CỰC TRỊ HÌNH HỌC

Kiến thức trọng tâm

A-Phương pháp giải bài toán cực trị hình học.

1- Hướng giải bài toán cực trị hình học :

a) Khi tìm vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị lớn nhất ta phải chứng tỏ được :

+Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \le m$ (m là hằng số)

+Xác định vị trí của hình H trên miền D sao cho $f = m$

b) Khi tìm vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị nhỏ nhất ta phải chứng tỏ được :

+Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \ge m$ (m là hằng số)

+Xác định vị trí của hình H trên miền D để $f = m$

2 - Cách trình bày lời giải bài toán cực trị hình học .

+ *Cách1 :*Trong các hình có tính chất của đề bài,chỉ ra một hình rồi chứng minh mọi hình khác đều có giá trị của đại lượng phải tìm cực trị nhỏ hơn (hoặc lớn hơn) giá trị của đại lượng đó của hình đã chỉ ra.

+ *Cách2 :*Biến đổi tương đương điều kiện để đại lượng này đạt cực trị bởi đại lượng khác đạt cực trị cho đến khi trả lời được câu hỏi mà đề bài yêu cầu.

Ví dụ : Cho đường tròn (O) và điểm P nằm trong đường tròn(P không trùng với O).Xác định vị trí của dây đi qua điểm P sao cho dây đó có độ dài nhỏ nhất.

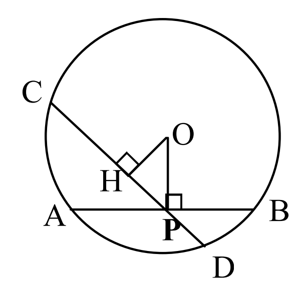
Giải :

+*Cách 1 :*

Gọi AB là dây vuông góc với OP tại P , và dây CD là dây bất kỳ đi qua P và không trùng với AB (h.1).

Kẻ $OH \perp CD$.

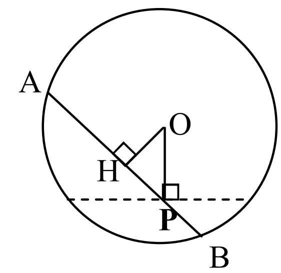
ΔOHP vuông tại H $\Rightarrow OH < OP \Rightarrow CD > AB$



h .1

Như vậy trong tất cả các dây đi qua P , dây vuông góc với OP tại P có độ dài nhỏ nhất .

+*Cách 2 :*



h .2

Xét dây AB bất kỳ đi qua P (h.2). Kẻ OH ⊥ AB

Theo liên hệ giữa dây và khoảng cách đến tâm:

AB nhỏ nhất ⇔ OH lớn nhất

Ta lại có OH ≤ OP

OH = OP ⇔ H ≡ P

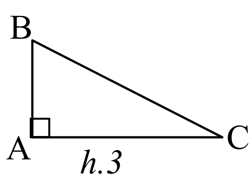
Do đó maxOH = OP

Khi đó dây AB vuông góc với OP tại P.

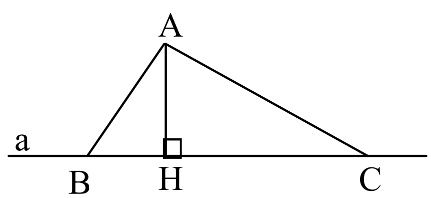
<u>B-Các kiến thức thường dùng giải bài toán cực trị hình học.</u>

1- Sử dụng quan hệ giữa đường vuông góc , đường xiên , hình chiếu .

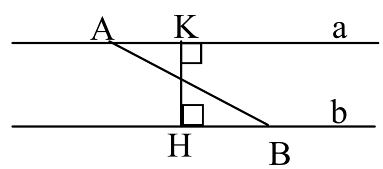
a-Kiến thức cần nhớ:



h.3



h.4



h.5

a1) ΔABC vuông tại A (có thể suy biến thành đoạn thẳng) ⇒ AB ≤ BC .
Dấu "=" xảy ra ⇔ A ≡ C . *(h.3)*

a2) *(h.4)*

\+ AH ⊥ a ⇒ AH ≤ AB . Dấu "=" xảy ra ⇔ B ≡ H .

\+ AB < AC ⇔ HB < HC

a3)*(h.5)*

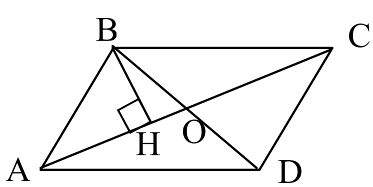
A,K ∈a; B, H ∈b; a // b ; HK ⊥ a ⇒ HK ≤ AB

Dấu "=" xảy ra ⇔ A ≡ K và B ≡ H .

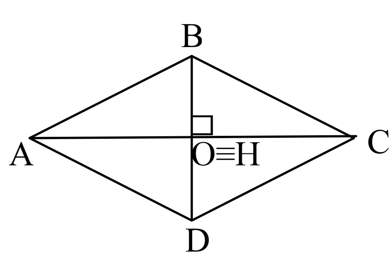
b-Các ví dụ:

Ví dụ 1: *Trong các hình bình hành có hai đường chéo bằng 6 cm và 8 cm ,hình nào có diện tích lớn nhất ? Tính diện tích lớn nhất đó.*

Giải :



h.6



h.7

Xét hình bình hành ABCD có AC = 8 cm; BD = 6 cm *(h.6)*

Gọi O là giao điểm hai đường chéo . Kẻ BH $\perp$ AC .

Ta có : $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = AC.BH$

Ta có AC = 8cm, BH $\le$ BO = 3cm. Do đó :

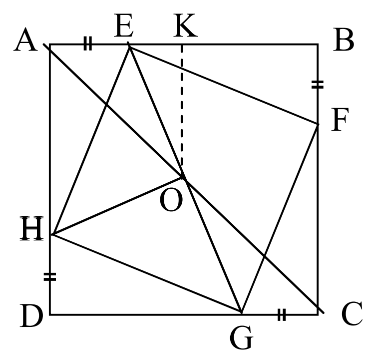
$S_{ABCD} \le 8.3 = 24$ (cm^2)

$S_{ABCD} = 24$ cm^2 $\Leftrightarrow$ BH $\equiv$ BO $\Leftrightarrow$ H $\equiv$ O $\Leftrightarrow$ BD $\perp$AC

Vậy max $S_{ABCD} = 24$ cm^2 . Khi đó hình bình hành ABCD là hình thoi *(h.7)* có diện tích 24cm^2.

Ví dụ 2: *Cho hình vuông ABCD . Trên các cạnh AB,BC ,CD,DA ta lấy theo thứ tự các điểm E,F,G,H sao cho AE = BF = CG = DH . Xác định vị trí của các điểm E, F,G,H sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất .*

Giải :



h.8

$\Delta HAE = \Delta EBF = \Delta FCG = \Delta GHD$

$\Rightarrow$ HE = EF = FG = GH

$\Rightarrow$ EFGH là hình thoi .

$\widehat{AHE} = \widehat{BEF}$

$\Rightarrow \widehat{AHE} + \widehat{AEH} = 90^0 \;\Rightarrow\; \widehat{BEF} + \widehat{AEH} = 90^0$

$\Rightarrow\; \widehat{HEF} = 90^0$

$\Rightarrow$ EFGH là hình vuông

Gọi O là giao điểm của AC và EG . Tứ giác AECG có AE = CG, AE //CG nên là hình bình hành suy ra O là trung điểm của AC và EG , do đó O là tâm của cả hai hình vuông ABCD và EFGH.

ΔHOE vuông cân : HE^2 = 2OE^2 $\Rightarrow$ HE = OE$\sqrt{2}$

Chu vi EFGH = 4HE = $4\sqrt{2}$OE . Do đó chu vi EFGH nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ OE nhỏ nhất

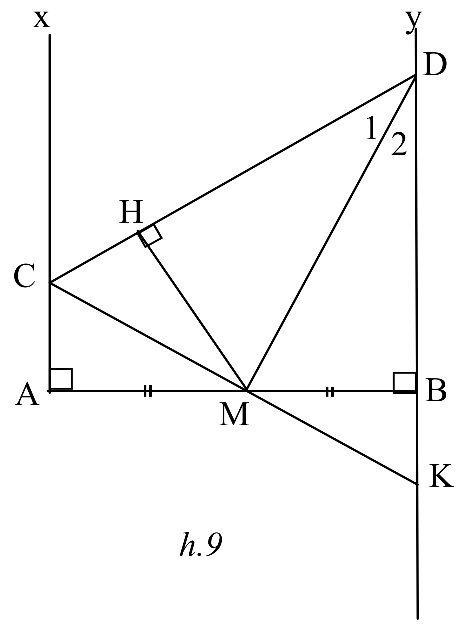
Kẻ OK $\perp$AB $\Rightarrow$ OE $\ge$OK (OK không đổi)

OE = OK $\Leftrightarrow$ E $\equiv$ K

Do đó minOE = OK

Như vậy , chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất khi và chỉ khi E,F,G,H là trung điểm của AB , BC, CD, DA.

Ví dụ 3: *Cho đoạn thẳng AB có độ dài 2a .Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB . Qua trung điểm của M của AB có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D .xác định vị trí của các điểm C,D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất .Tính diện tích tam giác đó.*



h.9

Giải:

Gọi K là giao điểm của CM và DB

MA = MB ; $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^0$, $\widehat{AMC} = \widehat{BMK}$

$\Rightarrow \Delta MAC = \Delta MBK \Rightarrow MC = MK$

Mặt khác DM $\perp$ CK

$\Rightarrow \Delta DCK$ cân $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$

Kẻ MH $\perp$ CD .

$\Delta MHD = \Delta MBD \Rightarrow MH = MB = a$

$\Rightarrow S_{MCD} = \frac{1}{2}CD.MH \geq \frac{1}{2}AB.MH = \frac{1}{2}2a.a = a^2$

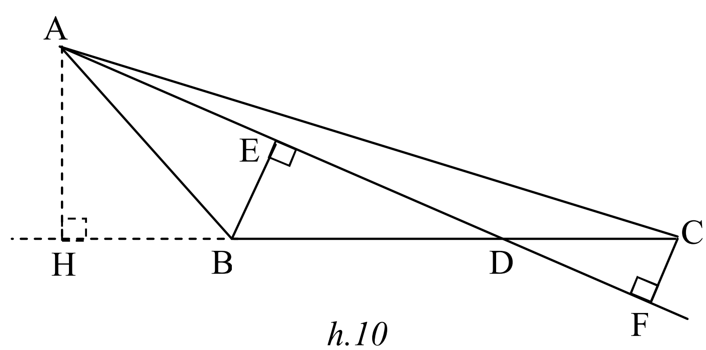
$S_{MCD} = a^2 \Leftrightarrow CD \perp Ax$ khi đó $\widehat{AMC} = 45^0$; $\widehat{BMD} = 45^0$.

Vậy min $S_{MCD} = a^2$.

Các điểm C,D được xác định trên Ax; By sao cho AC = BC = a .

Ví dụ 4: *Cho tam giác ABC có $\widehat{B}$ là góc tù , điểm D di chuyển trên cạnh BC . Xác định vị trí của điểm D sao cho tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AD có giá trị lớn nhất .*

Giải:



h.10

Gọi S là diện tích ΔABC Khi D di chuyển trên cạnh BC ta có :

$S_{ABD} + S_{ACD} = S$

Kẻ BE $\perp$ AD , CF $\perp$ AD

$\Rightarrow \frac{1}{2}AD.BE + \frac{1}{2}AD.CF = S$

$\Rightarrow BE + CF = \frac{2S}{AD}$

Do đó BE + CF lớn nhất $\Leftrightarrow$ AD nhỏ nhất $\Leftrightarrow$hình chiếu HD nhỏ nhất

Do HD $\geq$ HB (do $\widehat{ABD} > 90^0$) và HD = HB $\Leftrightarrow$ D $\equiv$ B

Vậy Khi D $\equiv$ B thì tổng các khoảng cách từ B và C đến AD có giá trị lớn nhất .

2- Sử dụng quan hệ giữa đường thẳng và đường gấp khúc.

a-Kiến thức cần nhớ:

Với ba điểm A,B,C bất kỳ ta có : $AC + CB \geq AB$

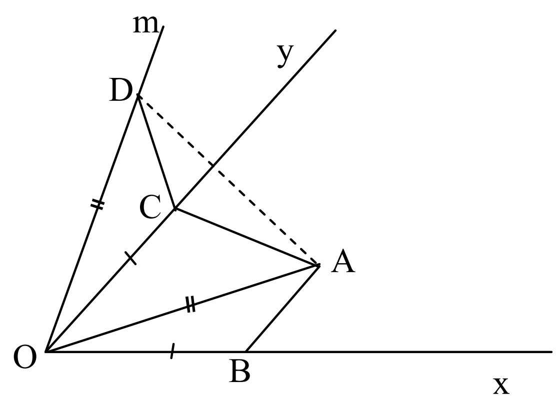
$AC + CB = AB \Leftrightarrow$ C thuộc đoạn thẳng AB

b-Các ví dụ:

Ví dụ 5: *Cho góc $\widehat{xOy}$ và điểm A nằm trong góc đó . Xác định điểm B thuộc tia Ox, điểm C thuộc tia Oy sao cho OB = OC và tổng AB +AC là nhỏ nhất .*

Giải:

Kẻ tia Om nằm ngoài góc xOy sao cho $\widehat{yOm} = \widehat{xOA}$. Trên tia Om lấy điểm D sao cho OD = OA . Các điểm D và A cố định .



h.11

$OD = OA$, $OC = OB$, $\widehat{COD} = \widehat{BOA}$

$\Rightarrow \Delta DOC = \Delta AOB \Rightarrow CD = AB$

Do đó $AC + AB = AC + CD$

Mà $AC + CD \geq AD$

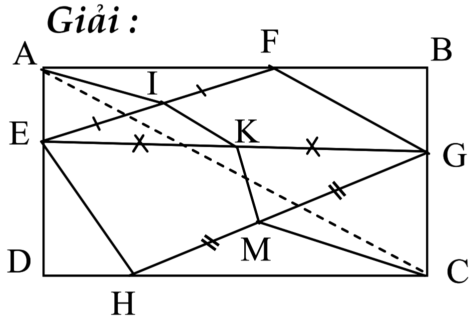
$\Rightarrow AC + AB \geq AD$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $C \in AD$

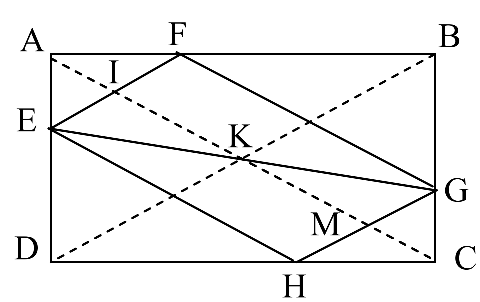
Vậy min(AC+AB) =AD . Khi đó C là giao điểm của AD và Oy , B thuộc tia Ox sao cho OB = OC.

