuộc đoạn thẳng AC sao cho HK vuông góc với AC . Tính độ dài đoạn HK .

Lời giải



a) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH có

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 40 \cdot \cos 60^\circ = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20.$$

Vậy $AB = 20(\text{cm})$.

b) Áp dụng Pytago cho $\triangle ABC$ ta có $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 40^2 - 20^2 = 1200$



$$\Rightarrow AC = 20\sqrt{3}(\text{cm}).$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC ta có:

$$AC^2 = BC.HC \Rightarrow HC = \frac{AC^2}{BC} = \frac{1200}{40} = 30.$$

Do ΔABC vuông tại A $\Rightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Xét ΔHKC vuông tại K có

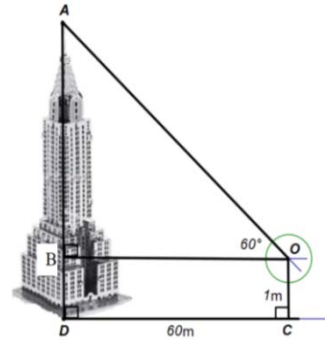
$$\sin \widehat{HCK} = \frac{KH}{HC} \Rightarrow HK = KC.\sin \widehat{HCK} = 30.\sin 30^\circ = 30.\frac{1}{2} = 15$$

Vậy $HK = 15(\text{cm})$.

Bài 7. (Đề vào lớp 10 Long An 2023-2024)

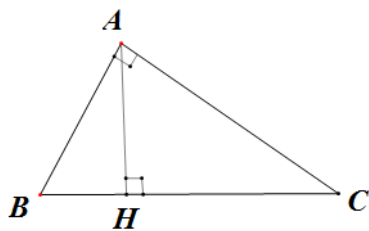
a. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AH = 3\text{cm}$, $HC = 4\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng HB, AC và số đo góc C (kết quả làm tròn đến độ).

b. Để xác định chiều cao của một tòa tháp cao tầng (hình vẽ bên), một người đứng tại điểm C cách chân tháp một khoảng $CD = 60\text{m}$, sử dụng giác kế nhìn thấy đỉnh tòa tháp với góc $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Hãy tính chiều cao của tòa tháp. Biết rằng khoảng cách từ mặt đất đến ống ngắm của giác kế là $OC = 1\text{m}$, (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

a. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AH = 3\text{cm}$, $HC = 4\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng HB, AC và số đo góc C (kết quả làm tròn đến độ).



* Xét tam giác ABC vuông tại A nên $AH^2 = HB.HC$

$$\Rightarrow HB = \frac{AH^2}{HC} = \frac{9}{4} = 2,25\text{cm}.$$

* Xét tam giác vuông AHC có:

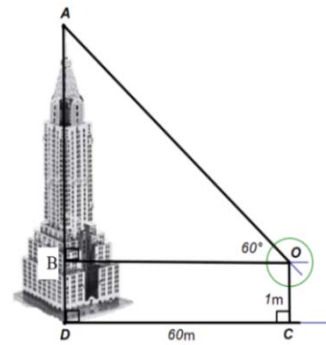
$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \text{ (định lí pytago)}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{cm}.$$

$$* \cos C = \frac{CH}{CA} = 0,8 \text{ hoặc } \cos C = \frac{CH}{CA} = \frac{4}{5}$$

Vậy $\widehat{C} \approx 37^\circ$.

b. Để xác định chiều cao của một tòa tháp cao tầng (hình vẽ bên), một người đứng tại điểm C cách chân tháp một khoảng $CD = 60m$, sử dụng giác kế nhìn thấy đỉnh tòa tháp với góc $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Hãy tính chiều cao của tòa tháp. Biết rằng khoảng cách từ mặt đất đến ống ngắm của giác kế là $OC = 1m$, (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

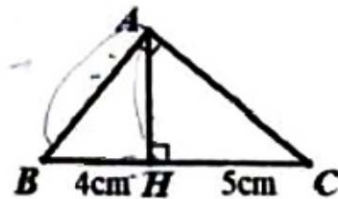


Tam giác OAB vuông tại B , có $AB = 60 \cdot \tan 60^\circ$.

Vậy chiều cao của ngọn tháp là $h \approx 105 m$.

Bài 8. (Đề vào lớp 10 Quảng Ngãi 2023-2024)

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $BH = 4cm, HC = 5cm$ (như hình vẽ). Tính độ dài AB và AH .



Lời giải

$$BC = BH + HC = 4 + 5 = 9(cm).$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH ta có:

$$+) AB^2 = BH \cdot BC$$

$$\Rightarrow AB^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

$$\Rightarrow AB = 6(cm)$$

$$+) AH^2 = BH \cdot HC$$

$$\Rightarrow AH^2 = 4 \cdot 5 = 20$$

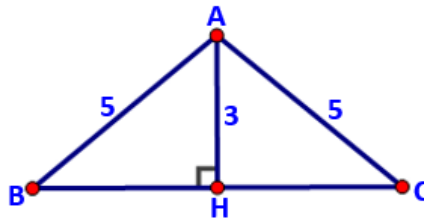
$$\Rightarrow AH = \sqrt{20}(cm)$$

Vậy $AB = 6cm, AH = 2\sqrt{5}cm$.

Bài 9. (Đề vào lớp 10 Tây Ninh 2023-2024)

Cho tam giác ABC cân tại A , $AB = AC = 5$ và đường cao $AH = 3$. Tính độ dài BC .

Lời giải



Tính độ dài BC

$\triangle ABH$ vuông ở H có

$$HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ (Pitago } \triangle ABH)$$

Vì $\triangle ABC$ cân ở A và $AH \perp BC$ nên $HB = HC$.

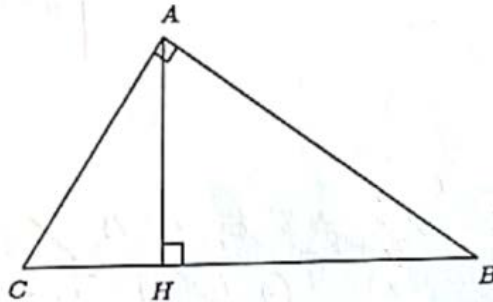
Do đó $BC = 2BH = 2.4 = 8$.

Vậy $BC = 8$.

Bài 10. (Đề vào lớp 10 Thái Nguyên 2023-2024)

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Biết $AH = 4 \text{ cm}$ và $HC = 3 \text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AC, BC và AB .

Lời giải



Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông AHC ta có:

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow AC = 5(\text{cm}).$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC ta có:

$$AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow BH = \frac{AH^2}{CH} = \frac{16}{3}(\text{cm}).$$

$$\text{Do đó } BC = BH + HC = \frac{16}{3} + 3 = \frac{25}{3}(\text{cm}).$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC ta có:

$$AB \cdot AC = AH \cdot BC \Rightarrow AB = \frac{AH \cdot BC}{AC} = \frac{20}{3}(\text{cm}).$$

Bài 11. (Đề vào lớp 10 Trà Vinh 2023-2024)

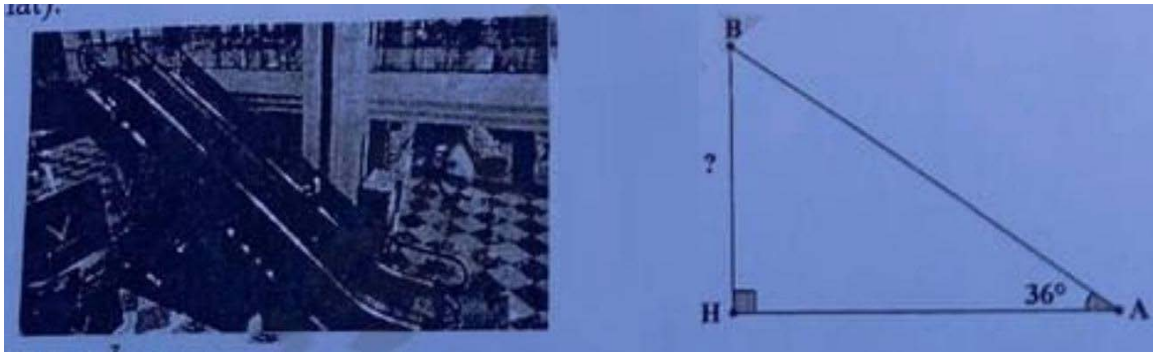
Thang cuốn ở siêu thị giúp khách hàng di chuyển từ tầng này sang tầng khác tiện lợi.

Biết rằng thang cuốn được thiết kế có độ nghiêng so với mặt phẳng ngang là

36° ($\widehat{BAH} = 36^\circ$) và có vận tốc là $0,5 \text{ m/s}$. Một khách hàng đã di chuyển bằng thang cuốn từ

tầng một lên tầng hai theo hướng AB hết 12 giây. Tính chiều cao (BH) của thang cuốn?

(Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



Lời giải

Chiều dài thang máy là: $12,0,5 = 6$ (m)

Trong ΔAHB vuông tại H ta có $\sin HAB = \frac{HB}{AB}$

Chiều cao HB của thang cuốn là: $HB = \sin HAB \cdot AB = \sin 36^\circ \cdot 6 \approx 3,5$ (m)

Vậy chiều cao thang cuốn là $3,5m$.

CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG TRÒN

Câu 1. (Trường vào lớp 10 An Giang năm 2023-2024)

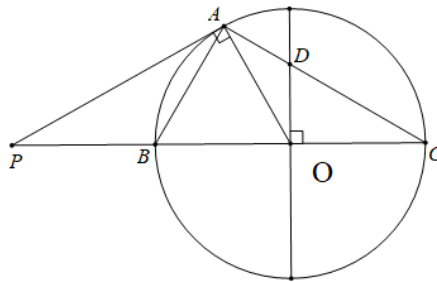
Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) tâm O đường kính BC , đường thẳng qua O vuông góc với BC cắt AC tại D .

a. Chứng minh rằng tứ giác $ABOD$ nội tiếp.

b. Tiếp tuyến tại điểm A với đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm P , sao cho $PB = BO = 2\text{cm}$. Tính độ dài đoạn PA và số đo góc APC .

c. Chứng minh rằng $\frac{PB}{PC} = \frac{BA^2}{AC^2}$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $\widehat{BOD} = 90^\circ$ (giả thiết)

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BOD} = 180^\circ$ Vậy tứ giác nội tiếp

b) Tam giác APO vuông tại A , áp dụng định lý Pitago ta có

$$PO^2 = PA^2 + OA^2 \Rightarrow PA^2 = PO^2 - OA^2$$

$$PA^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

$$PA = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Mặt khác $\tan \widehat{APO} = \frac{OA}{AP} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{APO} = 30^\circ$ hay $\widehat{APC} = 30^\circ$

c)

Xét hai tam giác PBA và PAC có

Góc P chung

$$\widehat{PAB} = \widehat{PCA}$$

(cùng chắn cung)

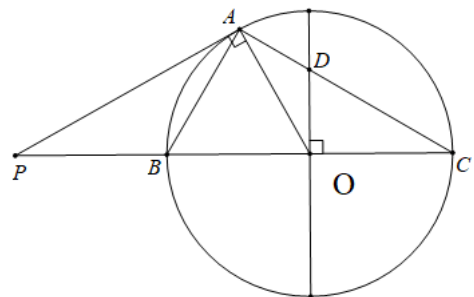
Vậy hai tam giác PBA và PAC đồng dạng, khi đó

$$\frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PC} = \frac{BA}{AC}$$

$$\frac{PB}{PA} = \frac{BA}{AC} \text{ và } \frac{PA}{PC} = \frac{BA}{AC}$$

Nhân hai biểu thức ta được

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{PA}{PC} = \frac{BA}{AC} \cdot \frac{BA}{AC} = \left(\frac{BA}{AC}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{BA^2}{AC^2}$$

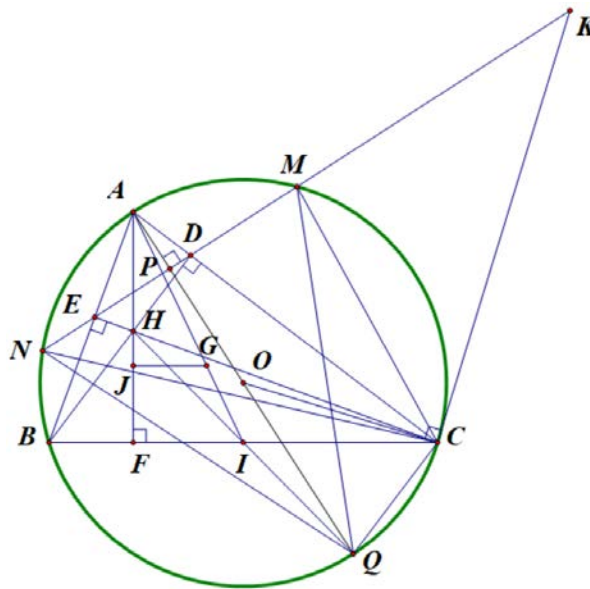


Câu 2. (Trường vào lớp 10 Bà Rịa Vũng Tàu năm 2023-2024)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) ($AB < AC$). Các đường cao BD, CE cắt nhau tại H .

- Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp.
- Đường thẳng ED cắt tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) tại K và cắt (O) tại M, N (M nằm giữa D và K). So sánh \widehat{KNC} với \widehat{KCM} và chứng minh $KC^2 = KM.KN$.
- Kẻ đường kính AQ của đường tròn (O) cắt MN tại P . Chứng minh $QM = QN$.
- Giả sử $BC > AC$ gọi F, I lần lượt là giao điểm của hai tia AH, HQ với BC . Chứng minh rằng $\frac{S_{HDE}}{S_{ABC}} > \frac{DE^2}{3BC^2}$.

Lời giải



a) Xét tứ giác $ADHE$ ta có $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{D} + \widehat{E} = 180^\circ$ do vậy tứ giác $ADHE$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Ta có $\widehat{KNC} = \widehat{MNC} = \frac{1}{2}sd\widehat{MC}$

Do CK là tiếp tuyến nên $\widehat{KCM} = \frac{1}{2}sd\widehat{CM}$

Từ hai lập luận trên ta có $\widehat{KNC} = \widehat{KCM} = \frac{1}{2}sd\widehat{CM}$. Vậy $\widehat{KNC} = \widehat{KCM}$.

Xét hai tam giác ΔKNC và ΔKCM ta có $\widehat{KNC} = \widehat{KCM}$ và góc K chung do đó ΔKNC và ΔKCM là hai tam giác đồng dạng, do vậy $\frac{KN}{KC} = \frac{KC}{KM}$ hay $KC^2 = KM.KN$.

c) Theo hình vẽ ta có

$$\begin{aligned} \widehat{AED} &= \widehat{AHD} \text{ (cùng chắn cung } \widehat{AD} \text{ đường tròn } (O')) \\ &= \widehat{BHF} \text{ (Hai góc đối đỉnh)} \end{aligned}$$

$= \widehat{ACB}$ (cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Ta lại có $\widehat{EAP} = \widehat{BAQ}$, mà $\widehat{ACB} + \widehat{BAQ} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{AED} + \widehat{EAP} = 90^\circ$ từ đây suy ra

$\widehat{APE} = 90^\circ$ hay $AQ \perp ED \Rightarrow AQ \perp MN$ do vậy AQ là đường trung trực của MN do vậy $QM = QN$.

d) Ta có I là giao điểm của HQ và BC

Xét tứ giác $HBQC$ ta có $HB \parallel GC$ (vì cùng vuông góc với AC)

Tương tự $HC \parallel QB$ (vì cùng vuông góc với AB)

Do đó tứ giác $HBQC$ là hình bình hành, suy ra I là trung điểm của BC .

Xét 4 điểm E, B, C, D cùng nằm trên đường tròn đường kính BC , ta có hai tam giác

$\triangle EHD$ và $\triangle BHC$ đồng dạng (g-g-g) theo tỷ số $\frac{ED}{BC}$.

Hai $\triangle BHC$ và $\triangle ABC$ có đường cao lần lượt là HF và AF (cùng ứng với cạnh đáy BC)

do đó $\frac{S_{BHC}}{S_{ABC}} = \frac{HF}{AF}$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , qua G kẻ đường thẳng song song với BC cắt AF

tại J ta có tỷ số $\frac{AJ}{AF} = \frac{1}{3}$.

Ta có $\frac{S_{HDE}}{S_{ABC}} = \frac{S_{HDE}}{S_{HBC}} \cdot \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{ED}{BC}\right)^2 \cdot \frac{HF}{AF}$ (1)

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\frac{HF}{AF} > \frac{1}{3}$ với giả thiết $AB < AC < BC$ và $\hat{A} < 90^\circ$.

Vì $\triangle ABF$ và $\triangle CHF$ đồng dạng nên $\frac{AF}{BF} = \frac{CF}{HF} \Rightarrow \frac{FB}{FA} = \frac{FH}{FC}$

Trong tam giác ABC ta có $\cot B \cdot \cot C = \frac{FB}{FA} \cdot \frac{FC}{FA} = \frac{HF}{AF}$ (2)

Mặt khác trong tam giác nhọn $\triangle ABC$ thì ta có $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$ (vượt tầm lớp 9!)

Lại từ giả thiết $AB < AC < BC$ suy ra $C < B < A < 90^\circ$, từ đây ta lại có

$0 < \cot A < \cot B < \cot C$ do đó

$1 = \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A < \cot C \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot B$

hay $\cot B \cdot \cot C > \frac{1}{3}$ (3)

Từ (1),(2),(3) ta có được $\frac{HF}{AF} > \frac{1}{3}$ và $\frac{S_{HDE}}{S_{ABC}} > \frac{1}{3} \frac{ED^2}{BC^2}$ (đpcm).

Câu 3. (Trường vào lớp 10 Bắc Giang năm 2023-2024)

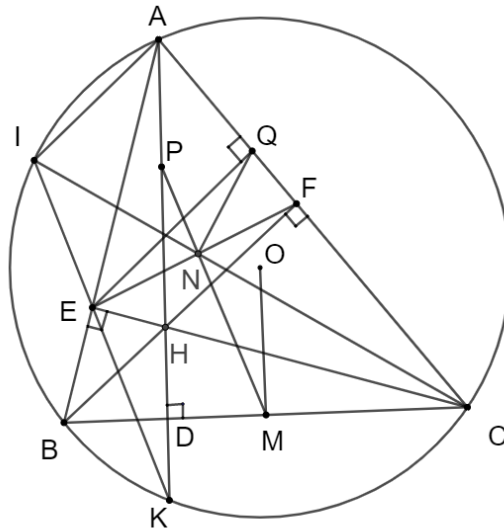
Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường cao AD, BF, CE của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H .

a) Chứng minh tứ giác $BEHD$ nội tiếp một đường tròn.

b) Kéo dài AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K . Kéo dài KE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai I . Gọi N là giao điểm của CI và EF . Chứng minh $CE^2 = CN \cdot CI$.

- c) Kẻ OM vuông góc với BC tại M . Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Lời giải



a) Chỉ ra được $\widehat{BEH} = 90^\circ$

Chỉ ra được $\widehat{BDH} = 90^\circ$

Suy ra tứ giác $BEHD$ có $\widehat{BEH} + \widehat{BDH} = 180^\circ$ và $\widehat{BEH}, \widehat{BDH}$ là hai góc ở vị trí đối diện nhau

Kết luận tứ giác $BEHD$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Ta có $\widehat{CIK} = \widehat{CAK}$ (cùng bằng $\frac{1}{2} sđ\widehat{CK}$)

Chỉ ra tứ giác $AEHF$ nội tiếp (Tổng hai góc đối bằng 180°) $\Rightarrow \widehat{FAH} = \widehat{FEH}$.

Suy ra $\widehat{CIE} = \widehat{NEC}$

Chỉ ra hai tam giác CIE và CEN đồng dạng theo trường hợp góc – góc

$$\Rightarrow \frac{CE}{CN} = \frac{CI}{CE} \Rightarrow CE^2 = CN.CI \text{ (đpcm)}$$

c) Chỉ ra P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEHF$.

Chỉ ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BEFC$.

Mà hai tứ giác $AEHF$ và $BEFC$ có hai điểm chung là EF nên PM đi qua trung điểm của EF (1)

Gọi Q là hình chiếu của E trên AC . Xét $\triangle EAC$ vuông tại E , có EQ là đường cao nên $CE^2 = CQ.CA$

Theo b) ta có $CE^2 = CN.CI$ nên $CN.CI = CQ.CA \Rightarrow \frac{CN}{CQ} = \frac{CA}{CI}$

Suy ra hai tam giác $CNQ; CAI$ đồng dạng (chung góc C và tỉ số bằng nhau)

$$\Rightarrow \widehat{CQN} = \widehat{CIA}. \text{ Mà } \widehat{CIA} = \widehat{CBA} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung } \widehat{CA}) \Rightarrow \widehat{CQN} = \widehat{CBA}$$

Do tứ giác $BEFC$ nội tiếp nên $\widehat{QFN} = \widehat{EBC}$ (Cùng bù với góc \widehat{CFE})

$$\text{Suy ra } \widehat{CQN} = \widehat{FQN} = \widehat{QFN} \Rightarrow NQ = NF$$

$$\text{Chỉ ra } \widehat{NQE} = \widehat{QEN} \text{ (Tương ứng phụ với hai góc bằng nhau } \widehat{FQN}; \widehat{QFN}) \Rightarrow NQ = NE$$

Do đó $NE = NF$ hay N là trung điểm của EF (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Câu 4. (Trường vào lớp 10 Bắc Ninh năm 2023-2024)

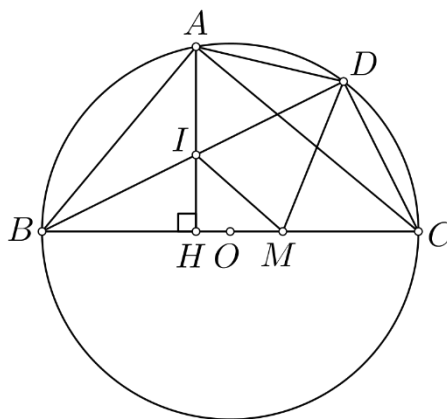
Cho đường tròn tâm O đường kính BC . Trên đường tròn đã cho lấy điểm A cố định (A khác B và C) và lấy điểm D thay đổi trên cung nhỏ AC (D khác A và C). Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Hai đường thẳng BD và AH cắt nhau tại I .

1) Chứng minh rằng tứ giác $IHCD$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh rằng $AB^2 = BI \cdot BD$.

3) Lấy điểm M trên đoạn thẳng BC sao cho $BM = AB$. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle MID$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi D thay đổi trên cung nhỏ AC .

Lời giải



a) Vì $AH \perp BC$ nên $\widehat{IHC} = 90^\circ$

\widehat{BDC} là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{BDC} = 90^\circ$

Ta có: $\widehat{IHC} + \widehat{BDC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Vậy tứ giác $IHCD$ nội tiếp.

b) Ta có: $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AB}$ (1)

$\triangle ABH$ vuông tại $H \Rightarrow \widehat{BAI} + \widehat{ABC} = 90^\circ$ (2)

$\widehat{BAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 90^\circ$ (3)

Từ (1); (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{ADB}$

Xét $\triangle BAI$ và $\triangle BDA$ có: \widehat{ABD} chung; $\widehat{BAI} = \widehat{ADB}$

$$\Rightarrow \triangle BAI \sim \triangle BDA \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{BI}{AB} \Rightarrow AB^2 = BI \cdot BD$$

c) Do $BM = AB$, mà $\frac{AB}{BD} = \frac{BI}{AB}$ nên $BM^2 = BI \cdot BD \Rightarrow \frac{BM}{BD} = \frac{BI}{BM}$

Xét $\triangle BMI$ và $\triangle BDM$ có: \widehat{DBM} chung; $\frac{BM}{BD} = \frac{BI}{BM}$

$$\Rightarrow \triangle BMI \sim \triangle BDM \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \widehat{BMI} = \widehat{BDM}$$

$\Rightarrow BM$ là tiếp tuyến tại M của đường tròn ngoại tiếp $\triangle MID$

Suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle MID$ thuộc đường thẳng vuông góc với BC tại M

Do $A; B; C$ cố định nên M cố định và đường thẳng vuông góc với BC tại M cố định

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle MID$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi D thay đổi trên cung nhỏ AC .

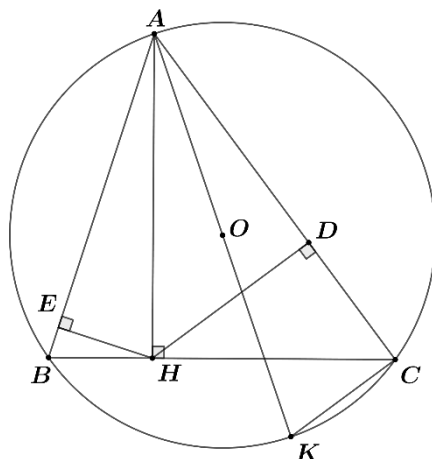
Câu 5. (Trường vào lớp 10 Bến Tre năm 2023-2024)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Kẻ AH vuông góc với BC tại H , kẻ HE vuông góc với AB tại E , kẻ HD vuông góc với AC tại D .

a) Chứng minh: tứ giác $AEHD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Dụng đường kính AK của đường tròn (O) . Chứng minh $AE \cdot AK = AH \cdot AC$

Lời giải



a) Tứ giác $AEHD$ có:

$$\widehat{AEH} = 90^\circ \text{ (} HE \perp AB \text{)}$$

$$\widehat{ADH} = 90^\circ \text{ (} HD \perp AC \text{)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{ADH} = 180^\circ$$

Vậy tứ giác $AEHD$ nội tiếp

b) Ta có $\widehat{ACK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\widehat{EAH} + \widehat{ABH} = 90^\circ$$

$$\widehat{CAK} + \widehat{AKC} = 90^\circ$$

mà $\widehat{ABH} = \widehat{AKC}$ (cùng chắn cung AC)

$$\Rightarrow \widehat{EAH} = \widehat{CAK}$$

Xét $\triangle EAH$ và $\triangle CAK$ có:

$$\widehat{EAH} = \widehat{ACK} = 90^\circ$$

$$\widehat{EAH} = \widehat{CAK} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle EAH \sim \triangle CAK \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AH}{AK}$$

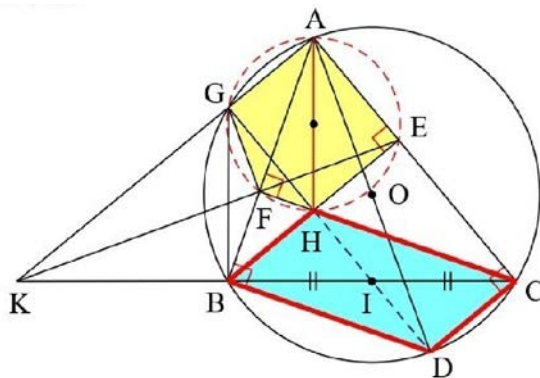
$$\Rightarrow AE \cdot AK = AH \cdot AC$$

Câu 6. (Trường vào lớp 10 Bình Định năm 2023-2024)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có $AB < AC$, các đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H , đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại K .

