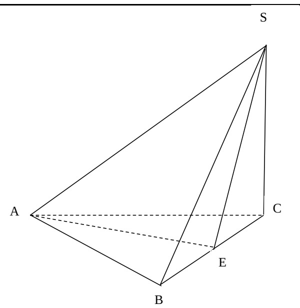
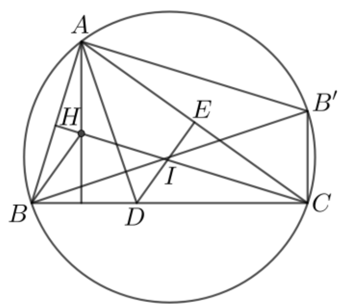
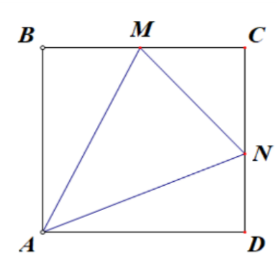
SỞ GD&ĐT HẢI PHÒNG
TRƯỜNG THPT NGÔ QUYỀN

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
NĂM HỌC 2022-2023
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN 11

Câu	Đáp án	Điểm
1	**Câu 1.** Giải phương trình $4\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos 3x=1$	
	$Pt \Leftrightarrow 2\sin x.\left[\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(2x+\pi\right)\right]+\cos 3x=1 \Leftrightarrow \sin x+2\sin x.\cos 2x+\cos 3x=1$	**0,25**
	$\Leftrightarrow \sin 3x+\cos 3x=1 \Leftrightarrow \sin(3x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}$	**0,25**
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$	**0,5**
2	**Câu 2.** Trong một trò chơi, người chơi gieo đồng thời 3 con súc sắc đồng chất 5 lần. Nếu mỗi lần gieo xuất hiện ít nhất hai mặt sáu chấm thì thắng. Tính xác suất để người chơi thắng ít nhất 4 ván.	
	Gọi biến cố A_i: "Lần gieo thứ i xuất hiện ít nhất hai mặt sáu chấm". Khi đó ta có $P\left(A_i\right)=C_3^2.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}+\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}=\frac{2}{27} \Rightarrow P\left(\overline{A_i}\right)=\frac{25}{27}$	**0,5**
	Gọi biến cố B: "Người chơi thắng ít nhất 4 ván". Khi đó ta có: $B=A_1A_2A_3A_4A_5+A_1A_2A_3A_4\overline{A_5}+A_1A_2A_3\overline{A_4}A_5+A_1A_2\overline{A_3}A_4A_5+A_1\overline{A_2}A_3A_4A_5+\overline{A_1}A_2A_3A_4A_5$ $\Rightarrow P\left(B\right)=\left(\frac{2}{27}\right)^5+5.\left(\frac{2}{27}\right)^4.\left(\frac{25}{27}\right)=\frac{2032}{14348907}\approx 0.000142$	**0,5**
3	**Câu 3.** Giải phương trình $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=x^2-1$	
	ĐK: $x\ge 1$ NX: $(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1})=x^2-1$	**0,25**
	$Pt \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1})$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}-1)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=0 & (1) \\ \sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}-1=0 & (2) \end{array}\right.$	**0,25**
	$Pt(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$	**0,25**
	$Pt(2) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{x-1}+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=x^2-2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\sqrt{2} \\ x^4-4x^2-4x+8=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^3+2x^2-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\sqrt{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^3+2x^2-4=0 \Leftrightarrow x=1,31(KTM) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=2$	**0,25**