Ví dụ 6: *Cho hình chữ nhật ABCD và điểm E thuộc cạnh AD . Xác định vị trí các điểm F thuộc cạnh AB , G thuộc cạnh BC , H thuộc cạnh CD sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.*

Giải :



h.12



h.13

Gọi I ,K, L theo thứ tự là trung điểm của EF, EG , EH *(h.12)*.

ΔAEF vuông tại A có AI là trung tuyến $\Rightarrow AI = 1/2EF$

ΔCGH vuông tại C có CM là trung tuyến $\Rightarrow$ CM =1/2GH

IK là đường trung bình của ΔEFG $\Rightarrow$ IK = 1/2FG

KM là đường trung bình của ΔEGH $\Rightarrow$ KM = 1/2EH

Do đó : chu vi EFGH = EF +FG +GH +EH =2(AI + IK + KM + MC)

Ta lại có : AI + IK + KM + MC $\geq$ AC

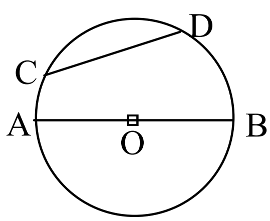
Suy ra chu vi EFGH $\geq$ 2AC (độ dài AC không đổi)

Chu vi EFGH nhỏ nhất bằng 2AC $\Leftrightarrow$ A,I,K,M,C thẳng hàng.

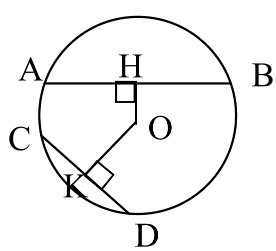
Khi đó ta có EH//AC,FG//AC, $\widehat{AEI} = \widehat{EAI} = \widehat{ADB}$ nên EF//DB , tương tự GH//DB .Suy ra tứ giác EFGH là hình bình hành có các cạnh song song với các đường chéo của hình chữ nhật ABCD *(h.13).*

3- Sử dụng các bất đẳng thức trong đường tròn.

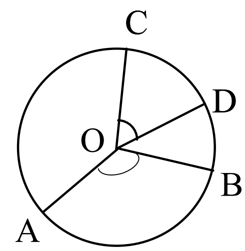
a-Kiến thức cần nhớ:



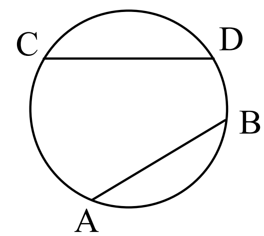
h.14



h.15



h.16



h.17

a1) AB là đường kính , CD là dây bất kỳ $\Rightarrow$ CD $\leq$ AB *(h.14)*

a2) OH,OK là các khoảng cách từ tâm đến dây AB và CD :

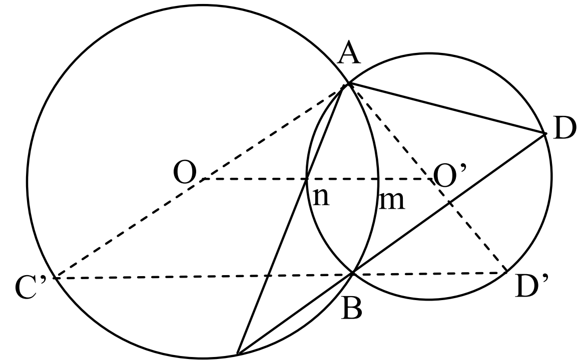
AB $\geq$ CD $\Leftrightarrow$ OH $\leq$ OK *(h.15)*

a3) AB,CD là các cung nhỏ của (O) : AB $\geq$ CD $\Leftrightarrow$ $\widehat{AOB} \geq \widehat{COD}$ *(h.16)*

a4) AB,CD là các cung nhỏ của (O) : AB $\geq$ CD $\Leftrightarrow$ $\overset{\frown}{AB} \geq \overset{\frown}{CD}$ *(h.17)*

b-Các ví dụ:

Ví dụ 7: *Cho hai đường tròn (O) và (O′) cắt nhau ở A và B . một cát tuyến chung bất kỳ CBD (B nằm giữa C và D) cắt các đường tròn (O) và (O′) tại C và D . Xác định vị trí của cát tuyến CBD để ΔACD có chu vi lớn nhất.*



Giải:

sđ $\hat{C} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AmB}$; sđ $\hat{D} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AnB}$

$\Rightarrow$ số đo các góc ΔACD không đổi

$\Rightarrow$ ΔACD có chu vi lớn nhất khi một cạnh của nó lớn nhất , chẳng hạn AC là lớn nhất.

AC là dây của đường tròn (O) , do đó AC lớn nhất khi AC là đường kính của đường tròn (O), khi đó AD là đường kính của đường tròn (O′). Cát tuyến CBD ở vị trí C′BD′ vuông góc với dây chung AB.

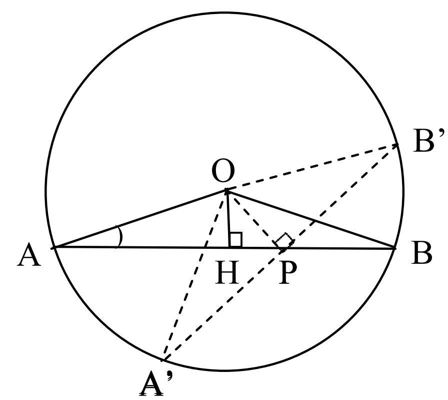
Ví dụ 8: *Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm trong đường tròn . Xác định dây AB đi qua P sao cho $\widehat{OAB}$ có giá trị lớn nhất .*

Giải:

Xét tam giác cân OAB , góc ở đáy $\widehat{OAB}$ lớn nhất nếu góc ở đỉnh $\widehat{AOB}$ nhỏ nhất .

$\widehat{AOB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$

Góc $\widehat{AOB}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ Cung $\overset{\frown}{AB}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ dây AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ Khoảng cách đến tâm OH lớn nhất.



h.19

Ta có $OH \le OP$

$OH = OP \Leftrightarrow H \equiv P$ nên max $OH = OP \Leftrightarrow AB \perp OP$

Suy ra dây AB phải xác định là dây A′B′ vuông góc với OP tại P .

4- Sử dụng bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai .

a-Kiến thức cần nhớ:

Các bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai được sử dụng dưới dạng :

$$A^2 \ge 0 \;\; ; -A^2 \le 0$$

Do đó với m là hằng số , ta có :

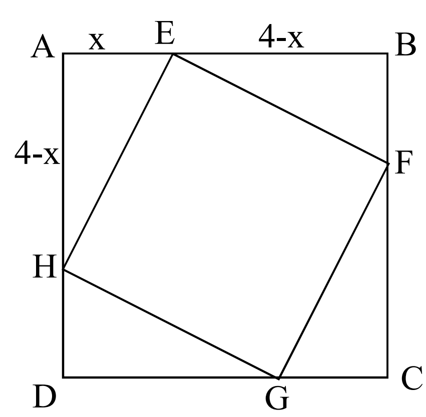
$f = A^2 + m \ge m$; min $f = m$ với $A = 0$

$f = -A^2 + m \le m$; max $f = m$ với $A = 0$

b-Các ví dụ:

Ví dụ 9: *Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4cm . Trên các cạnh AB, BC,CD,DA, lấy theo thứ tự các điểm E, F, G, H sao cho AE = BF = CG = D . Tính độ dài AE sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.*

Giải:



h.20

$\Delta AHE = \Delta BEF = \Delta CFG = \Delta DGH$

$\Rightarrow$ HE = EF = FG = GH , HEF = 90^0

$\Rightarrow$ HEFG là hình vuông nên chu vi EFGH nhỏ nhất khi HE nhỏ nhất .

Đặt AE = x thì HA = EB = 4-x

ΔHAE vuông tại A nên :

$HE^2 = AE^2 + AE^2 = x^2 + (4 - x)^2 = 2x^2 - 8x + 16 = 2(x - 2)^2 + 8 \geq 8$

$HE = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2$

Chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất bằng $8\sqrt{2}$ cm , khi đó AE = 2 cm .

Ví dụ 10: *Cho tam giác vuông ABC có độ dài các cạnh góc vuông AB = 6 cm, AC = 8cm.M là điểm di chuyển trên cạnh huyền BC.Gọi D và E là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC . Tính diện tích lớn nhất của tứ giác ADME.*

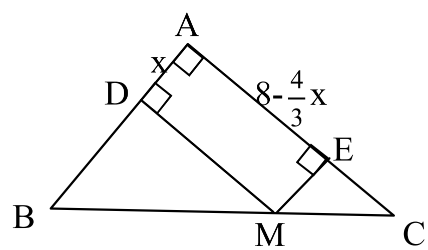
Giải:

ADME là hình chữ nhật .

Đặt AD = x thì ME = x

ME //AB $\Rightarrow \dfrac{EM}{AB} = \dfrac{CE}{CA} \Rightarrow \dfrac{x}{6} = \dfrac{CE}{8} \Rightarrow CE = \dfrac{4}{3}x$

$\Rightarrow AE = 8 - \dfrac{4}{3}x$



h.21

Ta có : $S_{ADME} = AD.AE = x\left(8 - \dfrac{4}{3}x\right) = 8x - \dfrac{4}{3}x^2$

$$= -\frac{4}{3}(x-3)^2 + 12 \leq 12$$

$S_{ADME} = 12\ cm^2 \Leftrightarrow x = 3$

Diện tích lớn nhất của tứ giác ADME bằng 12 cm^2 ,khi đó D là trung điểm của AB , M là trung điểm của BC và E là trung điểm của AC.

5- Sử dụng bất đẳng thức Cô-si .

a-Kiến thức cần nhớ:

Bất đẳng thức Cô-si :Với $x \geq 0$; $y \geq 0$ ta có : $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = y

Bất đẳng thức Cô-si thường được sử dụng dưới các dạng sau :

+ *Dạng 1:* $x^2 + y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2} \ge 2xy$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = y

+ *Dạng 2:* $\frac{(x+y)^2}{xy} \ge 4$; $\frac{xy}{(x+y)^2} \le \frac{1}{4}$

$\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \le 2$; $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} \ge \frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = y

+ *Dạng 3:*Với $x \ge 0$; $y \ge 0$; x +y không đổi thì xy lớn nhất khi và chỉ khi x = y

+ *Dạng4:* Với $x \ge 0$; $y \ge 0$; xy không đổi thì x+y nhỏ nhất khi và chỉ khi x = y

b-Các ví dụ:

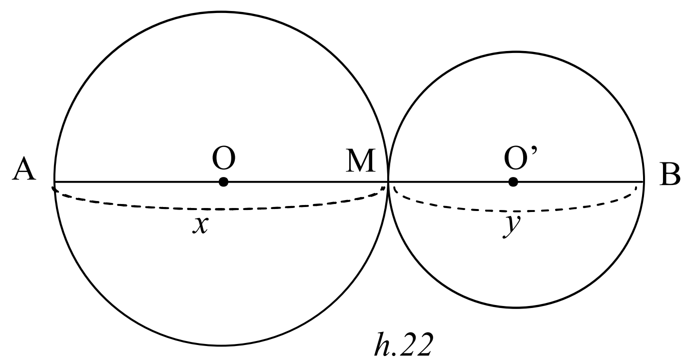
Ví dụ 11: *Cho đoạn thẳng AB, điểm M di chuyển trên đoạn thẳng ấy . Vẽ các đường tròn có đường kính MA và MB . Xác định vị trí của điểm M để tổng diện tích của hai hình tròn có giá trị nhỏ nhất .*

Giải :

Đặt MA =x , MB = y

Ta có : x + y =AB (0 < x,y < AB)

Gọi S và S′ theo thứ tự là diện tích của hai hình tròn có đường kính là MA và MB .



h.22

Ta có :

$$S + S' = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \pi.\frac{x^2+y^2}{4}$$

Ta có bất đẳng thức : $x^2 + y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2}$ nên :

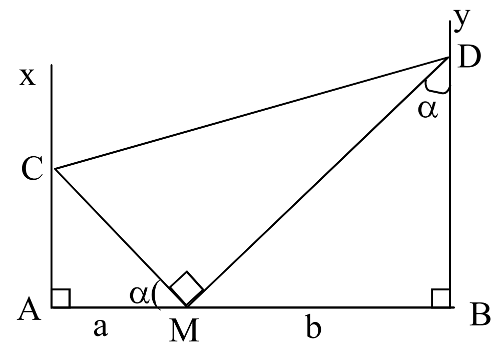
$$S + S' \ge \pi.\frac{(x+y)^2}{8} = \pi.\frac{AB^2}{8}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y

Do đó min (S+S′) $= \pi.\frac{AB^2}{8}$ .Khi đó M là trung điểm của AB.

