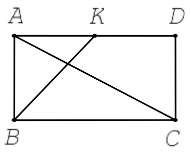
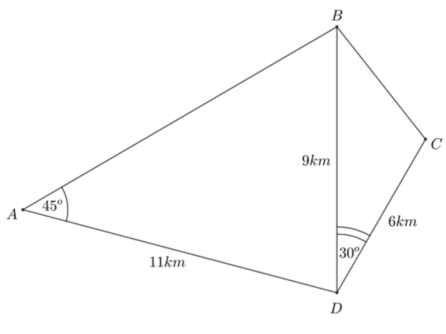
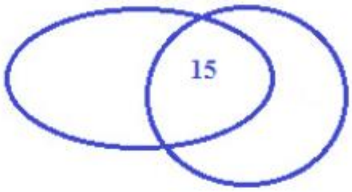
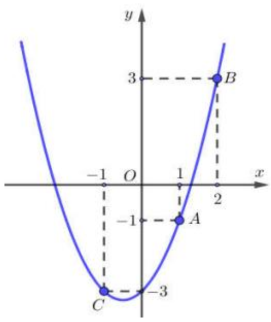
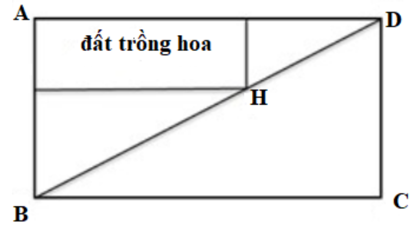
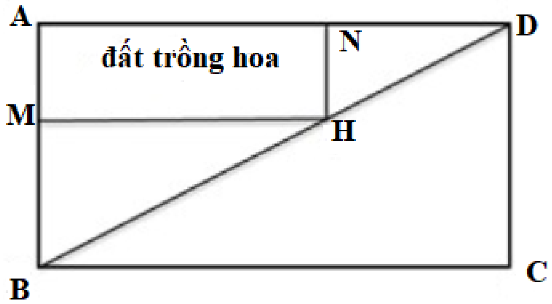
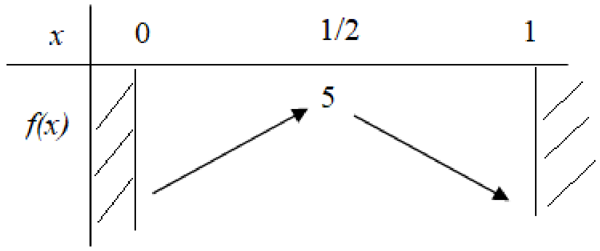
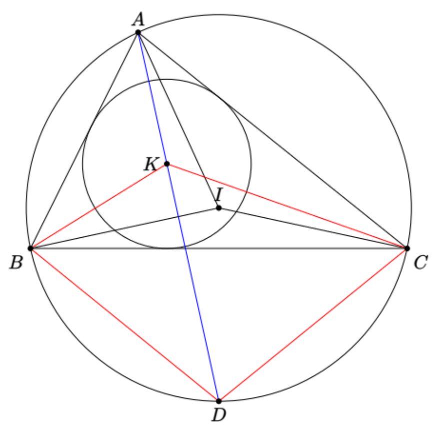
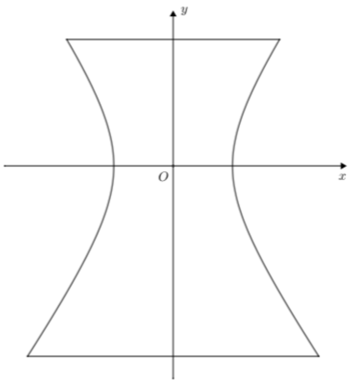
SỞ GD&ĐT HẢI PHÒNG **TRƯỜNG THPT NGÔ QUYỀN**	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG** **NĂM HỌC 2022-2023** **HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN 10**