1. Chứng minh tứ giác $BCEF$ nội tiếp.
2. Chứng minh hai tam giác KBF và KEC đồng dạng, từ đó suy ra $KB \cdot KC = KF \cdot KE$
3. Đường thẳng AK cắt đường tròn (O) tại G khác A , chứng minh các điểm A, G, F, E, H cùng thuộc một đường tròn.
4. Gọi I là trung điểm cạnh BC , chứng minh HI vuông góc với KA .

Lời giải



1) Ta có: $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ nên B, F, E, C cùng thuộc đường tròn đường kính BC .

Suy ra tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC .

2) Xét ΔKBF và ΔKEC có:

$$\widehat{KFB} = \widehat{KCE} \text{ (vì cùng bù với góc BFE)}$$

$$\widehat{BKF} : \text{chung}$$

Do đó: $\Delta KBF \sim \Delta KEC$ (g.g)

$$\text{Suy ra: } \frac{KB}{KE} = \frac{KF}{KC} \Rightarrow KB.KC = KF.KE \quad (1)$$

3) Ta chứng minh được $\Delta KBG \sim \Delta KAC$ (g.g)

$$\text{Suy ra: } \frac{KB}{KA} = \frac{KG}{KC} \Rightarrow KB.KC = KA.KG \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra: $KA.KG = KE.KF$

$$\text{Xét } \Delta KGF \text{ và } \Delta KEA \text{ có: } \frac{KG}{KE} = \frac{KF}{KA} \text{ (vì } KA.KG = KE.KF); \widehat{GKF} : \text{chung}$$

Do đó: $\Delta KGF \sim \Delta KEA$ (c.g.c)

$$\text{Suy ra: } \widehat{KGF} = \widehat{KEA} \Rightarrow \text{Tứ giác AGFE nội tiếp} \quad (3)$$

$$\text{Tứ giác AEHF nội tiếp (vì } \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ) \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra 5 điểm: A, G, F, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH.

4) Kẻ đường kính AD của đường tròn (O). Khi đó: $BH // CD$ (vì cùng vuông góc với AC) $CH // BD$ (vì cùng vuông góc với AB). Do đó tứ giác BHCD là hình bình hành.

Lại có I là trung điểm của đường chéo BC nên I là trung điểm của đường chéo HD

$$\text{Suy ra: H, I, D thẳng hàng} \quad (5)$$

$$\text{Ta có: } \widehat{AGD} = 90^\circ \text{ (vì nội tiếp chắn nửa đường tròn)} \quad (6)$$

$$\widehat{AGH} = \widehat{AFH} = 90^\circ \text{ (vì nội tiếp cùng chắn cung AH)} \quad (7)$$

Từ (5), (6) và (7) suy ra: H, G, I thẳng hàng. Vậy HI vuông góc với AK.

Câu 7. (Trường vào lớp 10 Bình Dương năm 2023-2024)

Cho đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm C tùy ý trên (O) (C khác A, B và $AC < CB$). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại D. Dựng CH vuông góc với BD tại H (H nằm trên BD). Đường thẳng DO cắt CH và CB lần lượt tại M và N.

1) Chứng minh tứ giác CNHD nội tiếp được trong đường tròn.

2) Chứng minh $CM = CO$.

3) Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại E. Chứng minh $EA.EB = EC^2$.

4) Khi quay tam giác DNB một vòng quanh cạnh DN ta được một hình nón. Biết $OB = 6cm, BD = 8cm$. Tính thể tích của hình nón tạo thành.

Lời giải

1) Ta có $CH \perp BD \Rightarrow H$ nhìn CD dưới một góc vuông (1)

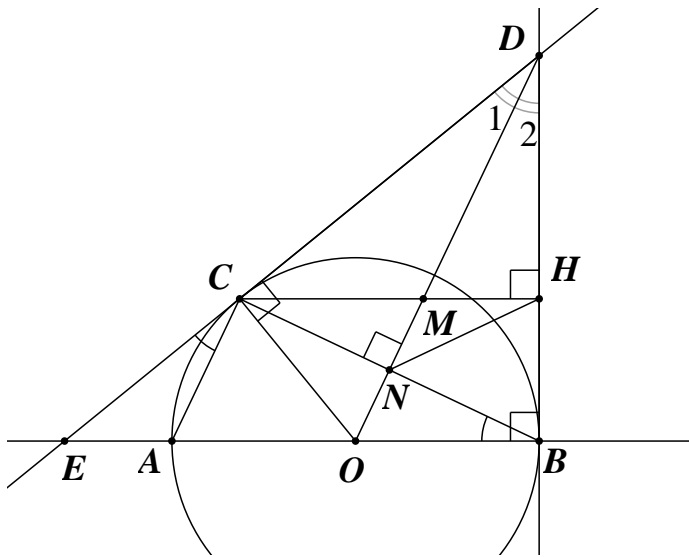
Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau CD và BD, ta có $DC = DB$

Hai bán kính $OC = OB$

$\Rightarrow OD$ là trung trực của BC $\Rightarrow OD \perp CB$

$\Rightarrow N$ nhìn CD dưới một góc vuông (2)

Từ (1) và (2) \Rightarrow tứ giác CNHD nội tiếp được trong đường tròn.



2) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau CD và BD, ta có $DC = DB$, ta có $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$

Theo tính chất tiếp tuyến và giả thiết, ta có góc $\widehat{COD} = \widehat{DMH}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$)

Mặt khác $\widehat{DMH} = \widehat{CMO}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{COD} = \widehat{CMO}$

ΔCOM có $\widehat{COM} = \widehat{CMO} \Rightarrow$ cân tại C $\Rightarrow CM = CO$.

3) ΔEAC và ΔECB có góc E chung và góc $\widehat{ECA} = \widehat{CBA}$ (cùng chắn cung AC)

\Rightarrow đồng dạng $\Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{EC}{EB} \Rightarrow EA \cdot EB = EC^2$.

4) Hình nón được tạo bởi tam giác vuông DNB quay quanh DN

\Rightarrow bán kính $r = NB$ và chiều cao $h = ND$.

Theo Pitago cho tam giác vuông BOD: $OD = \sqrt{OB^2 + BD^2} = \sqrt{36 + 64} = 10cm$.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông BOD, ta có:

$$BN \cdot OD = OB \cdot BD \Rightarrow BN = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8 \text{ cm}.$$

$$\text{Và } BD^2 = DN \cdot DO \Rightarrow DN = \frac{64}{10} = 6,4 \text{ cm}$$

Thể tích của hình nón tạo thành

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot (4,8)^2 \cdot 6,4 = \frac{6144}{125} \pi \approx 154,4156 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Câu 8. (Trường vào lớp 10 Bình Phước năm 2023-2024)

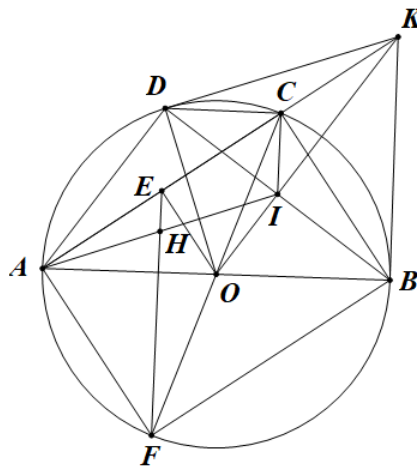
Cho đường tròn (O) đường kính AB . lấy điểm C thuộc (O) (C khác A và B), tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B cắt AC ở K . Từ K kẻ tiếp tuyến KD với đường tròn (O) (D là tiếp điểm khác B)

a) Chứng minh tứ giác $BODK$ nội tiếp.

b) Biết OK cắt BD tại I . Chứng minh rằng $OI \perp BD$ và $KC \cdot KA = KI \cdot KO$

c) Gọi E là trung điểm của AC , kẻ đường kính CF của đường tròn (O) , FE cắt AI tại H . Chứng minh rằng H là trung điểm của AI .

Lời giải



a) Ta có $\widehat{OBK} = \widehat{ODK} = 90^\circ$.

$$\Rightarrow \widehat{OBK} + \widehat{ODK} = 180^\circ.$$

Do đó tứ giác $BODK$ nội tiếp.

b) Ta có $KB = KD$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Ta lại có $OB = OD$ nên OK là đường trung trực của BD . Suy ra $KO \perp BD \Rightarrow OI \perp BD$.

Xét tam giác ABK vuông tại B nên $KB^2 = KC \cdot KA$.

Xét tam giác OBK vuông tại B nên $KB^2 = KI \cdot KO$.

Suy ra $KC \cdot KA = KI \cdot KO$. (đpcm)

c) Xét tam giác KCI và tam giác KOA ta có góc K chung, $KC \cdot KA = KI \cdot KO \Leftrightarrow \frac{KC}{KI} = \frac{KO}{KA}$.

Suy ra tam giác KCI và tam giác KOA đồng dạng với nhau. Suy ra $\widehat{KCI} = \widehat{KOA}$. (*)

Xét tam giác ACF và BAK có $\widehat{KBA} = \widehat{CAF} = 90^\circ$. (1)

Mà tam giác OAC cân tại O nên $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔACF đồng dạng với ΔBAK suy ra

$$\frac{BA}{BK} = \frac{AC}{AF} \Leftrightarrow \frac{2BO}{BK} = \frac{2AE}{AF} \Leftrightarrow \frac{BK}{AF} = \frac{BO}{AE}$$

Xét tam giác AEF và BOK ta có $\widehat{KBO} = \widehat{EAF} = 90^\circ$ và $\frac{BK}{AF} = \frac{BO}{AE}$

Nên ΔAEF đồng dạng với ΔBOK suy ra

$$\widehat{AEF} = \widehat{BOK} \Rightarrow \widehat{KEF} = \widehat{KOA} \text{ (cùng bù với } \widehat{AEF} \text{)} (**)$$

Từ (*) và (**) ta có $\widehat{KCI} = \widehat{KEF}$ suy ra $EF \parallel CI$.

Xét tam giác ACI có E là trung điểm của AC và $EF \parallel CI$ nên H là trung điểm của AI .

Câu 9. (Trường vào lớp 10 Bình Thuận năm 2023-2024)

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn từ A , vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là hai tiếp điểm).

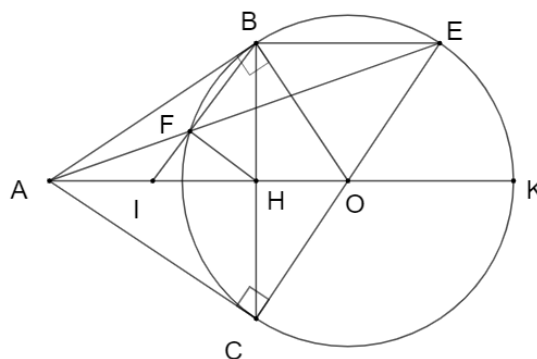
a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Vẽ đường kính CE , nối AE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F .

Chứng minh $AB^2 = AE \cdot AF$.

c) Cho OA cắt BC tại H , BF cắt OA tại I . Chứng minh I là trung điểm của AH .

Lời giải



a) Xét tứ giác $ABOC$ có:

$$\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ \text{ (} AB, AC \text{ lần lượt là tiếp tuyến tại } B, C \text{ của } (O)\text{)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^\circ$$

Vậy tứ giác $ABOC$ nội tiếp (Hai góc đối bù nhau)

b) Xét $\triangle ABF$ và $\triangle AEB$ có:

\widehat{BAF} là góc chung

$$\widehat{ABF} = \widehat{AEB} \left(= \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{AF} \text{ của } (O) \right)$$

Do đó $\triangle ABF \sim \triangle AEB$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AB} \text{ (tính chất hai tam giác đồng dạng)}$$

$$\Rightarrow AB^2 = AE \cdot AF$$

c) Xét (O) có AB, AC lần lượt là tiếp tuyến tại B, C của (O) , $OA \cap BC = H$

$$\Rightarrow OA \perp BC \text{ tại } H$$

Xét $\triangle ABO$ vuông tại B , đường cao BH , ta có:

$$AB^2 = AH \cdot AO$$

Do đó $AE \cdot AF = AH \cdot AO$ ($= AB^2$)

$$\Rightarrow \frac{AE}{AH} = \frac{AO}{AF}$$

Xét $\triangle AEO$ và $\triangle AHF$, ta có:

\widehat{HAF} là góc chung

$$\frac{AE}{AH} = \frac{AO}{AF}$$

Do đó $\triangle AEO \sim \triangle AHF$ (c - g - c)

$$\Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{AHF} \text{ (Hai góc tương ứng)}$$

Mà $\widehat{AHF} + \widehat{FHO} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

nên $\widehat{AEO} + \widehat{FHO} = 180^\circ$ hay $\widehat{FEO} + \widehat{FHO} = 180^\circ$

Suy ra tứ giác $OHFE$ nội tiếp (Hai góc đối bù nhau)

$$\Rightarrow \widehat{HFE} + \widehat{HOE} = 180^\circ \text{ (Tính chất tứ giác nội tiếp)}$$

Kéo dài AO cắt (O) tại K (O nằm giữa A và K ta có: $\widehat{KOE} + \widehat{HOE} = 180^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{KOE} = \widehat{HFE} \text{ (Cùng bù } \widehat{HOE}\text{)}$$

Xét (O) , ta có:

$\widehat{EBC} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow EB \perp BC$$

Mặt khác, ta có: $\Rightarrow OA \perp BC$ tại H (cmt) $\Rightarrow AK \perp BC$

Do đó: $EB \parallel AK$ (cùng vuông góc với BC) $\Rightarrow \widehat{KOE} = \widehat{OEB}$ (Hai góc so le trong)

$$\Rightarrow \widehat{KOE} = \widehat{CEB}$$

Suy ra $\widehat{HFE} = \widehat{CEB}$ ($= \widehat{KOE}$)

Xét (O) , ta có: $\widehat{BFE} = \widehat{BCE}$ ($= \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BE}$ của (O))

Trong $\triangle EBC$ vuông tại B , ta có: $\widehat{BEC} + \widehat{BCE} = 90^\circ$

Ta có:

$$\widehat{BFH} = \widehat{BFE} + \widehat{HFE} = \widehat{BCE} + \widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow HF \perp BI \text{ tại } F$$

Xét $\triangle BHI$ vuông tại H , đường cao HF , ta có:

$$IH^2 = IF \cdot IB \quad (1)$$

Xét $\triangle IAF$ và $\triangle IBA$, ta có:

\widehat{AIF} là góc chung

$\widehat{IBA} = \widehat{IAF}$ ($\widehat{IBA} = \widehat{BEF}$ cùng chắn cung BF của (O) , $\widehat{BEF} = \widehat{IAF}$ là hai góc so le trong của $EB \parallel AK$)

Vậy $\triangle IAF \sim \triangle IBA$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{IA}{IB} = \frac{IF}{IA}$$

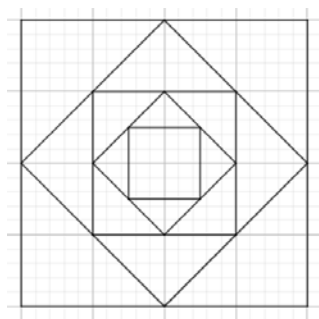
$$\Rightarrow IA^2 = IF \cdot IB \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IH^2 = IA^2$

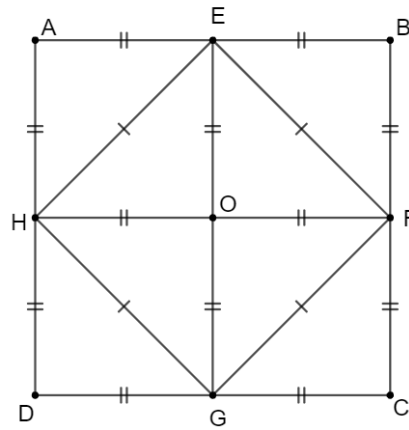
$\Rightarrow IH = IA$ hay I là trung điểm AH

Câu 10. (Trường vào lớp 10 Bình Thuận năm 2023-2024)

Từ hình vuông đầu tiên, bạn Hùng vẽ hình vuông thứ hai có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông thứ nhất, vẽ tiếp hình vuông thứ ba có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông thứ hai và cứ tiếp tục như vậy (xem hình minh họa bên). Giả sử hình vuông thứ bảy có diện tích bằng 32 cm^2 . Tính diện tích hình vuông thứ năm.



Lời giải



Nhận xét:

Xét hình vuông $ABCD$, gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA .

Khi đó hình vuông $EFGH$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông $ABCD$

Dễ dàng nhận thấy

$\triangle AEH = \triangle BEH = \triangle CGF = \triangle DGH = \triangle OEH = \triangle OEF = \triangle OGF = \triangle OHG$ (c - c - c)
(hoặc trường hợp hai cạnh góc vuông)

Do đó $S_{ABCD} = 8 \cdot S_{\triangle OHG}$, $S_{EFGH} = 4 \cdot S_{\triangle OHG}$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{EFGH}$$

Quay lại bài toán, gọi $S_1; S_2; S_3; S_4; S_5; S_6; S_7$ lần lượt là diện tích của các hình vuông 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7

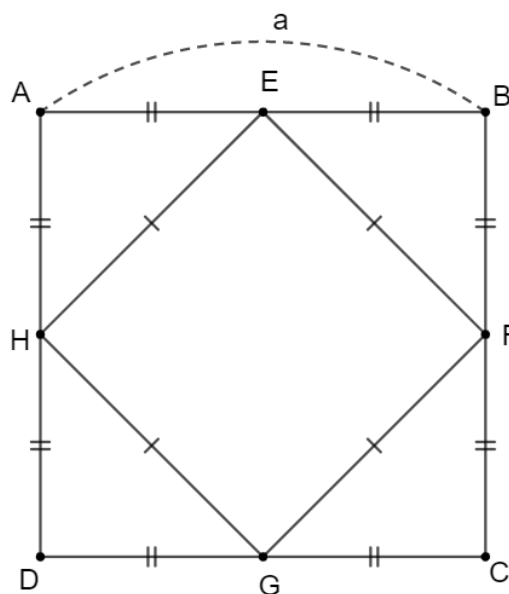
Theo nhận xét, ta có: Diện tích hình vuông bất kì bằng hai lần diện tích hình vuông có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông đã cho.

Do đó ta có:

$$S_5 = 2S_6 = 2 \cdot 2S_7 = 4S_7 = 4 \cdot 32 = 128 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vậy diện tích hình vuông thứ 5 là 128 cm^2

Cách khác:



Nhận xét:

Xét hình vuông $ABCD$ có cạnh là a . Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm

AB, BC, CD, DA .

Khi đó hình vuông $EFGH$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông $ABCD$.

$$EF = \sqrt{BE^2 + BF^2} = \sqrt{\left(\frac{BA}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$$

$$\text{Khi đó } \frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = \frac{AB^2}{EF^2} = \frac{a^2}{\frac{a^2}{2}} = 2$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{EFGH}.$$

Quay lại bài toán, gọi $S_1; S_2; S_3; S_4; S_5; S_6; S_7$ lần lượt là diện tích của các hình vuông 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7

Theo nhận xét, ta có: Diện tích hình vuông bất kì bằng hai lần diện tích hình vuông có các đỉnh là trung điểm của các cạnh hình vuông đã cho.

Do đó ta có:

$$S_5 = 2S_6 = 2.2S_7 = 4S_7 = 4.32 = 128 \text{ (cm}^2\text{)}$$

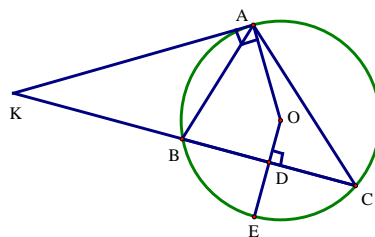
Vậy diện tích hình vuông thứ 5 là 128 cm^2

Câu 11. (Trường vào lớp 10 Cần Thơ năm 2023-2024)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại K . Từ O kẻ OD vuông góc với BC tại D , tia OD cắt đường tròn (O) tại E .

- Chứng minh tứ giác $KDOA$ nội tiếp.
- Đường thẳng AE cắt BC tại N . Chứng minh tam giác KNA cân và $KN^2 = KB.KC$.
- Kẻ tiếp tuyến KM của đường tròn (O) (M là tiếp điểm). Chứng minh tia MN và tia ED cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn (O) .

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $KDOA$ nội tiếp.

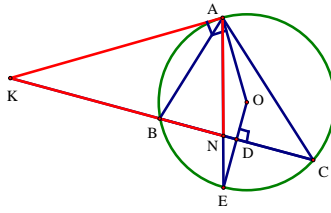
Xét tứ giác $KDOA$, ta có

$$\widehat{KAO} = 90^\circ \text{ (Tính chất của tiếp tuyến);}$$

$$\widehat{KDO} = 90^\circ \text{ (} OD \perp BC \text{ (gt))}$$

Suy ra $\widehat{KAO} + \widehat{KDO} = 180^\circ \Rightarrow KDOA$ là tứ giác nội tiếp.

b) Đường thẳng AE cắt BC tại N . Chứng minh tam giác KNA cân và $KN^2 = KB.KC$.



* Chứng minh tam giác KNA cân

Ta có $OD \perp BC$ (gt) $\Rightarrow D$ là trung điểm của BC (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)
nên OD là đường trung trực của BC

mà $E \in OD$ nên $BE = EC \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{EC}$

và $\widehat{BNA} = \frac{1}{2}(\text{sđ } \widehat{BA} + \text{sđ } \widehat{EC})$ (góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)

$$\Rightarrow \widehat{KNA} = \frac{1}{2}(\text{sđ } \widehat{BA} + \text{sđ } \widehat{BE}) \quad (1)$$

$$\widehat{EAK} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{EBA} = \frac{1}{2}(\text{sđ } \widehat{BA} + \text{sđ } \widehat{BE}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EAK} = \widehat{KNA} \Rightarrow \Delta KNA$ cân tại K (đpcm)

* Chứng minh $KN^2 = KB.KC$.

Xét ΔKAB và ΔKCA ta có

\widehat{BKA} : chung

$$\widehat{KAB} = \widehat{ACK} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AB} \text{ (cùng chắn cung } \widehat{AB})$$

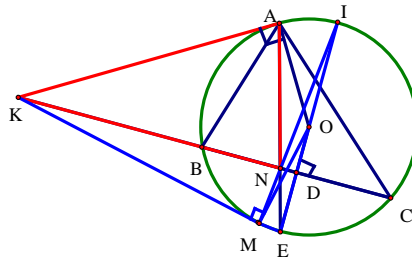
Do đó $\Delta KAB \sim \Delta KCA$ (g-g)

$$\text{Nên } \frac{KA}{KC} = \frac{KB}{KA} \Leftrightarrow KA^2 = KB.KC$$

mà ΔKNA cân tại K (cmt) $\Rightarrow KA = KN$ (3)

Suy ra $KN^2 = KB.KC$ (đpcm)

c) Kẻ tiếp tuyến KM của đường tròn (O) (M là tiếp điểm). Chứng minh tia MN và tia ED cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn (O).



Cách 1: Ta có: $\widehat{BMN} = \widehat{KMN} - \widehat{KMB}$

$\widehat{CMN} = \widehat{KNM} - \widehat{BCM}$ (góc ngoài của tam giác MNC)

Mà $\widehat{KMN} = \widehat{KNM}$ (ΔKMN cân do đó $KM = KN = KA$)

$\widehat{KMB} = \widehat{BCM}$ (cùng chắn \widehat{BM})

$\Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{CMN}$

$\Rightarrow MN$ là tia phân giác của góc BMC

+ MN là tia phân giác của góc BMC nên MN đi qua điểm chính giữa I của \widehat{BAC}

+ $OE \perp BC$ nên ED đi qua điểm chính giữa I của \widehat{BAC}

Vậy tia MN và tia ED cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn tâm O

Cách 2: Ta có A, K, M, D, O thuộc đường tròn đường kính OK

Suy ra $\widehat{KOM} = \widehat{KDM}$ (cùng chắn cung \widehat{KM})

Mặt khác $\widehat{AEM} = \widehat{KOM} \Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{KDM}$

Suy ra tứ giác $DEM N$ nội tiếp

Mà $\widehat{NDE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NME} = 90^\circ \Rightarrow MN \perp ME(1)$

Vẽ đường kính EF , suy ra $\widehat{FME} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow MF \perp ME(2)$

Từ (1), (2) suy ra M, N, F thẳng hàng.

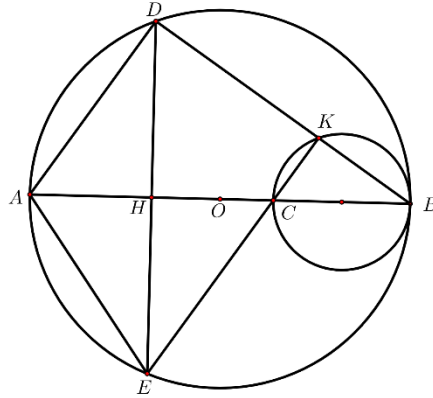
Hay tia MN và tia ED cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn tâm O

Câu 12. (Trường vào lớp 10 Cao Bằng năm 2023-2024)

Cho đường tròn (O) đường kính AB , trên đoạn thẳng OB lấy điểm C sao cho C không trùng với O và B . Gọi H là trung điểm của AC , kẻ dây cung DE của đường tròn (O) vuông góc với AC tại H . Gọi K là giao điểm của BD với đường tròn đường kính BC .

- a) Chứng minh tứ giác $DHCK$ là tứ giác nội tiếp.
 b) Chứng minh ba điểm E, C, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có $DE \perp AC \Rightarrow \widehat{DHC} = 90^\circ, \widehat{CKB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{CKD} = 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{DHC} + \widehat{CKD} = 180^\circ$.

Do đó tứ giác $DHCK$ nội tiếp đường tròn đường kính CD .

b) Ta có $HD = HE$ (do tính chất của đường kính và dây cung)

Tứ giác $ADCE$ có $HA = HC$ và $HD = HE$

$\Rightarrow ADCE$ là hình hình hành $\Rightarrow CE \parallel AD$. (1)

Mặt khác $\widehat{ADB} = 90^\circ \Rightarrow AD \perp DB$.