Ví dụ 12: *Cho điểm M nằm trên đoạn thẳng AB .Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB . Qua M có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc* *với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D . Xác định vị trí của các điểm C,D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất .*

Giải :



h.23

Ta có : $S_{MCD} = \frac{1}{2}MC.MD$

Đặt MA = a , MB = b

$\widehat{AMC} = \widehat{BDM} = \alpha$

$MC = \frac{a}{\cos\alpha}$, $MD = \frac{b}{\sin\alpha}$

$S_{MCD} = \frac{1}{2}\frac{ab}{\cos\alpha.\sin\alpha}$

Do a,b là hằng số nên S_{MCD} nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $2\sin\alpha.\cos\alpha$ lớn nhất .

Theo bất đẳng thức $2xy \le x^2 + y^2$ ta có :

$2\sin\alpha.\cos\alpha \le \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nên $S_{MCD} \ge ab$

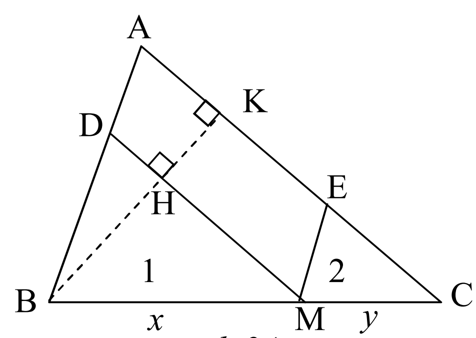
$S_{MCD} = ab \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \sin(90^0 - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^0 - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^0$

$\Leftrightarrow$ ΔAMC và ΔBMD vuông cân.

Vậy min S_{MCD} = ab .Khi đó các điểm C,D được xác định trên tia Ax ; By sao cho AC = AM , BD = BM .

Ví dụ 13: *Cho ΔABC , điểm M di động trên cạnh BC . Qua M kẻ các đường thẳng song song với AC và với AB , chúng cắt AB và AC theo thứ tự ở D và E.Xác định vị trí của điểm M sao cho hình bình hành ADME có diện tích lớn nhất.*

Giải :



h.24

S_{ADME} lớn nhất $\Leftrightarrow$ $\frac{S_{ADME}}{S_{ABC}}$ lớn nhất

Kẻ BK ⊥ AC cắt MD ở H.

$S_{ADME} = MD . HK$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC . BK$

$\frac{S_{ADME}}{S_{ABC}} = 2.\frac{MD}{AC}.\frac{HK}{BK}$

Đặt MB = x , MC = y ,

MD//AC ta có : $\frac{MD}{AC} = \frac{BM}{BC} = \frac{x}{x+y}$; $\frac{HK}{BK} = \frac{MC}{BC} = \frac{y}{x+y}$

Theo bất đẳng thức $\dfrac{xy}{(x+y)^2} \le \dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{S_{ADME}}{S_{ABC}} = \dfrac{2xy}{(x+y)^2} \le \dfrac{1}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi x = y

Vậy $\max S_{ADME} = \dfrac{1}{2} S_{ABC}$ khi đó M là trung điểm của BC.

Ví dụ 14: *Cho Δ ABC vuông cân có cạnh huyền BC = a . Gọi D là trung điểm của AB. Điểm E di chuyển trên cạnh AC. Gọi H,K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D, E đến BC . Tính diện tích lớn nhất của hình thang DEKH . Khi đó hình thang trở thành hình gì ?*

Giải:

Ta có :

$2S_{DEKH}$ = (DH +EK).HK = (BH +KC) .HK

Mà (BH + KC) +HK =BC = a không đổi

Nên (BH + KC) .HK lớn nhất ⇔BH + KC) = HK = $\dfrac{a}{2}$

Do đó :

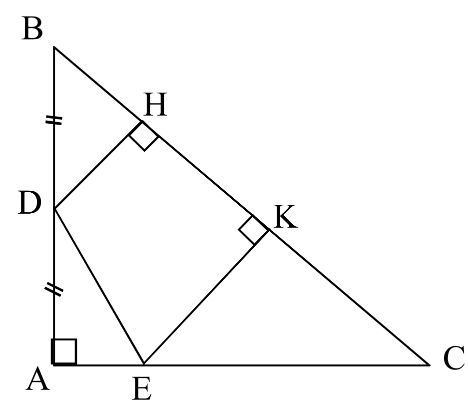
$\max S_{DEKH} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2}{8}$

Khi đó đường cao HK = $\dfrac{a}{2}$ suy ra :

KC = BC –BH –HK = $a - \dfrac{a}{2} - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{4}$

Do đó DH = HB = $\dfrac{a}{4}$, EK = KC = $\dfrac{a}{4}$.

Hình thang DEKH là hình chữ nhật , E là trung điểm của AC.

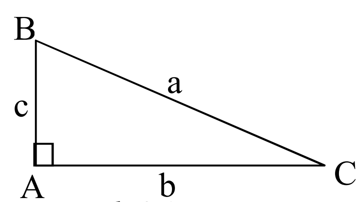


h.25

6- Sử dụng tỉ số lượng giác.

a-Kiến thức cần nhớ:

Hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông



h.26

+ b = a.sinB = a.cosC

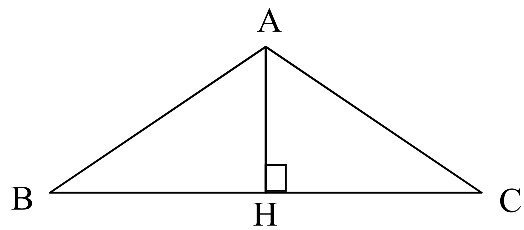
+ b = c.tgB = c.cotgC

b-Các ví dụ:

Ví dụ 15: *Chứng minh rằng trong các tam giác cân có cùng diện tích tam giác có cạnh đáy nhỏ hơnlà tam giác có góc ở đỉnh nhỏ hơn.*

Giải:

Xét các tam giác ABC cân tại A có cùng diện tích S. Kẻ đường cao AH . Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$



h.27

ΔAHC vuông tại H, ta có :

$\widehat{HAC} = \frac{\alpha}{2}$,

$AH = HC.\text{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}BC.\text{cotg}\frac{\alpha}{2}$

Do đó : $S = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}BC.\frac{1}{2}BC.\text{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}BC^2\text{cotg}\frac{\alpha}{2}$

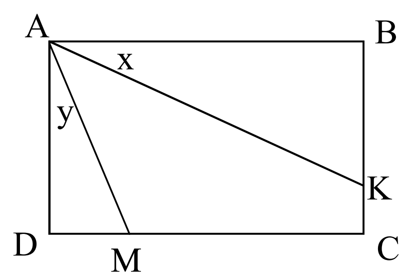
$\Rightarrow BC = \sqrt{\dfrac{4S}{\text{cotg}\frac{\alpha}{2}}} = 2\sqrt{S.\text{tg}\frac{\alpha}{2}}$

Do S không đổi nên :

BC nhỏ nhất $\Leftrightarrow \text{tg}\frac{\alpha}{2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \alpha$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \widehat{BAC}$ nhỏ nhất

Ví dụ 16: *Cho hình chữ nhật ABCD. Trên các cạnh BC,CD lần lượt lấy các điểm K,M sao cho BK : KC = 4 : 1, CM : MD = 4 : 1.Tìm tỉ số AB : BC để số đo góc $\widehat{KAM}$ lớn nhất .*

(Cho công thức biến đổi $tg(x+y) = \dfrac{tgx + tgy}{1 - tgx.tgy}$*)*



h.28

Giải:

Đặt $\widehat{BAK} = x$, $\widehat{DAM} = y$ $(x + y < 90^0)$

$\widehat{KAM}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \widehat{BAK} + \widehat{DAM}$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ x + y nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ tan (x + y) nhỏ nhất

Giả sử AB : BC = 1 : m (m> 0)

$\text{tg } x = \frac{BK}{AB} = \frac{BK}{BC}.\frac{BC}{AB} = \frac{4m}{5}$

$\text{tg } y = \frac{DM}{AD} = \frac{DM}{DC}.\frac{DC}{AD} = \frac{1}{5m}$

$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx.tgy}=\left(\frac{4m}{5}+\frac{1}{5m}\right):\left(1-\frac{4m}{5}.\frac{1}{5m}\right)=\frac{25}{21}\left(\frac{4m}{5}+\frac{1}{5m}\right)$$

tg (x + y) nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{4m}{5}+\frac{1}{5m}$ nhỏ nhất

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{4m}{5}+\frac{1}{5m} \geq 2\sqrt{\frac{4m}{5}.\frac{1}{5m}}=\frac{4}{5}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{4m}{5}=\frac{1}{5m} \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

Vậy x + y nhỏ nhất khi và chỉ khi $m=\frac{1}{2}$

Do đó $\widehat{KAM}$ lớn nhất khi và chỉ khi AB : BC = 2 : 1

Phần 3: Bài tập ôn luyện

Bài 1 : Cho hình vuông ABCD . Hãy xác định đường thẳng d đi qua tâm hình vuông sao cho tổng các khoảng cách từ bốn đỉnh của hình vuông đến đường thẳng đó là :

a) Lớn nhất
b) Nhỏ nhất

Hướng dẫn:

Xét trường hợp d cắt hai cạnh đối BC và AD (h.29)

Gọi m là tổng các khoảng cách từ bốn đỉnh hình vuông đến D.

m =2(AA′ +BB′)

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và A′B′

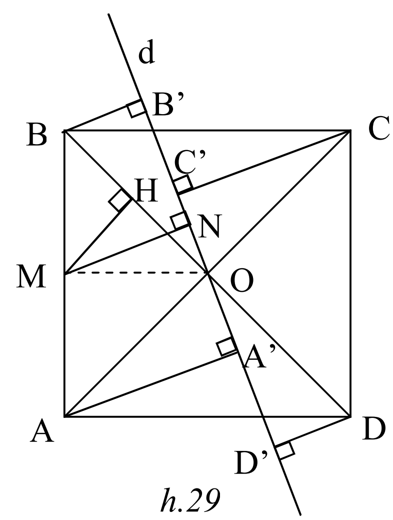
Suy ra : m = 4MN do đó:

m lớn nhất $\Leftrightarrow$ *MN lớn nhất*

m nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ *MN nhỏ nhất*

a) $MN \leq MO \Rightarrow$ *m lớn nhất* $\Leftrightarrow M\equiv O \Leftrightarrow d//AB$

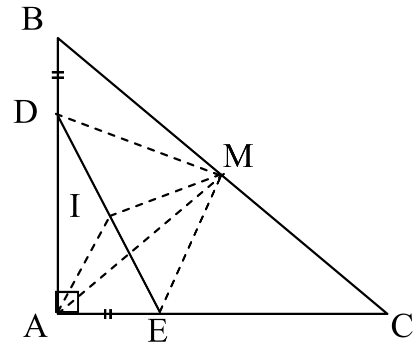
b)kẻ $MH \perp OB$ *. Chứng minh* $MN \geq MH \Rightarrow$ *MN nhỏ nhất* $\Leftrightarrow N\equiv H \Leftrightarrow d\equiv BD$ *hoặc* $d\equiv AC$*.*



h.29

Bài 2 : Cho ΔABC vuông cân tại A các điểm D,E theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB ,AC sao cho BD = AE . Xác định vị trí các điểm D,E sao cho :

a) DE có độ dài nhỏ nhất .
b) Tứ giác BDEC có diện tích lớn nhất .



h.30

Hướng dẫn: *(h.30)*

a)Gọi M là trung điểm của BC .

$\Delta BDM = \Delta AEM \Rightarrow \widehat{BMD} = \widehat{AME}$

$\Rightarrow \widehat{DME} = \widehat{DMA} + \widehat{AME} = \widehat{DMA} + \widehat{BMD} = \widehat{BMA} = 90^0$

Gọi I là trung điểm của DE .

$DE = DI + IE = AI + IM \geq AM$

Min DE = AM $\Leftrightarrow$ *I là trung điểm của AM*

$\Leftrightarrow$ *D là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC*

b)Đặt $AE = x$, $AB = AC = a$ *thì* $AD = a - x$, $S_{ADE} = \dfrac{x(a-x)}{2}$

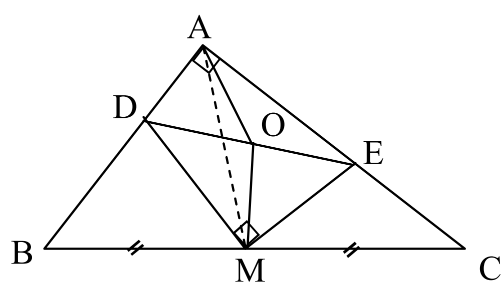
S_{BDEC} *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow S_{ADE}$ *lớn nhất* $\Leftrightarrow x(a-x)$ *lớn nhất*

Do $x + (a - x) = a$ *không đổi nên* $x(a-x)$ *lớn nhất* $\Leftrightarrow x = a - x \Leftrightarrow x = a/2$

Khi đó D là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC

Bài 3 : Cho Δ ABC vuông tại A có BC = a , diện tích là S . Gọi m là trung điểm của BC . Hai dường thẳng thay đổi qua M và vuông góc với nhau cắt các cạnh AB , AC ở D ,E .Tìm :

a) Giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng DE .
b) Giá trị nhỏ nhất của diện tích Δ MDE



h.31

Hướng dẫn:

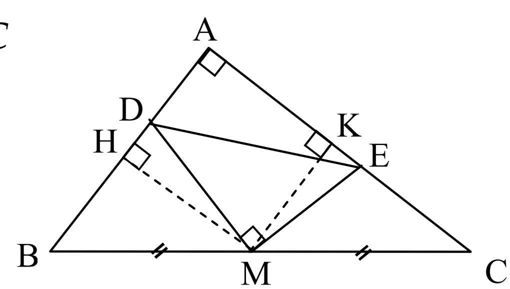
a) (h.31)Gọi O là trung điểm của DE

Ta có $OA = OD = OE = OM$

$\Rightarrow DE = OA + OM \geq AM = \dfrac{a}{2}$

$minDE = a/2 \Leftrightarrow$ *O là trung điểm của AM*

$\Leftrightarrow$ *D là trung điểm của AB và E là trung điểm của AC*



h.32

b) (h.32)Kẻ $MH \perp AB$, $MK \perp AC$

$ME \geq MK$, $MD \geq MH$.

