Trường THPT Ngô Quyền

KỲ THI ĐÁNH GIÁ NĂNG LỰC
ĐÁP ÁN PHẦN TƯ DUY ĐỊNH LƯỢNG (CÁC CÂU HỎI ĐIỀN ĐÁP ÁN)
Khoá ngày 19/2/2023

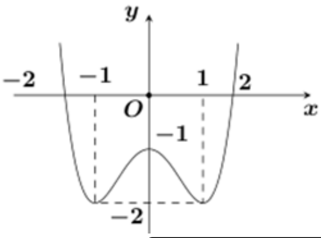
Câu 1. Hệ phương trình $\begin{cases} y^2+2xy-3=0 \\ 2|x|-x^2=0 \end{cases}$ có tất cả bao nhiêu cặp nghiệm?

Đáp án :

Lời giải

Từ phương trình (2) suy ra $x=0$ hoặc $x=\pm 2$.
Thay $x=0$ vào phương trình (1) ta được $y=\pm\sqrt{3}$.
Thay $x=2$ và $x=-2$ vào phương trình (1) ta đều được hai nghiệm
(do $ac<0$).
Vậy hệ có 6 nghiệm.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình bên. Hỏi phương trình $f(f(x))=-1$ có bao nhiêu nghiệm?



Đáp án :

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có
$f(f(x))=-1 \Leftrightarrow f(x)=a\in(-2;-1)$, $f(x)=0$, $f(x)=b\in(1;2)$.
Tiếp tục từ đồ thị ta thấy các phương trình $f(x)=a$, $f(x)=0$, $f(x)=b$
lần lượt có 4, 2, 2 nghiệm.
Do đó phương trình đã cho có 8 nghiệm.

Câu 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+\dfrac{16}{x}$ trên $(0;+\infty)$ bằng bao nhiêu?

Đáp án :

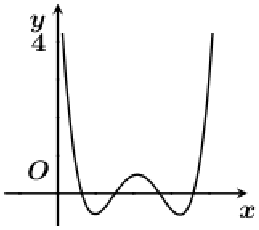
Lời giải

Ta có $y'=2x-\dfrac{16}{x^2}=\dfrac{2x^3-16}{x^2}$; $y'=0 \Leftrightarrow x=2$.
Bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y = y(2)=12$.

Câu 4. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=\left|f(x-1)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Đáp án :

Lời giải

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang phải một đơn vị ta thu được đồ thị hàm số $y=f(x-1)$. Do đó

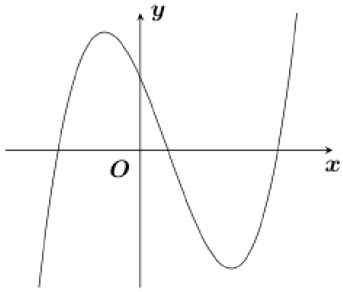
Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x-1)$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$ bằng 3.

Số nghiệm của phương trình $f(x-1)=0$ bằng số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ và bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox bằng 4.

Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x-1)\right|$ bằng tổng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x-1)$ và số nghiệm đơn của phương trình $f(x-1)=0$.

Do đó hàm số $y=\left|f(x-1)\right|$ có $3+4=7$ điểm cực trị.

Câu 5. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d?



Đáp án :

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số đã cho có bậc ba, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên $a>0$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Lại có $y'=3ax^2+2bx+c$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 trái dấu nên

$3ac<0\Rightarrow c<0$. Mặt khác ta cũng thấy $x_1+x_2>0\Leftrightarrow -\dfrac{2b}{3a}>0\Leftrightarrow ab<0\Rightarrow b<0$.

Vậy có 2 số dương là a và d.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m+1)x^2+(3-m)x+2$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong đoạn $\left[-10;10\right]$ để hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

Đáp án :

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D}=\mathbb{R}$, ta có $y'=3x^2-2(2m+1)x+3-m$.

Hàm số $y=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f(x)$ có nhiều nhất một cực trị dương hay $y'=0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1\le 0<x_2$.

