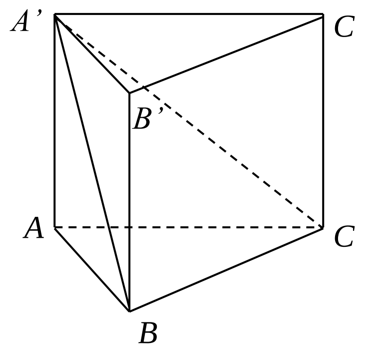
Câu 1: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ (tham khảo hình dưới đây). Cạnh bên $BB'=2a$. Tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A, $AC=BA=a$. Khoảng cách từ A đến $(A'BC)$ bằng bao nhiêu?

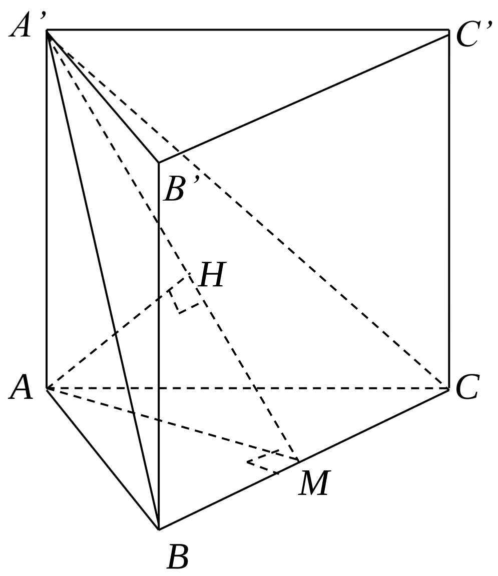


A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{2}{3}a$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên A'M.

Ta có: $d(A;(A'BC))=AH$.



Ta có: $BC=a\sqrt{2}, AM=\frac{1}{2}BC=\frac{a\sqrt{2}}{2},$

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{9}{4a^2}$$

$$\Rightarrow AH=\frac{2}{3}a.$$

Câu 2: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_8\frac{x^2-16}{121}<\log_{11}\frac{x^2-16}{64}$?

A. 84. **B.** 87. **C.** 194. **D.** 168.

Lời giải

ĐKXĐ: $x^2 > 16$

$\log_8 \dfrac{x^2-16}{121} < \log_{11} \dfrac{x^2-16}{64}$

$\Leftrightarrow \log_8(x^2-16) - \log_8 121 < \log_{11}(x^2-16) - \log_{11} 64$

$\Leftrightarrow \log_8 11.\log_{11}(x^2-16) - \log_{11}(x^2-16) < 2\log_8 11 - 2\log_{11} 8$

$\Leftrightarrow \log_{11}(x^2-16) < \dfrac{2\log_8 11 - 2\log_{11} 8}{\log_8 11 - 1}$

$\Leftrightarrow \log_{11}(x^2-16) < 2(\log_{11} 8 + 1)$

$\Leftrightarrow \log_{11}(x^2-16) < \log_{11} 7744$

$\Leftrightarrow x^2 - 16 < 7744$

$\Leftrightarrow 16 < x^2 < 7760$

$\Leftrightarrow 4 < |x| < 88{,}1$

$\Leftrightarrow 5 \le |x| \le 88$

Vậy có 168 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(9) + 2G(9) = 8$ và $F(1) + 2G(1) = 2$. Khi đó $\int\limits_1^3 xf(x^2)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 1.

Lời giải

Vì $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $G(x) = F(x) + C$.

Ta có: $\begin{cases} F(9) + 2G(9) = 8 \\ F(1) + 2G(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(9) + 2C + 2F(9) = 8 \\ F(1) + 2C + 2F(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2C + 3F(9) = 8 \\ 2C + 3F(1) = 2 \end{cases}$

Suy ra $F(9) - F(1) = 2$.

Ta có: $\int\limits_1^3 xf(x^2)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 f(x^2)\mathrm{d}x^2 = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^9 f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\big(F(9) - F(1)\big) = 1$

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right]$. **B.** $m\in\left[\frac{1-\sqrt{7}}{3};1\right]\cup\{-1\}$.