4	**Câu 4.** Cho hàm số $y=x^3-3x+1$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 3.	
	Ta có: $y'=3x^2-3$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $y_0=3 \Leftrightarrow x_0^3-3x_0-2=0 \Leftrightarrow x_0=2, x_0=-1$	**0,5**
	• $x_0=-1 \Rightarrow y'(-1)=0$. Phương trình tiếp tuyến: $y=3$ • $x_0=2 \Rightarrow y'(2)=9$. Phương trình tiếp tuyến: $y=9x-15$.	**0,5**
5	**Câu 5.** Cho các hàm số $y=f(x)$, $y=f(x^2)$ và $y=\dfrac{f(x)}{f(x^2)}$. Hệ số góc các tiếp tuyến của đồ thị ba hàm số tại điểm có hoành độ $x_0=1$ lần lượt là k_1,k_2,k_3. Biết $k_1+2k_2=3k_3\neq 0$. Tính $f(1)$.	
	$y=f(x) \Rightarrow y'=f'(x) \Rightarrow k_1=f'(1)$; $\quad y=f(x^2) \Rightarrow y'=2x.f'(x^2) \Rightarrow k_1=2f'(1)$.	**0,5**
	$y=\dfrac{f(x)}{f(x^2)} \Rightarrow y'=\dfrac{f'(x).f(x^2)-2x.f'(x^2).f(x)}{f^2(x^2)} \Rightarrow k_3=\dfrac{f'(1).f(1)-2f'(1).f(1)}{f^2(1)}=\dfrac{-f'(1)}{f(1)}$	**0,25**
	$k_1+2k_2=3k_3 \Leftrightarrow f'(1)+4f'(1)=\dfrac{-3f'(1)}{f(1)} \Leftrightarrow 5=\dfrac{-3}{f(1)}(f'(1)\neq 0) \Leftrightarrow f(1)=\dfrac{-3}{5}$.	**0,25**
6	**Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AD//BC, AD=2BC$. Điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{ED}+3\overrightarrow{ES}=\vec{0}$. Gọi Q là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (ABE). Tính tỉ số $\dfrac{SQ}{QC}$.	
	Gọi I là giao điểm của AB,CD trong $(ABCD)$; Q là giao điểm của EI,SC trong (SCD)	**0,25**
	Xét tam giác AID có $AD//BC, AD=2BC$ (gt) $\Rightarrow \dfrac{BC}{AD}=\dfrac{IC}{ID}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow C$ là trung điểm của ID	**0,25**
	Xét tam giác EID, kẻ $CF//EI \Rightarrow F$ là trung điểm của $ED \Rightarrow EF=DF=\dfrac{1}{2}DE$	**0,25**
	$\overrightarrow{ED}+3\overrightarrow{ES}=\vec{0} \Rightarrow SE=\dfrac{1}{3}DE \Rightarrow \dfrac{SE}{EF}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{SQ}{QC}=\dfrac{2}{3}$	**0,25**
	Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, $AB=a$, góc $BAC=120^0$. Tam giác SAB vuông tại B, tam giác SAC vuông tại C. Mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC).	