Lại có $CK \perp DB$

Do đó $CK \parallel AD$. (2)

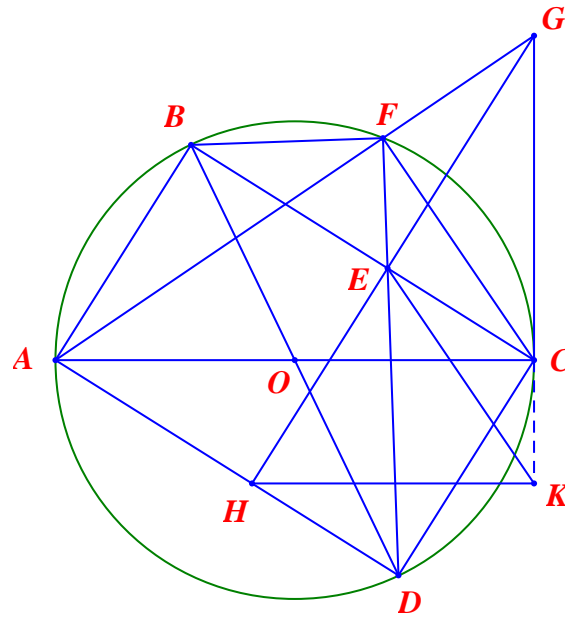
Từ (1) và (2) suy ra ba điểm E, C, K thẳng hàng.

Câu 13. (Trường vào lớp 10 Đà Nẵng năm 2023-2024)

Cho đường tròn (O) có hai đường kính AC, BD (A khác B, D). Trên đoạn thẳng BC lấy điểm E (E khác B, C), đường thẳng ED cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F .

- a) Chứng minh rằng $AB = CD$ và $\widehat{CFD} = \widehat{BCA}$.
 b) Đường thẳng qua E , vuông góc với BC cắt tia AF tại G . Chứng minh rằng tứ giác $CEFG$ nội tiếp và $CE \cdot EG = CB \cdot CE$.
 c) Gọi H là giao điểm của tia GE và AD . Đường thẳng qua H , song song với AC cắt đường thẳng qua E , song song với FC tại K . Chứng minh rằng ba điểm G, C, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh rằng $AB = CD$ và $\widehat{CFD} = \widehat{BCA}$.

- Chứng minh $AB = CD$

Xét tam giác AOB và tam giác COD có:

$$OA = OC (= R)$$

$$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \text{ (đối đỉnh)}$$

$$OB = OD (= R)$$

$$\Rightarrow \Delta AOB = \Delta COD \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AB = CD \text{ (2 cạnh tương ứng) (đpcm)}$$

Chứng minh $\widehat{CFD} = \widehat{BCA}$

Ta có: $\widehat{CFD} = \widehat{CBD}$ (hai góc nội tiếp cùng góc chắn cung CD).

Lại có: $OB = OC = R \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB}$ (tính chất tam giác cân)

$$\Rightarrow \widehat{CBD} = \widehat{BCA}$$

Vậy $\widehat{CFD} = \widehat{BCA}$.

b) Đường thẳng qua E vuông góc với BC cắt tia AF tại G. Chứng minh rằng tứ giác CEFG nội tiếp và $CD \cdot EG = CB \cdot CE$

- Chứng minh tứ giác CEFG nội tiếp

Ta có: $\widehat{AFC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow \widehat{CFG} = 90^\circ$$

Xét tứ giác CEFG có: $\widehat{CFG} = \widehat{CEG} = 90^\circ$.

Mà hai đỉnh E, F kề nhau cùng nhìn dưới CG dưới hai góc bằng nhau

\Rightarrow Tứ giác EFGC nội tiếp (dnhb) (đpcm)

- Chứng minh $CD \cdot EG = CB \cdot CE$

$$\text{Ta có: } \widehat{AGC} = \frac{1}{2} (\widehat{s\grave{n}AC} - \widehat{s\grave{n}CF}) = \frac{1}{2} \widehat{s\grave{n}AF} = \widehat{ACF}.$$

Xét tam giác AGC và tam giác ACF có:

$$\begin{cases} \widehat{CAG} \text{ chung} \\ \widehat{AGC} = \widehat{ACF} \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \Delta AGC \# \Delta ACF \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ACG} = \widehat{AFC} = 90^\circ \text{ (2 góc tương ứng)}$$

$$\Rightarrow CG \perp AC \Rightarrow CG \text{ là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C}$$

$$\Rightarrow CG \text{ là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C.}$$

Xét tam giác BCD và tam giác GEC có:

$$\widehat{BCD} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)} \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{GEC} = 90^\circ.$$

$$\widehat{BDC} = \widehat{GCE} \text{ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn } \widehat{BC} \text{)}.$$

$$\Rightarrow \Delta BCD \# \Delta GEC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{CB}{CD} = \frac{EG}{CE} \Rightarrow CD \cdot EG = CB \cdot CE \text{ (đpcm)}$$

- c) Gọi H là giao điểm của tia GE và AD . Đường thẳng qua H , song song với AC cắt đường thẳng qua E , song song với FC tại K . Chứng minh rằng ba điểm G, C, K thẳng hàng.

Vì $CEFG$ là tứ giác nội tiếp (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{EGC} = \widehat{EFC} = \widehat{DFC} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } EC \text{)}$$

Mà $\widehat{DFC} = \widehat{DAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD)

$$\Rightarrow \widehat{EGC} = \widehat{DAC} \Rightarrow \widehat{HGC} = \widehat{HAC}$$

Mà hai đỉnh A, G kề nhau cùng nhìn HC dưới hai góc bằng nhau.

$$\Rightarrow AGCH \text{ là tứ giác nội tiếp (dnhb).}$$

$$\Rightarrow \widehat{AGH} = \widehat{ACH} = \widehat{FGE} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } AH \text{)}.$$

Mà $CEFG$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FGE} = \widehat{FCE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EF).

$$\Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{FCE}$$

$$\text{Ta có: } EK // FC \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{FCE} = \widehat{CEK} \text{ (so le trong)}$$

$$HK // AC \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{CHK} \text{ (so le trong)}$$

$$\Rightarrow \widehat{CEK} = \widehat{CHK} \text{ Mà hai đỉnh } E, H \text{ kề nhau cùng nhìn } CK \text{ dưới hai góc bằng nhau}$$

$$\Rightarrow CEHK \text{ là tứ giác nội tiếp (dnhb).}$$

$$\Rightarrow \widehat{HEC} + \widehat{HKC} = 180^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{HEC} = 90^\circ \text{ (do } GH \perp BC \text{ tại } E \text{)} \Rightarrow \widehat{HKC} = 90^\circ \Rightarrow CK \perp HK.$$

$$\text{Mà } HK // AC \text{ (gt)} \Rightarrow CK \perp AC \text{ (từ vuông góc đến song song).}$$

$$\text{Mà } CG \perp AC \text{ (cmt).}$$

Vậy G, C, K thẳng hàng.

Câu 14. (Trường vào lớp 10 Đắc Lắc năm 2023-2024)

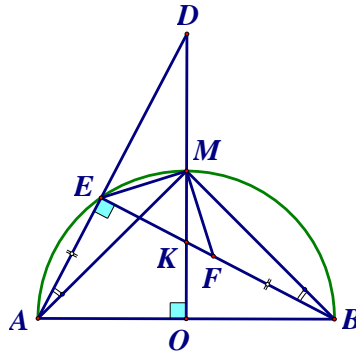
Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi M là điểm chính giữa cung AB , E là điểm trên cung AM (E khác A và M). Lấy điểm F trên đoạn BE sao cho $BF = AE$. Gọi K là giao điểm của MO và BE .

- a) Chứng minh rằng $EAOK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng ΔEMF vuông cân.

c) Hai đường thẳng AE và OM cắt nhau tại D . Chứng minh rằng $MK \cdot ED = MD \cdot EK$.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{AEK} = \widehat{AEB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $\widehat{AOK} = \widehat{AOM} = 90^\circ$ (M là điểm chính giữa của cung AB).

$\widehat{AEK} + \widehat{AOK} = 180^\circ$ nên $EAOK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét ΔAEM và ΔBFM có:

$AE = BF$ (giả thiết), $AM = BM$ (giả thiết), $\widehat{EAM} = \widehat{MBF}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EM)

$\Rightarrow \Delta AEM = \Delta BFM$ (c-g-c) $\Rightarrow EM = FM \Rightarrow \Delta MEF$ cân tại M

Mặt khác $\widehat{MEF} = \widehat{MEB} = \frac{1}{2} \widehat{MOB} = 45^\circ$

$\Rightarrow \Delta MEF$ vuông cân tại M .

c) Ta có: $\widehat{MEF} = 45^\circ$ (ΔMEF vuông cân tại M), mà $\widehat{KED} = \widehat{KEA} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DEM} = 45^\circ$

$\Rightarrow EM$ là phân giác của \widehat{DEK}

$\Rightarrow \frac{MK}{EK} = \frac{MD}{ED}$ (tính chất đường phân giác của tam giác) $\Rightarrow MK \cdot ED = MD \cdot EK$.

Câu 15. (Trường vào lớp 10 Đồng Nai năm 2023-2024)

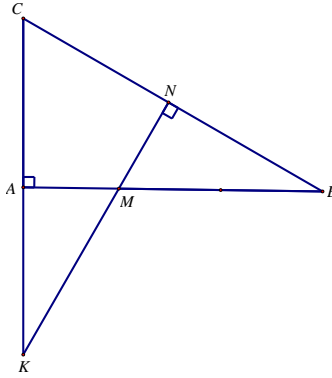
Cho tam giác ABC vuông tại A , trên cạnh AB lấy điểm M (M khác A , M khác B). Từ điểm M vẽ đường thẳng MN vuông góc với BC (N thuộc BC), đường thẳng MN cắt đường thẳng AC tại K .

1) Chứng minh tứ giác $AMNC$ nội tiếp.

2) Chứng minh $\widehat{ABK} = \widehat{ACM}$.

3) Đoạn thẳng BK cắt đường tròn đường kính BM tại điểm D (D khác B). Gọi I là tâm và r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác BKC . Chứng minh $\frac{1}{r} = \frac{1}{KN} + \frac{1}{CD} + \frac{1}{AB}$.

Lời giải



1) Chứng minh tứ giác AMNC nội tiếp.

Xét tứ giác AMNC có

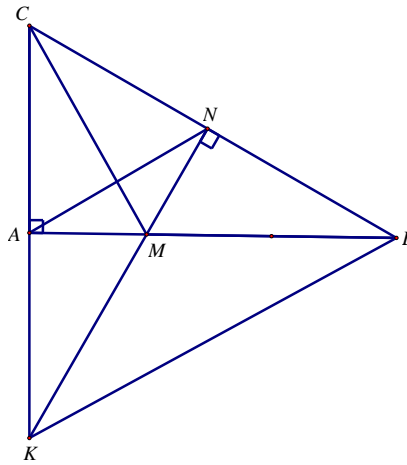
$$\widehat{CAM} = \widehat{CAB} = 90^\circ \text{ (} \Delta ABC \text{ vuông tại A, } M \in AB \text{)}.$$

$$\widehat{CNM} = 90^\circ \text{ (MN vuông góc BC)}.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{CAM} + \widehat{CNM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Vậy tứ giác AMNC nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180°).

2) Chứng minh $\widehat{ABK} = \widehat{ACM}$.



Xét tứ giác ANBK có

$$\widehat{KAB} = 90^\circ \text{ (kề bù với góc vuông CAB)}.$$

$$\widehat{KNB} = \widehat{MNB} = 90^\circ \text{ (MN vuông góc BC, K thuộc đường thẳng MN)}.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{KAB} = \widehat{KNB} = 90^\circ.$$

Vậy tứ giác ANBK nội tiếp (hai đỉnh A, N kề nhau cùng nhìn cạnh BK dưới một góc bằng 90°).

$$\Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{ANK} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AK)}. \quad (1)$$

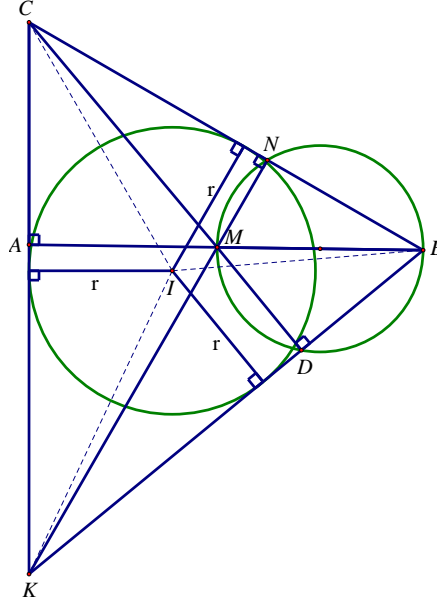
Vì tứ giác AMNC nội tiếp (chứng minh câu 5.1)

$$\text{nên } \widehat{ANM} = \widehat{ACM} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AM)}.$$

hay $\widehat{ANK} = \widehat{ACM}$ (K thuộc đường thẳng MN). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ABK} = \widehat{ACM}$.

3) **Chứng minh** $\frac{1}{r} = \frac{1}{KN} + \frac{1}{CD} + \frac{1}{AB}$.



Xét $\triangle BCK$ có BA là đường cao, KN là đường cao, M là giao điểm của BA và KN .

Suy ra M là trực tâm của $\triangle BCK$.

Do đó $CM \perp BK$. (1)

Xét đường tròn đường kính BM có $\widehat{MDB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $MD \perp BK$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm C, M, D thẳng hàng. Do đó $CD \perp BK$.

Diện tích $\triangle BIC$ là $S_{BIC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot BC$

Diện tích $\triangle BIK$ là $S_{BIK} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot BK$

Diện tích $\triangle CIK$ là $S_{CIK} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot CK$

Diện tích $\triangle BCK$ là $S_{BCK} = \frac{1}{2} KN \cdot BC = \frac{1}{2} BK \cdot CD = \frac{1}{2} CK \cdot AB$

Suy ra $\frac{1}{2} BC = \frac{S_{BCK}}{KN}$; $\frac{1}{2} BK = \frac{S_{BCK}}{CD}$; $\frac{1}{2} CK = \frac{S_{BCK}}{AB}$

Mà $S_{BCK} = S_{BIC} + S_{BIK} + S_{CIK}$

$$\text{hay } S_{BCK} = r \cdot \frac{S_{BCK}}{KN} + r \cdot \frac{S_{BCK}}{CD} + r \cdot \frac{S_{BCK}}{AB}$$

$$\Rightarrow S_{BCK} = r \cdot S_{BCK} \left(\frac{1}{KN} + \frac{1}{CD} + \frac{1}{AB} \right)$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{r} = \frac{1}{KN} + \frac{1}{CD} + \frac{1}{AB}.$$

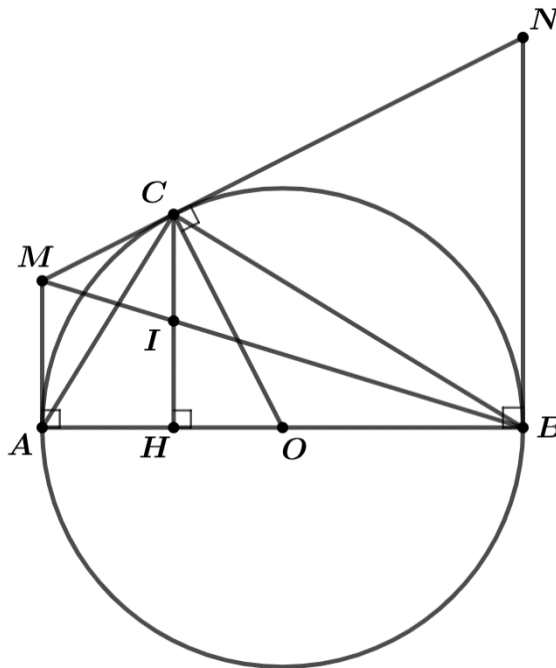
Câu 16. (Trường vào lớp 10 Đồng Tháp năm 2023-2024)

Cho đường tròn (O) đường kính AB , C là điểm nằm trên đường tròn (O) (khác A, B) sao cho $CB > CA$. Kẻ đường cao CH ($H \in AB$) của tam giác ABC , tiếp tuyến tại C và A của đường tròn (O) cắt nhau tại M .

a) Chứng minh rằng tứ giác $AMCO$ nội tiếp đường tròn.

b) Gọi I là giao điểm của CH và BM . Chứng minh rằng I là trung điểm của CH .

Lời giải



a) Ta có:

$$\widehat{MAO} = 90^\circ$$

$$\widehat{MCO} = 90^\circ$$

$$\widehat{MAO} + \widehat{MCO} = 180^\circ$$

Suy ra tứ giác $AMCO$ nội tiếp đường tròn.

b) Gọi N là giao điểm của tiếp tuyến tại C và B .

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $MC = MA, NC = NB$.

Vì $CI \parallel NB$ nên theo định lí Thalet ta có

$$\frac{CI}{NB} = \frac{MC}{MN} \text{ và } \frac{CN}{NM} = \frac{IB}{BM} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{CI}{MC} = \frac{NB}{MN} = \frac{CN}{MN} \quad (2)$$

Vì $IH \parallel AM$ nên theo định lí Thalet ta có $\frac{IH}{AM} = \frac{BI}{BM}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\frac{CI}{MC} = \frac{IH}{MA} \Rightarrow CI = IH \Rightarrow I$ là trung điểm của CH .

Câu 17. (Trường vào lớp 10 Hà Nam năm 2023-2024)

Cho đường tròn (O) . Từ điểm M bên ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Lấy điểm C trên cung nhỏ AB (C không nằm chính giữa cung AB , C khác A và B). Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên các đường thẳng AB, AM, BM .

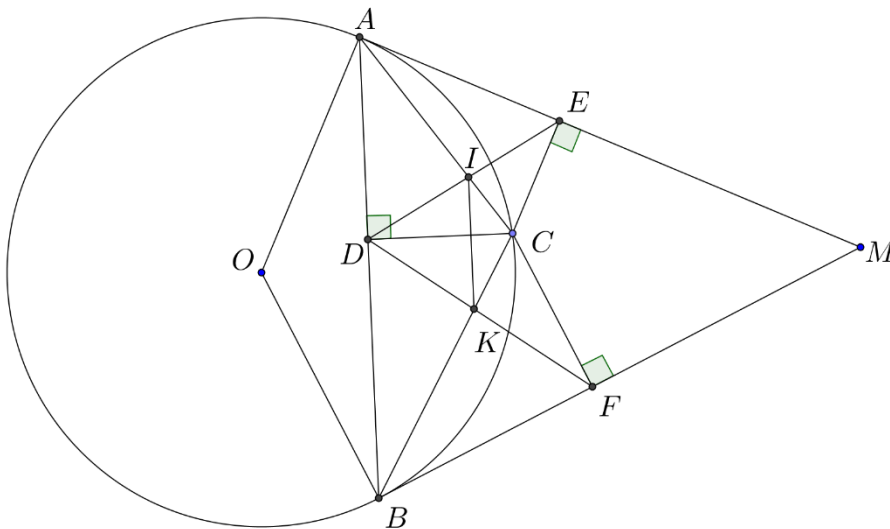
1. Chứng minh tứ giác $AECD$ nội tiếp đường tròn.

2. Chứng minh rằng $\widehat{CDE} = \widehat{CFD}$.

3. Gọi I là giao điểm của AC và ED , K là giao điểm của CB và DF . Chứng minh $CD \perp IK$.

4. Đường tròn ngoại tiếp hai tam giác CIE và CKF cắt nhau tại điểm thứ hai N (N khác C). Chứng minh đường thẳng NC đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB .

Lời giải



1. (1,0 điểm) Chứng minh tứ giác $AECD$ nội tiếp đường tròn.

$$DC \perp AD \Rightarrow \widehat{ADC} = 90^\circ$$

$$AE \perp EC \Rightarrow \widehat{AEC} = 90^\circ$$

$$\widehat{ADC} + \widehat{AEC} = 180^\circ$$

\Rightarrow Tứ giác $AECD$ nội tiếp đường tròn.

2.(1,0 điểm) Chứng minh rằng $\widehat{CDE} = \widehat{CFD}$.

Tứ giác $AECD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CAE}$.

$\widehat{CDB} + \widehat{CFB} = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $CDBF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{CBD}$.

Mà $\widehat{CBD} = \widehat{CAE}$ (Cùng chắn cung AC) $\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CFD}$.

3.(1,0 điểm) Gọi I là giao điểm của AC và ED , K là giao điểm của CB và DF . Chứng minh $CD \perp IK$.

Tứ giác $CDBF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{CBD}$.

$$\widehat{CDE} = \widehat{CFD} \text{ (Chứng minh trên)} \Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CBD} \text{ hay } \widehat{CDI} = \widehat{CBA} \text{ (1)}$$

Tứ giác $CDBF$ nội tiếp $\widehat{CDF} = \widehat{CBF}$

Mà $\widehat{CBF} = \widehat{CAB}$ (Cùng chắn cung BC) $\Rightarrow \widehat{CDK} = \widehat{CAB}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{ICK} + \widehat{IDK} = \widehat{ICK} + \widehat{IDC} + \widehat{CDK} = \widehat{ACB} + \widehat{CBA} + \widehat{CAB} = 180^\circ$

\Rightarrow Tứ giác $CIDK$ nội tiếp

Suy ra $\widehat{CIK} = \widehat{CDK}$

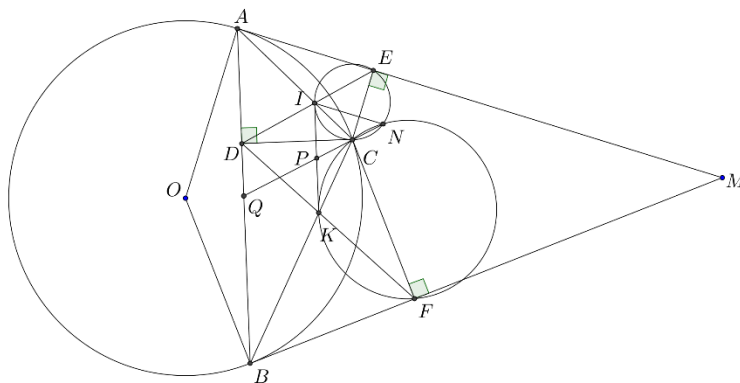
Mà $\widehat{CDK} = \widehat{CAB}$ (Chứng minh trên)

$$\Rightarrow \widehat{CIK} = \widehat{CAB}$$

$$\Rightarrow IK \parallel AB$$

Mà $CD \perp AB \Rightarrow CD \perp IK$.

4. (1,0 điểm) Đường tròn ngoại tiếp hai tam giác CIE và CKF cắt nhau tại điểm thứ hai là N . Chứng minh đường thẳng NC đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB .



Gọi NC cắt IK, AB lần lượt tại P, Q

$$\widehat{CIK} = \widehat{CAB} \text{ (Chứng minh trên).}$$

Tứ giác $AECD$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CED}$ hay $\widehat{CAB} = \widehat{CEI}$

$$\Rightarrow \widehat{CEI} = \widehat{CIK}$$

$\Rightarrow IK$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CIE

Chứng minh tương tự: IK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CKF

Xét hai tam giác PIC, PNI có

$$\widehat{IPN} \text{ chung, } \widehat{PIC} = \widehat{PNI} \text{ (cùng chắn cung } IC)$$

$$\Rightarrow \Delta PIC \sim \Delta PNI$$

$$\Rightarrow \frac{PI}{PN} = \frac{PC}{PI} \Rightarrow PI^2 = PC \cdot PN$$

Chứng minh tương tự: $PK^2 = PC \cdot PN$

$$\text{Vậy } PI = PK$$

$$IK \parallel AB \Rightarrow \frac{IP}{AQ} = \frac{CP}{CQ} = \frac{PK}{QB}$$

$$\text{Mà } PI = PK \Rightarrow AQ = QB$$

Hay Q là trung điểm của AB

Câu 18. (Trường vào lớp 10 Hà Nội năm 2023-2024)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn tâm (O) . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm S . Gọi I là chân đường vuông góc kẻ từ O đến đường thẳng BC .

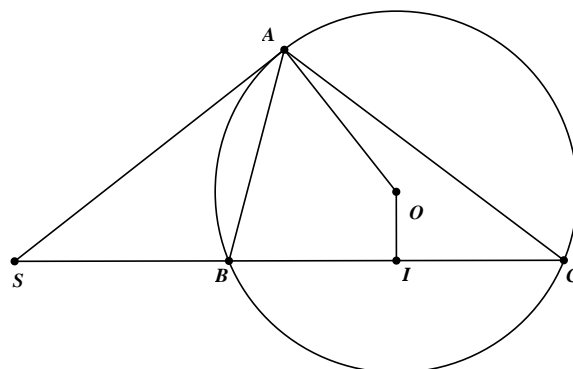
1) Chứng minh tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.

2) Gọi H và D lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A đến các đường thẳng SO và SC .

Chứng minh $\widehat{OAH} = \widehat{IAD}$

3) Vẽ đường cao CE của tam giác ABC . Qua Q là trung điểm của BE . Đường thẳng QD cắt đường thẳng AH tại K . Chứng minh $BQ \cdot BA = BD \cdot BI$ và đường thẳng CK song song với đường thẳng SO .

Lời giải

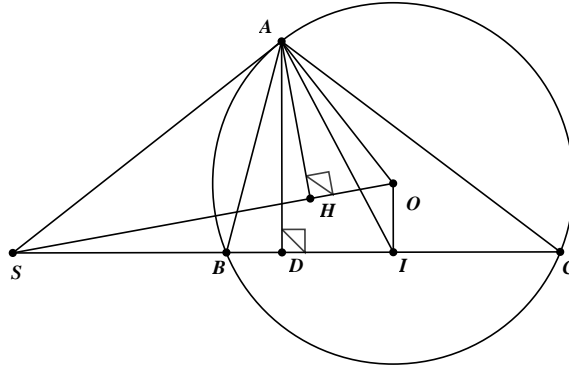


1) Chứng minh tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.

Tứ giác $SAOI$ có: $\widehat{SAO} = 90^\circ$ (tính chất của tiếp tuyến); $\widehat{SIO} = 90^\circ$ ($OI \perp BC$);
 $\widehat{SAO} + \widehat{SIO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Hai góc \widehat{SAO} và \widehat{SIO} đối nhau
 \Rightarrow Tứ giác $SAOI$ nội tiếp đường tròn đường kính SO .

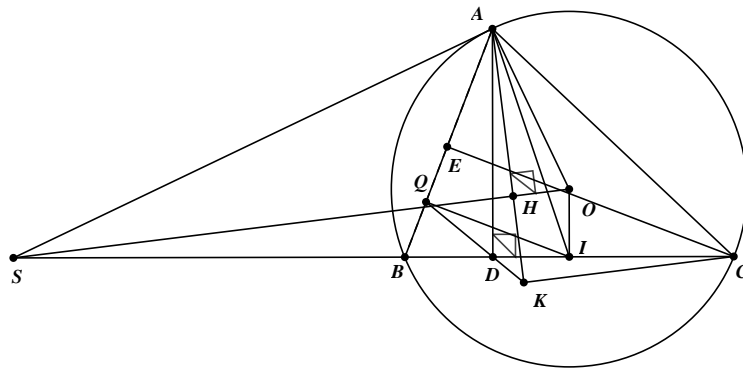
2) Gọi H và D lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng SO và SC . Chứng minh $\widehat{OAH} = \widehat{IAD}$.