$2S_{MDE} = MD.ME \geq MH.MK = \dfrac{AC}{2}.\dfrac{AB}{2} = \dfrac{S}{2}$

$minS_{MDE} = \frac{S}{4} \Leftrightarrow D \equiv H$ và $E \equiv K$

Bài 4 : Cho điểm m di chuyển trên đoạn thẳng AB .Vẽ các tam giác đềuAMC và BMD về một phía của AB . Xác định vị trí của M để tổng diện tích hai tam giác đều tren là nhỏ nhất .

Hướng dẫn: *(h.33)*

Gọi K là giao điểm của AC và BD .

Các tam giác AMC ,BMD đồng dạng với ΔAKB

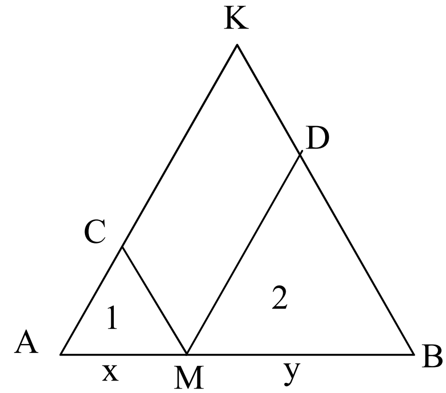
Đặt AM = x ,BM = y , AB = a ta có :

$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 ; \frac{S_2}{S} = \left(\frac{y}{a}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{x^2 + y^2}{a^2} \geq \frac{(x+y)^2}{2a^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y

Do đó : min (S_1 +S_2) =$\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ M là trung điểm của AB.



h.33

Bài 5 : Cho tam giác nhọn ABC có các cạnh a,b,c tương ứng đường cao AH =H. Hãy dựng hình chữ nhật MNPQ nội tiếp trong tam giác ABC sao cho nó có diện tích lớn nhất . Biết M $\in$AB ; N $\in$ AC ; P,Q $\in$ BC.

Hướng dẫn: *(h.34)*

Gọi I là giao điểm của AH và MN

Đặt NP =x ; MN = y ; AI = h – x

ΔAMN Δ ABC

$\Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AI}{AH} \Rightarrow \frac{y}{a} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow y = a.\frac{h-x}{h}$

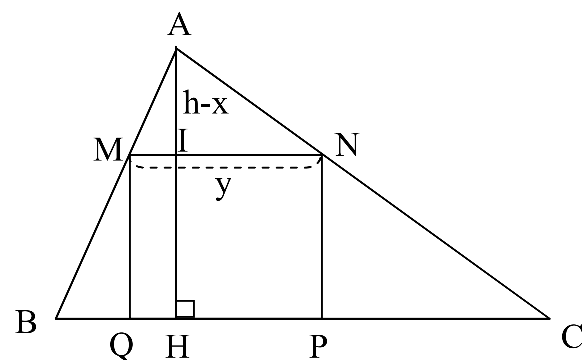
$\Rightarrow S_{MNPQ} = xy = \frac{a}{h}. x(h-x)$

$\Rightarrow S_{MNPQ}$ *lớn nhất* $\Leftrightarrow$ *x(h – x)lớn nhất*

x +(h – x) = h không đổi nên

x(h – x) lớn nhất $\Leftrightarrow$ x = h – x $\Leftrightarrow$ x = h/2

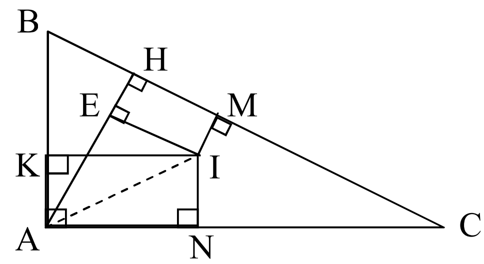
Khi đó MN là đường trung bình của ΔABC



h.34

Bài 6 : Cho Δ ABC vuông tại A . Từ một điểm I nằm trong tam giác ta kẻ IM ⊥ BC, IN ⊥ AC , IK ⊥AB . Tìm vị trí của I sao cho tổng $IM^2 + IN^2 + IK^2$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn: *(h.35)*



h.35

Kẻ AH ⊥BC , IE ⊥AH

ANIK ,IMHE là các hình chữ nhật.

$IK^2 + IN^2 = IK^2 + AK^2 = AI^2 \geq AE^2$

$IM = EH$

nên $IK^2 + IN^2 + IM^2 = AI^2 + EH^2 \geq AE^2 + EH^2$

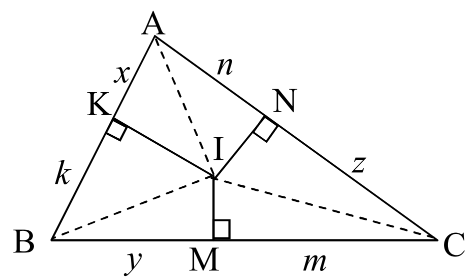
Đặt AE = x , EH =y ta có : $x^2 + y^2 \geq \dfrac{(x+y)^2}{2} = \dfrac{AH^2}{2}$

$\Rightarrow IK^2 + IN^2 + IM^2 \geq \dfrac{AH^2}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi I là trung điểm của đường cao AH.

Bài 7 : Cho tam giác nhọn ABC .Từ một điểm I nằm trong tam giác ta kẻ IM ⊥ BC, IN ⊥ AC , IK ⊥AB . Đặt AK =x ; BM = y ; CN = z .

Tìm vị trí của I sao cho tổng $x^2 + y^2 + z^2$ nhỏ nhất.



h.36

Hướng dẫn*: (h.36)*

Đặt BK = k , CM = m , AN = n ,

BC = a , AC = b , AB = c .

$x^2 + y^2 + z^2 =$

$= (IA^2 - IK^2) + (IB^2 - IM^2) + (IC^2 - IN^2)$

$= (IA^2 - IN^2) + (IB^2 - IK^2) + (IC^2 - IM^2) = n^2 + k^2 + m^2$

$\Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) = x^2 + y^2 + z^2 + n^2 + k^2 + m^2$

$= (x^2 + k^2) + (y^2 + m^2) + (z^2 + n^2)$

$x^2 + k^2 \geq \dfrac{(x+k)^2}{2} = \dfrac{AB^2}{2} = \dfrac{c^2}{2}$ $\qquad$ $y^2 + m^2 \geq \dfrac{(y+m)^2}{2} = \dfrac{BC^2}{2} = \dfrac{a^2}{2}$

$z^2 + n^2 \geq \dfrac{(z+n)^2}{2} = \dfrac{AC^2}{2} = \dfrac{b^2}{2}$

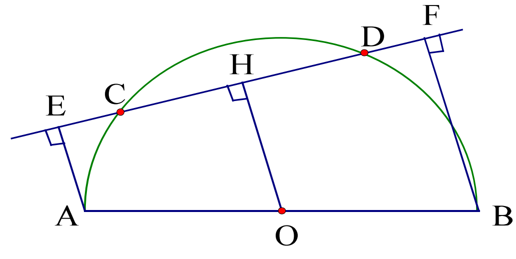
$\Rightarrow \; x^2 + y^2 + z^2 \geq \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$.

$$min(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \Leftrightarrow x = k,\ y = m,\ z = n.$$

$\Leftrightarrow$ *I là giao điểm của các đường trung trực của ΔABC.*

Bài 8 : Cho nửa đường tròn có đường kính AB = 10 cm .Một dây CD có độ dài 6cm có hai đầu di chuyển trên nửa đường tròn . Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu của A và B trên CD. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác ABFE.

Hướng dẫn: *(h.37)*



h.37

Kẻ $OH \perp CD$, ta tính được OH = 4cm

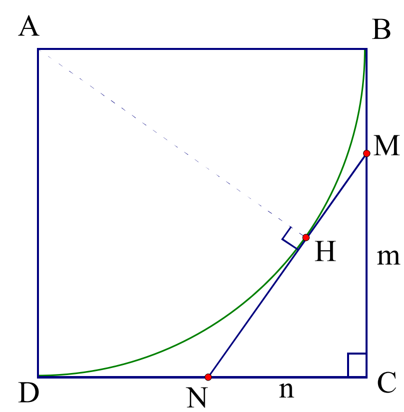
$S_{ABFE} = 1/2(AE + BF).EF$

$= OH.EF \leq OH.\ AB = 4.10 = 40$

$max\ S_{ABEF} = 40\ cm^2$

$\Leftrightarrow EF \parallel AB$ *, khi đó $OH \perp AB$*

Bài 9 : Cho hình vuông ABCD cạnh a .Vẽ cung BD tâm A bán kính a (nằm trong hình vuông) .một tiếp tuyến bất kỳ với cung đó cắt BC, CD theo thứ tự ở M và N. Tính độ dài nhỏ nhất của MN.



h.38

Hướng dẫn:*(h.38)*

Đặt CM = m , CN = n , MN = x

$m + n + x = 2CD = 2a$ *và* $m^2 + n^2 = x^2$

Do đó : $x^2 = m^2 + n^2 \geq \frac{(m+n)^2}{2}$

$\Rightarrow 2x^2 \geq (2a - x)^2 \Rightarrow x\sqrt{2} \geq 2a - x$

$\Rightarrow x \geq \frac{2a}{\sqrt{2}+1} = 2a(\sqrt{2} - 1)$

$min\ MN = 2a\left(\sqrt{2} - 1\right) \Leftrightarrow m = n$ *. Khi đó tiếp tuyến MN // BD , AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$, AN là phân giác của $\widehat{DAC}$*

Bài 10 : Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A .Qua A vẽ hai tia vuông góc với nhau , chúng cắt các đường tròn (O) , (O') lần lượt tại B và C. Xác định vị trí của các tia đó để Δ ABC có diện tích lớn nhất .

Hướng dẫn:*(h.39)*

Kẻ OD ⊥ AB ; O'E ⊥ AC ta có:

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}.2AD.2AE = 2.AD.AE$

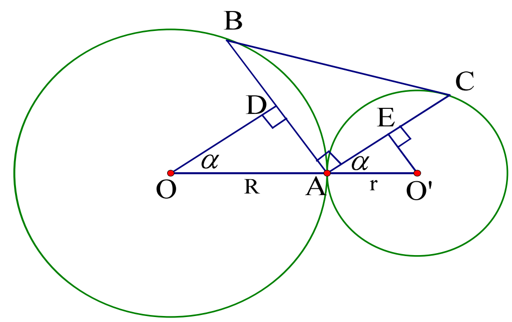
Đặt $OA = R$; $O'A = r$; $\widehat{AOD} = \widehat{O'AE} = \alpha$

$AD = R\sin\alpha$; $AE = r\cos\alpha$

$\Rightarrow S_{ABC} = Rr.\ 2\sin\alpha.\cos\alpha$

$2\sin\alpha.\cos\alpha \le \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\Rightarrow S_{ABC} \le Rr$



h.39

Do đó :

$\max S_{ABC} = Rr \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \sin(90^0 - \alpha) \Leftrightarrow \alpha = 90^0 - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^0$.

Vậy nếu ta vẽ các tia AB,AC lần lượt tạo với các tia AO, AO' thành các góc $\widehat{OAB} = \widehat{O'AC} = 45^0$ *thì Δ ABC có diện tích lớn nhất .*

Bài 11 : Cho đường tròn (O;R) đường kính BC , A là một điểm di động trên đường tròn . Vẽ tam giác đều ABM có A và M nằm cùng phía đối với BC . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C xuống MB. Gọi D, E , F, G theo thứ tự là trung điểm của OC, CM, MH, OH . Xác định vị trí của điểm A để diện tích tứ giác DEFG đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn: *(h.40)*

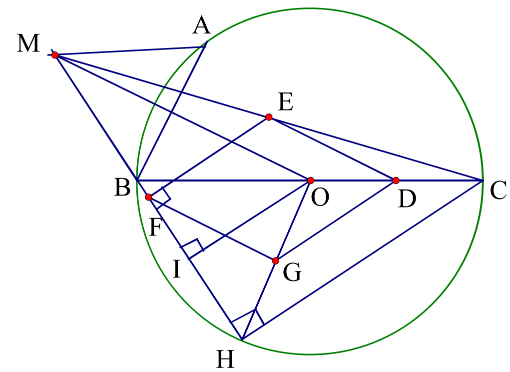
DEFG là hình bình hành.

Kẻ OI ⊥FH , ta có OI là đường trung bình của Δ BHC nên OI = ½ HC = GD

MO là đường trung trực của AB nên $\widehat{IMO} = 30^0 \Rightarrow OI = ½\ OM \Rightarrow GD = ½\ OM$

Mà ED = ½ OM $\Rightarrow$ *EG = GD*

$\Rightarrow$ *DEFG là hình thoi*



h.40

$\widehat{HFG} = \widehat{HMO} = 30^0 \Rightarrow \widehat{EFG} = 60^0 \Rightarrow \Delta EFG$ *đều*

$\Rightarrow S_{DEFG} = 2S_{EFG} = 2.\dfrac{EF^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{EF^2\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{\left(\dfrac{HC}{2}\right)^2\sqrt{3}}{2} \le \dfrac{\left(\dfrac{BC}{2}\right)^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$

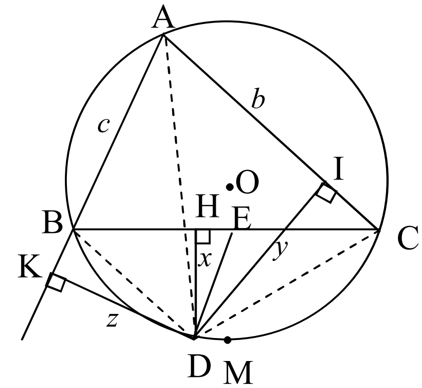
$\max S = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow H \equiv B \Leftrightarrow \widehat{MBC} = 90^0 \Leftrightarrow \widehat{ABC} = 30^0 \Leftrightarrow AC = R.$

Bài 12 : Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) D là điểm bất kỳ thuộc cung BC không chứa A và không trùng với B,C. Gọi H,I,K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến các đường thẳng BC , AC, AB . Đặt BC = a , AC = b ,AB = c, DH = x , DI = y , DK = z .

a) Chứng minh rằng : $\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{a}{x}$

b) Tìm vị trí của điểm D để tổng $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$ nhỏ nhất .

