

Thời gian 120 phút (Học sinh làm vào tờ giấy thi)

Phần I. Trắc nghiệm điền khuyết (25 điểm)

Câu 1. Cho $A = \frac{(x+5y)(x-5y)}{x^2+y^2} \left(\frac{5x-y}{x^2+5xy} + \frac{5x+y}{x^2-5xy} \right)$

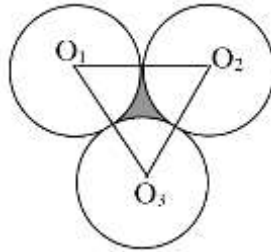
Với $x = 0,987654321$; $y = 0,123456789$ thì giá trị của A là: ...

Câu 2. Giá trị của các biểu thức $P_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2022} + x^{2023}$ tại $x = 0,53241$ là ...

Câu 3. Hai chữ số cuối cùng của số $A = 2^{2023} + 2^{2024} + 2^{2025}$ là: ...

Câu 4. Dãy số u_n cho bởi
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$
. Số hạng thứ 20 của dãy là: ...

Câu 5. Ba đường tròn có cùng bán kính 3 cm đôi một tiếp xúc ngoài (Hình vẽ). Diện tích phần xen giữa ba đường tròn đó là: ...



Phần II. Tự luận (75 điểm)

Bài 1. Cho đa thức $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Biết $P(1) = 1; P(2) = 4; P(3) = 9; P(4) = 16; P(5) = 25$. Tính $P(6); P(7); P(8); P(9) = ?$

Bài 2. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $\frac{xyzt + xy + xt + zt + 1}{yzt + y + t} = \frac{157}{68}$

Bài 3. Xét dãy số
$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 1; \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng số $A = 4a_n \cdot a_{n+2} + 1$ là số chính phương.

Bài 4. Cho tam giác ABC , đường cao $BD = 6\text{cm}$, đường trung tuyến $CE = 5\text{cm}$. Khoảng cách từ giao điểm BD với CE đến AC là 1cm. Tính cạnh AB ?

Bài 5. Thầy T mua chung cư mini theo phương thức trả góp 800 000 000 đồng (tám trăm triệu đồng). Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất, thầy T trả 6 000 000 đồng (sáu triệu đồng) và chịu lãi suất số tiền chưa trả là 0,5%/tháng thì sau bao nhiêu tháng thầy T sẽ trả hết số tiền trên.

----- Hết đề -----

Phần I. Trắc nghiệm điền khuyết (25 điểm)

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1	$A = 10,125$	5,0
Câu 2	- Áp dụng hằng đẳng thức: $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. Ta có $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2022} + x^{2023}$ $= \frac{x - 1}{x - 1} (1 + x + x^2 + \dots + x^{2023}) = \frac{x^{2024} - 1}{x - 1}$ Từ đó tính $P(0,53241) = 2,138625719$	5,0
Câu 3	Ta có $2^{20} \equiv 76 \pmod{100} \Rightarrow 2^{20 \cdot 100} \equiv 76^{100} \equiv 76 \pmod{100}$ $\Rightarrow 2^{2023} = 2^{2000} \cdot 2^{23} \equiv 76 \cdot 2^{23} \equiv 8 \pmod{100}$ Tương tự $2^{2024} \equiv 16 \pmod{100}$ $2^{2025} \equiv 32 \pmod{100}$ $\Rightarrow A = 2^{2023} + 2^{2024} + 2^{2025} \equiv 8 + 16 + 32 \pmod{100}$ $\Rightarrow A = 2^{2023} + 2^{2024} + 2^{2025} \equiv 56 \pmod{100}$ Vậy hai chữ số tận cùng của A là 56	5,0
Câu 4	$u_{20} = 1,414213562$	5,0
Câu 5	$S_{\text{gạch xọc}} = S_{O_1O_2O_3} - 3S_{\text{quạt}}$ Tam giác $O_1O_2O_3$ đều, cạnh bằng 1 nên: $S_{\text{quạt}} = \frac{\pi R^2 a}{360} = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 60}{360} = \frac{3\pi}{2} S_{\Delta O_1O_2O_3} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ $\Rightarrow S_{\text{gạch xọc}} = S_{O_1O_2O_3} - 3S_{\text{quạt}}$ $= 9\sqrt{3} - \frac{9\pi}{2} = \frac{18\sqrt{3} - 9\pi}{2} \approx 1,451290327$	5,0

Phần II. Tự luận (75 điểm)

Bài	Nội dung cần đạt	Điểm
Bài 1 (15 điểm)	Đặt $Q(x) = P(x) + H(x)$ sao cho: + Bậc $H(x)$ nhỏ hơn bậc của $P(x)$ + Bậc của $H(x)$ nhỏ hơn số giá trị đã biết của $P(x)$, trong bài bậc $H(x)$ nhỏ hơn 5, nghĩa là $Q(x) = P(x) + a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e$	3