Theo ý a), ta có: Tứ giác $SAOI$ nội tiếp nên $\widehat{SOA} = \widehat{SIA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{SA});
 $\Rightarrow 90^\circ - \widehat{SOA} = 90^\circ - \widehat{SIA}$;

Mà $90^\circ - \widehat{SOA} = \widehat{OAH}$ ($\triangle AHO$ vuông tại H); $90^\circ - \widehat{SIA} = \widehat{IAD}$ ($\triangle ADI$ vuông tại D)
 $\Rightarrow \widehat{OAH} = \widehat{IAD}$.

3) Vẽ đường cao CE của tam giác ABC . Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng BE . Đường thẳng QD cắt đường thẳng AH tại điểm K . Chứng minh $BQ \cdot BA = BD \cdot BI$ và đường thẳng CK song song với đường thẳng SO .



Vì $OI \perp BC \Rightarrow I$ là trung điểm của BC (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây), mà Q là trung điểm của $BE \Rightarrow IQ$ là đường trung bình của $\triangle BEC \Rightarrow IQ \parallel CE$ mà $CE \perp AB \Rightarrow IQ \perp AB \Rightarrow \widehat{IQA} = 90^\circ$, lại có $\widehat{IDA} = 90^\circ$ ($AD \perp SC$) \Rightarrow Tứ giác $AQDI$ nội tiếp đường tròn đường kính $AI \Rightarrow \widehat{QAI} + \widehat{QDI} = 180^\circ$ mà $\widehat{BDQ} + \widehat{QDI} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)
 $\Rightarrow \widehat{BDQ} = \widehat{QAI}$ ($= 180^\circ - \widehat{QDI}$).

Xét $\triangle BDQ$ và $\triangle BAI$ có:

\widehat{B} chung; $\widehat{BDQ} = \widehat{BAI}$ (chứng minh trên);

$\Rightarrow \triangle BDQ \sim \triangle BAI$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{BQ} = \frac{BA}{BI} \Rightarrow BQ \cdot BA = BD \cdot BI.$$

Vì $\widehat{BDQ} = \widehat{KDC}$ (hai góc đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{KDC} = \widehat{BAI}$ (1);

Ta có: $\widehat{SAB} + \widehat{BAO} = 90^\circ$ ($SA \perp OA$); $\widehat{DAC} + \widehat{ACD} = 90^\circ$ ($\triangle ADC$ vuông tại D); mà

$\widehat{BCA} = \widehat{SAB}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn \widehat{AB})

$\Rightarrow \widehat{BAO} = \widehat{DAC}$ hay $\widehat{BAD} = \widehat{OAC}$ lại có $\widehat{DAI} = \widehat{HAO}$ (ý 2) $\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{KAC}$ (2);

Từ (1) và (2), ta có: $\widehat{KAC} = \widehat{KDC} \Rightarrow$ tứ giác $DKCA$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{AKC} = 90^\circ \Rightarrow AK \perp CK$, mà $AK \perp SO \Rightarrow SO \parallel KC$.

Câu 19. (Trường vào lớp 10 Hà Tĩnh năm 2023-2024)

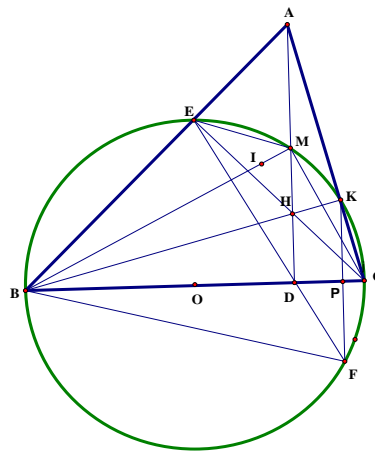
Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn (O) đường kính BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và K (E khác B và K khác C). Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng BK và CE .

a) Chứng minh $AEHK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Đường thẳng AH cắt BC tại D và cắt đường tròn (O) tại điểm M (M nằm giữa A và H).

Đường thẳng ED cắt đường tròn (O) tại điểm F (F khác E). Gọi P là giao điểm của KF và BC , I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HEM . Chứng minh $CK^2 = BC \cdot PC$ và ba điểm B, I, M thẳng hàng.

Lời giải



a) Theo tính chất góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên ta có :

$$\widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AEH} = 90^\circ$$

$$\widehat{BKC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AKH} = 90^\circ$$

Tứ giác $AEHK$ có hai góc đối đều bằng 90° nên nó nội tiếp được đường tròn.

b)

*) Ta có H là trực tâm tam giác ABC nên $AH \perp BC$ tại D suy ra tứ giác $AEDC$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CED} \quad (1).$$

Lại có $\widehat{CEF} = \widehat{CKF}$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CKF} \Rightarrow KF \parallel AD$

Mà $AD \perp BC \Rightarrow KF \perp BC$ nên KP là đường cao tam giác vuông KBC

Suy ra $CK^2 = BC \cdot PC$

*) Xét tam giác MBC vuông tại M , đường cao $MD \Rightarrow \widehat{HMC} = \widehat{MBC}$ (1).

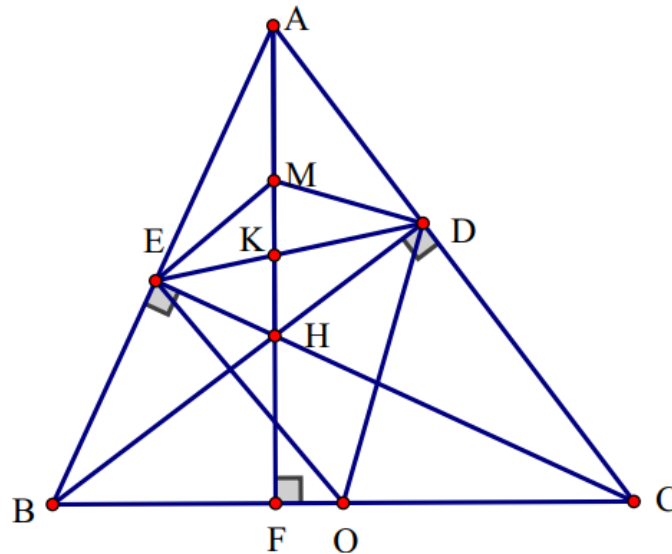
Có $\widehat{MBC} = \widehat{MEC}$ (2). (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{MC}). Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{HMC} = \widehat{MEH}$
 Từ đó đường thẳng MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HEM với M là tiếp điểm
 suy ra $IM \perp MC$. Mà $BM \perp MC$ suy ra ba điểm B, I, M thẳng hàng.

Câu 20. (Trường vào lớp 10 Hải Dương năm 2023-2024)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và các đường cao AF, BD, CE cắt nhau tại H.

1. Chứng minh rằng: $\widehat{DAH} = \widehat{DEH}$.
2. Gọi O và M lần lượt là trung điểm của BC và AH. Chứng minh rằng: Tứ giác MDOE nội tiếp.
3. Gọi K là giao điểm của AH và DE. Chứng minh rằng: $AH^2 = 2MK.(AF + HF)$.

Lời giải



1) Vì BD, CE là đường cao nên $\widehat{BDA} = \widehat{CEA} = 90^\circ$

Tứ giác ADHE có $\widehat{HDA} + \widehat{HEA} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên ADHE nội tiếp đường tròn, suy ra $\widehat{DAH} = \widehat{DEH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HE)

Vậy $\widehat{DAH} = \widehat{DEH}$.

2) Tam giác ADH vuông tại D có DM là trung tuyến (là trung điểm AH), suy ra

$$MD = MA = MH = \frac{AH}{2}$$

Tương tự: $ME = MA = MH = \frac{AH}{2}$

Suy ra $MD = MA = MH = ME \Rightarrow \Delta MAD$ cân tại M, suy ra $\widehat{MDA} = \widehat{MAD}$.

Tương tự: $\widehat{ODC} = \widehat{OCD}$

Do đó: $\widehat{MDA} + \widehat{ODC} = \widehat{MAD} + \widehat{OCD} = 90^\circ$

Suy ra $\widehat{MDO} = 90^\circ$

Tương tự: $\widehat{MEO} = 90^\circ$

Tứ giác MDOE có $\widehat{MDO} + \widehat{MEO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên MDOE nội tiếp đường tròn.

3) Ta có $AH^2 = 2MK.(AF + HF)$ (1)

$\Leftrightarrow AH^2 = 2MK.(AH + HF + HF)$

$\Leftrightarrow 4MH^2 = 2MK.(2HM + 2HF)$

$$\Leftrightarrow MH^2 = MK.HM + MK.HF$$

$$\Leftrightarrow MH^2 - MK.HM = MK.HF$$

$$\Leftrightarrow MH.(MH - MK) = MK.HF$$

$$\Leftrightarrow MH.HK = MK.HF$$

Tam giác DKM đồng dạng với tam giác FDM suy ra $\frac{MK}{MD} = \frac{DK}{DH}$ (2)

Vì (2) được chứng minh nên (1) được chứng minh.

Vậy $AH^2 = 2MK.(AF + HF)$.

Câu 21. (Trường vào lớp 10 Hải Phòng năm 2023-2024)

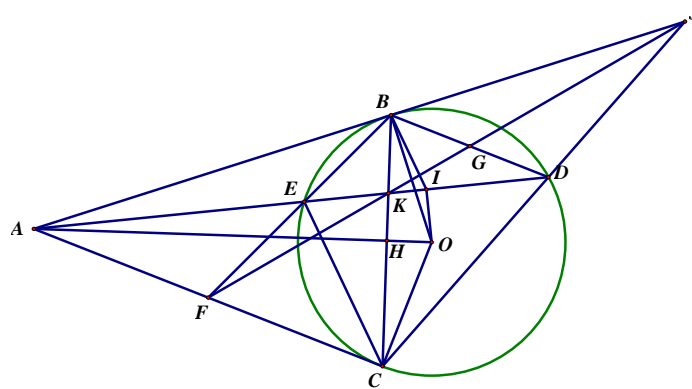
Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A sao cho $OA > 2R$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (B, C là các tiếp điểm), kẻ dây cung BD song song với AC . Đường thẳng AD cắt $(O; R)$ tại điểm E ($E \neq D$). Gọi I là trung điểm của DE .

a) Chứng minh năm điểm A, B, I, O, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng BC cắt OA, AD lần lượt tại H và K . Gọi F là giao điểm của BE và AC . Chứng minh $AK.AI = AH.AO$ và tam giác AFE đồng dạng với tam giác BFA .

c) Chứng minh ba đường thẳng AB, CD, FK đồng quy.

Lời giải



a) Xét (O) có:

+ DE là dây không đi qua tâm O và I là trung điểm của DE

$\Rightarrow OI \perp DE$ tại I (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) $\Rightarrow \widehat{AIO} = 90^\circ$

+ AB, AC là tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Rightarrow AB \perp OB, AC \perp OC$ (tính chất tiếp tuyến).

$\Rightarrow \widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{ABO} = \widehat{ACO} = \widehat{AIO} = 90^\circ$

Hay năm điểm A, B, I, O, C cùng thuộc một đường tròn đường kính AO

(quỹ tích cung chứa góc).

b) Xét $(O;R)$ có $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $OB = OC = R \Rightarrow OA$ là đường trung trực của BC

$$\Rightarrow OA \perp BC \text{ tại } H \Rightarrow \widehat{AHK} = 90^\circ$$

Xét ΔAHK và ΔAIO có:

$$\widehat{AHK} = \widehat{AIO} = 90^\circ \text{ (cmt)}$$

\widehat{HAK} chung

$$\Rightarrow \Delta AHK \# \Delta AIO (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AI} = \frac{AK}{AO} \Rightarrow AK \cdot AI = AH \cdot AO.$$

Ta có: $BD \parallel AC$ (gt) $\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{FAE}$ (so le trong)

Mà $\widehat{BDE} = \widehat{FBA}$ (cùng chắn \widehat{EB} của $(O;R)$) $\Rightarrow \widehat{FAE} = \widehat{FBA}$.

Xét ΔAFE và ΔBFA có:

\widehat{AFE} chung

$$\widehat{FAE} = \widehat{FBA} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \Delta AFE \# \Delta BFA (g.g)$$

c) Ta có: $\Delta AFE \# \Delta BFA$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{FE}{FA} = \frac{FA}{FB} \Rightarrow FA^2 = FB \cdot FE.$$

Xét ΔFEC và ΔFCB có:

\widehat{EFC} chung

$$\widehat{FCE} = \widehat{FBC} \text{ (cùng chắn } \widehat{EC} \text{ của } (O;R))$$

$$\Rightarrow \Delta FEC \# \Delta FCB (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{FE}{FC} = \frac{FC}{FB} \Rightarrow FC^2 = FB \cdot FE.$$

Mà $FA^2 = FB \cdot FE$ (cmt) nên $FA^2 = FC^2 \Rightarrow FA = FC$

$\Rightarrow F$ là trung điểm của đoạn thẳng AC .

Gọi G là giao điểm của FK và BD

$$\text{Ta có: } BG \parallel FC (gt) \Rightarrow \frac{BG}{FC} = \frac{KG}{KF} \text{ (hệ quả định lí Ta-lét)}$$

$$DG \parallel AF (gt) \Rightarrow \frac{GD}{FA} = \frac{KG}{KF} \text{ (hệ quả định lí Ta-lét)}$$

Suy ra $\frac{BG}{FC} = \frac{GD}{FA}$ mà $AF = CF$ nên $BG = DG$

$\Rightarrow G$ là trung điểm của đoạn thẳng BD .

Kéo dài AB cắt DC tại J . Gọi G' là giao điểm của JF và BD .

Xét ΔJAF có: $BG' \parallel AF$ (gt) $\Rightarrow \frac{BG'}{AF} = \frac{JG'}{JF}$ (hệ quả định lí Ta-lét)

Xét ΔJFC có: $DG' \parallel CF$ (gt) $\Rightarrow \frac{DG'}{CF} = \frac{JG'}{JF}$ (hệ quả định lí Ta-lét)

Suy ra $\frac{BG'}{AF} = \frac{DG'}{CF}$ mà $AF = CF$ nên $BG' = DG'$

hay G' là trung điểm $BD \Rightarrow G' \equiv G \Rightarrow F, K, J$ thẳng hàng

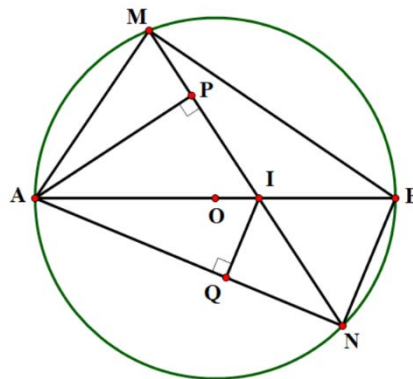
Suy ra: ba đường thẳng AB, CD, FK đồng quy tại J .

Câu 22. (Trường vào lớp 10 Hòa Bình năm 2023-2024)

Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB . Lấy điểm I bất kỳ thuộc đoạn thẳng AB (I khác A và B). Qua I kẻ một đường thẳng d bất kỳ cắt đường tròn (O) tại M và N sao cho $AM < AN$ (M khác A và B ; N khác A và B). Từ A kẻ AP vuông góc với MN tại P , từ I kẻ IQ vuông góc với AN tại Q . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $APIQ$ là tứ giác nội tiếp.
- $PM \cdot AI = MA \cdot QI$.
- $AM \cdot BN + AN \cdot BM \leq 4R^2$.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{API} = \widehat{AQI} = 90^\circ$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{API} + \widehat{AQI} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $APIQ$ nội tiếp được.

b) Ta có: $\widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow BN \perp AN$, mà $IQ \perp AN \Rightarrow IQ \parallel BN \Rightarrow \widehat{ABN} = \widehat{AIQ}$ (đồng vị)

Mà $\widehat{ABN} = \widehat{AMP}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AN) $\Rightarrow \widehat{AIQ} = \widehat{AMP}$

Xét $\angle PMA$ và $\angle QIA$, có: $\widehat{APM} = \widehat{AQI} = 90^\circ$; $\widehat{AIQ} = \widehat{AMP}$ (cmt)

$$\Rightarrow \angle PMA \sim \angle QIA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{PM}{QI} = \frac{MA}{IA} \Rightarrow PM \cdot AI = MA \cdot QI.$$

$$c) \bullet \angle APM \sim \angle ANB \left(\widehat{APM} = \widehat{ANB} = 90^\circ; \widehat{AMP} = \widehat{ABN} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AN} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{PM}{NB} \Rightarrow AM \cdot BN = AB \cdot PM \quad (1)$$

$$\bullet \angle APN \sim \angle AMB \left(\widehat{APN} = \widehat{AMB} = 90^\circ; \widehat{ANM} = \widehat{ABM} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AM} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{PN}{MB} \Rightarrow AN \cdot MB = AB \cdot PN \quad (2)$$

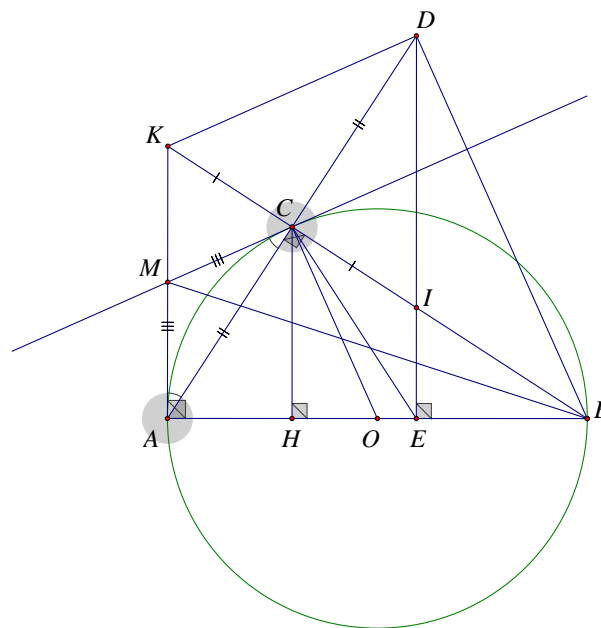
Từ (1) và (2) $\Rightarrow AM \cdot BN + AN \cdot BM = AB \cdot PM + AB \cdot PN = AB \cdot MN \leq 4R^2$.

Câu 23. (Trường vào lớp 10 Khánh Hòa năm 2023-2024)

Cho đường tròn (O) đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn sao cho $AC < BC$ (C khác A). Vẽ CH vuông góc với AB ($H \in AB$).

- Chứng minh $\triangle ABC$ là tam giác vuông. Tính AC , biết $AB = 4$ cm, $AH = 1$ cm.
- Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho $CD = CA$. Vẽ DE vuông góc với AB ($E \in AB$). Chứng minh $BECD$ là tứ giác nội tiếp.
- Gọi I là giao điểm của DE và BC , K là điểm đối xứng của I qua C , tiếp tuyến của (O) tại C cắt KA tại M . Chứng minh KA là tiếp tuyến của (O) và đi qua trung điểm của CH .

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle ABC$ là tam giác vuông. Tính AC , biết $AB = 4$ cm, $AH = 1$ cm.

+ Xét đường tròn (O) có \widehat{ACB} là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Rightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$ hay $\triangle ABC$ vuông tại C

+ $\triangle ABC$ vuông tại C có CH là đường cao

$\Rightarrow AC^2 = AH \cdot AB = 1 \cdot 4 = 4$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Rightarrow AC = 2\text{cm}$

b) Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho $CD = CA$. Vẽ DE vuông góc với AB ($E \in AB$). Chứng minh BECD là tứ giác nội tiếp.

+ Xét tứ giác BECD có $\widehat{DCB} = \widehat{DEB}$

Mà chúng ở vị kế nhau cùng nhìn cạnh DB

Nên tứ giác BECD nội tiếp

c) Gọi I là giao điểm của DE và BC, K là điểm đối xứng của I qua C, tiếp tuyến của (O) tại C cắt KA tại M. Chứng minh KA là tiếp tuyến của (O) và BM đi qua trung điểm của CH.

+ Tứ giác AKDI có $CK = CI$ (K là điểm đối xứng của I qua C) và $CA = CD$

\Rightarrow Tứ giác AKDI là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

$\Rightarrow AK \parallel DI$ mà $DI \perp AO$ tại E

$\Rightarrow AK \perp AO$ tại A

Mà AO là bán kính của đường tròn (O) nên AK là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A.

+ Đường tròn (O) có MA, MC là 2 tiếp tuyến cắt nhau $\Rightarrow MA = MC$ (1)

$\Rightarrow \triangle MAC$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MCA}$

Mà $\widehat{KCM} + \widehat{MCA} = 90^\circ$ nên $\widehat{KCM} + \widehat{MAC} = 90^\circ$

Mà $\widehat{MKC} + \widehat{MAC} = 90^\circ$ ($\triangle AKC$ vuông tại C) nên $\widehat{KCM} = \widehat{MKC}$

$\Rightarrow \triangle KMC$ cân tại M $\Rightarrow MC = MK$ (2)

+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow MA = MK$ hay BM đi qua trung điểm của CH

+ Gọi U là giao điểm của CH và MB

+ $AK \parallel CH$ (cùng $\perp AB$)

+ $MK \parallel CU \Rightarrow \frac{CU}{MK} = \frac{BU}{BM}$ (Hệ quả định lý Talet) (3)

+ $MA \parallel UH \Rightarrow \frac{HU}{AM} = \frac{BU}{BM}$ (Hệ quả định lý Talet) (4)

+ Từ (3), (4) và $MK = AM \Rightarrow CU = HU$ hay U là trung điểm của CH

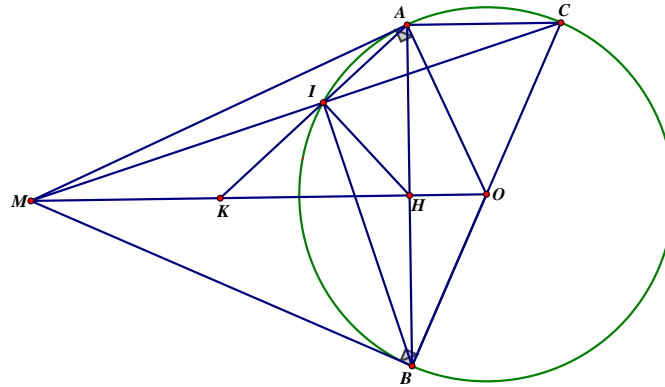
Vậy BM đi qua trung điểm của CH.

Câu 24. (Trường vào lớp 10 Kon Tum năm 2023-2024)

Cho đường tròn tâm O và một điểm M nằm ngoài đường tròn đó. Kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Vẽ đường kính BC của đường tròn (O). Gọi H là giao điểm của MO và AB, I là giao điểm thứ hai của đường thẳng MC với đường tròn (O), AI kéo dài cắt MO tại K.

- Chứng minh tứ giác MAOB là một tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh AK vuông góc với IH
- Cho biết $BC = 2$ cm, $AC = 8$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng MK.

Lời giải



a) Xét tứ giác MAOB có

$$\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Nên tứ giác MAOB nội tiếp đường tròn đường kính MO

b) Xét (O) có MA, MB là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại M

Nên $MA = MB$

Lại có : $OA = OB (= R)$

Do đó: MO là đường trung trực của AB

Suy ra: $MO \perp AB$

Xét $\triangle MAI$ và $\triangle MCA$ có:

\widehat{AMI} chung

$\widehat{MAI} = \widehat{ACM}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AI)

Do đó: $\triangle MAI \sim \triangle MCA$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MI}{MA}$$

$$\Rightarrow MA^2 = MI \cdot MC \quad (1)$$

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác MAO vuông tại A, đường cao AH ta có

$$MA^2 = MH \cdot MO \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra: $MI \cdot MC = MH \cdot MO$

Xét $\triangle MHI$ và $\triangle MCO$ có:

\widehat{OMC} chung

$$\frac{MI}{MH} = \frac{MO}{MC} \quad (\text{vì } MI \cdot MC = MH \cdot MO)$$

Do đó: $\triangle MHI \sim \triangle MCO$

$$\Rightarrow \widehat{MHI} = \widehat{MCO}$$

Mà $\widehat{MCO} = \widehat{IAH}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung IB)

$$\text{Nên } \widehat{MHI} = \widehat{IAH}$$

$$\text{Ta có: } \widehat{IHM} + \widehat{IHA} = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{MHI} = \widehat{IAH}$$

$$\text{Nên } \widehat{IAH} + \widehat{IHA} = 90^\circ$$

Do đó tam giác AIH vuông tại I

$$\text{Vậy: } AK \perp IH$$

c) Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác ABC vuông tại A ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow AB = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, ta có

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MBH} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Xét tam giác MAB cân tại M có

$$\widehat{MBH} = 60^\circ$$

Nên tam giác MAB đều

$$\text{Suy ra: } MA = MB = AB = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Xét tam giác BHM vuông tại H có:

$$MH = BM \cdot \sin \widehat{MBH} = 4\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = 6 \text{ (cm)}$$

Xét tam giác MBC vuông tại B ta có

$$\tan \widehat{BCM} = \frac{MB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Mà } \widehat{BCM} = \widehat{HAK}$$

Nên

$$\tan \widehat{HAK} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{HK}{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow HK = 3 \text{ (cm)}$$

$$\text{Ta có: } MK = HM - HK = 6 - 3 = 3 \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy } MK = 3 \text{ cm}$$

Câu 25. (Trường vào lớp 10 Lạng Sơn năm 2023-2024)

Cho tam giác ABC không cân và có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H (với $D \in BC, E \in CA, F \in AB$).

a) Chứng minh rằng tứ giác AFHE nội tiếp.

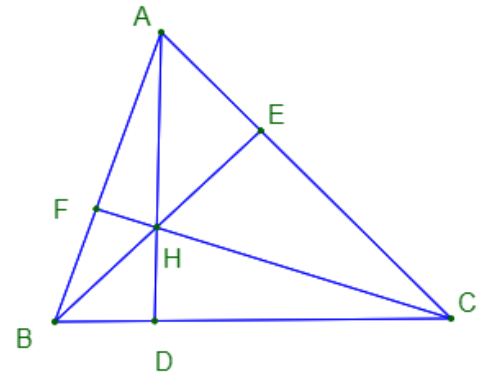
b) Chứng minh rằng $\triangle EAD \sim \triangle EFC$.

c) Kẻ DE cắt đường tròn đường kính AC tại M ($M \neq D$); DF cắt đường tròn đường kính AB tại N ($N \neq D$). Gọi $K = FM \cap EN$. Chứng minh rằng $AF = AM$ và đường thẳng EF đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK.