Hướng dẫn: *(h.41)*



h.41

a) Lấy E trên BC sao cho $\widehat{CDE}=\widehat{ADB}$

ΔCDE đồng dạng với Δ ADB

$\Rightarrow \frac{DH}{DK}=\frac{CE}{AB} \Rightarrow \frac{x}{z}=\frac{CE}{c} \Rightarrow \frac{c}{z}=\frac{CE}{x}$

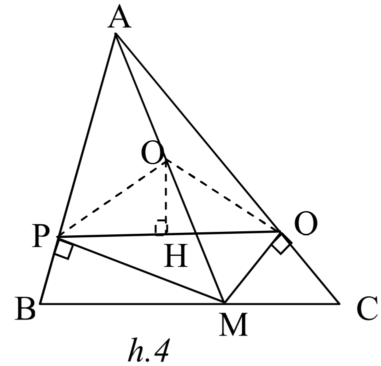
Tương tự ΔBDE đồng dạng với Δ ADC

$\Rightarrow \frac{DH}{DI}=\frac{BE}{AC} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{BE}{b} \Rightarrow \frac{b}{y}=\frac{BE}{x}$

$\Rightarrow \frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{BE+CE}{x}=\frac{a}{x}$

b) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{a}{x}+\frac{a}{x}=\frac{2a}{x}$ *Do đó S nhỏ nhất* $\Leftrightarrow \frac{a}{x}$ *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow$ *x lớn nhất* $\Leftrightarrow$ *D≡M (M là điểm chính giữa của cung BC không chứa A)*

Bài 13 : Cho ΔABC nhọn , điểm M di chuyển trên cạnh BC .Gọi P ,Q là hình chiếu của M trên AB , AC . Xác định vị trí của điểm M để PQ có độ dài nhỏ nhất .



h.4

Hướng dẫn: *(h.42)*

Tứ giác APMQ là tứ giác nội tiếp . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ.

Kẻ OH $\perp$ PQ . Đặt $\widehat{BAC}=\alpha$ *thì* $\widehat{POH}=\alpha$

PQ = 2 PH = 2.OP $\sin\alpha$ *= AM* $\sin\alpha$

Do α không dổi nên

PQ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AM nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AM $\perp$BC.

Bài 14 : Cho đoạn thẳng AB và một điểm C trên AB .Vẽ trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB các nửa đường tròn có đường kính AB,AC,BC . Xác định vị trí của điểm C trên đoạn AB để diện tích phần giới hạn bởi ba nửa đường tròn đó dạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn: *(h.43)*

Gọi $(O_1;r_1);(O_2;r_2);(O_3;r_3)$ là các đường tròn có đường kính là Ab,AC,BC

Đặt $AB = 2a$, $AC = 2x$ thì $r_1 = a$, $r_2 = x$ Suy ra $BC = 2a - 2x$ và $r_3 = a - x$

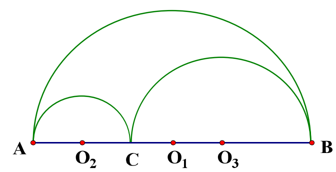
Gọi S là diện tích giới hạn bởi ba đường tròn

Ta có : $S = \dfrac{\pi r_1^2}{2} - \left(\dfrac{\pi r_2^2}{2} + \dfrac{\pi r_3^2}{2}\right) = \dfrac{\pi a^2}{2} - \dfrac{\pi x^2}{2} - \dfrac{\pi(a-x)^2}{2} = \pi x(a-x)$

S lớn nhất $\Leftrightarrow x(a-x)$ *lớn nhất*

Mặt khác $x + (a - x) = a$ *không đổi nên*

$x(a-x)$ *lớn nhất* $\Leftrightarrow x = a - x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow C \equiv O_1$



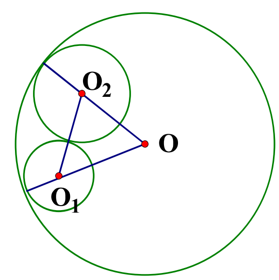
h 4

Lúc đó ta có $S = \dfrac{\pi a^2}{4}$

Bài 15 : Cho đường tròn (O;R) . Trong đường tròn (O) vẽ hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau và tiếp xúc trong với (O) trong đó bán kính đường tròn (O_2) gấp đôi bán kính đường tròn (O_1). Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài các hình tròn (O_1) và(O_2) .

Hướng dẫn:

Gọi x là bán kính đường tròn (O_1) Khi đó 2x là bán kính đường tròn (O_2) (h.44)



h.44

Xét ΔOO_1O_2 ta có : $O_1O_2 \le OO_1 + OO_2$

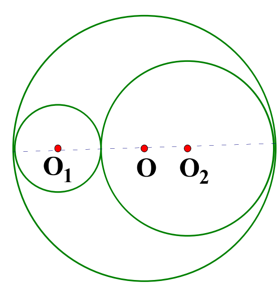
$\Rightarrow 3x \le (R - x) + (R - 2x) \Rightarrow 6x \le 2R \Rightarrow x \le \dfrac{R}{3}$

Gọi S là phần diện tích hình tròn (O) nằm ngoài các đường tròn (O_1)và (O_2) , ta có :

$S = \pi R^2 - \pi x^2 - \pi 4x^2 = \pi\left(R^2 - 5x^2\right)$

Do $x \le \dfrac{R}{3}$ *nên* $x^2 \le \dfrac{R^2}{9} \Rightarrow S \ge \dfrac{4\pi R^2}{9}$;

$\min S = \dfrac{4\pi R^2}{9} \Leftrightarrow x = \dfrac{R}{3}$



h.45

Khi đó O_1,O,O_2 thẳng hàng và bán kính các đường tròn (O_1) và (O_2) là $\dfrac{R}{3}$ và $\dfrac{2R}{3}$ (h.45).

Bài 16: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1 , điểm M nằm trên đường chéo BD .

a) Nêu cách dựng đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với hai cạnh AD và CD. Nêu cách dựng đường tròn (K) đi qua M và tiếp xúc với hai cạnh AB,BC.

b) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường chéo BD thì tổng chu vi hai đường tròn không đổi .

c) Xác định vị trí của điểm M trên BD để tổng diện tích của hai hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất .

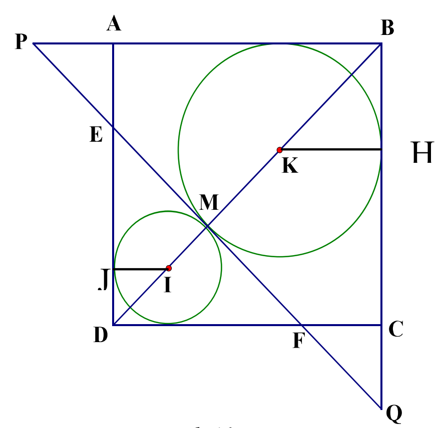
a) Qua M kẻ đường vuông góc với BD cắt AB,BC,CD,DA tại P,Q,F,E .

Do AB,BC tiếp xúc với (K) nên $K \in MB$

$PQ \perp KM$ nên PQ là tiếp tuyến của (K)

Vậy (K) là đường tròn nội tiếp ΔPBQ

Tương tự (I) là đường tròn nội tiếp ΔEDF (2 đ)



h.46

b) Tổng chu vi hai đường tròn (I) và (K) bằng:

$2\pi.IM + 2\pi.MK = 2\pi.IK$

$MD = ID + IM = \sqrt{2}.IJ + IM = \sqrt{2}.IM + IM = (\sqrt{2}+1).IM$

$MB = KB + MK$

$= \sqrt{2}.KH + KM = \sqrt{2}.KM + KM = (\sqrt{2}+1).KM$

$\Rightarrow BD = MD + MB = \left(\sqrt{2}+1\right)\left(IM + MK\right) = \left(\sqrt{2}+1\right)IK$

$\Rightarrow IK = \dfrac{BD}{\sqrt{2}+1} = BD\left(\sqrt{2}-1\right)$ Do $BD = AB\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow IK = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$

Vậy tổng chu vi hai đường tròn bằng $2\pi(2 - \sqrt{2})$ (4 đ)

c) Gọi x và y là bán kính các đường tròn (I) và(K)

Ta có : $x + y = 2 - \sqrt{2}$

Gọi S_1 ,S_2 là diện tích các hình tròn trên

$$S_1 + S_2 = \pi x^2 + \pi y^2 = \pi(x^2 + y^2) \geq \pi\frac{(x+y)^2}{2} = \pi\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2}$$

$S_1 + S_2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow$ M là trung điểm của BD. (4đ)

Bài toán cực trị Phần hình học

I. <u>Một số kiến thức cơ bản</u>.

a) - Ta chứng minh được A ≥ m (m không đổi)

- Có một hình sao cho A = m thì GTNN của A là m

b) Ta chứng minh được A ≤ t (t không đổi)

- Có một hình sao cho A = t thì GTLN của A là t

- Từ đó ta xác định được vị trí của các điểm để đạt được cực trị.

II. Phân loại bài tập và ví dụ minh hoạ :

1) *<u>Tìm cực trị dùng bất đẳng thức trong tam giác</u>*

1.1. *<u>Kiến thức cơ sở:</u>*

- Với 3 điểm A,B ,C bất kỳ ta có : $|AC - BC| \le AB \le AC + BC$

Dấu “ = “ xảy ra ⇔ $C \in [AB]$

- Trong tam giác ABC Có $\angle BAC > \angle ABC \Leftrightarrow BC < AC$

+ Quy tắc n điểm $A_1A_2, \ldots, A_n$

Ta có $A_1A_n \le A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots A_{n-1}A_n$

Dấu "=" xảy ra ⇔$A_1A_2, \ldots, A_n$ thẳng hàng và sắp xếp theo thứ tự đó.

<u>12. Các ví dụ áp dụng :</u>

<u>Ví dụ 1</u> : Cho đường tròn (0; R) , A và B là hai điểm cố định nằm ngoài đường tròn . M là điểm cố định trên đường tròn (0) .

Xác định vị trí của điểm M để diện tích tam giác MAB có giá trị :

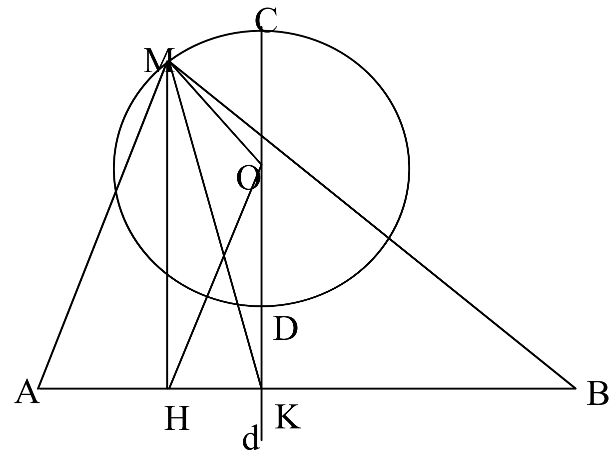
a) Lớn nhất b) nhỏ nhất

<u>Giải</u>

Vẽ đường thẳng d qua 0 và $\perp$ AB tại K

d cắt đường tròn (0) tại C và D

Hạ AH $\perp$ AB



$\Rightarrow S_{MAB} = \dfrac{MH.AB}{2}$

a) Ta có MH $\leq$ MK

Xét 3 điểm M,O ,K ta có MK $\leq$ OM + OK

$\Leftrightarrow$ MK $\leq$ OC + OK $\Leftrightarrow$ MH $\leq$ CK $\Rightarrow S_{MAB} \leq \dfrac{CK.AB}{2}$ (không đổi)

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ H $\equiv$ K $\Leftrightarrow$ M $\equiv$ C

b) Xét 3 điểm M,O ,H ta có MH $\geq |OH - OM|$

Mà OK $\leq$ OH và OK - OM = OK - OD = DK $\Rightarrow$ MH $\geq$ DK

$\Rightarrow S_{MAB} \geq \dfrac{DK.AB}{2}$ (không đổi) Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ M $\in [OH]$

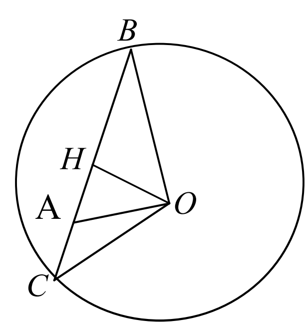
Và M $\equiv$ K $\Leftrightarrow$ M $\equiv$ D

<u>Ví dụ 2</u>: Cho đường tròn (O;R); A là điểm cố định trong đường tròn (A $\neq$ O). Xác định vị trí của điểm B trên đường tròn O sao cho góc OBA lớn nhất.

<u>Giải:</u>

Giả sử có B $\in$ (O). Vẽ dây BC của đường tròn (O) qua A ta có OB = OC = R

=> ΔOBC cân tại O => góc OBC = $\dfrac{180^0 - COB}{2}$



Nên góc $OBA_{max} \Leftrightarrow$ góc COB_{min}.