Trường hợp 1: $y'=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$x_1<0<x_2\Leftrightarrow 3(3-m)<0\Leftrightarrow m>3$.

Trường hợp 2: $y'=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1=0<x_2$.

Do đó $y'(0)=0\Leftrightarrow m=3$.

Với $m=3$ thì $y'=3x^2-14x$, khi đó $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-14x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{14}{3} \end{array}\right.$.

Suy ra $m=3$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy $m \geq 3$, do đó có 8 giá trị nguyên thỏa mãn là $3;4;5;6;7;8;9;10$.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-12x+1-m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt?

Đáp án : $\boxed{}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$x^3-12x+1-m=0 \Leftrightarrow x^3-12x+1=m.$

Số nghiệm của phương trình trên là số giao điểm của hai đồ thị $(C): y=x^3-12x+1$ và $d: y=m$.

Ta có $y'=3x^2-12$; $y'=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	17	$\searrow$	-15	$\nearrow$	$+\infty$

Để (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì $-15<m<17$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-14,-13,\ldots,15,16\} \Rightarrow$ có 31 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8. Một người gửi tiết kiệm theo chu kỳ một năm, lãi suất 4 năm đầu là 8% một năm, lãi suất các năm tiếp theo là 9%/năm và lãi hằng năm được nhập vào vốn. Hỏi rằng sau ít nhất bao nhiêu năm thì người đó nhận được số tiền gấp đôi số tiền gửi ban đầu?

Đáp án : $\boxed{}$

Lời giải

Gọi $A>0$ là số tiền ban đầu người đó gửi. Theo công thức tính lãi kép, số tiền người đó nhận được sau $n\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ năm là $T_n=A\cdot(1+0{,}08)^4\cdot(1+0{,}09)^{n-4}$.

Ta có $T_n>2A \Leftrightarrow (1+0{,}08)^4\cdot(1+0{,}09)^{n-4}>2 \Leftrightarrow n>8{,}47.$

Vậy sau ít nhất 9 năm thì người đó nhận được số tiền gấp đôi số tiền gửi ban đầu.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2023;2025]$ để bất phương trình $4^x-m\cdot 2^{x+1}+3-2m \leq 0$ có nghiệm thực?

Đáp án : $\boxed{}$

Lời giải

Đặt $t=2^x$ ta có tập giá trị của t là $(0;+\infty)$.

Thay vào bất phương trình ban đầu ta có $t^2-2mt+3-2m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{t^2+3}{2(t+1)}$ vì $t+1>0$.

Xét hàm $f(t)=\dfrac{t^2+3}{2(t+1)}$, $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-3}{2(t+1)^2}$, $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên $(0;+\infty)$ như sau

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy để phương trình ban đầu có nghiệm thực thì $m \geq 1$.
Do đó có 2025 giá trị nguyên thoả mãn.

Câu 10. Một chiếc máy bay vào vị trí cất cánh chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t)=t^2+2t$ m/s với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết máy bay đạt vận tốc 120 m/s thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng (đơn vị: mét) gần với số tự nhiên nào nhất?

Đáp án : $\boxed{}$

Lời giải

Máy bay đạt vận tốc 120 m/s tại thời điểm t_0 thỏa mãn phương trình

$v(t_0)=120 \Leftrightarrow t_0^2+2t_0=120 \Leftrightarrow t_0=10s.$

Khi đó quãng đường máy bay di chuyển là

$$s=\int_0^{10}(t^2+2t)\mathrm{d}x=\frac{1300}{3}=433,33 \text{ m.}$$

Đáp số: 433

Câu 11. Xét các số phức z thoả mãn $|z|=4$, biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=(3-4i)z+5i$ là một đường tròn. Bán kính của đường tròn đó là bao nhiêu?

Đáp án : $\boxed{}$

Lời giải

Giả sử $w=x+yi$ trong đó $x,y \in \mathbb{R}$.

Ta có $w=(3-4i)z+5i \Leftrightarrow z=\dfrac{w-5i}{3-4i}$.