Lời giải

a) Chứng minh rằng tứ giác AFHE nội tiếp.

Tứ giác AFHE có $\widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$ (GT) \Rightarrow tứ giác AFHE nội tiếp đường tròn đường kính AH.



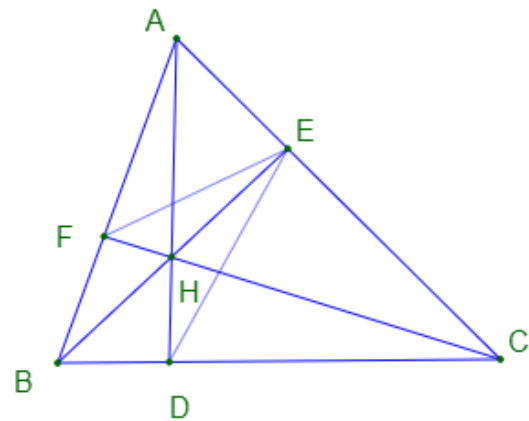
b) Chứng minh rằng $\triangle EAD \sim \triangle EFC$

Xét $\triangle EAD$ và $\triangle EFC$ có:

$\widehat{EAD} = \widehat{EFC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{HE} , tứ giác AFHE nội tiếp);

Tứ giác CDHE có $\widehat{CDH} = \widehat{CEH} = 90^\circ$ (GT) nên nội tiếp đường tròn đường kính CH $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{FCE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{HE});

$\Rightarrow \triangle EAD \sim \triangle EFC$ (g.g).

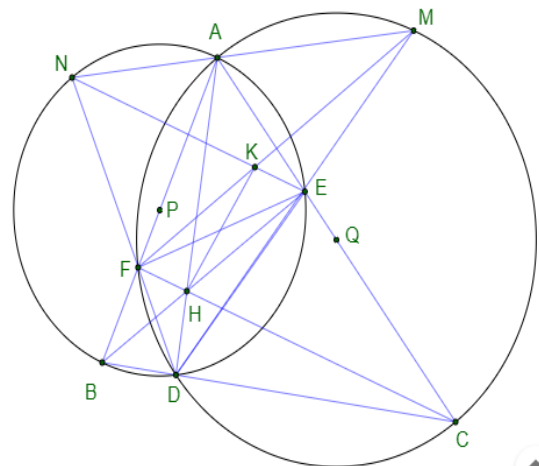


c) Tứ giác AEDB có $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$ (GT) nên nội tiếp đường tròn đường kính AB (gọi là (P)) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{EDC}$ (cùng bù với \widehat{BDE}) $\Rightarrow \widehat{CF} = \widehat{CM}$ (hai góc nội tiếp bằng nhau chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow C$ là điểm chính giữa của FM
 $\Rightarrow AC$ là trung trực của FM (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) $\Rightarrow AF = AM$;

Tương tự, tứ giác AFDC có $\widehat{AFC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ (GT) nên nội tiếp đường tròn đường kính AC (gọi là (Q))

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDF}$ (cùng bù với \widehat{FDC}) $\Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{BN}$ (hai góc nội tiếp bằng nhau chắn hai cung bằng nhau) $\Rightarrow B$ là điểm



chính giữa của $\widehat{EN} \Rightarrow AB$ là trung trực của EN (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) $\Rightarrow AB \perp EN$; mà $AB \perp CF$ (GT) $NE \parallel CF$ (cùng vuông góc với AB) hay $HF \parallel EK$.

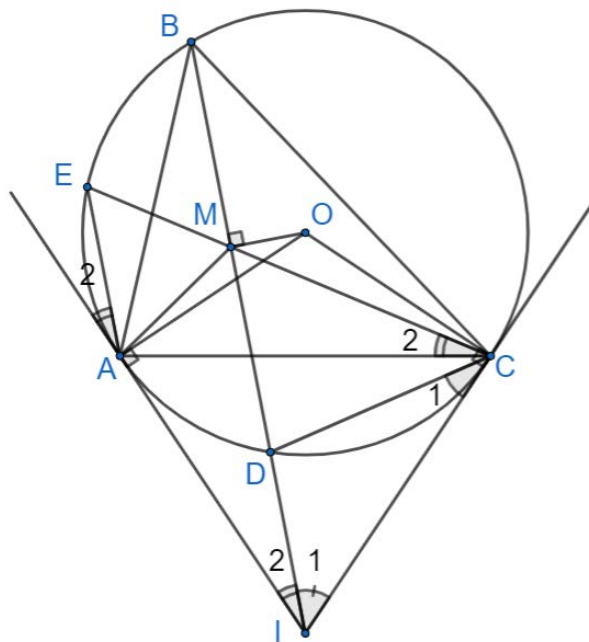
Tương tự: $FK \parallel HE$ (cùng vuông góc với AC), tứ giác HFKE có các cạnh đối song song nên là hình bình hành suy ra đường chéo EF đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK.

Câu 26. (Trường vào lớp 10 Lào Cai năm 2023-2024)

Cho ΔABC có ba góc nhọn ($BA < BC$) và nội tiếp đường tròn tâm O. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và C cắt nhau tại I. Tia BI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D.

- Chứng minh rằng tứ giác OAIC nội tiếp;
- Chứng minh $IC^2 = IB \cdot ID$;
- Gọi M là trung điểm của BD. Tia CM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E. Chứng minh rằng $MO \perp AE$.

Lời giải.



a) Vì IA, IC là tiếp tuyến của (O) với tiếp điểm lần lượt là A, C nên $\widehat{IAO} = \widehat{ICO} = 90^\circ$.

Xét tứ giác OAIC ta có $\widehat{IAO} + \widehat{ICO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Mà hai góc này ở vị trí đối diện nên tứ giác OAIC nội tiếp (1)

b) Xét ΔICD và ΔIBC ta có

$$\widehat{B_1} = \widehat{C_1} \text{ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung CD).}$$

\widehat{I}_1 chung

Nên $\Delta ICD \sim \Delta IBC$ (g.g)

Suy ra $\frac{IC}{IB} = \frac{ID}{IC}$ hay $IC^2 = IB \cdot ID \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

c) Vì M là trung điểm của BD nên $OM \perp BD$ (Liên hệ giữa đường kính và dây cung) (2)

Suy ra $\widehat{OMI} = 90^\circ$

Ta có $\widehat{OMI} + \widehat{OCI} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Mà hai góc này ở vị trí đối diện nên tứ giác OMIC nội tiếp (3)

Từ (1) và (3) suy ra năm điểm O, M, A, I, C cùng thuộc một đường tròn.

Suy ra tứ giác AMCI nội tiếp.

Suy ra $\widehat{I}_2 = \widehat{C}_2$ (Hai góc cùng nhìn cạnh AM)

Ta có $\widehat{C}_2 = \widehat{A}_2$ (Góc nội tiếp, góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AE).

Suy ra $\widehat{I}_2 = \widehat{A}_2$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $AE \parallel BD$ (4).

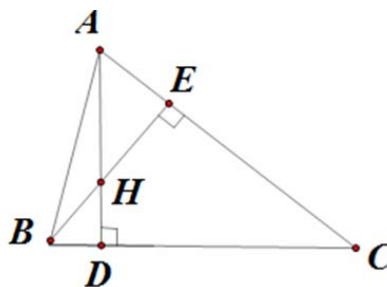
Từ (2) và (4) suy ra $OM \perp AE \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Câu 27. (Trường vào lớp 10 Long An năm 2023-2024)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Hai đường cao của tam giác ABC là AD, BE cắt nhau tại H.

- Chứng minh tứ giác CDHE nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh $HA \cdot HD = HB \cdot HE$.
- Gọi điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác CDHE. Chứng minh IE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB.

Lời giải.



a) Xét ΔABC có:

AD là đường cao $\Rightarrow \widehat{ADC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HDC} = 90^\circ$.

BE là đường cao $\Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HEC} = 90^\circ$.

Xét tứ giác CDHE có: $\widehat{HDC} + \widehat{HEC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Vậy tứ giác CDHE là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Xét $\triangle AHE$ và $\triangle BHD$ có:

$$\widehat{BHD} = \widehat{AHE} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ.$$

$\triangle BHD$ và $\triangle AHE$ đồng dạng (góc – góc)

$$\text{Vậy } \frac{BH}{HA} = \frac{HD}{HE} \Leftrightarrow BH \cdot HE = HD \cdot HA \text{ (đpcm)}$$

c) * Xét tứ giác $BAED$ có: $\widehat{BDA} = \widehat{BEA} = 90^\circ$
 \Rightarrow Tứ giác $BAED$ nội tiếp đường tròn có tâm

O , đường kính $AB \Rightarrow \widehat{OEA} = \widehat{OAE}$ (vì $\triangle OAE$ cân tại O) (1)

$$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{EDC} \text{ (cùng bù với } \widehat{EDB})$$

$$\text{hay } \widehat{OAE} = \widehat{EDC} \text{ (2)}$$

* Xét đường tròn (I) có: $\widehat{EDC} = \widehat{EHC} = \frac{1}{2} \text{ số}$

$$\widehat{EC} \text{ (3)}$$

* Ta có $\triangle IEH$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{EHI} = \widehat{IEH}$ hay

$$\widehat{EHC} = \widehat{IEB} \text{ (4)}$$

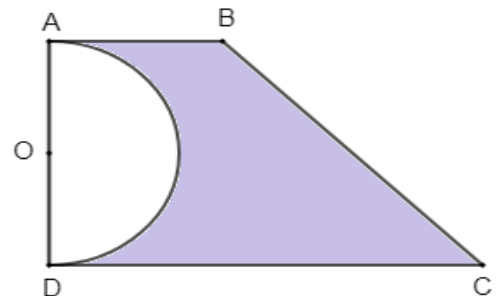
Từ (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow \widehat{OEA} = \widehat{IEB}$

Mà $\widehat{OEI} = \widehat{OEB} + \widehat{IEB} = \widehat{OEB} + \widehat{OEA} = 90^\circ$

Vậy $OE \perp EI$ tại $E \Rightarrow EI$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB .

Câu 28. (Trường vào lớp 10 Nam Định năm 2023-2024)

1) Một mảnh vườn hình thang $ABCD$ có $\widehat{BAD} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, $AB = 3m$, $AD = 5m$, $DC = 7m$. Người ta trồng hoa trên phần đất là nửa hình tròn tâm O đường kính AD , phần còn lại của mảnh vườn để trồng cỏ (phần tô đậm trong hình vẽ bên). Tính diện tích phần đất trồng cỏ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai, lấy $\pi \approx 3,14$).



2) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp (O) . Hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của AH , đường thẳng đi qua M vuông góc với BM cắt AC tại N . Gọi K là giao điểm thứ hai của AH với đường tròn tâm O .

a) Chứng minh bốn điểm B, M, E, N cùng thuộc một đường tròn và $\widehat{MBN} = \widehat{KAC}$.

b) Kéo dài KN cắt đường tròn (O) tại T . Chứng minh tam giác BHK cân và ba điểm B, O, T thẳng hàng.

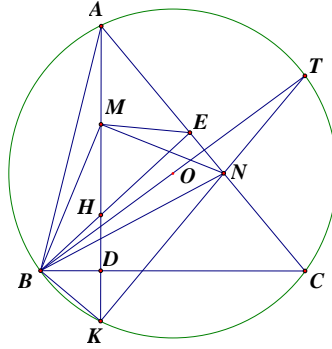
Lời giải.

$$1) \text{ Diện tích hình thang } ABCD \text{ là } \frac{(AB + DC) \cdot AD}{2} = \frac{(3 + 7) \cdot 5}{2} = 25m^2.$$

Diện tích nửa hình tròn đường kính AD là $\frac{\pi \cdot (2,5)^2}{2} = \frac{25\pi}{8} m^2$.

Diện tích phần đất trồng cỏ là $25 - \frac{25\pi}{8} \approx 15,19 m^2$.

2)



a) Ta có $\widehat{BMN} = 90^\circ \Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính BN .

Ta có $\widehat{BEN} = 90^\circ \Rightarrow E$ thuộc đường tròn đường kính BN .

Do đó bốn điểm B, M, E, N cùng thuộc đường tròn đường kính BN .

Chứng minh được $\widehat{MBN} = \widehat{MEA}$.

Xét $\triangle AEH$ vuông tại E , có EM là đường trung tuyến

$\Rightarrow EM = AM \Rightarrow \triangle AME$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MEA} = \widehat{MAE} \Rightarrow \widehat{MBN} = \widehat{KAC}$.

b) Xét (O) có $\widehat{KBC} = \widehat{KAC}$ mà $\widehat{KAC} = \widehat{EBC}$ (cùng phụ với \widehat{ACB}) $\Rightarrow \widehat{KBC} = \widehat{EBC}$

$\Rightarrow BC$ là tia phân giác của góc \widehat{KBH} . Lại có $BC \perp HK \Rightarrow \triangle BHK$ cân tại B .

$\Rightarrow \widehat{BKH} = \widehat{BHK}$. Ta có $\widehat{BHK} = \widehat{MHE} = \widehat{MEH} = \widehat{MNB} \Rightarrow \widehat{BKM} = \widehat{BNM}$.

Do đó tứ giác $BMNK$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{BMN} + \widehat{BKN} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BKN} = \widehat{BKT} = 90^\circ \Rightarrow K$ thuộc đường tròn đường kính BT . Mà $B, K, T \in (O) \Rightarrow BT$ là đường kính của $(O) \Rightarrow B, O, T$ thẳng hàng.

Câu 29. (Trường vào lớp 10 Nghệ An năm 2023-2024)

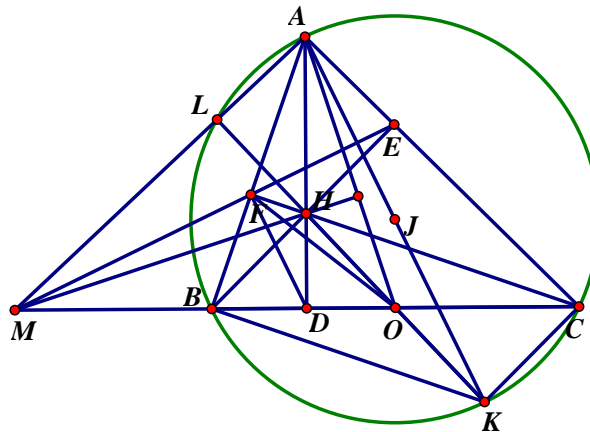
Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), các đường cao AD, BE, CF ($(D \in BC, E \in AC, F \in AB)$) cắt nhau tại H .

a) Chứng minh $AEHF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng BC , M là giao điểm của tia EF và tia CB . Chứng minh rằng $\widehat{FAD} = \widehat{OFC}$ và $OC^2 = OD \cdot OM$

c) Chứng minh rằng hai đường thẳng MH và AO vuông góc với nhau.

Lời giải



a) Tứ giác AEHF có:

$$\widehat{AEH} = 90^\circ (BE \perp AC)$$

$$\widehat{AFH} = 90^\circ (CF \perp AB)$$

$$\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$$

Suy ra tứ giác AEHF nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180°)

b) Chứng minh $\widehat{FAD} = \widehat{OFC}$

Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{FCB}$ (cùng phụ với \widehat{ACB}) hay $\widehat{FAD} = \widehat{OCF}$ (1)

Mặt khác $\triangle BFC$ vuông tại F có FO là đường trung tuyến nên $FO = OC$

Suy ra $\triangle FCO$ cân tại O suy ra $\widehat{OCF} = \widehat{OFC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{FAD} = \widehat{OFC}$

Chứng minh $OC^2 = OD \cdot OM$

Ta dễ dàng chứng minh được các tứ giác AFDC; BFEC nội tiếp

Suy ra $\widehat{BDF} = \widehat{BAC}$ (góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối)

Lại có $\widehat{ODF} = 180^\circ - \widehat{BDF} = 180^\circ - \widehat{BAC}$ (3)

Mặt khác $\widehat{OFM} = \widehat{OFB} + \widehat{BFM} = \widehat{OFB} + \widehat{AFE}$ ($\widehat{BFM}; \widehat{AFE}$ đối đỉnh)

$$\text{Mà } \begin{cases} \widehat{AFE} = \widehat{ACB} \\ \widehat{ACB} = \widehat{OFB} \end{cases} \text{ Suy ra } \widehat{OFM} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{BAC} \quad (4)$$

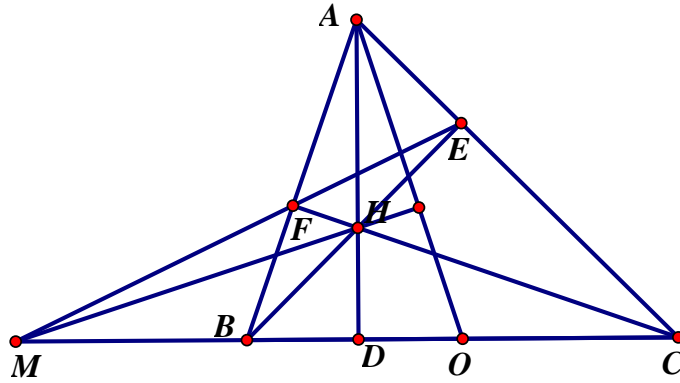
Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{ODF} = \widehat{OFM}$

Xét $\triangle OFD$ và $\triangle OMF$ có: $\widehat{ODF} = \widehat{OFM}$ (cmt); \widehat{MOF} chung

Suy ra $\triangle OFD \sim \triangle OMF$ (gg)

$$\text{Suy ra } \frac{FO}{OM} = \frac{OD}{FO} \Rightarrow OF^2 = OM \cdot OD = OC^2 \text{ (vì O là trung điểm BC)}$$

c)



Gọi AK là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Suy ra AB vuông góc với BK mà CH vuông góc với AB nên CH song song với BK

Chứng minh tương tự BH song song với CK

Do đó tứ giác BHCK là hình bình hành nên ba điểm O, H, K thẳng hàng (1).

Gọi L là giao điểm của AM với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Do các tứ giác ALBC và BFEC nội tiếp nên ta có

$$ML.MA=MB.MC=MF.ME$$

Suy ra tứ giác ALFE nội tiếp nên suy ra $\widehat{ALH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$ (cùng chắn cung AH)

Suy ra AL vuông góc với HL.

Mà AL vuông góc với LK (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Nên bốn điểm L, H, O, K thẳng hàng do đó OL vuông góc với AM

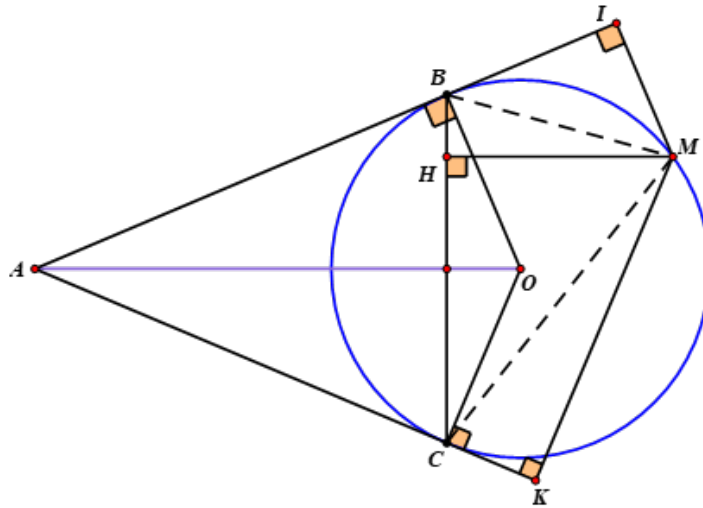
Vậy H là trực tâm của tam giác AMO suy ra MH vuông góc với AO

Câu 30. (Trường vào lớp 10 Ninh Thuận năm 2023-2024)

Cho đường tròn (O) tâm O bán kính R và điểm nằm ngoài đường tròn. Các tiếp tuyến với đường tròn kẻ từ A tiếp xúc với đường tròn tại B, C. Gọi M là điểm thuộc cung lớn BC. Từ M kẻ $MH \perp BC$, $MK \perp AC$, $MI \perp AB$.

- Chứng minh tứ giác MIBH nội tiếp.
- Giả sử $AB = 2R$. Tính diện tích tứ giác ABOC.
- Chứng minh: $MI.MK = MH^2$.

Lời giải.



a) Theo đề ta có:

$$MH \perp BC \text{ và } MI \perp AB \text{ Suy ra } \widehat{BIM} = \widehat{BHM} = 90^\circ$$

$$\text{Nên } \widehat{BIM} + \widehat{BHM} = 180^\circ$$

Mà \widehat{BIM} và \widehat{BHM} là 2 góc đối của tứ giác $MIBH$

Từ đó tứ giác $MIBH$ là tứ giác nội tiếp đường tròn

b) Ta có: AB và AC là 2 tiếp tuyến với (O) nên $AB = AC = 2R$ và $OB \perp AB, OC \perp AC$.

Mặt khác $OC = OB = R$

$$\text{Suy ra } S_{ABOC} = S_{\Delta ABO} + S_{\Delta ACO} = \frac{AB \cdot OB}{2} + \frac{AC \cdot OC}{2} = \frac{2R \cdot R}{2} + \frac{2R \cdot R}{2} = 2R^2$$

c) Xét ΔMBI và ΔMCH , có

$$\hat{I} = \hat{H} = 90^\circ \quad \widehat{MBI} = \widehat{MCH} \text{ (cùng chắn cung } BM \text{ của } (O))$$

Suy ra $\Delta MBI \sim \Delta MCH$ (g-g)

$$\text{Từ đó ta được: } \frac{MI}{MH} = \frac{MB}{MC} \quad (1)$$

Xét ΔMBH và ΔMCK , có

$$\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ \quad \widehat{MBH} = \widehat{MCK} \text{ (cùng chắn cung } CM \text{ của } (O))$$

Suy ra $\Delta MBH \sim \Delta MCK$ (g-g)

Từ đó ta được: $\frac{MH}{MK} = \frac{MB}{MC}$ (2)

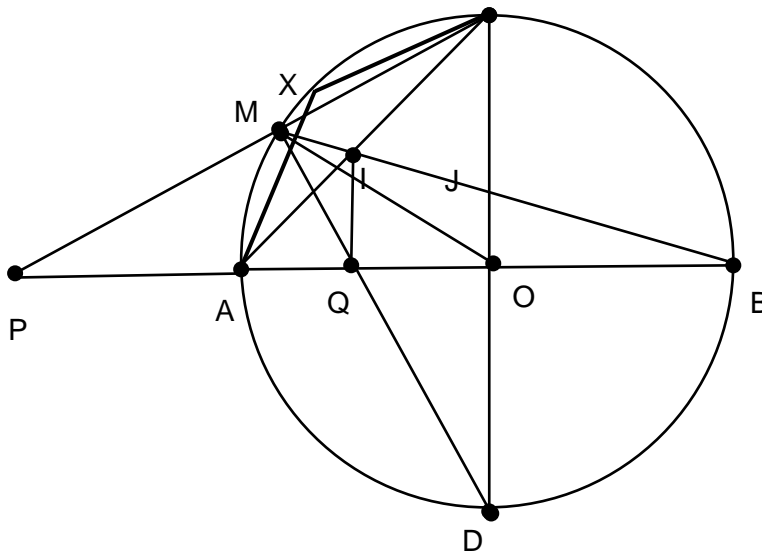
Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{MI}{MH} = \frac{MH}{MK} \rightarrow MI \cdot MK = MH^2$

Câu 31. (Trường vào lớp 10 Phú Thọ năm 2023-2024)

Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Lấy điểm M trên cung nhỏ AC (M khác A và C). Gọi P, Q lần lượt là giao điểm AB với MC và MD .

- a, chứng minh rằng tứ giác $OMPD$ nội tiếp.
- b, gọi I, J lần lượt là giao điểm của MB với CA và CD . chứng minh rằng $BJ \cdot BM = 2R^2$.
- c, chứng minh rằng tam giác AQI vuông cân.
- d, xác định vị trí điểm M để tam giác MQJ có diện tích lớn nhất.

Lời giải.



a, do $AB \perp CD$ tại O nên $\widehat{POD} = \widehat{BOC} = \widehat{AOC} = 90^\circ$ (1)

Xét (O) có $\widehat{MCD} = 90^\circ \Rightarrow DM \perp PC$ TẠI $M \Rightarrow \widehat{PMD} = 90^\circ$

Xét tứ giác $OMPD$ có $\widehat{POD} = \widehat{PMD} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $OMPD$ nội tiếp.

b, từ (1) $\Rightarrow \widehat{BOJ} = 90^\circ$

XÉT (O) có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (GOCs nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔBOJ VÀ ΔBMA có :

$$\widehat{BOJ} = \widehat{BMA} = 90^\circ$$

$$\widehat{OBJ} = \widehat{MBA} \text{ (góc chung)}$$

$$\text{Do đó } \triangle BOJ \sim \triangle BMA (g.g) \Rightarrow \frac{BJ}{BO} = \frac{BA}{BM} \Rightarrow BJ \cdot BM = BO \cdot BA = R \cdot 2R = 2R^2$$

$$\text{c, XÉT (O) có } \widehat{BMD} = \widehat{BAC} \text{ (Tính chất góc nội tiếp) } \Rightarrow \widehat{IMQ} = \widehat{IAQ}$$

\Rightarrow tứ giác AMIQ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{IAQ} + \widehat{AMI} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{IAQ} + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{IAQ} = 90^\circ$$

XÉT $\triangle AOC$ Có $\widehat{AOC} = 90^\circ$; $OA = OC = R \Rightarrow \triangle AOC$ vuông cân tại O

$$\Rightarrow \widehat{OAC} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{IAQ} = 45^\circ$$

Xét $\triangle AQI$ có $\widehat{AQI} = 90^\circ$; $\widehat{IAQ} = 45^\circ \Rightarrow \triangle AQI$ vuông cân tại Q

d, tứ giác AOJM nội tiếp nên $\widehat{MIC} = \widehat{MAQ}$ mà $\widehat{AMQ} = \widehat{CMB}$ (tính chất góc nội tiếp)

$$\text{do đó } \triangle MJC \sim \triangle MAQ (g.g) \Rightarrow \frac{MJ}{MC} = \frac{MA}{MQ} \Rightarrow MJ \cdot MQ = MA \cdot MC$$

$$S_{MQJ} = \frac{1}{2} MJ \cdot MQ \cdot \sin \widehat{MQJ} = \frac{1}{2} MA \cdot MC \cdot \sin 45^\circ \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{(MA+MC)^2}{4}$$

Gọi X là điểm chính giữa của cung nhỏ AC $\Rightarrow MA+MC \leq XA+XC$ (không đổi)

$$S_{MQJ} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{(XA+XC)^2}{4} = \frac{R^2(\sqrt{2}-1)}{2} \text{ (không đổi)}$$

Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv X \Rightarrow M$ là điểm chính giữa cung nhỏ AC.

$$\text{Vậy } \max S_{MQJ} = \frac{R^2(\sqrt{2}-1)}{2}. \text{ Khi M là điểm chính giữa cung nhỏ AC.}$$

Câu 32. (Trường vào lớp 10 Phú Yên năm 2023-2024)

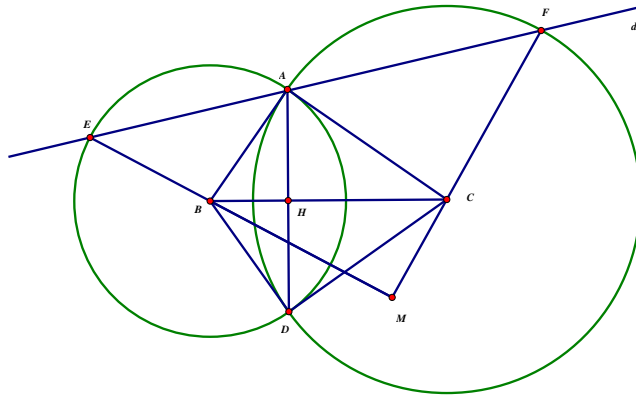
Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 3cm, AC = 4cm. Đường tròn đường kính AB và đường tròn tâm C bán kính AC cắt nhau tại điểm thứ hai D.

a) Chứng minh tứ giác ABDC nội tiếp được.

b) Tính AD.

c) Một đường thẳng d quay quanh A cắt (B) tại E khác A và cắt (C) tại F khác A. Gọi M là giao điểm của EB và FC. Khi d thay đổi thì M chạy trên đường nào?