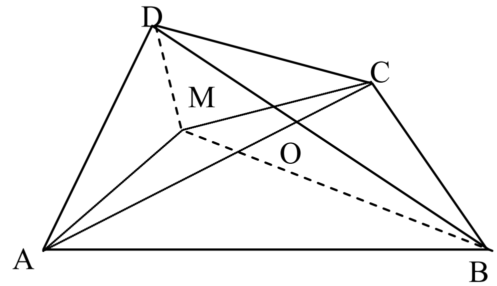
Trong ΔCOB có CO = OB = R không đổi

=> $\angle COB_{\ min} \Leftrightarrow BC_{min} = OH_{max}$

Mà OH $\leq$ OA nên $OH_{max} \Leftrightarrow H \equiv A \Leftrightarrow BC \perp OA$ tại A.

Vậy $OBA_{max} \Leftrightarrow$ B $\in$ (O) sao cho BC $\perp$ OA tại A.

Ví dụ3: : Cho tứ giác lồi ABCD. Tìm điểm M trong tứ giác đó sao cho AM + MB + MC + MD đạt cực trị nhỏ nhất.



Giải:

Với 3 điểm M, A, C ta có: $MA + MC \geq AC$

ta có $MB + MD \geq BD$.

$AM + MB + MC + MD \geq AC + BD$ (không đổi).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} M \in AC \Leftrightarrow M \equiv O \\ M \in BD \end{cases}$

Vậy min $(AM + MB + MC + MD) = AC + BD \Leftrightarrow M \equiv O$

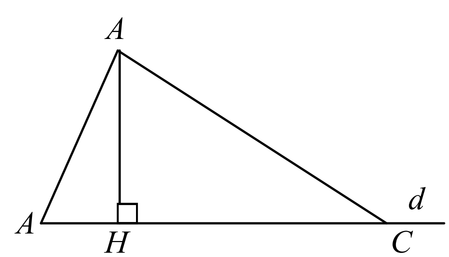
1.3. Bài tập vận dụng:

Bài 1: Cho góc vuông xOy; điểm A thuộc miền trong của góc. Các diểm M, N theo thứ tự chuyển động trên các tia Ox,Oy sao cho góc MAB = 90^0. Xác định vị trí của M, N để MN có độ dài nhỏ nhất.

Bài 2: Cho 2 đường tròn ở ngoài nhau (O;R) và (O';R'). A nằm trên (O), B nằm trên (O'). Xác định vị trí của điểm A,B để đoạn thẳng AB có độ dài lớn nhất.

2 / Tìm cực trị dùng quan hệ giữa đường vuông góc với đường xiên

. ***2.1. Kiến thức cơ sở***



Ta có $AH \perp d$; $A \notin d$; $B, C \in d$

*.$AB \geq AH$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow B \equiv H$

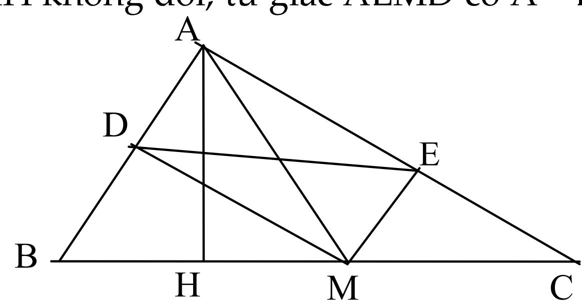
*.$AB \leq AC \Leftrightarrow BH \leq HC$

2.2. Các ví dụ áp dụng

Ví dụ1:: Cho ΔABC ($\hat{A} = 90^0$) M là điểm chuyển động trên cạnh BC. Vẽ $MD \perp AB$; $ME \perp AC$ ($D \in AB$, $E \in AC$). Xác định vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất.

Giải:

Vẽ $AH \perp BC$ ($H \in BC$), H cố định và AH không đổi, tứ giác AEMD có $\hat{A} = \hat{E} = \hat{D} = 90^0$



=> AEMD là hình chữ nhật.

=> DE = AM mà $AM \geq AH$ (không đổi)

(theo t/c đường xiên và đường vuông góc).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$. Vậy khi $M \equiv H$ thì DE nhỏ nhất.

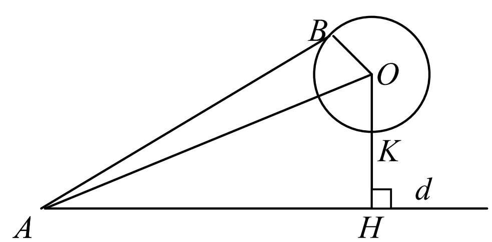
Ví dụ 2 : Cho đường thẳng d và đường tròn (O;R) có khoảng cách từ tâm đến d là $OH \geq R$. Lấy hai điểm bất kỳ $A \in d$; $B \in (O;R)$. Hãy chỉ ra vị trí của A và B sao cho độ dài của AB ngắn nhất? Chứng minh điều đó.

Giải:

Từ tâm (O) kẻ $OH \perp d$, OH cắt đường tròn (O) tại K. Xét ba điểm A. B. O ta có $AB + OB \leq OA$ mà $OA \geq OH$ (quan hệ đường xiên và đường vuông góc).

=> $AB \geq OH - OB = HK$ không đổi

Vậy min $AB = KH \Leftrightarrow \begin{cases} A \equiv H \\ B \equiv K \end{cases}$



2.3.Bài tập vận dụng:

Bài 1: Trên cạnh BC, AC của tam giác đều ABC lấy tương ứng hai điểm M và N sao cho Bạch Mã = CN. Tìm vị trí của M để MN có giá trị lớn nhất.

Bài 2: Cho nửa đường tron (O;R) đường kính AB.M là một điểm trên nửa đường tròn, kẻ MH $\perp$ HB. Xác định vị trí của M để:

a) $S\Delta_{ABC}$ lớn nhất

b) Chu vi của ΔMAB lớn nhất.

3. Tìm cực trị vận dụng bất đẳng thức trong đường tròn.

3.1 Kiến thức cơ sở:

+ Trong một đường tròn: đường kính là dây cung lớn nhất.

+ Dây cung lớn hơn $\Leftrightarrow$ dây đó gần tâm hơn.

+ Cung lớn hơn $\Leftrightarrow$dây trương cung lớn hơn

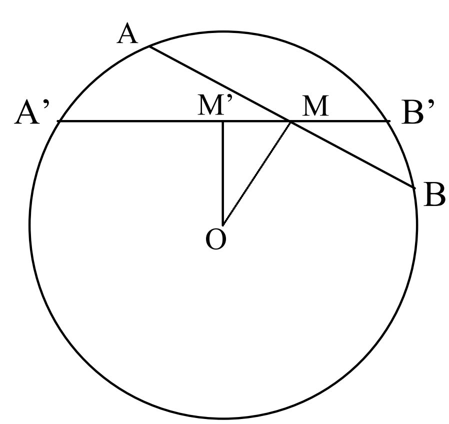
+ Cung lớn hơn $\Leftrightarrow$ góc ở tâm lớn hơn

3.2. Các ví dụ áp dụng :

Ví dụ 1 : Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm trong đường tròn đó (M $\neq$ O). Xác định vị trí của dây cung AB của đường tròn (O) qua M sao cho độ dài AB ngắn nhất.

Giải:

Ta có dây AB $\perp$ OM tại M là dây cung có độ dài nhỏ nhất.



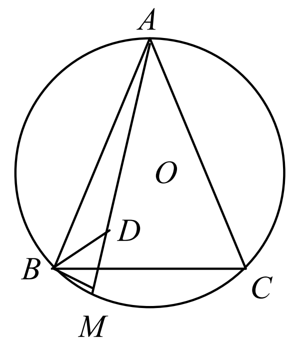
Thật vậy: Qua M vẽ dây A'B' bất kỳ của (O) A'B' không vuông góc với OM. Vẽ OM' $\perp$ A'B'. M' $\in$ A'B'; M' $\neq$ M => OM' $\perp$ MM' => OM > OM'

=> AB < A'B' (theo định lý khoảng cách từ tâm đến dây).

Ví dụ 2: Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn (O;R). M là điểm di động trên đường tròn (O). Xác định vị trí của M để MA + MB + MC đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Ta xét M $\in$ cung BC. Trên MA lấy D sao cho MB = MD. Ta chứng minh được: ΔBMD là tam giác đều.



=> $\hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 60^2$

Mà $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 60^0$ => $\hat{B}_1 = \hat{B}_3$

Chứng minh cho ΔBAD = ΔBCM (gcg)

=> AD = MC

=> MA + MB + MC = MA + MD + DA = 2MA

Mà MA là dây cung của đường tròn (O;R) => MA = 2R

=> max (MA + MB + MC) = 2.2R = 4R $\Leftrightarrow$MA là đường kính của đường tròn (O) $\Leftrightarrow$M là điểm chính giữa của cung BC.

Tương tự ta xét M thuộc cung AB và M thuộc cung AC => M là điểm chính giữa cung AB hoặc cung AC thì MA + MB + MC đạt giá trị lớn nhất.

3.4.Bài tập vận dụng:

Bài 1: Trên cạnh BC, AC của tam giác đều ABC lấy tương ứng hai điểm M và N sao cho BM = CN. Tìm vị trí của M để MN có giá trị lớn nhất.

Bài 2: Cho tứ gác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O;R) cho trước. tìm tứ giác có tổng AB.CD + AD.BC đạt giá trị lớn nhất.

4 . Tìm cực trị dùng bất đẳng thức đại số

4.1. Kiến thức bổ sung :

+ Bất đẳng thức côsi cho hai số không âm: a,b

Ta có: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra ⇔ a= b

+ Bất đẳng thức côsi tổng quát cho n số không âm

$\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$. Dấu "=" xảy ra ⇔ $a_1 = a_2 = ... = a_n$

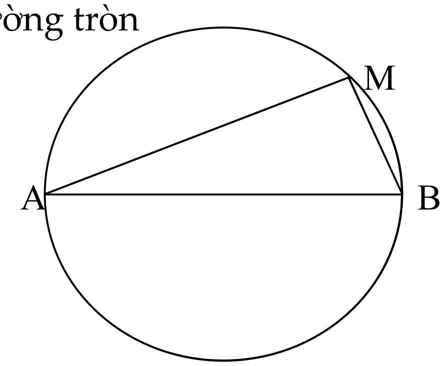
+ Bất đẳng thức Bunhiacôpski

$(ax + by) \leq \sqrt{(a^2 + b^2).(x^2 + y^2)}$. Dấu "=" xảy ra ⇔ $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$.

+ *Và một số bất đẳng thức quen thuộc khác.*

4.2. Các ví dụ áp dụng:

Ví dụ 1 Cho đường tròn (0; R) , đường kính AB , M là điểm chuyển động trên đường tròn . Xác định vị trí của M trên đường tròn để $MA + \sqrt{3}MB$ đạt giá trị lớn nhất



Giải :

Ta có : ∠ AMB = 90^0 (góc nt chắn nửa đ.tròn)

Δ MAB có ∠ M = 90^0 Theo Pitago ta có :

$MA^2 + MB^2 = AB^2 = 4R^2$

áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có

$MA + \sqrt{3}MB \leq \sqrt{(1+3)(MA^2 + MB^2)} = \sqrt{4.4R^2} = 4R$

$\Rightarrow MA + \sqrt{3}MB \leq 4R$

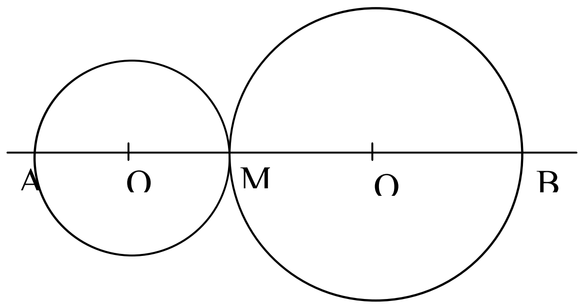
Dấu "=" xảy ra ⇔ $\dfrac{1}{MA} = \dfrac{\sqrt{3}}{MB} \Leftrightarrow \dfrac{MB}{MA} = \sqrt{3}$

⇔ $tg\hat{A} = \dfrac{MB}{MA} = \sqrt{3} = tg60^0$

⇔ $M\hat{A}B = 60^0$ nên $\max(MA + \sqrt{3}.MB) = 4R \Leftrightarrow M\hat{A}B = 60^0$

Ví dụ 2 : Cho đoạn thẳng AB , điểm M di chuyển trên đoạn ấy .Vẽ các đường tròn đường kính MA , MB .Xác định vị trí của M để tổng diện tích của hai hình tròn có giá trị nhỏ nhất .