C. $m\in\left[\frac{1+\sqrt{7}}{3};+\infty\right)$. **<u>D</u>.** $m\in\left[\frac{1-\sqrt{7}}{3};\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right]\cup\{-1\}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Đặt $f(x)=x^4+4mx^3+3(m+1)x^2+1$

$f'(x)=4x^3+12mx^2+6(m+1)x=2x\left[2x^2+6mx+3(m+1)\right]$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\g(x)=2x^2+6mx+3(m+1)=0\end{array}\right.$$

Nhận xét:

1)Hàm số $f(x)=x^4+4mx^3+3(m+1)x^2+1$ chỉ xảy ra hai trường hợp về cực trị

+ **Trường hợp 1**: Có 3 điểm cực trị trong đó có 2 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại.

+ **Trường hợp 2**: Có đúng 1 điểm cực trị, đó là điểm cực tiểu.

2) Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Do đó, ta tìm m thỏa yêu cầu đề bài theo trình tự sau

+ $f(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$Phương trình $2x^2+6mx+3(m+1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=9m^2-6m-6>0\\m+1\neq 0\end{cases}.\Leftrightarrow m\in(-\infty;-1)\cup\left(-1;\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3};+\infty\right).\ (1)$$

+ Lấy phần bù kết quả vừa tìm được ở (1):

Hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị $\Leftrightarrow m\in\left[\frac{1-\sqrt{7}}{3};\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right]\cup\{-1\}$.

Vậy hàm số $y=x^4+4mx^3+3(m+1)x^2+1$ có cực tiểu mà không có cực đại khi và chỉ khi $m\in\left[\frac{1-\sqrt{7}}{3};\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right]\cup\{-1\}$.

Câu 5: Biết rằng $z=a+bi$, với $a,b\in\mathbb{R}$, là số phức có mô đun nhỏ nhất thỏa mãn $|z-2023-2022i|=|z+2021-6068i|$, hãy tính $a+b$.

A. -1. **B.** 2. **<u>C</u>.** 1. **D.** -2.

Lời giải

Gọi $A(2023;2022)$, $B(-2021;6068)$, $M(a;b)$.

Ta có $|z-2023-2022i|=|z+2021-6068i|$

$\Leftrightarrow |(a-2023)+(b-2022)i|=|(a+2021)+(b-6068)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-2023)^2+(b-2022)^2}=\sqrt{(a+2021)^2+(b-6068)^2} \Leftrightarrow MA=MB$.

Do đó, tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực d của đoạn thẳng AB.

Ta có phương trình $d: 2022x-2023y+8181013=0$.

Khi đó $|z|=OM$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng d.

Đường thẳng OM đi qua O và vuông góc với d có phương trình $OM: 2023x+2022y=0$.

M là giao điểm của hai đường thẳng d và OM.

Hệ phương trình $\begin{cases} 2022x-2023y+8181013=0 \\ 2023x+2022y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2022 \\ y=2023 \end{cases}$

Suy ra $M(-2022;2023)$. Khi đó $z=-2022+2023i$.

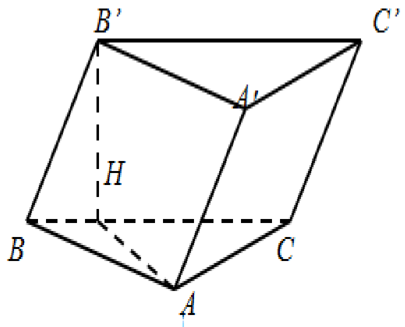
Vậy $a+b=-2022+2023=1$.

Câu 6: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Mặt bên $BB'C'C$ là hình thoi có góc $B'BC$ nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng CC' và AB' lần lượt bằng $\frac{4\sqrt{35}}{7}$; α với $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng:

A. $12\sqrt{3}$ **B.** $12\sqrt{5}$ **C.** $3\sqrt{6}$ **D.** $9\sqrt{6}$

Lời giải

Chọn B



Đặt $AB = x$

Trong mp($BB'C'C$) hạ $B'H$ vuông góc BC.Suy ra $B'H$ vuông góc (ABC).