Lời giải.



a) Vì tam giác ABC vuông tại A nên $AB \perp AC$ từ đó có AB, AC lần lượt là tiếp tuyến của (C) và (B). Do đó: $\widehat{BAC} = 90^\circ$

$\Delta ABC = \Delta DBC$ (c.c.c) nên $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 90^\circ$

Suy ra: $\widehat{BDC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$.

Vậy tứ giác ABDC nội tiếp được

b) Theo tính chất của hai đường tròn cắt nhau ta có BC là đường trung trực của AD và H là trung điểm của AD (H là giao điểm của BC với AD)

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông BAC ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow AH^2 = \frac{AB^2 \cdot AC^2}{AB^2 + AC^2} = \frac{9 \cdot 16}{25}$$

$$\Leftrightarrow AH = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ cm. Suy ra AD} = 4,8 \text{ cm.}$$

c) ΔABE cân tại B nên $\widehat{BEA} = \widehat{BAE}$;

ΔACF cân tại C nên $\widehat{CAF} = \widehat{CFA}$ mà A, D, E thẳng hàng nên $\widehat{BAE} + \widehat{CAF} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 90^\circ$,
suy ra: $\widehat{BEA} + \widehat{CFA} = 90^\circ$

Hay $\widehat{MEF} + \widehat{MFE} = 90^\circ$ suy ra ΔMEF vuông tại M

Do đó: $\widehat{BMC} = 90^\circ$

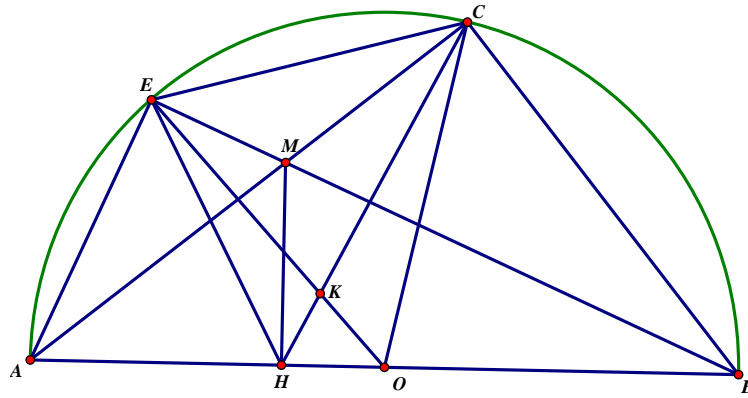
Suy ra M thuộc đường tròn đường kính BC cố định.

Câu 33. (Trường vào lớp 10 Quảng Bình năm 2023-2024)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm C thuộc nửa đường tròn đó (C khác A và B). Lấy điểm E thuộc cung AC (E khác A và C) sao cho $AE < BC$, gọi M là giao điểm của AC và BE. Kẻ MH vuông góc với AB tại H.

1. Chứng minh tứ giác BCMH nội tiếp.
2. Chứng minh ΔACE đồng dạng với ΔHCM .
3. Gọi K là giao điểm của OE và HC. Chứng minh $KE \cdot KO = KC \cdot KH$.

Lời giải.



1) Xét tứ giác $BCM H$ có

$$\widehat{BCM} = \widehat{ACB} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

$$\widehat{MHB} = 90^\circ \text{ (vì } MH \perp AB \text{)}$$

Suy ra $\widehat{BCM} + \widehat{MHB} = 180^\circ$ nên tứ giác $BCM H$ nội tiếp đường tròn.

2) Xét $\triangle ACE$ và $\triangle HCM$ có: $\widehat{EAC} = \widehat{EBC}$ (Cùng chắn cung \widehat{EC})

$$\widehat{MHC} = \widehat{EBC} \text{ (Cùng chắn cung } \widehat{MC} \text{)}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{EAC} = \widehat{MHC} \quad (1)$$

Tương tự ta có $\widehat{ACE} = \widehat{MCH}$ (2), (cùng bằng \widehat{ABE})

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ACE \sim \triangle HCM$ ($g - g$) (đpcm)

3) Chứng minh được tứ giác $AEMH$ nội tiếp

$$\text{Suy ra } \widehat{CAB} = \widehat{MEH} \text{ (Cùng chắn cung } \widehat{HM} \text{)}$$

$$\text{Mà } \widehat{CAB} = \widehat{CEB} \text{ (Cùng chắn cung } \widehat{BC} \text{)}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{CAB} = \widehat{MEH} = \widehat{CEB}$$

$$\text{Ta có } \widehat{COB} = 2.\widehat{CAB} \text{ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn } \widehat{BC} \text{)}$$

$$\text{Do đó } \widehat{COB} = 2.\widehat{CEB} = \widehat{CEH} \text{ nên tứ giác } CEHO \text{ nội tiếp}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{HEO} = \widehat{HCO} \text{ và } \widehat{EHC} = \widehat{EOC}$$

$$\text{Nên } \triangle EKH \sim \triangle CKO \text{ (} g - g \text{)}$$

$$\Rightarrow \frac{KE}{KC} = \frac{KH}{KO} \Rightarrow KE.KO = KC.KH$$

Câu 34. (Trường vào lớp 10 Quảng Nam năm 2023-2024)

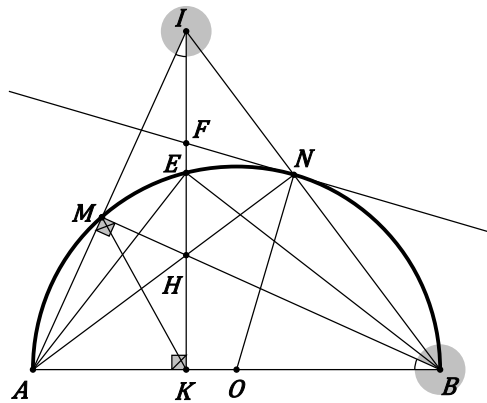
Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB và điểm M tùy ý trên nửa đường tròn (M khác A và B). Trên đoạn thẳng MB lấy điểm H (H khác M và B). Đường thẳng đi qua H , vuông góc với AB tại K cắt nửa đường tròn đã cho tại E và cắt đường thẳng AM tại I .

a) Chứng minh tứ giác $AMHK$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $KE^2 = KA.KB = KI.KH$.

c) Gọi N là giao điểm thứ hai của đường thẳng AH và nửa đường tròn đã cho. Chứng minh ba điểm B, N, I thẳng hàng và tiếp tuyến của nửa đường tròn đã cho tại N đi qua trung điểm của đoạn thẳng IH .

Lời giải.



a) + $\widehat{AMH} = 90^\circ$

+ $\widehat{AKH} = 90^\circ$

+ Suy ra $\widehat{AMH} + \widehat{AKH} = 180^\circ$

+ Kết luận: Tứ giác $AMHK$ nội tiếp đường tròn.

b) + Tam giác AEB vuông tại E

Suy ra $KE^2 = KA.KB$

+ Xét hai tam giác KAI và KHB có:

$\widehat{AKI} = \widehat{HKB} = 90^\circ$ và $\widehat{AIK} = \widehat{HBK}$ (cùng phụ với góc \widehat{IAB})

Suy ra hai tam giác KAI và KHB đồng dạng

Suy ra $\frac{KA}{KH} = \frac{KI}{KB}$ hay $KA.KB = KI.KH$

c) + H là trực tâm của tam giác IAB nên $AN \perp BI$

+ $\widehat{ANB} = 90^\circ$ nên $AN \perp BN$.

Suy ra ba điểm B, N, I thẳng hàng

Giả sử tiếp tuyến tại N của nửa đường tròn đã cho cắt IH tại F .

+ $\widehat{FNA} = \widehat{NBA}$ (cùng chắn cung \widehat{NA})

+ Tứ giác $NHKB$ nội tiếp nên $\widehat{NBA} = \widehat{NHF}$

+ Suy ra $\widehat{FNA} = \widehat{NHF} \Rightarrow FN = FH$ (1)

+ $\begin{cases} \widehat{FIN} + \widehat{FHN} = 90^\circ \\ \widehat{FNI} + \widehat{FNH} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{FNI} = \widehat{FIN} \Rightarrow FI = FN$ (2)

+ Từ (1) và (2) suy ra $FI = FH$.

Kết luận: F là trung điểm của HI .

Câu 35. (Trường vào lớp 10 Quảng Ngãi năm 2023-2024)

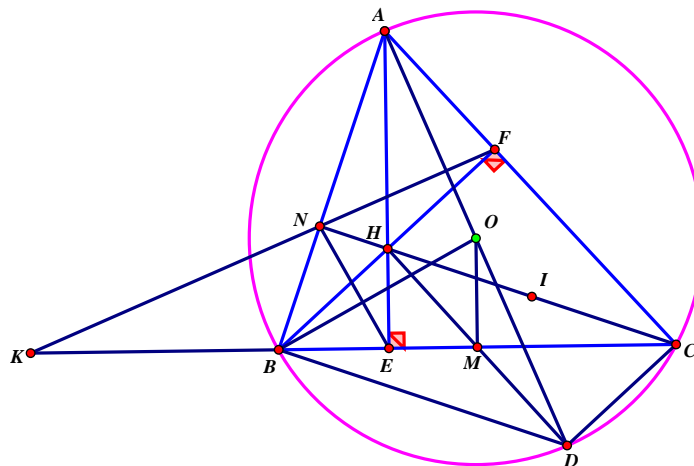
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Hai đường cao AE và BF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh tứ giác $CEHF$ nội tiếp đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

b) Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) . Chứng minh tứ giác $BHCD$ là hình bình hành. Biết $BC = R\sqrt{3}$, tính AH theo R .

c) Gọi N là giao điểm của đường thẳng CH và AB , K là giao điểm của hai đường thẳng BC và FN . Chứng minh $BK \cdot CE = BE \cdot CK$.

Lời giải.



a) Chứng minh tứ giác $CEHF$ nội tiếp đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AE \perp BC \Rightarrow \angle HEC = 90^\circ \\ BF \perp AC \Rightarrow \angle HFC = 90^\circ \end{cases}$$

Xét tứ giác $CEHF$ có: $\angle HEC + \angle HFC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà E, F là hai đỉnh đối nhau của tứ giác $CEHF$.

$\Rightarrow CEHF$ là tứ giác nội tiếp (dnhb).

Gọi I là trung điểm của CH .

Do tam giác HEC vuông tại E , có trung tuyến EI nên $IE = \frac{1}{2}HC = IH = IC$.

Do tam giác HFC vuông tại F , có trung tuyến FI nên $IF = HC = IH = IC$.

$\Rightarrow IE = IF = IH = IC$.

Vậy tứ giác $CEHF$ nội tiếp đường tròn có tâm I là trung điểm của HC .

b) Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) . Chứng minh tứ giác $BHCD$ là hình bình hành. Biết $BC = R\sqrt{3}$, tính AH theo R .

+) Chứng minh tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.

Ta có: $\angle ABD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

$\Rightarrow BD \perp AB$

Mà $CH \perp AB$ (do H là trực tâm của tam giác ABC).

$\Rightarrow BD \parallel CH$ (từ vuông góc đến song song) (1)

Ta có: $\angle ACD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).

$\Rightarrow CD \perp AC$

Mà $BH \perp AC$ (gt)

$\Rightarrow CD \parallel BH$ (từ vuông góc đến song song) (2)

Từ (1), (2) suy ra $BHCD$ là hình bình hành (dnhb) (đpcm).

+) Biết $BC = R\sqrt{3}$, tính AH theo R .

Gọi $M = BC \cap HD$

$\Rightarrow M$ là trung điểm của BC và HD (tính chất hình bình hành).

Ta có:

O là trung điểm của AD (gt)

M trung điểm của HD (cmt)

$\Rightarrow OM$ làm là đường trung bình của tam giác AHD (định nghĩa).

$$\Rightarrow OM = \frac{1}{2}AH \Rightarrow AH = 2OM \text{ (tính chất đường trung bình của tam giác).}$$

Vì M là trung điểm của BC (cmt) $\Rightarrow OM \perp BC$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung)

$$\Rightarrow \triangle OBM \text{ vuông tại } M, \text{ có } OB = R, BM = \frac{1}{2}BC = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông OBM ta có:

$$OM^2 + BM^2 = OB^2$$

$$\Rightarrow OM^2 = OB^2 - BM^2$$

$$\Rightarrow OM^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4}$$

$$\Rightarrow OM = \frac{R}{2}$$

Vậy $AH = 2OM = R$.

c) Gọi N là giao của hai đường thẳng CH và AB , K là giao điểm của hai đường thẳng BC và FN . Chứng minh $BK \cdot CE = BE \cdot CK$.

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên $CH \perp AB$ tại N hay $CN \perp AB$.

Xét tứ giác $ANHF$ có:

$$\angle ANH = 90^\circ \text{ (do } CN \perp AB)$$

$$\angle AFH = 90^\circ \text{ (do } BF \perp AC)$$

$$\angle ANH + \angle AFH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Mà hai đỉnh N, F là hai đỉnh đối diện của tứ giác $ANHF$.

$\Rightarrow ANHF$ là tứ giác nội tiếp (dnhb).

$\Rightarrow \angle FNH = \angle FAH = \angle CAE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn FH).

Chứng minh tương tự đối với tứ giác $BEHN$ có:

$$\angle BNH = 90^\circ \text{ (do } CN \perp AB)$$

$$\angle BEH = 90^\circ \text{ (do } AE \perp BC)$$

$$\Rightarrow \angle BNH + \angle BEH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Mà hai đỉnh N, E là hai đỉnh đối diện của tứ giác $BEHN$

$\Rightarrow BEHN$ là tứ giác nội tiếp (dnhb).

$\Rightarrow \angle ENH = \angle EBH = \angle CBF$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HE).

Mà $\angle CEA = \angle CBF$ (cùng phụ với $\angle ACB$).

$$\Rightarrow \angle FNH = \angle ENH$$

$\Rightarrow NH$ là phân giác của góc $\angle ENF$.

Mà $\angle ENK$ kề bù với $\angle ENF$, $NH \perp NB$ (do $CN \perp AB$).

$\Rightarrow NB$ là phân giác trong của $\angle ENK$, NH là phân giác ngoài của $\angle ENK$.

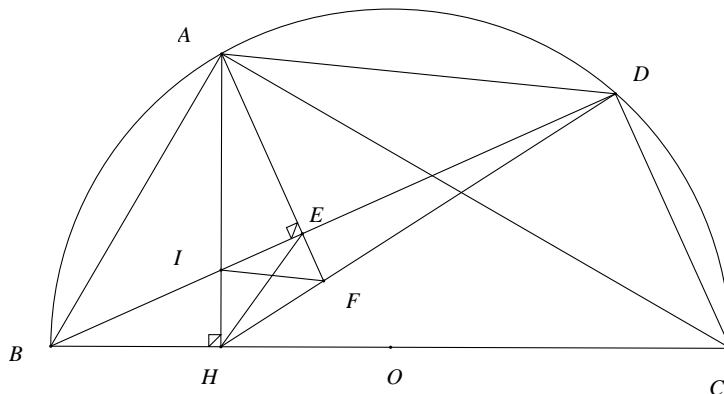
Áp dụng định lí đường phân giác ta có: $\frac{BE}{BK} = \frac{CE}{CK} = \frac{NE}{NK}$

Vậy $BK \cdot CE = BE \cdot CK$ (đpcm).

Câu 36. (Trường vào lớp 10 Quảng Ninh năm 2023-2024)

Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính BC . Trên nửa đường tròn (O) lấy điểm A (A khác B và C), gọi H là hình chiếu của A trên BC . Trên cung AC của nửa đường tròn (O) lấy điểm D (D khác A và C), gọi E là hình chiếu của A trên BD , I là giao điểm của hai đường thẳng AH và BD .

- Chứng minh tứ giác $ABHE$ nội tiếp;
- Chứng minh $BI \cdot BD = BH \cdot BC$;
- Chứng minh hai tam giác AHE và ACD đồng dạng;
- Hai đường thẳng AE và DH cắt nhau tại F . Chứng minh $IF \parallel AD$.



a) Do $AH \perp BC$ (gt); $AE \perp BD$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$

Mà E, H là hai đỉnh kề nhau, cùng nhìn AD dưới 2 góc bằng nhau nên A, E, H, B cùng thuộc một đường tròn.

Hay tứ giác $ABHE$ nội tiếp (đpcm)

b) Ta có $\widehat{BDC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Xét $\triangle BIH$ và $\triangle BCD$ có:

\widehat{CBD} chung;

$$\widehat{BHI} = \widehat{BDC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BIH \sim \triangle BCD (g.g)$$

$$\Rightarrow BI \cdot BD = BH \cdot BC \text{ (đpcm)}$$

c) Do $ABHE$ nội tiếp (cmt) nên $\widehat{AHE} = \widehat{ABE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AE)

Mà $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AD)

$$\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{ACD}.$$

Do $ABHE$ nội tiếp (cmt) nên $\widehat{HAE} = \widehat{HBE} = \widehat{CBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HE)

Lại có tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) $\Rightarrow \widehat{CBD} = \widehat{CAD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD)

$$\Rightarrow \widehat{HAE} = \widehat{CAD}$$

Xét tam giác AHE và tam giác ACD có:

$$\widehat{AHE} = \widehat{ACD} \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{HAE} = \widehat{CAD} \text{ (cmt)}$$

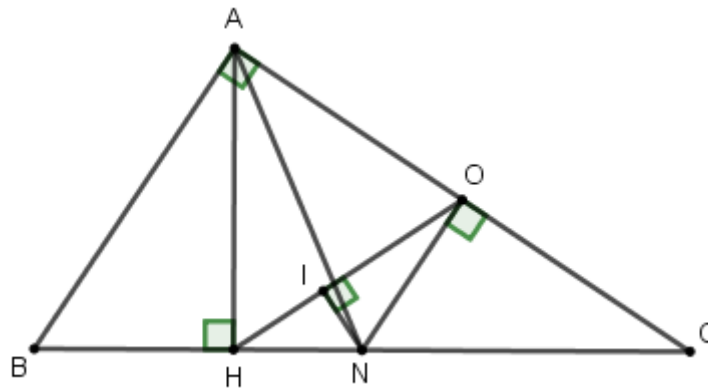
$$\Rightarrow \Delta AEH \sim \Delta ADC \text{ (g.g)}$$

Câu 37. (Trường vào lớp 10 Sóc Trăng năm 2023-2024)

Cho tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AH và $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Gọi N là trung điểm của BC , kẻ NO vuông góc với AC tại O .

- Chứng minh $AONH$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh $CO.CA = CN.CH$.
- Tính độ dài đường cao NI của tam giác NHO .

Lời giải.



a) Chứng minh $AONH$ là tứ giác nội tiếp.

Xét tứ giác $AONH$ có :

$$\widehat{AHN} = \widehat{AON} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AHN} + \widehat{AON} = 180^\circ$$

\Rightarrow Tứ giác $AONH$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $CO.CA = CN.CH$.

Xét ΔCON và ΔCHA có :

$$\widehat{ACH} \text{ chung}$$

$$\widehat{CON} = \widehat{CHA} = 90^0$$

$$\Rightarrow \triangle CON \# \triangle CHA$$

$$\Rightarrow \frac{CO}{CH} = \frac{CN}{CA}$$

$$\Rightarrow CO.CA = CN.CH$$

c) Tính độ dài đường cao NI của tam giác NHO.

Kẻ $NI \perp OH$ tại I

Xét $\triangle OIN$ và $\triangle AHN$ có :

$$\widehat{NOI} = \widehat{NAH} \text{ (cùng chắn } \widehat{HN} \text{)}$$

$$\widehat{OIN} = \widehat{AHN} = 90^0$$

$$\Rightarrow \triangle OIN \# \triangle AHN$$

$$\Rightarrow \frac{NI}{HN} = \frac{ON}{AN}$$

$$\Rightarrow NI = \frac{ON.HN}{AN} (*)$$

Ta có : N là trung điểm của BC (gt)

$$\begin{cases} AB \perp AC \\ ON \perp AC \end{cases} \Rightarrow ON \parallel AB$$

\Rightarrow O là trung điểm của AC

\Rightarrow ON là đường trung bình của tam giác ABC.

$$\Rightarrow ON = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} . 6 = 3(cm).$$

Xét tam giác ABC ($\widehat{A} = 90^0$), đường cao AH có $BC = 10cm$

$$\Rightarrow BN = \frac{1}{2} BC = 5(cm)$$

$$AN = \frac{1}{2} BC = 5(cm)$$

$$BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{6^2}{10} = 3,6(cm)$$

$$\Rightarrow HN = BN - BH = 5 - 3,6 = 1,4(cm)$$

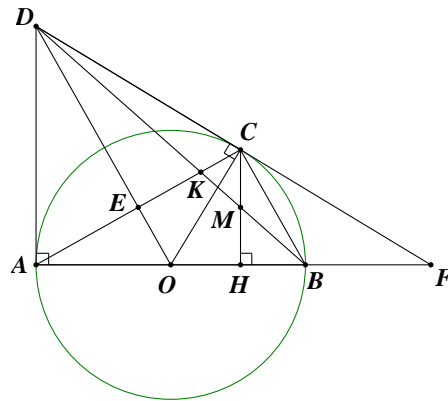
$$\text{Thay độ dài ON, HN, AN vào (*) ta có } NI = \frac{ON.HN}{AN} = \frac{3.1,4}{5} = 0,84(cm).$$

Câu 38. (Trường vào lớp 10 Sơn La năm 2023-2024)

Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Trên đường tròn (O) lấy điểm C không trùng với B sao cho $AC > BC$. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và C cắt nhau tại D . Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB , E là giao điểm của hai đường thẳng OD và AC .

- Chứng minh tứ giác $AOCD$ nội tiếp.
- Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng CD và AB . Chứng minh CB là tia phân giác của \widehat{HCF} .
- Chứng minh $AO.AH = 2AE^2$.
- Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng BD và CH . Chứng minh M là trung điểm của CH .

Lời giải.



a) **Chứng minh tứ giác $AOCD$ nội tiếp.**

Ta có DA và DC là hai tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{DAO} = \widehat{DCO} = 90^\circ$ (tính chất của tiếp tuyến)

Xét tứ giác $AOCD$ có $\widehat{DAO} + \widehat{DCO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà \widehat{DAO} và \widehat{DCO} là hai góc đối nhau nên tứ giác $AOCD$ nội tiếp.

b) **Chứng minh CB là tia phân giác của \widehat{HCF} .**

Xét (O) ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{ACH} + \widehat{BCH} = 90^\circ$

Mà $\widehat{ACH} + \widehat{CAH} = 90^\circ$ (vì $\triangle ACH$ vuông tại H) nên ta có $\widehat{BCH} = \widehat{CAH}$

Lại có $\widehat{CAH} = \widehat{BCF}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn \widehat{CB}) nên $\widehat{BCH} = \widehat{BCF} \Rightarrow CB$ là tia phân giác của \widehat{HCF} .

c) **Chứng minh $AO.AH = 2AE^2$.**

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $\begin{cases} DA = DC \\ OA = OC \end{cases} \Rightarrow DO$ là đường trung trực của AC

$$\Rightarrow AC = 2AE \Rightarrow AC^2 = 4AE^2 \quad (1)$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC , ta có $AB.AH = AC^2 \Rightarrow 2AO.AH = AC^2$ (vì $AB = 2AO$) (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $2AO.AH = 4AE^2 \Rightarrow AO.AH = 2AE^2$.

d) **Chứng minh M là trung điểm của CH.**

Gọi K là giao điểm của AC và BD.

Vì CB là tia phân giác của \widehat{HCF} mà \widehat{HCF} là góc ngoài của $\triangle DCM$ nên CB là phân giác ngoài của $\triangle DCM \Rightarrow \frac{BM}{BD} = \frac{CM}{CD}$ (tính chất đường phân giác trong tam giác)

Mà $CD = AD$ nên $\frac{BM}{BD} = \frac{CM}{AD}$ (3)

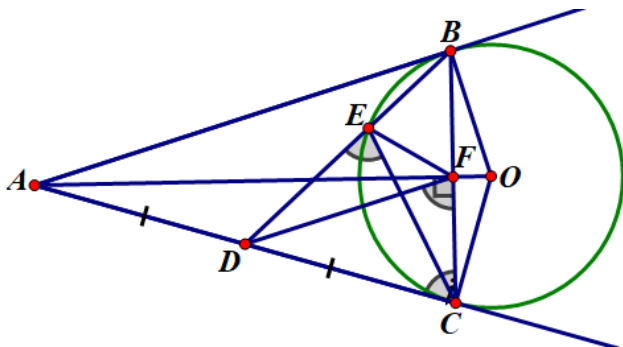
Vì $CH \parallel AD$ nên $\frac{HM}{AD} = \frac{BM}{BD}$ (định lý Talet) (4)

Từ (3) và (4) ta suy ra $\frac{CM}{AD} = \frac{HM}{AD} \Rightarrow CM = HM \Rightarrow M$ là trung điểm của CH.