Giải



Đặt MA =x , MB = y , ta có : x + y = AB (0 < x< y < AB)

Gọi S và S′ thứ tự là diện tích của 2 hình tròn có đường kính là MA và MB

Ta có : $S + S' = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \pi.\frac{x^2+y^2}{4}$

áp dụng BĐT : $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow S + S' \geq \pi . \frac{(x+y)^2}{8} = \pi.\frac{AB^2}{8}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = y Vậy Min (S + S′) = $\pi.\frac{AB^2}{8}$

$\Leftrightarrow$ M là trung điểm của AB

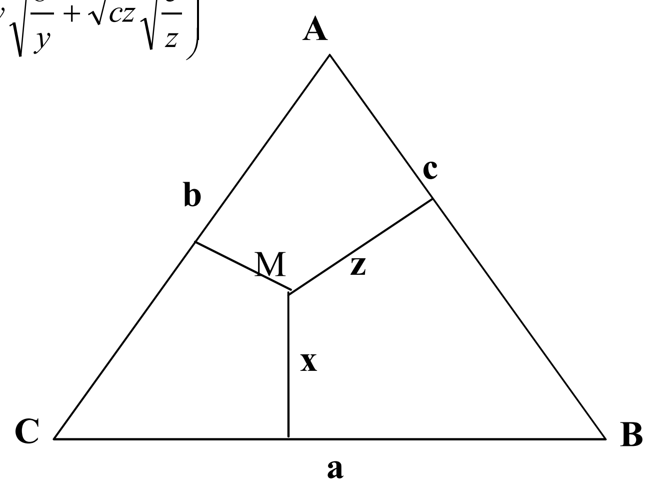
Ví dụ 3 : Cho Δ ABC có BC = a , AC = b , AB = c Tìm điểm M nằm bên trong tam giác ABC sao cho $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$ có giá trị nhỏ nhất . Trong đó x,y,z là khoảng cách từ M đến BC , AC , AB

Giải

Gọi diện tích Δ ABC là S . Ta có ax +by + cz = 2S Không đổi

Ap dụng BĐT Bunhiacopski ta có

$$(ax + by + cz)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) \geq \left(\sqrt{ax}\sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{by}\sqrt{\frac{b}{y}}+\sqrt{cz}\sqrt{\frac{c}{z}}\right)^2$$



$$\Rightarrow (ax + by + cz)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) \geq (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) \geq \frac{(a+b+c)^2}{2S}$$

Vậy $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) = \frac{(a+b+c)^2}{2S}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{\frac{a}{x}}} = \frac{\sqrt{by}}{\sqrt{\frac{b}{y}}} = \frac{\sqrt{cz}}{\sqrt{\frac{c}{z}}} \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow \Delta\ ABC \text{ là tam giác đều}$$

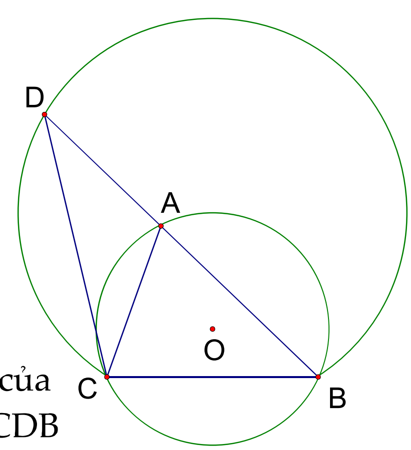
4.3. Các bài tập áp dụng :

Bài 1: Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng a. Trên hai cạnh AB và AD lần lượt lấy 2 điểm M, N sao cho chu ΔAMN = 2a. Tìm vị trí của M và N để $S_{\Delta AMN}$ lớn nhất.

Bài 2: Cho ΔABC ngoại tiếp đường tròn (O;r). Kẻ các tiếp tuyến của đường tròn (O;r) song song với các cạnh của tam giác. Các tiếp tuyến này tạo với các cạnh của tam giác thành 3 tam giác nhỏ có diện tích là S_1, S_2, S_3. Gọi S là diện tích của tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỷ số $\frac{S_1+S_2+S_3}{S}$.

B. Một vài ví dụ

Bài 1: Cho đường tròn (O; R), dây BC cố định. Tìm vị trí của A trên cung lớn BC để tam giác ABC có chu vi lớn nhất.



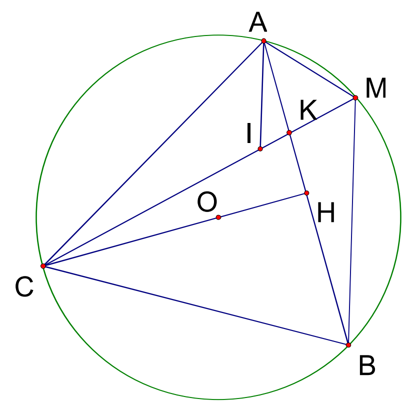
Hướng dẫn:

BC cố định nên góc CAB không đổi, độ dài BC không đổi

Chu vi tam giác ABC chỉ còn phụ thuộc vào AB+AC.

Trên tia đối của tia AB lấy D sao cho AC = AD vậy chu vi của tam giác ABC phụ thuộc vào độ dài của BD hơn nữa góc CDB cũng không đổi hay BD là dây của cung chứa góc $\frac{1}{2}\angle A$ dựng trên BC. Vậy BD lớn nhất bằng đường kính của cung chứa góc $\frac{1}{2}\angle A$ dựng trên BC <=> A là điểm chính giữa của cung lớn BC

Bài 2: Cho đường tròn (O; R) với dây AB cố định sao cho khoảng cách từ O tới AB bằng $\frac{R}{2}$. Gọi H là trung điểm của AB, tia HO cắt đường tròn (O; R) tại C. Trên cung nhỏ AB lấy M tùy ý (khác A, B). Đường thẳng qua A và song song với MB cắt CM tại I. Dậy CM cắt dây Ab tại K.



a) So sánh góc AIM với góc ACB.

b) Chứng minh: $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}=\frac{1}{MK}$.

c) Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MAK và tam giác MBK, hãy xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ AB để tích $R_1.R_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn:

a) $OH=\frac{1}{2}R$ => Nhận xét quan hệ giữa dây và và sđ cung căng dây (Sđ cung AB = 120^0)

Từ đó tìm được quan hệ giữa hai góc AIM và ACB.

b) Thường chuyển về tỉ số các đoạn thẳng

(Cần chứng minh $\frac{MK}{MA}+\frac{MK}{MB}=1$)

Tìm cách quy đồng mẫu vế trái bằng cách chỉ ra các tam giác đồng dạng?

Tam giác chứa hai cạnh MK, MA đồng dạng với tam giác nào? tam giác chứa hai cạnh MK, MB đồng dạng với tam giác nào?

(Tam giác MKA và tam giác MBC đồng dạng $\Rightarrow \frac{MK}{MA}=\frac{MB}{MC}$, tam giác MKB và tam giác MAC đồng dạng $\Rightarrow \frac{MK}{MB}=\frac{MA}{MC}$

Vậy $\frac{MK}{MA}+\frac{MK}{MB}=\frac{MA+MB}{MC}$

do đó ta phải chứng minh MA+MB = MC

c) Để tìm giá trị lớn nhất của tích $R_1.R_2$, ta tìm mối liên hệ của tổng R_1+R_2 với các yếu tố không đổi của bài toán

Để ý hai tam giác AMK, BMK có hai góc AMK, BMK không đổi (= 60^0), tổng hai cạnh đối diện không đổi. (dùng công thức $R = \dfrac{a}{2\sin A}$)

Lời Giải sơ lược:

a) Xét tam giác AOH có CosO = $\dfrac{OH}{OA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \angle AOH = 60^0$

$\Rightarrow \angle AOB = 120^0 \Rightarrow$ sđ cung $AB = 120^0 \Rightarrow \angle ACB = 60^0$

Tam giác ABC có đường cao CH đồng thời là trung tuyến. Vậy tam giác ABC đều $\Rightarrow \angle ACB = 60^0$

AI // MB => góc AIM = góc CMB = góc CAB = 60^0

Vậy góc AIM = góc ACB.

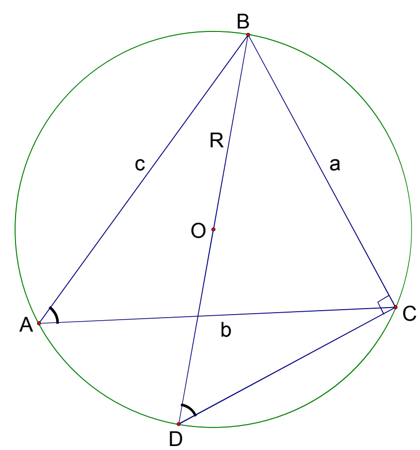
b) Tam giác AIM đều (có hai góc bằng 60^0) => AM = MI.

$\Delta AIC = \Delta AMB\,(c-g-c) \Rightarrow CI = MB$

ΔMKA và ΔMBC đồng dạng nên $\dfrac{MK}{MA} = \dfrac{MB}{MC}$

ΔMKB và ΔMAC đồng dạng nên $\dfrac{MK}{MB} = \dfrac{MA}{MC}$

Vậy: $\dfrac{MK}{MA} + \dfrac{MK}{MB} = \dfrac{MB}{MC} + \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MB+MA}{MC} = 1$ hay $\dfrac{1}{MA} + \dfrac{1}{MB} = \dfrac{1}{MK}$.



Bổ đề: Trong tam giác ABC:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

CM:

Vẽ đường kính BD => góc A = góc D

Xét tam giác vuông BCD

BD = $\dfrac{BC}{\sin D}$ ***hay*** $2R = \dfrac{a}{\sin A}$ ***tương tự ta cm được*** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

c) Áp dụng bổ đề ta được:

Trong tam giác AKM: $R_1 = \dfrac{AK}{2\sin M} = \dfrac{AK}{2\sin 60^0} = \dfrac{AK}{\sqrt{3}}$

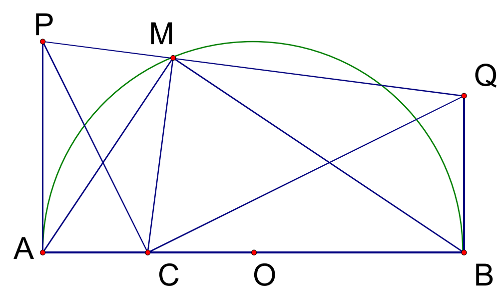
Trong tam giác BKM: $R_2 = \dfrac{BK}{2\sin M} = \dfrac{BK}{2\sin 60^0} = \dfrac{BK}{\sqrt{3}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho 2 số không âm R_1, R_2 có:

$\sqrt{R_1R_2} \le \frac{R_1+R_2}{2} = \frac{AK+BK}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}R}{2\sqrt{3}} = \frac{R}{2} = hs$ dấu bằng khi $R_1=R_2 \Leftrightarrow AK = BK \Leftrightarrow$ M là điểm chính giữa của cung AB.

Vậy $R_1R_{2\,max} = \frac{R^2}{4}$ khi M là điểm chính giữa của cung AB.

Bài 3: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R, lấy C là trung điểm của AO. Kẻ hai tia Ax và By vuông góc với AB và ở cùng một phía với nửa đường tròn. Điểm M di động trên nửa đường tròn (M khác A, B). Một đường thẳng vuông góc với CM tại M cắt Ax ở P, cắt By ở Q. Tìm vị trí của điểm M trên nửa đường tròn để tứ giác APQB có diện tích nhỏ nhất. Tìm giá trị diện tích nhỏ nhất đó.



Phương hướng:

Hình thang ABQP có đường cao không đổi do đó diện tích của nó nhỏ nhất ⇔ AP+BQ nhỏ nhất. Ta đi chứng minh tích AP. BQ không đổi

Muốn vậy chỉ ra AP và BQ là cạnh không tương ứng của hai tam giác đồng dạng.

Gợi ý: Tứ giác APMC, BQMC nội tiếp => Hãy chỉ ra các cặp góc bằng nhau. (liên hệ giữa các góc với các đường tròn)

Lời giải sơ lược:

Tứ giác APMC nội tiếp => góc PCA = góc PMA

Có góc AMB vuông => góc PMA + góc BMQ = 90^0

Tứ giác BQMC nội tiếp => góc BMQ = góc BCQ.

Có góc CAQ vuông => góc BCQ + góc BQC = 90^0.

Vậy: góc PCA = góc BQC

Do đó tam giác APC và tam giác BCQ đồng dạng $\Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{BC}{BQ} \Rightarrow AP.BQ = AC.BC$

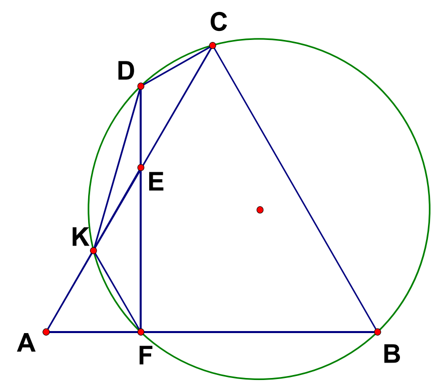
$= \frac{R}{2}.\frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4} = hs$.

Áp dụng bất đẳng thức Cosi : $\frac{AP+BQ}{2} \ge \sqrt{AP.BQ} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ dấu bằng khi AP = BQ ⇔ CM vuông góc với AB

Hay $S_{ABQP} = \frac{1}{2}AB(AP+BQ)_{min} = \frac{1}{2}.2R.\sqrt{3}R = \sqrt{3}R^2$ khi sđ cung AM = 60^0.

Bài 4: Cho tam giác đều ABC, E là một điểm trên cạnh AC (E khác A), K là trung điểm của đoạn AE. Đường thẳng EF đi qua E và vuông góc với đường thẳng AB (F thuộc AB) cắt đường thẳng đi qua C và vuông góc với đường thẳng BC tại D. Xác định vị trí của E sao cho đoạn KD có độ dài nhỏ nhất.

Hướng dẫn:



Khai thác Tam giác ABC đều, tam giác AEF vuông, K là trung điểm AE, góc DCB vuông.

=> 5 điểm B, C, D, K, F cùng thuộc một đường tròn

=> KD là một dây cung .

sđ cung DK không đổi. Do đó: KD nhỏ nhất ⇔ bán kính nhỏ nhất.

Lời giải sơ lược:

Tam giác AEF vuông tại F, góc A = 60^0, FK là trung tuyến ứng với cạnh huyền => Tam giác AKF đều => góc FKC = 120^0.

Vậy Tứ giác BCKF nội tiếp.

Tứ giác BCDF có góc F = góc C = 90^0

Vậy Tứ giác BCDF nội tiếp hay 5 điểm B, C, D, K, F cùng thuộc một đường tròn đường kính BD.

sđ cung DK = 2 góc DFK = 60^0 => KD = $\frac{1}{2}$ DB $\le \frac{1}{2}CB$ dấu bằng khi E trùng với C

Vậy KD $_{min}$ = $\frac{1}{2}CB$ khi E $\equiv$C.