Ta có: BB' song song với CC' $\Rightarrow (CC', AB') = (BB', AB') = B'BA$

$\Delta ABB'$ Có $\cos B'BA = \dfrac{BB'^2 + AB'^2 - AB^2}{2BB'.AB'} = \dfrac{AB'}{2x} \Leftrightarrow AB' = \dfrac{x\sqrt{7}}{2}$

$\Delta AHB'$ Có $AB'^2 = B'H^2 + AH^2$

ΔABH Có $AH^2 = AB^2 + BH^2 - 2AB.BH.\cos 60^o = x^2 + BH^2 - x.BH$

$\Delta B'BH$ Có $B'H^2 = BB'^2 - BH^2 = x^2 - BH^2$

Từ đó ta có $\dfrac{7x^2}{4} = 2x^2 - x.BH \Leftrightarrow BH = \dfrac{x}{4}$

Suy ra $B'H = \dfrac{x\sqrt{15}}{4}$. Lúc đó $V_{ABC.A'B'C'} = B'H.S_{ABC} = \dfrac{3x^3\sqrt{5}}{16}$

Lại có

$V_{ABC.A'B'C'} = 3/2.V_{C.ABB'A'} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.d(CC', ABB'A').AB'.BB'.\sin BB'A = \dfrac{3x^2\sqrt{5}}{4}$

Suy ra $\dfrac{3x^3\sqrt{5}}{16} = \dfrac{3x^2\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow x = 4$.Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = 12\sqrt{5}$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) - f(x) = x^2\sqrt{x}, \quad \forall x \in (0;+\infty); f(4) = 6$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1; x = 4$.

A. $\dfrac{31}{5}$. **B.** $\dfrac{163}{15}$. **C.** $\dfrac{62}{5}$. **D.** $\dfrac{256}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Với mọi $x \in (0;+\infty)$, ta có

$2xf'(x)-f(x)=x^2\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}f'(x)-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}f(x)}{x}=\dfrac{x}{2}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}\right)'=\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}=\dfrac{x}{2}+C$

Mà $f(4)=6$ suy ra $C=1$. Vậy $f(x)=\left(\dfrac{x}{2}+1\right)\sqrt{x}$.

Suy ra $\int\limits_1^4 f(x)dx=\int\limits_1^4\left(\dfrac{x}{2}+1\right)\sqrt{x}dx=\dfrac{163}{15}$.

Câu 8: Trên tập số phức, xét phương trình $z^2-4az+b^2+2=0$(a,b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $z_1+2iz_2=3+3i$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

TH1: Nếu z_1 là số thực thì z_2 cũng là số thực.

Khi đó từ $z_1+2iz_2=3+3i$ suy ra $\begin{cases} z_1=3 \\ z_2=\frac{3}{2} \end{cases}(1)$

Áp dụng Viet ta có: $\begin{cases} z_1+z_2=4a \\ z_1\cdot z_2=b^2+2 \end{cases}$ (2). Thay (1) vào (2) được $\begin{cases} 4a=\frac{9}{2} \\ b^2+2=\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a=\frac{9}{8} \\ b^2=\frac{5}{2} \end{cases}$

Vậy có 2 cặp $(a;b)$ thỏa mãn bài toán

TH2: Nếu z_1 không là số thực, thì z_2 là số phức liên hợp của z_1 (vì hai nghiệm của phương trình bậc hai hệ số thực trong tập số phức khi $\Delta<0$ là số phức liên hợp của nhau)

Giả sử $z_1=m+in(m,n\in\mathbb{R})$ thay vào $z_1+2iz_2=3+3i$ ta được

$$m+in+2i(m-in)=3+3i \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases}$$

Vậy có $z_1 = 1 + i; z_2 = 1 - i$.

Với $\begin{cases} z_1 + z_2 = 4a \\ z_1 \cdot z_2 = b^2 + 2 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} 4a = 2 \\ b^2 + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}$

Vậy có một cặp $(a; b)$

Kêt luận: có 3 cặp $(a; b)$ thỏa mãn bài toán

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M có hoành độ âm thuộc d sao cho khoảng cách từ M đến (P) bằng 2.

A. $M(-1;-3;-5)$. **B.** $M(-1;3;7)$. **C.** $M(-2;-5;-8)$. **D.** $M(11;21;31)$.

Lời giải

Ta có: $M \in d$ nên $M(t;-1+2t;-2+3t)$.

$$d(M(P)) = \frac{|t + 2(-1+2t) - 2(-2+3t) + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-t+5|}{3} = 2.$$

$$\Leftrightarrow |-t+5| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -t+5=6 \\ -t+5=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=11>0 \end{array}\right..$$

Ta có $t = -1 \Rightarrow M(-1;-3;-5)$..

Câu 10: Có bao nhiêu bộ $(x; y)$ với x, y nguyên và $1 \le x, y \le 2023$ thỏa mãn

$$(xy + 3y) \cdot \log_3\left(\frac{3y}{y+4}\right) \le (2x + 2y - xy - 4)\log_2\left(\frac{x+1}{x-3}\right)?$$

A. 2019. **B.** 4040. **C.** 4037. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện : $x > 3$;

Biến đổi từ đề bài :

$$y(x+3).\log_3(\frac{3y}{y+4}) \le (2-y)(x-2)\log_2(\frac{x+1}{x-3}) \ (*)$$

Xét $y \ge 3$. Khi đó $VP(*) < 0 < VT(*)$(mâu thuẫn)

Suy ra $y \le 2 \Rightarrow y \in \{1;2\}$;

Nếu $y=2$ suy ra $VT(*)=VP(*)=0$ (đúng với mọi $x>3$);

Nếu $y=1$ suy ra $(x+3).\log_3(\frac{4}{5})\le(x-2)\log_2(\frac{x+1}{x-3})$ (1)

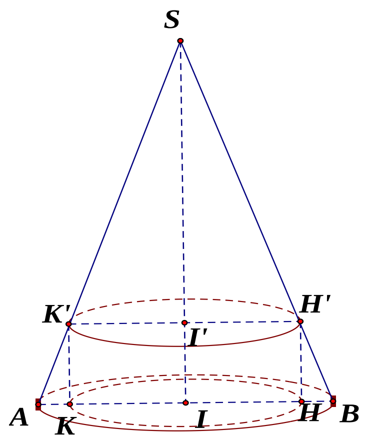
Dễ thấy $VT(1)<0<VP(1)$ (đúng với mọi $x>3$).

Như vậy, số cặp (x,y) thỏa mãn là $2.2020=4040$.

Câu 11: Cho hình nón (N) có bán kính đáy $r=10(cm)$, chiều cao $h=30(cm)$ và một hình trụ (T) nội tiếp hình nón (N) (hình trụ (T) có một đáy thuộc đáy hình nón và một đáy nằm trên mặt xung quanh của hình nón). Tính diện tích xung quanh lớn nhất của hình trụ (T)?

A. $375\pi(cm^2)$. **B.** $150\pi(cm^2)$. **C.** $300\pi(cm^2)$. **D.** $450\pi(cm^2)$.

Lời giải



Gọi độ dài bán kính hình trụ là $x\,cm\,(0<x<10)$, chiều cao của hình trụ là h'.

Ta có: $\frac{h'}{h}=\frac{SI'}{SI}=\frac{I'K'}{AI}\Leftrightarrow\frac{SI-II'}{SI}=\frac{I'K'}{AI}\Leftrightarrow\frac{h-h'}{h}=\frac{x}{r}\Leftrightarrow\frac{30-h'}{30}=\frac{x}{10}$.

$\Leftrightarrow 30-h'=3x\Leftrightarrow h'=30-3x$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là:

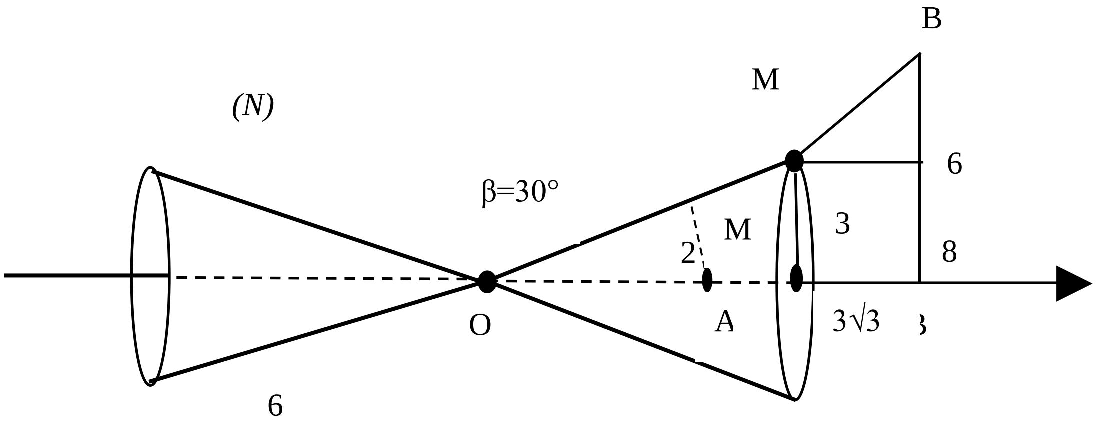
$$S=2\pi x.h'=2\pi x(30-3x)=6\pi(10x-x^2)=6\pi\left[25-(x-5)^2\right]\le 150\pi.$$

Diện tích xung quanh của hình trụ lớn nhất khi $x=5$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;0)$ và $B(8;0;6)$. Xét các điểm M thay đổi sao cho khoảng cách từ A đến đường thẳng OM bằng 2 và diện tích tam giác OAM không lớn hơn 6. Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MB thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{13}{3};5\right)$. **B.** $\left(4;\frac{13}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{7}{2};4\right)$. **D.** $(5;7)$.

Lời giải



Có $\sin\beta = \sin MOA = \dfrac{d(A,OM)}{OA} = \dfrac{2}{4} \Rightarrow \beta = 30^\circ$. Lại có

$S_{\triangle OAM} = \dfrac{1}{2}OM.d(A,OM) \le 6 \Leftrightarrow OM \le 6$.

Suy ra quỹ tích điểm M nằm trên mặt xung quanh của 2 hình nón có đỉnh O, trục OA, góc ở đỉnh nón $2\beta = 60^\circ$, đường sinh dài bằng 6 . Muốn điểm M gần B nhất thì điểm M phải nằm ở vị trí như hình vẽ.

Gọi hình chiếu của M và B trên trục Ox lần lượt là M_0 và B_0 thì ta có:

$OM_0 = 6\cos\beta = 3\sqrt{3}, MM_0 = 6\sin\beta = 3$ và $B_0 = (8;0;0), OB_0 = 8, BB_0 = 6$

Suy ra $BM_{\min} = \sqrt{(8-3\sqrt{3})^2 + (6-3)^2} \approx 4{,}1$. Chọn đáp án B.

Câu 13: Tổng các giá trị nguyên của tham số m số hàm số $f(x) = \left|x^3 - 3x^2 + mx + 10\right|$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ bằng

A. 18. **B.** 20. **C.** 20. **D.** 25.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx + 10$, có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 6x + m$.

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ thì bảng biến thiên của hàm số trong $y = f(x)$ khoảng $(-1;1)$ phải có hình dạng như sau:

x	-1		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(-1)\ge 0$	$\nearrow$	

x	-1		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$f(-1)\le 0$	$\searrow$	

<u>Trường hợp 1:</u> Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và không âm trên $(-1;1)$ tức là

$$\begin{cases} f(-1)\ge 0 \\ f'(x)\ge 0, \forall x\in(-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-m\ge 0 \\ m\ge 6x-3x^2 \ \forall x\in(-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 6 \\ m\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3\le m\le 6.$$

<u>Trường hợp 2:</u> Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ và không dương trên $(-1;1)$ tức là

$$\begin{cases} f(-1)\le 0 \\ f'(x)\le 0, \forall x\in(-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-m\le 0 \\ m\le 6x-3x^2 \ \forall x\in(-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge 6 \\ m\le -9 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$$

Kết hợp với điều kiện ta được kết quả $m\in\{3,4,5,6\}$.

Vây có tổng các giá trị nguyên của tham số m là 18.

------------------- HẾT -------------------