		
	Chứng minh được $\Delta SAB = \Delta SAC$, từ đó suy ra $SB = SC \Rightarrow \Delta SBC$ cân tại S Gọi E là trung điểm của BC. Chứng minh được góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) là góc giữa hai đường thẳng SE, AE	**0.25**
	Trong (SAE), kẻ $SH \perp AE$, chứng minh được $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH = d(S,(ABC))$	**0.25**
	Tính được $BC = a\sqrt{3}, BE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AE = \dfrac{a}{2}$, đặt $SE = x$ TH1: $SEA = 60^0$ $SA^2 = SE^2 + EA^2 - 2.SE.EA.\cos 60^0$ $a^2 + \dfrac{3a^2}{4} + x^2 = x^2 + \dfrac{a^2}{4} - x.\dfrac{a}{2} \Leftrightarrow \dfrac{3a^2}{2} = -x.\dfrac{a}{2} \Leftrightarrow x = -3a$ (vô lí)	**0.25**
	TH2: $SEA = 120^0$ $SA^2 = SE^2 + EA^2 - 2.SE.EA.\cos 120^0$ $a^2 + \dfrac{3a^2}{4} + x^2 = x^2 + \dfrac{a^2}{4} + x.\dfrac{a}{2} \Leftrightarrow \dfrac{3a^2}{2} = x.\dfrac{a}{2} \Leftrightarrow x = 3a \Rightarrow SH = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$	**0.25**
8	**Câu 8.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(3;3)$ và $AC = 2BD$. Biết phương trình đường thẳng AB là $x - 3y + 2 = 0$ và đỉnh B có hoành độ nhỏ hơn 3. Viết phương trình đường chéo BD.	
	Đường thẳng AB: $x - 3y + 2 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{AB} = (1;-3)$. Đường thẳng BD có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{BD} = (a;b)$, $a^2 + b^2 \neq 0$. $\cos ABI = \dfrac{BI}{AI} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \dfrac{\lvert \vec{n}_{AB}.\vec{n}_{BD} \rvert}{\lvert \vec{n}_{AB} \rvert . \lvert \vec{n}_{BD} \rvert} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \dfrac{\lvert a - 3b \rvert}{\sqrt{10}\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow a^2 + 6ab - 7b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -7b \end{array} \right.$	**0,5**
	+) Với $a = b$ thì phương trình BD là $x + y - 6 = 0$. Khi đó, tọa độ điểm B là $B(4;2)$ (loại do đk: $x_B < 3$). +) Với $a = -7b$ thì phương trình BD là $7x - y - 18 = 0$. Khi đó, tọa độ điểm B là $B\left(\dfrac{14}{5};\dfrac{8}{5}\right)$ (TM).	**0,5**

	Câu 9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(-2;1)$. Gọi $D(-1;-1)$ là điểm trên đường thẳng BC sao cho $AD = DC$, đường thẳng AC đi qua $M(-1;4)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết $H(0;2)$ là trực tâm tam giác ABC.	
		
9	Có $DA = DC, IA = IC \Rightarrow DI$ là đường trung trực của đoạn AC, suy ra $DI \perp AC$. Đường thẳng AC đi qua $M(-1;4)$ và vuông góc với DI nên có phương trình: $x - 2y + 9 = 0$	**0.25**
	Gọi E là trung điểm của AC thì có $IE \perp AC$ nên có phương trình: $2x + y + 3 = 0$. Tọa độ E là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y + 9 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow E(-3;3)$	**0,25**
	Chứng minh được $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{IE} \Rightarrow B(2;-2)$.	**0,25**
	Đường thẳng BC có phương trình: $x + 3y + 4 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y + 9 = 0 \\ x + 3y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-7;1)$. Vì E là trung điểm AC nên $A(1;5)$. Vậy $A(1;5), B(2;-2), C(-7;1)$.	**0,25**
	Câu 10. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Lấy các điểm M, N lần lượt trên các cạnh BC, CD sao cho $MAN = 45^0$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN.	
	Đặt $BM = x, DN = y \left(x, y \in [0;1]\right)$ Ta có: $1 = \tan MAN = \dfrac{\tan MAB + \tan DAN}{1 - \tan MAB.\tan DAN} = \dfrac{x + y}{1 - xy}$ Suy ra $x + y + xy = 1$ 	**0,25**
	Đặt $S = x + y, P = x.y$. Ta có: $S^2 \geq 4P = 4(1 - S) \Rightarrow S \geq -2 + 2\sqrt{2}$ Ngoài ra $(x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow P - S + 1 \geq 0 \Rightarrow 2 - 2S \geq 0 \Rightarrow S \leq 1$	**0,25**
	Ta có: $S_{AMN} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} AM.AN = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{P^2 + S^2 - 2P + 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{2S^2} = \dfrac{S}{2}$	**0,25**

	Từ đó suy ra $S_{AMN} \in \left[-1+\sqrt{2};\frac{1}{2}\right]$ $\begin{cases}\max S_{AMN} = \frac{1}{2} \\ \min S_{AMN} = -1+\sqrt{2}\end{cases}$, GTLN xảy ra khi $x=1$ hoặc $y=1$; GTNN khi $x=y=-1+\sqrt{2}$.	**0,25**

Học sinh làm cách khác đúng thì được điểm tối đa.