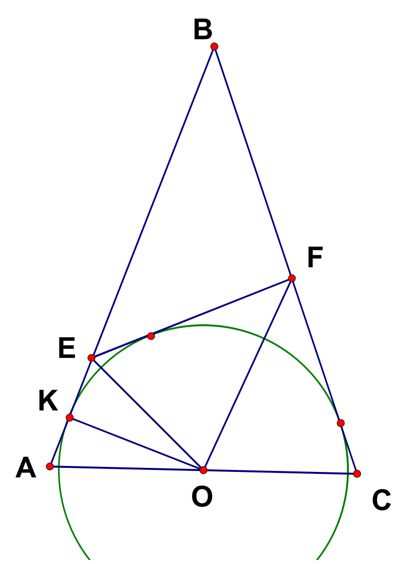
Bài 5: Cho tam giác ABC cân ở B có góc ABC bằng β, O là trung điểm của cạnh AC, K là chân đường vuông góc hạ từ O xuống cạnh AB, (ω) là đường tròn tâm O bán kính OK. E là một điểm thay đổi trên cạnh BA sao cho góc AOE bằng α ($20^0 < \alpha < 90^0$). F là điểm trên cạnh BC sao cho EF tiếp xúc với (ω). Tìm α để AE + CF nhỏ nhất.

Gợi ý:

Để Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng, ta đi chứng minh tích không đổi

Nhận xét quan hệ của hai tam giác AEO và OEF?

(Sử dụng tính chất tiếp tuyến, tổng các góc của tứ giác, tam giác)



Lời giải sơ lược:

Trong tam giác OEF:

$$\angle EOF = 180^0 - \angle OEF - \angle OFE = 180^0 - \frac{1}{2}\angle AEF - \frac{1}{2}\angle CFE$$

Trong tứ giác AEFC: $\angle AEF + \angle AFE = 360^0 - (\angle A + \angle C) = 360^0 - (180^0 - \beta)$
$=180^0 + \beta$

Vậy: $\angle EOF = 90^0 - \frac{1}{2}\beta$

Tam giác ABC cân => $\angle A = \angle C = \frac{1}{2}(180^0 - \beta)$

$= 90^0 - \frac{1}{2}\beta$

Vậy: $\angle EOF = \angle A = \angle C$

=> tam giác AEO và tam giác OEF đồng dạng,

Tam giác OEF và tam giác COF đồng dạng

Vậy tam giác AEO và tam giác COF đồng dạng.

$\Rightarrow \frac{AE}{AO} = \frac{CO}{CF} \Rightarrow AE.CF = AO.CO = hs$

áp dụng bất đẳng thức Cosi: $AE + CF \geq 2\sqrt{AE.AF} = 2\sqrt{AO.CO} = hs$ dấu bằng khi $AE = CF \Leftrightarrow$ tam giác OEF cân tại O $\Leftrightarrow$ tam giác AEO cân tại A $\Leftrightarrow \angle AOE = 90^0 - \frac{1}{2}\angle A = 90^0 - \frac{1}{2}(90^0 - \frac{1}{2}\beta) = 45^0 + \frac{1}{4}\beta$

Vậy khi $\angle AOE = 45^0 + \frac{1}{4}\beta$ thì AE + CF nhỏ nhất

Bài 6: Cho hai đường tròn$(O_1; r_1)$ và $(O_2; r_2)$ cắt nhau tại hai điểm A và B. Biết rằng $r_1 = 1$ cm; $r_2 = 2$ cm; AB = 1 cm và hai điểm O_1, O_2 ở hai phái của đường thẳng AB. Xét đường thẳng (d) đi qua A, cắt $(O_1; r_1)$ và $(O_2; r_2)$ lầm lượt tại các điểm M và N sao cho A nằm trong đoạn MN. Tiếp tuyến của $(O_1; r_1)$ tại M và tiếp tuyến của $(O_2; r_2)$ tại N cắt nhau tại điểm E.

a) Chứng minh tứ giác EMBN là tứ giác nội tiếp.

b) Tính O_1O_2

b) Tìm giá trị lớn nhất của 2EM + EN

Hướng dẫn:

a) sử dụng quan hệ giữa góc nội tiếp, góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung với số đo cung, lưu ý quan hệ về số đo cung của hai dường tròn.

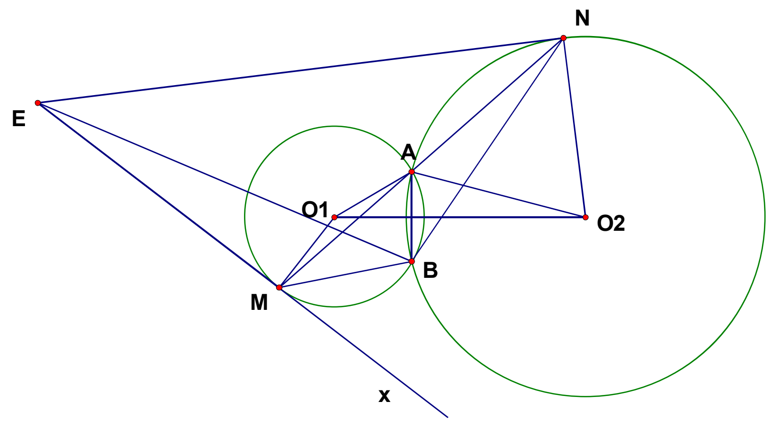
c) Vấn đề ở đây là vai trò không đối xứng của ME và EN. Cần tìm một sự tương ứng: 2.EM với 1.EN. Ta lại thấy hai bán kính của đường tròn cũng có sự tương ứng đó. Ta đi tìm những tam giác đồng dạng để chuyển đổi sự tương ứng ấy.

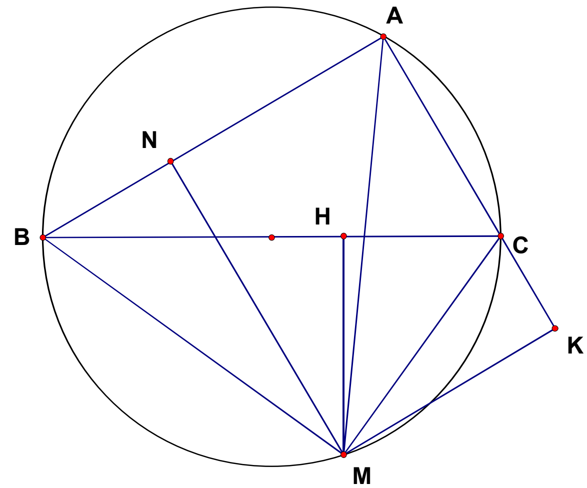
Lời giải sơ lược:

a) $\angle ABN = \angle ANE; \angle ABM = \angle AME \Rightarrow \angle MBN = \angle EMN + ENM = 180^0 - \angle MEN$

Vậy $\angle MBN + \angle MEN = 180^0$ => Tứ giác EMBN nội tiếp.

b) $O_1O_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{15})$





c) $\Delta O_1O_2A; \Delta MNB$ đồng dạng => $\frac{BN}{BM} = \frac{AO_2}{AO_1} = 2$ (

Vì R_1=1 cm, R_2 = 2 cm) => BN = 2BM

ΔEMB và ΔNAB đồng dạng $\Rightarrow \frac{EM}{MB} = \frac{AN}{AB} \Rightarrow$ EM = MB.AN (Vì AB = 1 cm)

Tương tự ta cũng chỉ ra EN = NB.AM

Vậy 2.EM + EN = 2.MB.AN + NB.AM = 2. MB. AN + 2.MB.AM = 2.MB.(AM + AN) = 2MB.MN

Lại có ΔMBN và ΔO_1AO_2 đồng dạng theo tỉ số $\frac{MN}{O_1O_2} = \frac{MB}{r_1} \le 2$ Vậy:

$2MB.MN \le 2.2r_1.2O_1O_2$

$= 8.\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{15}) = 4(\sqrt{3}+\sqrt{15})$ dấu bằng khi MB = $2r_1$ hay M đối xứng với B qua O_1.

Bài 7: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn O và D là điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A. Xác định vị trí của D sao cho DA + DB + DC lớn nhất.

Hướng dẫn: Tương tự bài 2.Ta chứng minh được DA = DB + DC

Bài 8: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B sao cho hai tâm O và O' nằm về hai phía khác nhau đối với đường thẳng AB. Đường thẳng (d) quay quanh B cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và D (C khác A, B và D khác A, B). Xác định vị trí của (d) sao cho đoạn thẳng CD có độ dài lớn nhất.

Bài này quá dễ, bạn có thể tự làm.

Bài 9: Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O). M là điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A. Gọi N, H, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, CA. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{BC}{MH} + \frac{AB}{MN} + \frac{AC}{MK}$

Gợi ý:

Hãy tìm cách rút gọn biểu thức:

$\frac{BC}{MH}+\frac{AB}{MN}+\frac{AC}{MK}$ bằng cách chuyển các tỉ số trên thành các tỉ số có cùng mẫu

Lời giải sơ lược:

Nhận thấy: Nếu K nằm ngoài AC thì N nằm trong AB.

$\frac{AB}{MN}=\frac{BN}{MN}+\frac{AN}{MN}$

$\frac{AC}{MK}=\frac{AK}{MK}-\frac{CK}{MK}$

Tam giác MCK và tam giác MBN đồng dạng => $\frac{BN}{MN}=\frac{CK}{MK}$

Tam giác MAK và tam giác MBH đồng dạng $\Rightarrow \frac{AK}{MK}=\frac{BH}{MH}$

Tam giác MAN và tam giác MCH đồng dạng $\Rightarrow \frac{AN}{MN}=\frac{CH}{HM}$

Vậy: $\frac{BC}{MH}+\frac{AB}{MN}+\frac{AC}{MK}=\frac{BC}{MH}+\frac{CH}{MH}+\frac{BH}{MH}=2\frac{BC}{MH}$

Vậy $\frac{BC}{MH}+\frac{AB}{MN}+\frac{AC}{MK}$ nhỏ nhất ⇔ MH lớn nhất ⇔ MH = R ⇔ M là điểm chính giữa của cung BC.

C. Một vài ví dụ tự giải

Bài 11: Cho đường tròn (O; R) đường kính AB, điểm M di động trên đường tròn sao cho $MA \leq MB$. Trong tam giác AMB kẻ đường cao MH. Gọi r_1, r_2, r_3 theo thứ tự là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác AMB, AMH và BMH. Hãy xác định vị trí của M để tổng: $r_1+r_2+r_3$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 12: Cho tam giác ABC có góc A = 30^0, AB = c, AC = b, M là trung điểm của BC. Một đường thẳng (d) quay xung quanh trọng tâm G của tam giác ABC sao cho (d) cắt đoạn AB tại P và (d) cắt đoạn AC tại Q.

a) Đặt AP = x, hãy tìm tập hợp các giá trị của x.

b) Tính giá trị của biểu thức $\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}$.

c) Hãy tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của diện tích tam giác APQ theo b, c.

Bài 13: cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R và M là một điểm thuộc nửa đường tròn (khác A và B). Tiếp tuyến của (O) tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của

---

đường tròn (O) lần lượt tại các điểm C và D. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACM và BDM.

Bài 14: Cho đường tròn (O) và dây BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC của đường tròn (O), (A khác B và C). Tia phân giác của góc ACB cắt đường tròn (O) tại D khác C, lấy I thuộc đoạn CD sao cho DI = DB. Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại điểm K khác B.
a) Chứng minh tam giác KAC cân.
b) Xác định vị trí của A để độ dài đoạn AI là lớn nhất.

Bài 15: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O; R) . Điểm M lưu động trên cung nhỏ BC. Từ M kẻ các đường thẳng MH, MK lần lượt vuông góc với AB, AC (H thuộc đường thẳng AB, K thuộc đường thẳng AC). Tìm vị trí của M để độ dài đoạn HK lớn nhất.

Bài 16: Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2; R_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Đường thẳng (d) đi qua A cắt đường tròn (O_1, R_1) tại M và cắt đường tròn (O_2; R_2) tại N (các điểm M, N khác A).
Xác định vị trí của đường thẳng (d) để độ dài đoạn thẳng MN lớn nhất.

Bài 17: Đường tròn tâm O có dây AB cố định và I là điểm chính giữa của cung lớn AB. Lấy điểm M bất kì trên cung lớn AB, dựng tia Ax vuông góc với đường thẳng MI tại H và cắt BM tại C.
a) Chứng minh các tam giác AIB và AMC là các tam giác cân.
b) Khi M di động trên cung lớn AB chứng minh rằng điểm C di động trên một cung tròn cố định.
c) Xác định vị trí của điểm M để chu vi tam giác AMC đạt giá trị lớn nhất.

Bài 18: Cho tam giác nhọn ABC. Điểm D di động trên cạnh BC. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACD tương ứng.
a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AO_1O_2 luôn đi qua một điểm cố định khác A.
b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AO_1O_2. Hãy xác định vị trí của D trên BC sao cho IO nhỏ nhất.

Bài 19: Chi nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Gọi C là điểm tùy ý trên nửa đường tròn, D là hình chiếu vuông góc của C trên AB. Tia phân giác của ACD cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai là E, cắt tia phân giác góc ABC tại H.

a) Chứng minh AE // BH.

b) Tia phân giác góc CAB cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai là F, cắt CE tại I. Tính diện tích tam giác FID trong trường hợp tam giác đó là đều.

c) Trên đoạn BH lấy K sao cho HK = HD, gọi J là giao của AF và BH. Xác định vị trí của C để tổng khoảng cách từ các điểm I, J, K đến đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất.

Bài 20: Cho đường tròn tâm O, bán kính R và dây BC <2R, các tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau tại A. M là điểm bất kì trên cung nhỏ BC và không trùng với B, C. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. BM cắt HK tại P, CM cắt HI tại Q.

a) Chứng minh PQ // BC.

b) Xác định vị trí của M để tích MH.MI.MK đạt giá trị lớn nhất.