	<p>Tìm a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 để $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = 0$, tức là:</p> $\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + 1 = 0 \\ 16a_1 + 8b_1 + 4c_1 + 2d_1 + e_1 + 4 = 0 \\ 81a_1 + 27b_1 + 9c_1 + 3d_1 + e_1 + 9 = 0 \\ 256a_1 + 64b_1 + 16c_1 + 4d_1 + e_1 + 16 = 0 \\ 625a_1 + 125b_1 + 25c_1 + 5d_1 + e_1 + 25 = 0 \end{cases}$ <p>$\Rightarrow a_1 = b_1 = d_1 = e_1 = 0; c_1 = -1$</p> <p>Vậy ta có: $Q(x) = P(x) - x^2$</p>	3
	<p>Vì $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4, x = 5$ là nghiệm của $Q(x)$, mà bậc của $Q(x)$ bằng 5 có hệ số của x^5 bằng 1 nên:</p> $Q(x) = P(x) - x^2 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ $\Rightarrow P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + x^2.$ <p>Từ đó tính được $P(6) = 156; P(7) = 769; P(8) = 2594; P(9) = 6801$</p>	4
		5
Bài 2 (15 điểm)	$\frac{157}{68} = \frac{xyzt + xy + xt + zt + 1}{yzt + y + t} = x + \frac{1}{y + \frac{1}{z + \frac{1}{t}}}$	6
	<p>Mà $\frac{157}{68} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}$</p>	5
	<p>Vậy $x = 2; y = 3; z = 4; t = 5$</p>	4
Bài 3 (15 điểm)	<p>Từ kết quả tìm được một số hạng đầu của dãy, ta thấy:</p> <p>- Với $n = 1$ thì $A = 4a_1 \cdot a_3 + 1 = 4 \cdot 1 \cdot 6 + 1 = 25 = 2a_2 - 1^2$</p>	3
	<p>- Với $n = 2$ thì $A = 4a_2 \cdot a_4 + 1 = 4 \cdot 3 \cdot 10 + 1 = 121 = 2a_3 - 1^2$</p>	3
	<p>- Với $n = 3$ thì $A = 4a_3 \cdot a_5 + 1 = 4 \cdot 6 \cdot 15 + 1 = 361 = 2a_4 - 1^2$</p>	3
	<p>Từ đó ta chứng minh được $A = 4a_n \cdot a_{n+2} + 1 = 2a_{n+1} - 1^2$ *</p>	6
Bài 4	Hình vẽ	0

(15 điểm)		
	<p>Kẻ $EK \perp BD \Rightarrow KB = KD = 3 \text{ cm}$ mà $DI = 1 \text{ cm} \Rightarrow IK = 2 \text{ cm}$.</p> <p>Vì $\triangle DIC \sim \triangle KIE$ g.g $\Rightarrow \frac{EI}{CI} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{EI}{EI + CI} = \frac{2}{3} \Rightarrow EI = \frac{10}{3} \text{ cm}$</p>	6
	<p>Áp dụng định lý Pythagore $KE = \sqrt{EI^2 - KI^2} = \frac{8}{3} \text{ cm}$</p> <p>Suy ra $AD = 2KE = \frac{16}{3} \text{ cm}$</p>	4
	<p>Ta có $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 + 6^2} = 8,027729719 \text{ cm}$</p>	5
Bài 5 (15 điểm)	<p>Gọi tổng số tiền thầy V cần trả là N (triệu đồng) Số tiền thầy V trả trong một tháng là a (triệu đồng) Lãi suất ngân hàng là m%/ tháng. Cuối tháng thứ 1, thầy V còn nợ ngân hàng $u_1 = N(1 + m\%) - a$</p>	3
	<p>Cuối tháng thứ 2, thầy V còn nợ ngân hàng: $u_2 = u_1 \cdot m\% + 1 - a$</p> $u_2 = N(1 + m\%) \cdot m\% + 1 - a = N \cdot m\% + 1^2 - a$ <p>Cuối tháng thứ 3, thầy V còn nợ ngân hàng: $u_3 = u_2 \cdot m\% + 1 - a$</p> $u_3 = \left[N \cdot m\% + 1^2 - a \right] \cdot m\% + 1 - a = N \cdot m\% + 1^3 - a \cdot m\% + 1 - a$	3
	<p>Như thế: cuối tháng thứ n thầy T còn nợ ngân hàng là:</p> $u_n = N \cdot m\% + 1^n - a \cdot m\% + 1^{n-1} - a \cdot m\% + 1^{n-2} - \dots - a \cdot m\% + 1 - a$ $u_n = N \cdot m\% + 1^n - a \left[m\% + 1^{n-1} + m\% + 1^{n-2} + \dots + m\% + 1 + 1 \right]$ $u_n = N \cdot m\% + 1^n - a \frac{m\% + 1^n - 1}{m\% + 1 - 1}$	4
	<p>Để thầy T trả hết nợ thì $u_n = 0 \Rightarrow N \cdot m\% + 1^n - a \frac{m\% + 1^n - 1}{m\%} = 0$</p> <p>Thay số ta được $800 \cdot 0,5\% + 1^n - 6 \cdot \frac{0,5\% + 1^n - 1}{0,5\%} = 0$</p> <p>Từ đó: $n = 221$ (tháng)</p>	5