Câu 39. (Trường vào lớp 10 Tây Ninh năm 2023-2024)

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O). Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với (O) (B và C là các tiếp điểm). Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng AC, BD cắt (O) tại E (khác B) và BC cắt OA tại F. Chứng minh bốn điểm C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



Ta có $OA \perp BC$ tại F (vì $OB = OC$ và $AB = AC$)
 $\triangle ACF$ vuông ở F, trung tuyến FD

$$\Rightarrow DF = DC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow \widehat{DFC} = \widehat{DCF} \quad (1)$$

$\triangle DEC \sim \triangle DCB$ (vì \widehat{BDC} chung, $\widehat{DCE} = \widehat{DBC} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{EC}$)

$$\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{DCB} \text{ hay } \widehat{DEC} = \widehat{DCF} \quad (2)$$

(1), (2) suy ra $\widehat{DEC} = \widehat{DFC}$

\Rightarrow Tứ giác CDEF nội tiếp được.

Hay bốn điểm C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

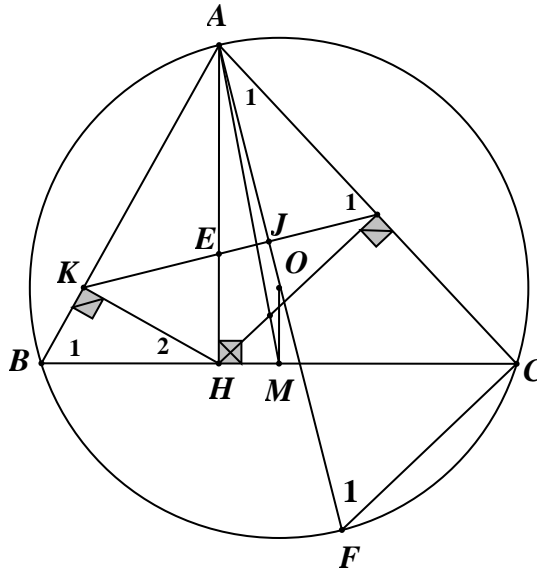
Câu 40. (Trường vào lớp 10 Thái Bình năm 2023-2024)

Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O; R). Kẻ AH vuông góc với BC tại H, HK vuông góc với AB tại K và HI vuông góc với AC tại I.

a) Chứng minh tứ giác AKHI nội tiếp đường tròn.

- b) Gọi E là giao điểm của AH với KI . Chứng minh rằng $EA.EH = EK.EI$.
- c) Chứng minh KI vuông góc với AO .
- d) Giả sử điểm A và đường tròn $(O;R)$ cố định, còn dây BC thay đổi sao cho $AB.AC = 3R^2$. Xác định vị trí của dây cung BC sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Lời giải.



- a) Chứng minh tứ giác $AKHI$ nội tiếp đường tròn.

Ta có:

$$\widehat{AKH} = 90^\circ \text{ (vì } HK \text{ vuông góc với } AB \text{ tại } K)$$

$$\widehat{AIH} = 90^\circ \text{ (vì } HI \text{ vuông góc với } AC \text{ tại } I).$$

Xét tứ giác $AKHI$ có: $\widehat{AKH} + \widehat{AIH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, mà hai góc này ở vị trí đối nhau.

Vậy tứ giác $AKHI$ nội tiếp đường tròn.

- b) Gọi E là giao điểm của AH với KI . Chứng minh rằng $EA.EH = EK.EI$.

Vì tứ giác $AKHI$ nội tiếp đường tròn (cmt) nên $\widehat{HKI} = \widehat{HAI}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{HI})

$$\text{Hay } \widehat{HKE} = \widehat{IAE}.$$

Xét $\triangle EKH$ và $\triangle EAI$ có:

$$\widehat{KEH} = \widehat{AEI} \text{ (hai góc đối đỉnh);}$$

$$\widehat{HKE} = \widehat{IAE} \text{ (cmt)}$$

Do đó: $\triangle EKH \sim \triangle EAI$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{EK}{EA} = \frac{EH}{EI} \Rightarrow EA.EH = EK.EI$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

- c) Chứng minh KI vuông góc với AO .

Kẻ đường kính AF của đường tròn $(O;R)$; Gọi J là giao điểm của KI và AO

Xét đường tròn $(O;R)$ có $\widehat{F_1} = \widehat{B_1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC). (1)

Lại có $\widehat{B}_1 = \widehat{H}_1$ (vì cùng phụ với \widehat{H}_2). (2)

Vì tứ giác $AKHI$ nội tiếp đường tròn (cmt)

nên $\widehat{H}_1 = \widehat{I}_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AK) (3).

Từ (1); (2) và (3) suy ra: $\widehat{F}_1 = \widehat{I}_1$.

Mà trong đường tròn $(O; R)$ có: $\widehat{ACF} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Hay $\widehat{A}_1 + \widehat{F}_1 = 90^\circ$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{A}_1 + \widehat{I}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AJI} = 90^\circ$.

Vậy KI vuông góc với AO .

d) Giả sử điểm A và đường tròn $(O; R)$ cố định, còn dây BC thay đổi sao cho $AB.AC = 3R^2$.

Xác định vị trí của dây cung BC sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Có $\widehat{ACF} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ABH} = \widehat{AFC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung \widehat{AC} của đường tròn $(O; R)$)

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle ACF$ có:

$\widehat{AHB} = \widehat{ACF}$ (90°);

$\widehat{ABH} = \widehat{AFC}$ (cmt)

Do đó: $\triangle AHB \sim \triangle ACF$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow AH = \frac{AB.AC}{AF} = \frac{3R^2}{2R} = \frac{3R}{2}$

Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH.BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3R}{2} .BC = \frac{3R}{4} .BC$.

Do R không đổi nên S_{ABC} lớn nhất $\Leftrightarrow BC$ lớn nhất.

Gọi M là trung điểm của BC thì $OM \perp BC$.

BC lớn nhất $\Leftrightarrow OM$ bé nhất.

Ta có $OM \geq AM - AO \geq AH - AO = \frac{3R}{2} - R = \frac{R}{2}$.

OM bé nhất bằng $\frac{R}{2} \Leftrightarrow A, O, M$ thẳng hàng và $H \equiv M$.

Khi đó $AH = AM = AO + OM = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$

Vậy diện tích $\triangle ABC$ lớn nhất khi BC cách A một khoảng bằng $\frac{3R}{2}$ ($\triangle ABC$ đều)

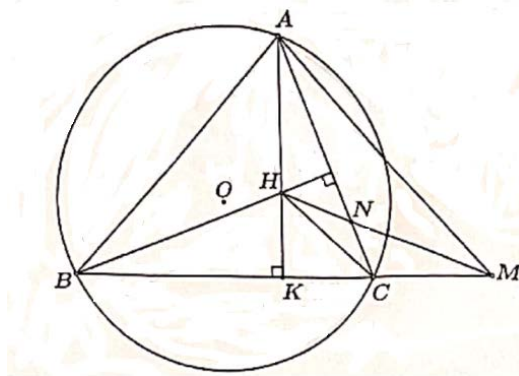
Câu 41. (Trường vào lớp 10 Thái Nguyên năm 2023-2024)

Cho tam giác ABC ($AB > BC > AC$) có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Gọi điểm K là chân đường vuông góc kẻ từ điểm A đến cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC . Gọi M là điểm đối xứng với điểm B qua điểm K . Gọi điểm N là giao điểm của hai đường thẳng HM và AC .

a. Chứng minh rằng bốn điểm A, H, C, M cùng thuộc một đường tròn.

- b. Đường thẳng AH cắt đường tròn (O) tại điểm $F (F \neq A)$. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng KN và BF . Chứng minh rằng $NA.NC = NM.FP$.

Lời giải.



- a. Chứng minh rằng bốn điểm A, H, C, M cùng thuộc một đường tròn.

Theo giả thiết ta có:

$$HK \perp BM$$

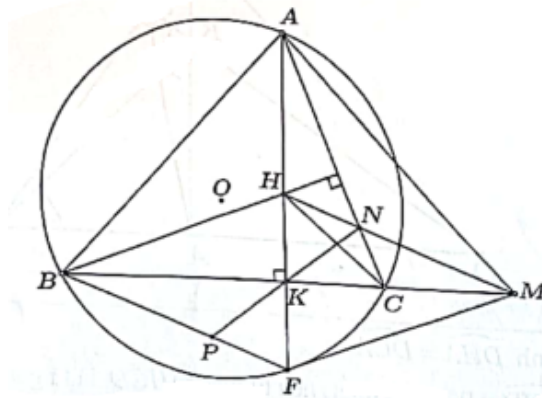
Đồng thời K là trung điểm của BM .

Suy ra $\triangle HBM$ cân tại H . Suy ra $\widehat{HBC} = \widehat{HMC}$.

Mặt khác $\widehat{HBC} = \widehat{HAC}$ (hai góc cùng phụ với \widehat{ACB}).

Do đó $\widehat{HAC} = \widehat{HMC}$. Suy ra bốn điểm A, H, C, M cùng thuộc một đường tròn.

- b. Chứng minh rằng $NA.NC = NM.FP$.



Ta có:

$$\widehat{FBC} = \widehat{FAC} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{FC}\text{)}.$$

$$\widehat{FAC} = \widehat{HBC} \text{ (hai góc cùng phụ với } \widehat{ACB}\text{)}.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{HBK} = \widehat{KBF}.$$

$\triangle HBF$ có BK đồng thời là đường cao và đường phân giác. Suy ra $\triangle HBF$ cân tại B . Do đó $KH = KF$.

Vì tứ giác $HBFM$ có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường nên tứ giác $HBFM$ là hình thoi.

$$\text{Suy ra } \widehat{NHK} = \widehat{KFP}.$$

Xét ΔKHN và ΔKFP ta có:
$$\begin{cases} \widehat{KHN} = \widehat{KFP} \\ KH = KF \\ \widehat{HKN} = \widehat{FKP} \end{cases}.$$

Suy ra $\Delta KHN = \Delta KFP$ (g.c.g).

Do đó $HN = FP$.

Vì:

$\widehat{HAN} = \widehat{CMN}$ (tứ giác $AHCM$ nội tiếp)

$\widehat{ANH} = \widehat{MNC}$ (đối đỉnh)

nên ΔANH đồng dạng với ΔMNC (g.g).

Suy ra $\frac{AN}{MN} = \frac{NH}{NC} \Leftrightarrow AN \cdot NC = NH \cdot MN$.

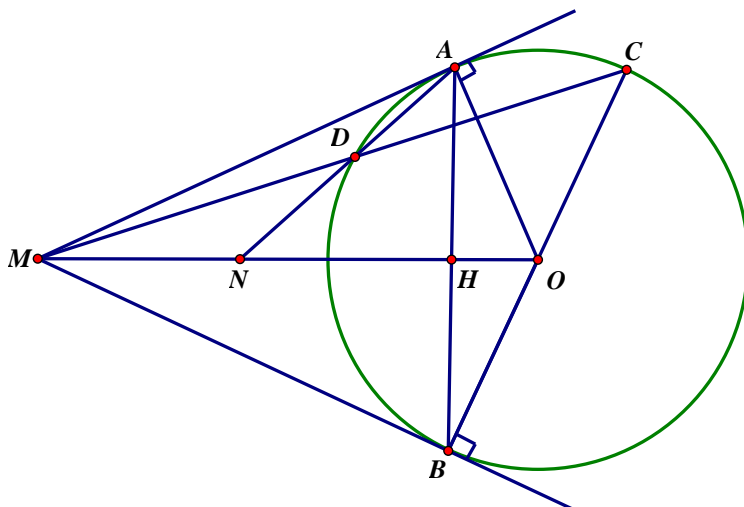
Vì $HN = FP$ nên $NA \cdot NC = NM \cdot FP$.

Câu 42. (Trường vào lớp 10 Thanh Hóa năm 2023-2024)

Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB đến (O) (với A, B là hai tiếp điểm). Gọi C là điểm đối xứng với B qua O , đường thẳng MC cắt đường tròn (O) tại D (D khác C)

1. Chứng minh rằng : $MAOB$ nội tiếp
2. Gọi N là giao của hai đường thẳng AD và MO . chứng minh rằng $MN^2 = ND \cdot NA$
3. Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng MO và AB . Chứng minh rằng $\left(\frac{HA}{HD}\right)^2 - \frac{AC}{HN} = 1$

Lời giải.



1. Vì MA và MB là hai tiếp tuyến của đường tròn (O)

Nên $\widehat{MAO} = 90^\circ$ và $\widehat{MBO} = 90^\circ$

Xét tứ giác $MAOB$ có : $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Hai góc này đối nhau

Suy ra tứ giác $MAOB$ nội tiếp

2. Nhận thấy $MN \parallel AC$ (vì cùng vuông góc với AH)

Do đó $\widehat{DMN} = \widehat{ACM}$ (so le trong)

Mà $\widehat{MAD} = \widehat{ACM}$ (cùng chắn cung AD)

Suy ra $\widehat{DMN} = \widehat{MAD}$

Xét $\triangle MND$ và $\triangle ANM$ có:

\widehat{N} là góc chung

$$\widehat{DMN} = \widehat{MAN} = \widehat{MAD}$$

Suy ra $\triangle MND \sim \triangle ANM$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MN}{ND} = \frac{NA}{MN} \Rightarrow MN^2 = ND \cdot NA$$

1. Dễ thấy $MA^2 = MD \cdot MC$

và $MA^2 = MH \cdot MO$ (hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông MAO)

Do đó $MD \cdot MC = MH \cdot MO$

Suy ra tứ giác $CDHO$ nội tiếp được đường tròn.

$$\Rightarrow \widehat{MCO} = \widehat{MHD}$$

$$\Rightarrow \triangle MDH \sim \triangle MOC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MHD} = \widehat{MCO}$$

Mà $\widehat{MCO} = \widehat{DAH}$ (cùng chắn cung DB)

nên $\widehat{MHD} = \widehat{DAH}$

Lại có $\widehat{MHD} + \widehat{DHA} = 90^\circ$ nên $\widehat{DAH} + \widehat{DHA} = 90^\circ$

Suy ra $DH \perp NA$

Suy ra $HN^2 = ND \cdot NA$

Lại có $MN^2 = ND \cdot NA$ nên $HN^2 = MN^2 \Rightarrow HN = MN$

$$\text{Ta có } \frac{HA^2}{HD^2} = \frac{AD \cdot AN}{AD \cdot DN} = \frac{AN}{DN} \text{ và } \frac{AC}{HN} = \frac{AC}{HM} = \frac{AD}{DN}$$

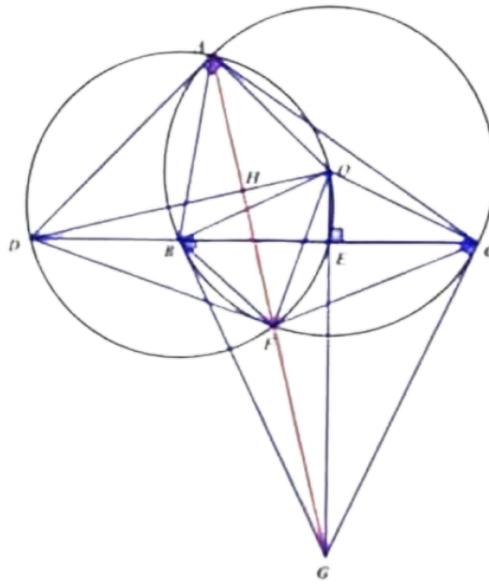
$$\text{Suy ra } \left(\frac{HA}{HD} \right)^2 - \frac{AC}{HN} = \frac{AN}{DN} - \frac{AD}{DN} = \frac{DN}{DN} = 1$$

Câu 43. (Trường vào lớp 10 Thừa Thiên Huế năm 2023-2024)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB > AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt đường thẳng BC tại D . Gọi E là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng BC

- a) Chứng minh AOED là tứ giác nội tiếp.
 b) Đường tròn ngoại tiếp tứ giác AOED cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F (F không trùng với A). Chứng minh DF là tiếp tuyến đường tròn (O) và $\frac{AB}{AC} = \frac{FB}{FC}$
 c) Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại G. Chứng minh ba điểm A, F, G thẳng hàng

Lời giải.



a) Xét tứ giác AOED, ta có: $\widehat{OAD} = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến)

$$\widehat{OED} = 90^\circ \text{ (giả thuyết)}$$

$$\Rightarrow \widehat{OAD} + \widehat{OED} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Vậy tứ giác AOED nội tiếp đường tròn

b) Ta có AOED là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OFD} = 90^\circ$

Suy ra DF là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Xét $\triangle DFB$ và $\triangle DCF$, ta có:

\widehat{D} : góc chung

$$\widehat{DFB} = \widehat{DCF} \text{ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn } \widehat{BF} \text{)}$$

$$\text{Suy ra: } \triangle DFB \sim \triangle DCF (g - g) \Rightarrow \frac{DF}{DC} = \frac{FB}{FC} \text{ (1)}$$

Xét $\triangle DAB$ và $\triangle DCA$, ta có:

\widehat{D} : góc chung

$$\widehat{DAB} = \widehat{ACB} \text{ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn } \widehat{AB} \text{)}$$

Suy ra: $\Delta DAB \sim \Delta DCA$ (g - g) $\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (2)

Vì $DF = DA$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{FB}{FC} = \frac{AB}{AC}$

c) Ta có: $GC = GB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$OC = OB$ (bán kính)

Nên OG là đường trung trực của BC , suy ra $OG \perp BC$

Mặt khác: $OE \perp BC$, nên ba điểm O, E, G thẳng hàng.

Ta có: $OA = OF$; $DA = DF$; nên OD là đường trung trực của AF

Do đó $OD \perp AF$ tại H (5)

Tam giác OCG vuông tại C nên $OE \cdot OG = OC^2$

Tam giác OAH vuông tại H nên $OA^2 = OH \cdot OD$

Mà $OA = OC$ nên $OE \cdot OG = OH \cdot OD$. Suy ra $EHDG$ là tứ giác nội tiếp.

Mà $\widehat{GED} = 90^\circ$ nên $\widehat{GHD} = 90^\circ$ (6)

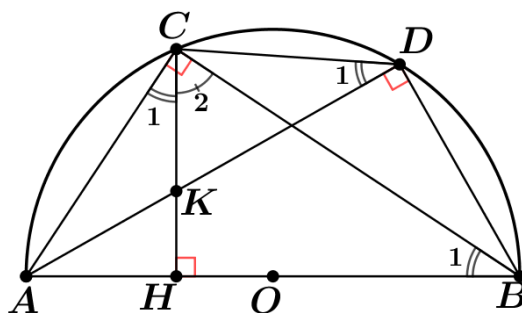
Từ (5) và (6), suy ra A, F, G thẳng hàng.

Câu 44. (Trường vào lớp 10 Tiền Giang năm 2023-2024)

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Trên nửa đường tròn đó lấy điểm C (C khác A và B), kẻ CH vuông góc với AB tại H . Gọi K là điểm nằm giữa C và H , tia AK cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D .

1. Chứng minh $BHKD$ là một tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh tam giác ACK đồng dạng với tam giác ADC và chứng minh $AK \cdot AD = AC^2$.

Lời giải.



Ta có: $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB).

Suy ra: $\widehat{KDB} = 90^\circ$

Vì $CH \perp AB$ nên $\widehat{CHB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KHB} = 90^\circ$.

1. Chứng minh $BHKD$ là một tứ giác nội tiếp.

Tứ giác $BHKD$ có: $\widehat{KHB} + \widehat{KDB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

\Rightarrow Tứ giác $BHKD$ là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh tam giác ACK đồng dạng với tam giác ADC và chứng minh $AK \cdot AD = AC^2$.

Ta có: $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1 = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{AC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Mặt khác $\widehat{C}_1 = \widehat{B}_1$ (cùng phụ \widehat{C}_2)

Do đó $\widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$

Xét tam giác ACK và tam giác ADC có:

\widehat{CAD} : góc chung.

$\widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$ (chứng minh trên)

Vậy: tam giác ACK đồng dạng với tam giác ADC (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow AK \cdot AD = AC^2.$$

Câu 45. (Trường vào lớp 10 TP Hồ Chí Minh năm 2023-2024)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có đường cao AH và nội tiếp đường tròn (O). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AB, AC. Đường kính AD của (O) cắt EF tại K và DH cắt (O) tại L (L khác D).

a) Chứng minh các tứ giác AEHF và ALHF nội tiếp.

b) Chứng minh tứ giác BEFC nội tiếp và AD vuông góc với EF tại K.

c) Tia FE cắt (O) tại P và cắt BC tại M. Chứng minh $AP = AH$ và ba điểm A, L, M thẳng hàng.

Lời giải.

a) Xét tứ giác AEHF có $\widehat{AEF} = \widehat{AFH} = 90^\circ$ nên tứ giác này nội tiếp được.

Xét tứ giác ALHF có $\widehat{ALH} = \widehat{ALD} = 90^\circ$ do chắn đường kính AD.

Và $\widehat{ALH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$ nên tứ giác này nội tiếp được.

b) Ta có $\triangle AHB$ vuông tại H nên $AE \cdot AB = AH^2$ (hệ thức lượng)

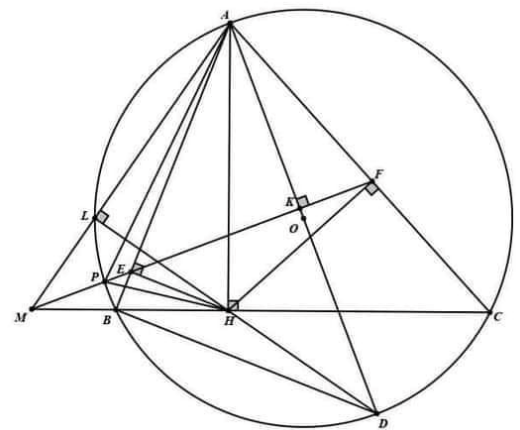
Ta lại có $\triangle AHC$ vuông tại H nên $AF \cdot AC = AH^2$ (hệ thức lượng)

$$\Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC \text{ hay } \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$$

$$\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ACB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ACB}$$

Nên $\widehat{ACB} + \widehat{FEB} = \widehat{AEF} + \widehat{FEB} = 180^\circ$. Mà 2 góc đối nhau nên tứ giác BCFE nội tiếp.

Xét $\widehat{EAD} + \widehat{FEA} = \widehat{BAD} + \widehat{ACB} = \widehat{BAD} + \widehat{ADB} = 90^\circ \Rightarrow AD \perp EF$ tại K.



c) $\triangle APD$ vuông ở P , có PK là đường cao $\Rightarrow AP^2 = AK.AD$.

Mà $DKEB$ là tứ giác nội tiếp (do $\widehat{K} + \widehat{B} = 90^\circ$) $\Rightarrow AK.AD = AE.AB$ (tính chất cát tuyến)

Mà $\triangle ABH$ vuông tại H và có đường cao từ đỉnh vuông là AE suy ra $AE.AB = AH^2$.

Từ trên suy ra $AP^2 = AK.AD = AE.AB = AH^2$

Hay $AP = AH$.

Giả sử MA cắt đường tròn tại L' khác A . Khi đó $ML'.MA = MB.MC$

Ta có $BCFE$ nội tiếp được nên $MB.MC = ME.MF$

Lại có $AL.EE$ nội tiếp được nên $ME.MF = ML.MA$

Từ trên suy ra $ML'.MA = ML.MA \Rightarrow ML' = ML$ hay $L' \equiv L$.

Vậy M, L, A thẳng hàng.

Câu 46. (Trường vào lớp 10 Trà Vinh năm 2023-2024)

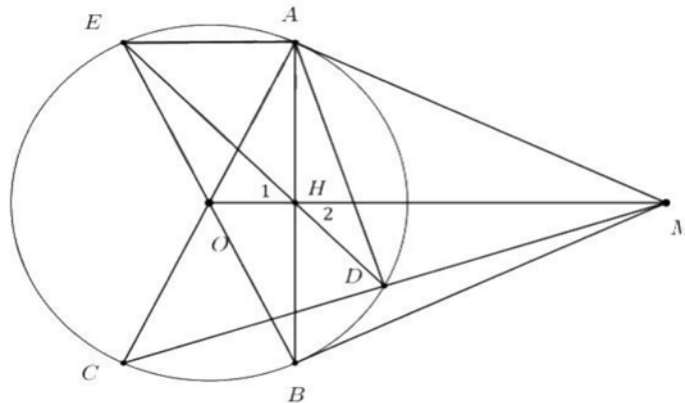
Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn tâm O , vẽ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (A, B là tiếp điểm).

a. Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp đường tròn.

b. Vẽ đường kính AC của (O) , gọi D là giao điểm của MC và (O) , biết D khác C . Chứng minh $MA^2 = MD.MC$

c. Hai đoạn thẳng AB và MO cắt nhau tại H , kẻ đường kính BE của (O) . Chứng minh ba điểm E, H, D thẳng hàng.

Lời giải.



a. Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp đường tròn.

Do MA, MB là tiếp tuyến của (O) nên $MA \perp OA, MB \perp OB$ (tính chất) $\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đối diện của tứ giác $MAOB$ nên tứ giác $MAOB$ nội tiếp (đhnb) (đpcm)

b. Vẽ đường kính AC của (O) , gọi D là giao điểm của MC và (O) , biết D khác C . Chứng

minh $MA^2 = MD.MC$

Xét ΔMAD và ΔMCA có:

\widehat{AMC} chung

$\widehat{MAD} = \widehat{MCA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn một cung)

$$\Rightarrow \Delta MAD \sim \Delta MCA (g.g) \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MC.MD \text{ (đpcm)}$$

c. Hai đoạn thẳng AB và MO cắt nhau tại H , kẻ đường kính BE của (O) . Chứng minh ba điểm E, H, D thẳng hàng.