CÂU	**ĐÁP ÁN**	**ĐIỂM**
1 **(1.0 điểm)**	***Câu 1.*** *Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{3}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}$.*	
	 Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{cases}$	**0.5**
	Suy ra $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right).\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ $= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}$	**0.25**
	$= -a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}\ a\sqrt{3}\ ^2 = \frac{a^2}{2}.$	**0.25**
2 **(1.0 điểm)**	***Câu 2.*** *Hai nhóm học sinh lớp 10A và 10B thi đạp xe đạp với nhau. Các em cùng xuất phát từ A đi theo hai hướng khác nhau và tạo với nhau một góc 45^0 để đến địa điểm C. Sau khi bốc thăm, nhóm lớp 10A đi theo đường qua địa điểm B, nhóm lớp 10B đi theo đường qua địa điểm D (như hình vẽ), với $AD = 11km$, $BD = 9km$, $CD = 6km$, $BAD = 45^0, BDC = 30^0$. Biết vận tốc đội xe đạp của nhóm 10A là $13km/h$, vận tốc đội xe đạp của nhóm 10B là $12km/h$, hỏi đội nào đến C trước (hai đội xe không nghỉ dọc đường)?* 	
	Xét ΔBCD có $BC = \sqrt{DB^2 + DC^2 - 2DB.DC\cos 30^0} \approx 4,845km$	**0.25**
	Xét ΔABD có: $\frac{AB}{\sin D} = \frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin A} = \frac{9}{\sin 45^0}$ $\Rightarrow \sin B \approx 0,864 \Rightarrow B \approx 59^0 47'$	**0.25**

	$\Rightarrow D = 180^0 - 45^0 - 59^0 47'$ $AB = \dfrac{9\sin D}{\sin 45^0} \approx 12,307km$	**0.25**
	Thời gian đội xe lớp 10A đi là: $(12,307 + 4,845):13 \approx 1,32(h)$ Thời gian đội xe lớp 10B đi là: $(11+6):12 \approx 1,42h$ Vậy đội lớp 10A đến C trước	**0.25**
3 **(1.0 điểm)**	***Câu 3.*** *Mỗi học sinh lớp 10A đều tham gia chơi cầu lông hoặc đá cầu, biết rằng có 28 em tham gia chơi đá cầu, 32 em tham gia chơi cầu lông, 15 em tham gia chơi cả đá cầu và cầu lông. Hỏi lớp 10A có tất cả bao nhiêu học sinh?*	
	Ta vẽ biểu đồ Ven như sau  	**0.25**
	Dựa vào biểu đồ ven tính được số học sinh chỉ tham gia chơi đá cầu là: $28 - 15 = 13$	**0.25**
	Dựa vào biểu đồ ven tính được số học sinh chỉ tham gia chơi cầu lông là: $32 - 15 = 17$	**0.25**
	Số học sinh lớp 10A là: $13+15+17 = 45$ học sinh	**0.25**
4 **(1.0 điểm)**	***Câu 4.*** *Xác định tọa độ đỉnh của parabol* $(P): y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ *biết parabol* (P) *có đồ thị như hình vẽ dưới đây*  	
	Từ đồ thị ta có (P) đi qua các điểm $A(1;-1), B(2;3), C(-1;-3)$	**0.25**
	Ta có hệ $\begin{cases} a.1^2 + b.1 + c = -1 \\ a.2^2 + b.2 + c = 3 \\ a.(-1)^2 + b.(-1) + c = -3 \end{cases}$	**0.25**
	Giải hệ tìm được $a = 1; b = 1; c = -3$	**0.25**
	phương trình parabol $(P): y = x^2 + x - 3$. Vậy tọa độ đỉnh là $I\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{13}{4}\right)$	**0.25**

5 **(1.0 điểm)**	***Câu 5.*** *Trên một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích $20m^2$, người chủ nhà dùng để làm sân và lấy ra một phần đất để trồng hoa. Biết phần đất để trồng hoa có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh A và H, với H thuộc cạnh BD (như hình vẽ). Hỏi số tiền lớn nhất mà chủ nhà cần chuẩn bị là bao nhiêu, với chi phí trồng hoa là 120000 đồng/1mét vuông?* 	
	Đặt $x = \frac{BH}{BD}$ $(0 < x < 1)$ Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên AB, AD  Vì $MH // AD \Rightarrow \frac{MH}{AD} = \frac{BH}{BD} = x \Rightarrow MH = xAD$ $NH // AB \Rightarrow \frac{NH}{AB} = \frac{DH}{DB} = 1 - x \Rightarrow NH = (1-x)AB$	**0.25**
	Diện tích trồng hoa là $S_{AMHN} = MH.NH = x(1-x)AD.AB = x(1-x)S_{ABCD} = 20x(1-x)$	**0.25**
	Xét hàm số $f(x) = 20x(1-x) = -20x^2 + 20x$ trên $(0;1)$ 	**0.25**
	Số tiền lớn nhất chủ nhà cần chuẩn bị là $120000x5 = 600000$ đồng	**0.25**
6 **(1.0 điểm)**	***Câu 6.*** *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, N là điểm trên cạnh BC sao cho $NB = 2NC$. Biết $M\left(\frac{5}{2};0\right)$ và đường thẳng DN có phương trình $x + 3y - 10 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm I của AC và DN.*	
	Ta đi chứng minh $MI \perp DN$: Đặt cạnh hình vuông bằng $6x$ thì $AM = MB = 3x, BN = 4x$ Xét tam giác vuông ADM có $DM = \sqrt{AD^2 + AM^2} = 3\sqrt{5}x$	**0.25**
	Xét tam giác vuông CDN có $DN = \sqrt{CD^2 + CN^2} = 2\sqrt{10}x$	**0.25**