Theo đề ta có

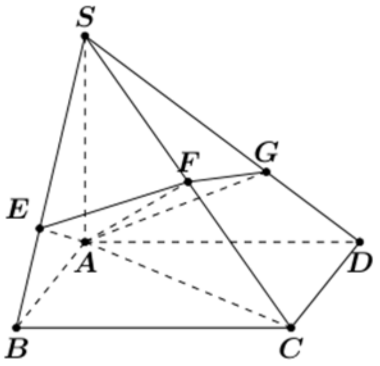
$\left|\dfrac{w-5i}{3-4i}\right|=4 \Leftrightarrow \dfrac{|x+(y-5)i|}{5}=4$

$\Leftrightarrow |x+(y-5)i|=20$

$\Leftrightarrow x^2+(y-5)^2=400.$

Suy ra đường tròn biểu diễn số phức w có bán kính $r=20$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với SC cắt các cạnh SB,SC,SD lần lượt tại E,F,G. Biết rằng (P) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tỉ số $\dfrac{SF}{SC}$ bằng $\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ với a, b,c là các số tự nhiên, $c<10$. Tính $a+b+c$.



Đáp án : $\boxed{}$

Lời giải

Ta có $\Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow SB = SD$,

từ đó $\Delta SBC = \Delta SDC \Rightarrow \Delta SFE = \Delta SFG \Rightarrow SE = SG$.

Ta có $\dfrac{SC}{SF} + \dfrac{SA}{SA} = \dfrac{SD}{SG} + \dfrac{SB}{SE} \Rightarrow \dfrac{SC}{SF} + 1 = 2\dfrac{SD}{SG} = 2\dfrac{SB}{SE}$.

Gọi $\dfrac{SF}{SC} = x > 0 \Rightarrow \dfrac{SG}{SD} = \dfrac{SE}{SB} = \dfrac{2x}{x+1}$.

Có $\dfrac{V_{S.EAGF}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{V_{S.AFG}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SF}{SC} \cdot \dfrac{SG}{SD} = \dfrac{2x^2}{x+1}$.

Vì mặt phẳng (P) chia hình chóp thành 2 phần bằng nhau nên

$\dfrac{V_{S.EAGF}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{2x^2}{x+1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$.

Vậy $\dfrac{SF}{SC} = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$. Suy ra $a+b+c = 1+17+8 = 26$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có O là trung điểm của AB. Điểm M di động trên cạnh SB đặt $\dfrac{SM}{SB} = x$. Mặt phẳng qua A, M song song với OC cắt SC tại N. Thể tích khối chóp $ABMN$ lớn nhất khi $x = a + \sqrt{b}$ với a, b là các số nguyên. Tính $a+b$.

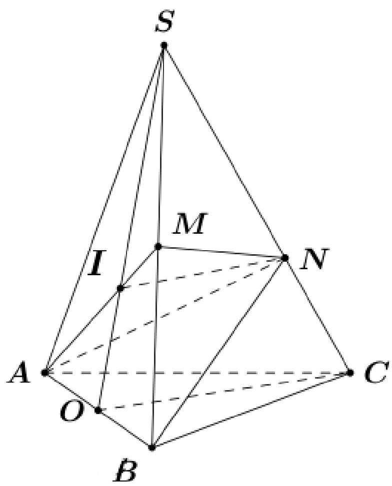
Đáp án : $\boxed{}$

Lời giải

Trong mặt phẳng (SAB), gọi I là giao điểm của SO và AM.

Mặt phẳng qua A, M, song song với SO, cắt (SOC) theo giao tuyến là đường thẳng qua I, đường thẳng đó cắt SC tại N.

Ta có: $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{SM}{SK} = \dfrac{2SM}{SM+SB} = \dfrac{2x}{x+1}$.