Do MA, MB là 2 tiếp tuyến cắt nhau của (O) nên $MA = MB$ (tính chất)

Mà $OA = OB$ (bằng bán kính) nên MO là trung trực của AB (tính chất)

$\Rightarrow MO \perp AB$ tại H và H là trung điểm của AB

Khi đó xét tam giác MAO vuông tại A , đường cao AH có $MA^2 = MH.MO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Mà $MA^2 = MC \cdot MD$ (cmt) nên suy ra $MH \cdot MO = MD \cdot MC \Leftrightarrow \frac{MH}{MC} = \frac{MD}{MO}$

Xét ΔMHD và ΔMCO có

\widehat{OMC} chung

$$\frac{MH}{MC} = \frac{MD}{MO}$$

$$\Rightarrow \Delta MHD \sim \Delta MCO \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{H_2} = \widehat{MCO} \text{ (2 góc tương ứng)}$$

Do BE đường kính nên $\widehat{BAE} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow AE \perp AB \text{ mà } AO \perp AB \Rightarrow AE \parallel AO$$

$$\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{AED} \text{ (so le trong)}$$

Mà $\widehat{AED} = \widehat{ACD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AD)

Từ (1) (2) (3) suy ra $\widehat{H_1} = \widehat{H_2}$

Mà $\widehat{H_1} + \widehat{EHM} = 180^\circ$ (2 góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{H_2} + \widehat{MHE} = 180^\circ$

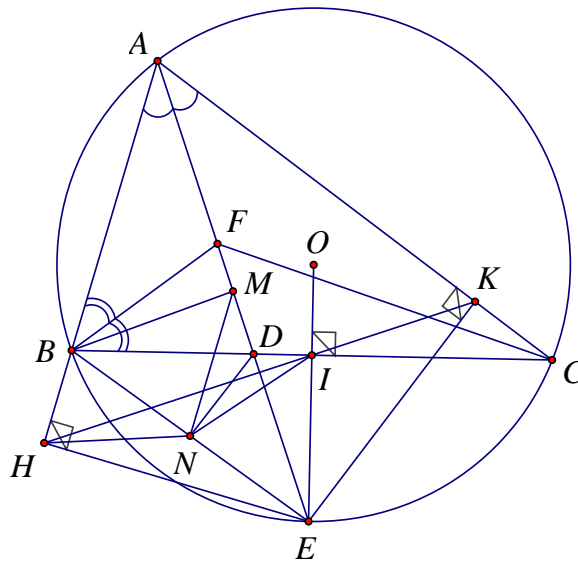
$$\Rightarrow E, H, D \text{ thẳng hàng}$$

Câu 47. (Trường vào lớp 10 Vĩnh Phúc năm 2023-2024)

Cho đường tròn (O) và BC là một dây cung khác đường kính của (O) , A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho $CA > AB (A \neq B)$. Gọi D là chân đường phân giác của góc $BAC (D \in BC)$. Đường thẳng đi qua O và vuông góc với BC cắt đường thẳng AD tại E . Kẻ EH, EK lần lượt vuông góc với AB và $AC (H \in AB, K \in AC)$.

- Chứng minh $EHAK$ là tứ giác nội tiếp.
- Gọi F là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh E thuộc đường tròn (O) và E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCF .
- Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AE, BE và BC . Chứng minh $BMDN$ là tứ giác nội tiếp. Xác định vị trí điểm A để bốn điểm H, N, I, K thẳng hàng.

Lời giải.



- Chứng minh $EHAK$ là tứ giác nội tiếp.

Xét tứ giác $EHAK$ có:

$$\widehat{AHE} = 90^\circ \text{ (do } EH \perp AB \text{)}$$

$$\widehat{AKE} = 90^\circ \text{ (do } EK \perp AC \text{)}$$

$\Rightarrow \widehat{AHE} + \widehat{AKE} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Mà hai đỉnh H, K là hai đỉnh đối diện nên $EHAK$ là tứ giác nội tiếp.

- Gọi F là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh E thuộc đường tròn (O) và E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCF .

* Chứng minh E thuộc đường tròn (O) .

Vì E thuộc phân giác của góc \widehat{BAC} nên $EH = EK$ (theo tính chất)

Vì OE qua O và vuông góc với $BC \Rightarrow OE$ đi qua trung điểm của BC (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung) $EB = EC$ (tính chất).

Xét tam giác vuông EBH và tam giác vuông ECK có:

$$\widehat{EHB} = \widehat{ECK} = 90^\circ$$

$$EB = EC \text{ (cmt)}$$

$$EH = EK \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle EHB = \triangle EKC \text{ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)} \Rightarrow \widehat{EBH} = \widehat{ECK} = \widehat{ACE} \text{ (hai góc tương ứng).}$$

$$\text{Mà } \widehat{EBH} + \widehat{ABE} = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù)} \Rightarrow \widehat{ACE} + \widehat{ABE} = 180^\circ$$

Mà B, C là hai đỉnh đối nhau nên $ABEC$ là tứ giác nội tiếp.

Mặt khác lại có A, B, C cùng thuộc (O) nên $ABEC$ nội tiếp đường tròn (O) .

Vậy E thuộc đường tròn (O) (đ.p.c.m)

* Chứng minh E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCF

$$\text{Ta có: } \widehat{EBF} = \widehat{EBD} + \widehat{DBF}$$

Mà $\widehat{EBD} = \widehat{EBC} = \widehat{EAC} = \widehat{BAF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EC và AE là phân giác của góc A).

Lại có $\widehat{DBF} = \widehat{ABF}$ (do F là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên BF là phân giác của \widehat{ABC}) $\Rightarrow \widehat{EBF} = \widehat{BAF} + \widehat{ABF} = \widehat{EFB}$ (góc ngoài bằng tổng hai góc trong không kề với nó).

$\triangle EBF$ cân tại E (định nghĩa) $\Rightarrow EB = EF$ (tính chất).

$$\text{Mà } EB = EC \text{ (cmt)} \Rightarrow EB = EC = EF.$$

Vậy E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCF (đ.p.c.m).

c) Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AE, BE và BC . Chứng minh $BMDN$ là tứ giác nội tiếp. Xác định vị trí điểm A để bốn điểm H, N, I, K thẳng hàng.

$$+ \text{ Xét tứ giác } BHEI \text{ có: } \widehat{BHE} + \widehat{BIE} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Mà hai đỉnh H, I đối nhau nên $BHEI$ là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm N đường kính

$$BE \Rightarrow \widehat{BIH} = \widehat{BEH} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } BH \text{)}$$

$$+ \text{ Xét tứ giác } CEIK \text{ có: } \widehat{CIE} = \widehat{CKE} = 90^\circ$$

Mà I, K kề nhau cùng nhìn EC dưới hai góc bằng nhau nên $CEIK$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{KIC} = \widehat{KEC} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn } KC \text{)}$$

$$\text{Mà } \triangle EHB = \triangle EKC \text{ (chứng minh b) nên } \widehat{BEH} = \widehat{KEC} \text{ (hai góc tương ứng)} \Rightarrow \widehat{BIH} = \widehat{KIC}$$

$$\text{Mà } \widehat{BIH} + \widehat{HIC} = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù)} \quad \widehat{KIC} + \widehat{HIC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{HIK} = 180^\circ \Rightarrow H, I, K \text{ thẳng hàng.}$$

Để H, N, I, K thẳng hàng thì cần H, N, I thẳng hàng.

Vì $BHEI$ là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm N đường kính BE (cmt) nên $NH = NI$.

Mà H, N, I thẳng hàng $\Rightarrow N$ là trung điểm của HI .

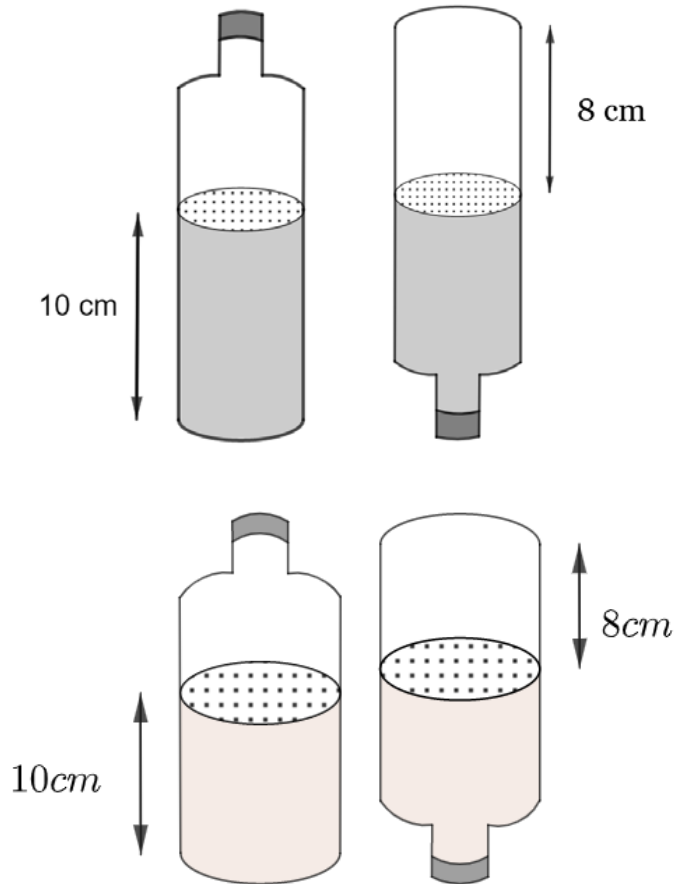
Mà N lại là trung điểm của $BE \Rightarrow BHEI$ là hình bình hành (dhn).

Lại có $\widehat{BHE} = 90^\circ$ (gt) $\Rightarrow BHEI$ là hình chữ nhật (dnhb) $\Rightarrow \widehat{HBI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B .

Vậy A nằm trên đường tròn (O) sao cho ΔABC vuông tại B .

CHỦ ĐỀ 8: CÁC BÀI TOÁN HÌNH NÓN, TRỤ, CẦU**Câu 1.** (Trường vào lớp 10 Bình Thuận năm 2022-2023)

Một cái chai có chứa một lượng nước, phần chứa nước là hình trụ có chiều cao 10 cm, khi lật ngược chai lại thì phần không chứa nước cũng là một hình trụ có chiều cao 8 cm (như hình vẽ bên. Biết thể tích của chai là $450\pi \text{ cm}^3$. Tính bán kính của đáy chai (giả sử độ dày của thành chai và đáy chai không đáng kể).

**Lời giải**

Gọi R (cm) là bán kính đáy chai. ($R > 0$)

Thể tích nước trong chai (hình trụ có chiều cao 10 cm) là:

$$V_1 = \pi R^2 \cdot h_1 = 10\pi R^2 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Thể tích không chứa nước trong chai khi lật ngược chai (hình trụ có chiều cao 8 cm) là:

$$V_2 = \pi R^2 \cdot h_2 = 8\pi R^2 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Thể tích của chai ($450\pi \text{ cm}^3$) là tổng thể tích của nước và phần không chứa nước trong chai khi lật ngược chai lại, nên ta có: $V_1 + V_2 = 450\pi$

$$\Leftrightarrow 10\pi R^2 + 8\pi R^2 = 450\pi$$

$$\Leftrightarrow 18\pi R^2 = 450\pi$$

$$\Leftrightarrow R^2 = 25$$

$$\Rightarrow R = 5 \text{ (Do } R > 0 \text{)}$$

Vậy bán kính của đáy chai là 5 cm.

Câu 2. (Trường vào lớp 10 Đắc Lắc năm 2022-2023)

Bút chì có dạng hình trụ, có đường kính đáy 8mm và chiều cao bằng 180mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ, phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng hình trụ có chiều cao bằng chiều dài bút và đáy là hình tròn có đường kính 2mm. Tính thể tích phần gỗ của 2024 chiếc bút chì (lấy $\pi = 3,14$).

Lời giải

$$\text{Thể tích của bút chì: } V_B = \pi \cdot 4^2 \cdot 180 = 2880\pi \text{ (mm}^3\text{)},$$

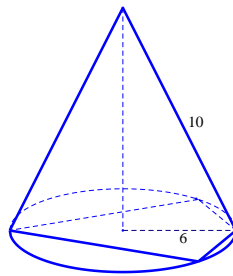
$$\text{thể tích của lõi chì } V_C = \pi \cdot 1^2 \cdot 180 = 180\pi \text{ (mm}^3\text{)}$$

Thể tích phần gỗ của một chiếc bút chì: $V_G = V_B - V_C = 2700\pi \text{ (mm}^3\text{)}$. Thể tích phần gỗ của 2024 chiếc bút chì là: $V = 2024 \times 2700\pi = 5464800\pi = 17159472 \text{ (mm}^3\text{)}$.

Câu 3. (Trường vào lớp 10 Đồng Nai năm 2022-2023)

Một hình nón có bán kính đáy $r = 6\text{cm}$, độ dài đường sinh $l = 10\text{cm}$. Tính thể tích của hình nón đó.

Lời giải

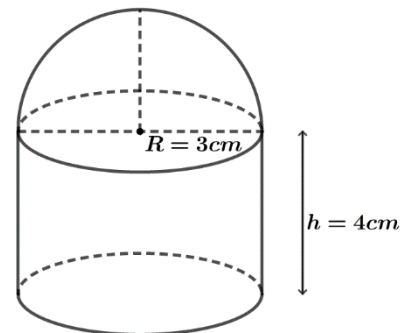


$$\text{Độ dài đường cao của hình nón là } h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (cm)}$$

$$\text{Thể tích của hình nón là } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Câu 4. (Trường vào lớp 10 Đồng Tháp năm 2022-2023)

Một khối kim loại đặc có hình dạng là một hình trụ và nửa hình cầu, bán kính nửa hình cầu bằng bán kính đáy hình trụ (tham khảo hình vẽ bên). Biết chiều cao của hình trụ là $h = 4\text{ cm}$ và bán kính đáy là $R = 3\text{ cm}$. Tính thể tích của khối kim loại.



Lời giải

$$\text{Thể tích của khối trụ là } V_1 = \pi R^2 h.$$

$$= 36\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Thể tích của nửa khối cầu là $V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 18\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

Thể tích của khối kim loại là $V = V_1 + V_2 = 54\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

Câu 5. (Trường vào lớp 10 Hà Nội năm 2022-2023)

Một khối gỗ dạng hình trụ có bán kính đáy là 30 cm và chiều cao là 120 cm. Tính thể tích của khối gỗ đó (lấy $\pi \approx 3,14$)

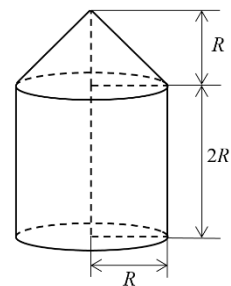
Lời giải

Thể tích khối gỗ: $V = \pi r^2 h \approx 3,14 \cdot 30^2 \cdot 120 = 339120 \text{ (cm}^3\text{)}$

Vậy thể tích khối gỗ khoảng $339120 \text{ (cm}^3\text{)}$

Câu 6. (Trường vào lớp 10 Khánh Hòa năm 2022-2023)

Một chi tiết máy gồm một phần có dạng hình trụ, phần còn lại có dạng hình nón với các kích thước như hình 1. Biết rằng phần hình trụ có chu vi đáy là 37,68cm. Tính thể tích của chi tiết máy đó (lấy $\pi \approx 3,14$; kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).



Hình 1

Lời giải

Độ dài bán kính đáy của phần hình trụ là: $R \approx \frac{37,68}{2 \cdot 3,14} \approx 6 \text{ (cm)}$

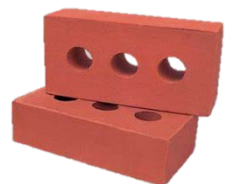
Thể tích của phần có dạng hình trụ là: $V_1 = \pi R^2 \cdot 2R \approx 3,14 \cdot 6^2 \cdot (2 \cdot 6) \approx 1356,48 \text{ (cm}^3\text{)}$

Thể tích của phần có dạng hình nón là: $V_2 = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R \approx \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 6^2 \cdot 6 \approx 226,08 \text{ (cm}^3\text{)}$

Thể tích của chi tiết máy đó là: $V = V_1 + V_2 \approx 1582,56 \text{ (cm}^3\text{)}$

Câu 7. (Trường vào lớp 10 Hải Phòng năm 2022-2023)

Gạch xây 3 lỗ (như hình vẽ) được làm bằng đất nung, thường được sử dụng trong các công trình xây dựng có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 220 mm, chiều rộng 105 mm, chiều cao 60 mm. Mỗi lỗ là hình trụ có trục song song với chiều cao viên gạch, đường kính đáy là 14 mm. Tính thể tích phần đất nung của một viên gạch. Biết $V = a \cdot b \cdot c$; $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ lần lượt là công thức tính hình hộp chữ nhật và hình trụ (trong đó a, b, c là ba kích thước của hình hộp chữ nhật, r là bán kính đường tròn đáy, h là chiều cao hình trụ; lấy $\pi \approx 3,14$).



Lời giải

Thể tích viên gạch hình hộp chữ nhật khi chưa khoét lỗ là:

$$V_1 = a \cdot b \cdot c = 220 \cdot 105 \cdot 60 = 1386000 \text{ (m}^3\text{)}$$

Thể tích mỗi lỗ hình trụ trong viên gạch là:

$$V_2 = \pi r^2 h = \pi \cdot \left(\frac{40}{2}\right)^2 \cdot 60 = 9231,6 \text{ (m}^3\text{)}$$

Thể tích phần đất nung của viên gạch là:

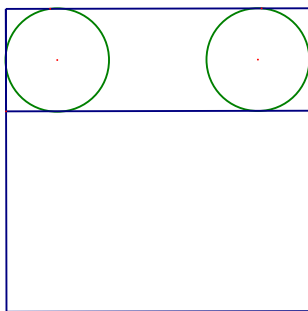
$$V = V_1 - 3 \cdot V_2 = 1386000 - 3 \cdot 9231,6 = 1358305,2 \text{ (m}^3\text{)}$$

Vậy: Thể tích phần đất nung của viên gạch là 1358305,2 m³.

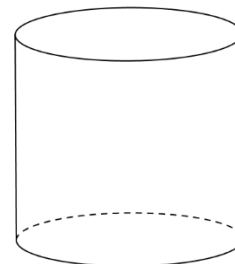
Câu 8. (Trường vào lớp 10 Kon Tum năm 2022-2023)

Bạn Nam cắt một tấm bìa hình vuông cạnh 50 cm để được một hình chữ nhật và hai hình tròn (như Hình 1). Bạn ấy cuộn tròn hình chữ nhật và dán hai mép giấy lại với nhau. Bạn ấy dán tiếp hai hình tròn vào hai đầu để tạo thành một hình hộp hình trụ có nắp (như Hình 2).

Tính chiều cao của cái hộp tạo thành, biết chiều cao đó nhỏ hơn 50 cm, các mép dán không đáng kể.



Hình 1



Hình 2

Lời giải

Gọi bán kính đường tròn là r (cm)

Vì chiều cao hình hộp nhỏ hơn 50 cm

Nên chu vi hình tròn bằng chiều dài hình chữ nhật bằng 50 cm

$$\text{Do đó: } 2\pi r = 50 \Rightarrow r = \frac{25}{\pi}$$

Chiều cao của hình trụ là

$$50 - 2r = 50 - \frac{50}{\pi} \approx 34,085$$

Vậy chiều cao của cái hộp hình trụ gần bằng 34,085 cm

Câu 9. (Trường vào lớp 10 Nghệ An năm 2022-2023)

Bạn An bỏ một viên bi đặc không thấm nước vào một lọ thủy tinh chứa nước dạng hình trụ có bán kính đường tròn đáy bằng 1,5 cm. Biết rằng khi viên bi chìm hoàn toàn trong nước thì nước trong lọ dâng lên thêm 0,5 cm. Tính thể tích viên bi bị bạn An đã bỏ vào lọ thủy tinh (cho $\pi \approx 3,14$; xem độ dày của lọ không đáng kể và nước trong lọ không thất thoát ra ngoài)

Lời giải

Thể tích viên bi bị bạn An đã bỏ vào lọ thủy tinh bằng thể tích nước dâng lên trong lọ so với ban đầu.

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot h = 3,14 \cdot 1,5 \cdot 0,5 = 3,5325 \text{ cm}^3$$

Câu 10. (Trường vào lớp 10 Quảng Ninh năm 2022-2023)

Một người thợ cơ khí cần cắt vừa đủ một cây sắt dài 100 dm thành các đoạn để hàn lại thành khung một hình lập phương và một hình hộp chữ nhật. Biết hình hộp chữ nhật có chiều dài gấp 6 lần chiều rộng và chiều cao bằng chiều rộng (hình vẽ minh họa). Tìm độ dài của các đoạn sắt sao cho tổng thể tích của hai hình thu được nhỏ nhất?

Lời giải

Gọi cạnh hình lập phương bằng $x(dm)$. ĐK: $x > 0$

Gọi chiều cao bằng chiều rộng là $y(dm)$ ĐK: $y > 0$.

Chiều dài hình hộp chữ nhật bằng $6y(dm)$.

Hình lập phương có 12 cạnh có độ dài bằng $x(dm)$.

Hình hộp chữ nhật có 8 cạnh có độ dài bằng $y(dm)$ và 4 cạnh có độ dài $6y(dm)$.

Người thợ cắt vừa đủ một cây sắt dài 100 m nên ta có:

$$12x + 8y + 4.6y = 100 \Leftrightarrow 12x + 32y = 100 \Leftrightarrow 3x + 8y = 25 \Leftrightarrow x = \frac{25 - 8y}{3}$$

Thể tích khối lập phương là $V_1 = x^3$.

Thể tích khối hộp chữ nhật là $V_2 = y \cdot y \cdot 6y = 6y^3$.

Tổng thể tích hai hình là: $V = V_1 + V_2 = x^3 + 6y^3 = \left(\frac{25 - 8y}{3}\right)^3 + 6y^3$.

$$12x + 8y + 4.6y = 100 \Leftrightarrow 12x + 32y = 100 \Leftrightarrow 3x + 8y = 25 \Leftrightarrow x = \frac{25 - 8y}{3}$$

Ta có: $x^3 + 3^3 + 3^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3} = 27x$

$$6(y^3 + 2^3 + 2^3) \geq 6 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{y^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3} = 72y$$

Cộng vế theo vế hai bất đẳng thức ta được:

$$x^3 + 6y^3 + 150 \geq 27x + 72y$$

$$\Leftrightarrow V + 150 \geq 9(3x + 8y)$$

$$\Leftrightarrow V + 150 \geq 9.25$$

$$\Leftrightarrow V + 150 \geq 225$$

$$\Leftrightarrow V \geq 75$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy tổng thể tích của hai hình thu được nhỏ nhất bằng $75dm^3$ khi độ dài cạnh hình lập phương bằng $3dm$, độ dài chiều rộng và chiều cao hình hộp chữ nhật bằng $2dm$, chiều dài hình hộp chữ nhật bằng $12dm$.

Câu 11. (Trường vào lớp 10 Sóc Trăng năm 2022-2023)

Một bể cá hình cầu có bán kính bằng 9cm . Người ta cần đổ vào bể một lượng nước chiếm $\frac{2}{3}$ thể tích bể. Hỏi cần đổ bao nhiêu lít nước ? (biết rằng $1\text{l} = 1000\text{cm}^3$, $\pi = 3,14$)



Lời giải

Thể tích bể cá cảnh là : $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 9^3 = 3052,08(\text{cm}^3)$

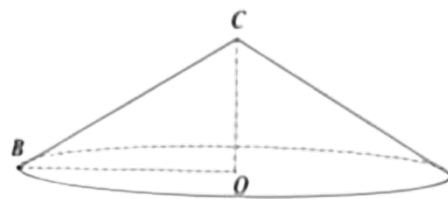
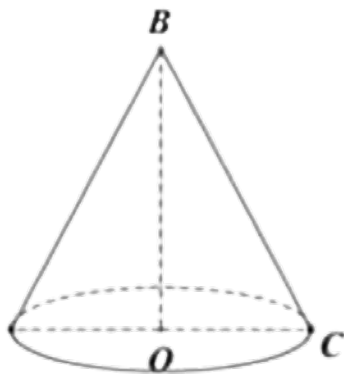
Thể tích lượng nước cần đổ là : $\frac{2}{3} \cdot 3052,08 = 2034,72(\text{cm}^3) = 2,03472$ lít

Vậy người ta cần đổ $2,03472$ lít.

Câu 12. (Trường vào lớp 10 Thừa Thiên Huế năm 2022-2023)

Cho tam giác OBC vuông tại O . Nếu quay tam giác OBC một vòng quanh cạnh OB cố định thì được một hình nón có thể tích bằng $800\pi\text{cm}^3$. Nếu quay tam giác OBC một vòng quanh cạnh OC cố định thì được một hình nón có thể tích bằng $1920\pi\text{cm}^3$. Tính OB và OC

Lời giải:



Khi quay tam giác OBC một vòng quanh cạnh OB cố định thì $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot OC^2 \cdot OB = 800\pi$

Khi quay tam giác OBC một vòng quanh cạnh OC cố định thì $V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot OB^2 \cdot OC = 1920\pi$

Câu 1. (Trường vào lớp 10 Thừa Thiên Huế năm 2022-2023)

Một hình trụ có bán kính đáy bằng 4cm , chiều cao bằng 12cm . Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ đã cho.

Lời giải:

Gọi R ; h lần lượt là chiều cao của hình trụ đã cho. Suy ra: $R = 4\text{cm}$; $h = 12\text{cm}$

Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi R.h = 2\pi.4.12 = 96\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Thể tích của hình trụ: $V = \pi R^2 h = \pi.4^2.12 = 192\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

Câu 13. (Trường vào lớp 10 Thừa TP Hồ Chí Minh năm 2022-2023)

Bạn Nam dự định tổ chức buổi tiệc sinh nhật và chọn loại ly có phần chứa nước dạng hình nón với bán kính đáy $R = 4\text{cm}$ và độ dài đường sinh l để khách uống nước trái cây.

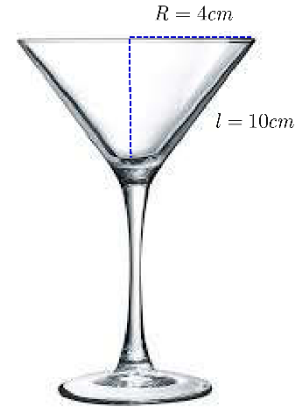
a) Tính thể tích phần chứa nước của ly (ghi kết quả làm tròn đến hàng đơn vị). Biết công thức thể tích hình nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \text{ (với } R \text{ là bán kính đáy hình nón; } h \text{ là chiều cao}$$

hình nón).

b) Bạn Nam cần chuẩn bị một số hộp nước trái cây có lượng nước trong mỗi hộp là 1,2 lít. Biết rằng buổi tiệc sinh nhật có 14 người (đã bao gồm Nam). Nếu mỗi người trung bình uống 3 ly nước trái cây và lượng nước rót bằng 90% thể tích ly thì bạn Nam cần chuẩn bị ít nhất bao nhiêu hộp nước trái cây?

Biết $1 \text{ lít} = 1000\text{cm}^3$.



Lời giải:

a) Chiều cao phần chứa nước của ly là: $h = \sqrt{l^2 - R^2} = 2\sqrt{21} \text{ (cm)}$.

Thể tích phần chứa nước của ly là: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.4^2.2\sqrt{21} \approx 154 \text{ (cm}^3\text{)}$.

b) Lượng nước mỗi người uống là: $3.90\%V = 415,8 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Đổi $1,2 \text{ lít} = 1200 \text{ cm}^3$

Ta thấy $\frac{14.415,8}{1200} \approx 4,8$.

Vậy bạn Nam cần chuẩn bị ít nhất 5 hộp nước trái cây.