	Xét tam giác vuông BMN có $MN=\sqrt{BM^2+BN^2}=5x$ Xét tam giác MDN có $$\cos MDN=\frac{DM^2+DN^2-MN^2}{2DM.DN}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow MDN=45^\circ$$	
	Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BAC=45^\circ\Rightarrow MDN=BAC$ hay $MDI=MAI$ suy ra tứ giác $AMID$ nội tiếp. Từ đó suy ra $MID=90^\circ$ hay $MI\perp DN$	**0.25**
	Đường thẳng MI qua M, nhận $\overrightarrow{u_{DN}}=(3;-1)$ là VTPT nên pt đường thẳng MI : $6x-2y-15=0$. $I=DN\cap MI\Rightarrow I\left(\frac{13}{4};\frac{9}{4}\right)$.	**0.25**
7 **(1.0 điểm)**	***Câu 7.*** *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;5)$. Các điểm $I(-3;2)$, $K(-1;1)$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng BC.*	
	Có $\overrightarrow{IA}=(4;3)\Rightarrow IA=5$ Đường tròn (T) ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $I(-3;2)$, đi qua A nên có phương trình là: $(x+3)^2+(y-2)^2=25$. 	**0.25**
	Gọi D là giao điểm thứ hai của đường thẳng AK với đường tròn (T). Có $\overrightarrow{AK}=(-2;-4)$ nên phương trình đường thẳng $AK:\begin{cases}x=1+t\\y=5+2t\end{cases}$ $D\in AK\Rightarrow D(1+t;5+2t)$. Mà $D\in(T)$ nên $(4+t)^2+(3+2t)^2=25\Leftrightarrow 5t^2+20t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=-4\end{array}\right.$ Với $t=0\Rightarrow D(1;5)$ (loại vì trùng với A) Với $t=-4\Rightarrow D(-3;-3)$.	**0.25**

	Ta có $BKD = BAK + ABK$ (góc ngoài tại đỉnh K của ΔABK) $\Rightarrow BKD = \frac{1}{2}\left(BAC + ABC\right)$ (do AK, BK là phân giác trong của góc A, B của ΔABC) Ta có $DBK = DBC + CBK = DAC + CBK = \frac{1}{2}\left(BAC + ABC\right)$ Xét tam giác DBK có $BKD = DBK$. Do đó tam giác DBK cân tại D Tương tự, tam giác DCK cân tại D. Vậy $DB = DK = DC$. Suy ra B, C thuộc đường tròn tâm D, bán kính $DK = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$.	**0.25**
	Do đó tọa độ các điểm B, C là nghiệm của hệ $\begin{cases}(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25\\(x+3)^2 + (y+3)^2 = 20\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0\\x^2 + y^2 + 6x + 6y - 2 = 0\end{cases} \Rightarrow 10y + 10 = 0 \Leftrightarrow y = -1.$ Vậy phương trình đường thẳng $BC: y = -1$.	**0.25**
8 **(1.0 điểm)**	***Câu 8.*** *Mặt cắt đứng của một tháp cảng được thiết kế có dạng hypebol (như hình vẽ). Dạng thiết kế này đòi hỏi ít nguyên vật liệu xây dựng hơn so với những dạng hình khác. Biết hypebol có tiêu cự bằng $8\sqrt{149}\,m$, giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc hypebol đến hai tiêu điểm bằng $56\,m$, khoảng cách từ nóc tới tâm đối xứng O của hypebol bằng $\frac{2}{3}$ khoảng cách từ tâm đối xứng O đến đáy và bán kính đáy của tháp bằng $7\sqrt{97}\,m$. Tính chiều cao của tháp.* 	
	Hypebol có tiêu cự bằng $8\sqrt{149} \Rightarrow c = 4\sqrt{149}$	**0.25**
	Giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc hypebol đến hai tiêu điểm bằng $56 \Rightarrow 2a = 56 \Rightarrow a = 28 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = 40$ Vậy hypebol có phương trình $\frac{x^2}{28^2} - \frac{y^2}{40^2} = 1$.	**0.25**