Thể tích khối chóp là

$V_{ABMN}=V_{N.ABM}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABM}\cdot \mathrm{d}(N,(ABM))$

$=\frac{1}{3}\cdot(1-x)S_{SAB}\cdot\frac{2x}{x+1}\mathrm{d}(C,(SAB))=(1-x)\frac{2x}{x+1}V_{S.ABC}$

$=\left[-2(x+1)-\frac{4}{x+1}+6\right]V_{S.ABC}\le\left[-2\sqrt{2(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}+6\right]V_{S.ABC}$

$=\left(6-4\sqrt{2}\right)V_{S.ABC}$

Do đó thể tích khối chóp $ABMN$ lớn nhất bằng $\left(6-4\sqrt{2}\right)V_{S.ABC}$ khi

$2(x+1)=\frac{4}{x+1}\Leftrightarrow x+1=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1.$

Vậy $a=-1$ và $b=2$, suy ra $a+b=2$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ cho các vectơ $\vec{u}=(1;1;1)$ và $\vec{v}=(0;1;m)$. Để góc giữa hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ có số đo bằng 45^0 thì m bằng $a\pm\sqrt{b}$ với a, b là các số tự nhiên không lớn hơn 8. Tính $2a+b$

Đáp án : ☐

Lời giải

Ta có

$$\cos 45^0=\frac{1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot m}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{1+m^2}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{m+1}{\sqrt{3+3m^2}}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -1\\2(m+1)^2=3+3m^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -1\\m^2-4m+1=0\end{cases}$$

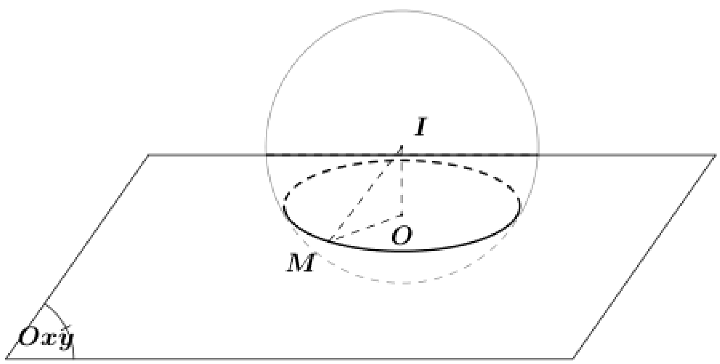
$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -1\\m=2\pm\sqrt{3}.\end{cases}$$

Vậy $m=2\pm\sqrt{3}$, suy ra $a=2$, $b=3$; do đó $2a+b=7$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-2)^2=16$ cắt mặt phẳng (Oxy) theo giao tuyến là đường tròn (C). Số điểm có tọa độ nguyên thuộc mặt phẳng (Oxy) mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến tới (C) sao cho góc tạo bởi hai tiếp tuyến đó bằng 60^0 là bao nhiêu?

Đáp án : ☐

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;2)$ và bán kính $R=4$.

Ta có hình chiếu của tâm $I(0;0;2)$ lên mặt phẳng (Oxy) là điểm $O(0;0;0)$ và $OI=2$. Do đó bán kính đường tròn (C) là $r=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

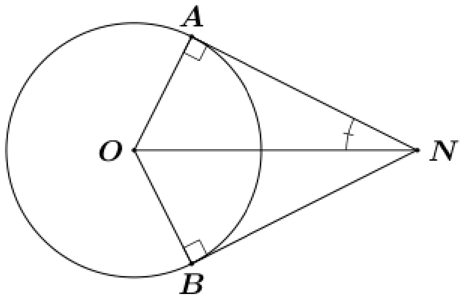
Trên mặt phẳng (Oxy), gọi $N(x;y)$ là điểm thỏa yêu cầu đề bài.

Tiếp tuyến của đường tròn (C) đi qua điểm N và tiếp xúc với (C) tại A và B.

Khi đó ta có $ANO=30^0$, $ON=\dfrac{OA}{\tan 30^0}=6.$

Do đó N thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính bằng 6 có phương trình

$x^2+y^2=36 \Leftrightarrow y^2=36-x^2\ (-6\le x,y\le 6).$



Vậy có 4 điểm có tọa độ nguyên thỏa mãn, đó là $N_1(0;6)$, $N_2(0;-6)$, $N_3(6,0)$, $N_4(-6,0)$.