	Có bán kính đáy của tháp bằng $7\sqrt{97}\,m$ nên thay $x=7\sqrt{97}$ vào phương trình hypebol ta được: $\dfrac{\left(7\sqrt{97}\right)^2}{28^2}-1=\dfrac{y^2}{40^2}\Rightarrow y=\pm 90$.	**0.25**
	Vậy khoảng cách từ tâm đối xứng O đến đáy bằng 90m. Chiều cao của tháp bằng $\dfrac{5}{3}.90=150\,m$.	**0.25**
9 **(1.0 điểm)**	***Câu 9 .*** *Cho một đa giác đều gồm* $2n$ *đỉnh* $n\geq 2,\ n\in\mathbb{N}$. *Chọn ngẫu nhiên ba đỉnh trong số* $2n$ *đỉnh của đa giác, xác suất ba đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông là* $\dfrac{1}{5}$. *Tìm* n.	
	Ta có $n\ \Omega\ =C_{2n}^3$.	**0.25**
	Để ba đỉnh được chọn tạo thành tam giác vuông khi và chỉ khi có hai đỉnh trong ba đỉnh là hai đầu mút của một đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác và đỉnh còn lại là một trong số $2n-2$ đỉnh còn lại của đa giác. Đa giác có $2n$ đỉnh nên có $\dfrac{2n}{2}=n$ đường kính.	**0.25**
	Số cách chọn 1 đường kính là $C_n^1=n.$ Số cách chọn 1 đỉnh còn lại trong $2n-2$ đỉnh là $2n-2.$ Suy ra số tam giác vuông là $n\ \ 2n-2$.	**0.25**
	Theo đề bài ta có phương trình : $\dfrac{n\ \ 2n-2}{C_{2n}^3}=\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow n=8.$	**0.25**
10 **(1.0 điểm)**	***Câu 10.*** *An và Bình cùng tham gia kỳ thi Khảo sát chất lượng nâng cao, ngoài thi bốn môn Toán, Văn, Anh, Sử bắt buộc thì An và Bình đều đăng ký thêm 2 môn tự chọn khác trong 4 môn: Hóa Học, Vật Lí, Sinh học và Tin học dưới hình thức trắc nghiệm. Mỗi môn tự chọn trắc nghiệm có 8 mã đề thi khác nhau và mã đề thi của các môn khác nhau thì khác nhau. Tìm xác suất để An và Bình chỉ có chung đúng một môn thi tự chọn và một mã đề thi.*	
	Không gian mẫu là số cách chọn môn tự chọn và số mã đề thi có thể nhận được của An và Bình. ● An có C_4^2 cách chọn môn tự chọn, có $8.8=64$ mã đề thi có thể nhận cho 2 môn tự chọn của An. ● Bình có C_4^2 cách chọn môn tự chọn, có $8.8=64$ mã đề thi có thể nhận cho 2 môn tự chọn của Bình. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n\ \Omega\ =\ C_4^2.64\ ^2=147456$.	**0.25**
	Gọi A là biến cố "An và Bình chỉ có chung đúng một môn thi tự chọn và một mã đề thi". Để tính số kết quả thuận lợi cho A, ta mô tả cách chọn 2 môn tự chọn của An và Bình và cách nhận mã đề thi thỏa mãn yêu cầu bài toán. ● **Cách chọn môn.** Giả sử An chọn trước 2 môn tự chọn trong 4 môn nên có C_4^2 cách. Để Bình chọn 2 trong 4 môn tự chọn nhưng chỉ có đúng 1 môn trùng với An nên Bình phải chọn 1 trong 2 môn An đã chọn và 1 môn còn lại trong 2 môn An không chọn, suy ra Bình có $C_2^1.C_2^1$ cách. Do đó có $C_4^2.C_2^1.C_2^1=24$ cách chọn môn thỏa yêu cầu bài toán.	**0.25**

	● **Cách chọn mã đề.** Vì An chọn trước nên cách chọn mã đề của An là $8.8=64$. Để Bình có chung đúng 1 mã đề với An thì trong 2 môn Bình chọn, môn trùng với An phải chọn mã đề giống như An nên có 1 cách, môn không trùng với An thì được chọn tùy ý nên có 8 cách, suy ra số cách chọn mã đề của Bình là 8. Do đó có $64.8=512$ cách chọn mã đề thỏa yêu cầu bài toán. Suy ra số phần tử của biến cố A là $n\left(A\right)=24.512=12288$.	**0.25**
	Vậy xác suất cần tính $P\left(A\right)=\dfrac{12288}{147456}=\dfrac{1}{12}$.	**0.25**

(Chú ý: Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa)